Національний науковий центр
Харківський фізико-технічний інститут
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Уваров Дмитро Вячеславович

УДК 539.12:530.12

ДИСЕРТАЦІЯ

Суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах

01.04.02 – теоретична фізика

природничі науки

104 – фізика та астрономія

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів має посилання на відповідне джерело.

____________ Д.В. Уваров

Науковий консультант: **Желтухін Олександр Олександрович,**
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Харків – 2024

Анотація

Уваров Д.В. Суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (10 – природничі науки, 104 – фізика і астрономія). – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, 2024.

У дисертації розвивається суперсиметрична теорія релятивістських спінових частинок та струн у викривлених та твісторних просторах, вивчаються їх класичні і квантові симетрії на основі теоретико-групових і геометричних підходів квантової теорії поля.

Структурними елементами дисертації є вступ, чотири розділи основної частини, висновки, список використаних джерел та додаток. У вступі обґрунтовується вибір тематики досліджень та критично аналізуються здобуті раніше результати, сформульовано мету та задачі досліджень, означено їх об'єкт і предмет та перелічені методи, які використовуються. Також у вступі вказано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено дані про їх апробацію.

У першому розділі основної частини досліджується двовимірна σ-модель, яка описує динаміку суперструни у $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ підпросторі $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору. Спочатку детально розглядається ізоморфна реалізація $osp(4|6)$ ортосимплектичної супералгебри глобальної симетрії цих суперпросторів як $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри $D = 3$ суперпростору Мінковського $sconf(3|6)$. Далі представлено нове формулювання σ-моделі в термінах форм Картана для генераторів даної суперконформної алгебри. Рівняння для ферміонних полів σ-моделі представлено у вигляді, в якому вони мають стуктуру аналогічну до структури рівнянь суперструн Гріна-Шварца, та доведено їх лінійну залежність. Згідно з дру-

гою теоремою Ньотер це свідчить про інваріантність дії відносно локальної κ-симетрії. Також здобуто явний вираз для лагранжіана σ-моделі через координати $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ фактор-простору, які є параметрами для генераторів суперконформної алгебри. У підрозділі 1.3 вивчено інваріантність σ-моделі відносно глобальної $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії та здобуто вирази для відповідних ньотерових струмів.

Два заключні підрозділи цього розділу присвячені дослідженню суперструни в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі у новому калібруванні світлового конуса для локальних симетрій дії, утвореного нуль-геодезичними на конформній межі простору анти-де Сіттера AdS_4. У підрозділі 1.4 запропоновано калібруванні світлового конуса для κ-симетрії і здобуто дію суперструни у даному калібруванні. У підрозділі 1.5 лагранжіан суперструни представлено у змінних фазового простору, закріплено калібрування репараметризаційної симетрії світового листка та здобуто вираз для її гамільтоніана. Показано, що його квадратична частина ізоморфна гамільтоніану суперструни у пласкому суперпросторі у калібруванні світлового конуса.

Другий розділ присвячено вивченню класичної інтеґровності рівнянь $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни у різних секторах та динамічних режимах. На початку розділу означено умову Калуци-Клейна, яка спрощує форму суперфільбайна $AdS_4\times S^7$ суперпростору та процедуру редукції супермембрани. Для розглянутих у літературі елементів $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ фактор-простору ця умова накладає обмеження на координати сектора суперсиметрій, які є порушеними в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Ці координати запропоновано реалізувати двома $sl(2,\mathbb{R})$ спінорами, які є параметрами для генераторів суперсиметрій Пуанкаре та спеціальних конформних суперсиметрій зі складу $sconf(3|8)/sconf(3|6)$ фактор-супералгебри. Показано, що умову Калуци-Клейна можна задольнити накладенням на ці спінори майоранівської умови, та знайдено відповідні вирази для компонентів суперфільбайна $AdS_4\times S^7$ та $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторів. У пункті

2.2.2 здобуто представлення у вигляді умови нульової кривизни листкової 1-форми зв'язності для рівнянь суперструни у частковому калібруванні κ-симетрії, в якому у секторі порушених суперсиметрій не обертається на нуль лише один $sl(2,\mathbb{R})$ майоранівський спінор. Його компонентами є дві координати для порушених суперсиметрій Пуанкаре.

У підрозділі 2.3 доведено класичну інтеґровність рівнянь моделей безмасової суперчастинки в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі та його $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ фактор-підпросторі. Також встановлено взаємозв'язок між компонентами пари Лакса суперчастинки та зв'язності Лакса σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ фактор-просторі. Як узагальнення цих результатів у пункті 2.3.3 доведено інтеґровність рівнянь $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді.

У третьому розділі запропоновано супертвісторні формулювання моделей суперструн у пласких суперпросторах розмірності $D = 4, 6, 10$ та досліджено їх симетрії. Ці формулювання було виведено з відомих лоренц-гармонічних формулювань суперструн. Вони включають дотичні до світового листка компоненти локального ортонормованого репера Картана, виражені через спінорні лоренцеві гармоніки, та класично еквівалентні формулюванням Гріна-Шварца. Як відомо у просторі розмірності $D = 4$ спінорні лоренцеві гармоніки співпадають з діадою Ньюмена-Пенроуза, відтак у ній (супер)твісторні формулювання (супер)струн включають відомі (супер)твістори Пенроуза-Фербера. Супертвістори, які входять до лагранжіанів суперструн у вищих розмірностях, представляють їх узагальнення. Здобуто в'язі на компоненти цих супертвісторів, які забезпечують рівність фізичних ступенів свободи у супертвісторних та суперпросторових формулюваннях. Як узагальнення супертвісторних формулювань нуль-(супер)струн на випадок суперструн з натягом у підрозділах 3.2 і 3.3 запропоновані редуковані супертвісторні моделі. У підрозділі 3.4 проведено аналіз $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні як гамільтонової системи з в'язями. Здобуто коваріантні та незвідні набори в'язей першого і другого родів, введено дужки Дірака, які враховують в'язі другого роду, та обчислено співвідношення на дужках Дірака в'язей першого роду у головному наближенні за оберненим натягом суперструни.

Для порівняння структури симетрій здобутих супертвісторних формулювань суперструн та відомих моделей твісторних струн в останньому підрозділі третього розділу досліджуються глобальні симетрії лагранжіанів для ліво- і право-біжних полів супертвісторів у моделі твісторної струни Берковіца та її узагальненні для супертвісторів, на компоненти яких не накладено в'язей. Показано, що ці лагранжіани інваріантні відносно нескінченновимірних глобальних симетрій, які розширюють $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперконформну симетрію. Доведено, що на квантовому рівні вони порушуються до цієї суперконформної симетрії.

У четвертому розділі досліджуються формулювання суперсиметричних моделей релятивістських частинок та безнатягових струн у (супер)просторах анти-де Сіттера в термінах змінних, які реалізують лінійні представлення їх (супер)груп ізометрії. У підрозділах 4.2 і 4.3 здобуто необхідні попередні результати для дослідження таких формулювань. Так у підрозділі 4.2 розвинено спінорний опис для полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного у п'ятивимірному просторі-часі. Показано, що у границі вільних полів їх динамічні рівняння і тотожності Б'янкі належать до сімейства рівнянь типу Дірака для безмасових симетричних спінорних полів. До нього також належать диференційні тотожності Б'янкі для високоспінових узагальнень лінеаризованого спінора кривизни Вейля. У пункті 4.2.2 здобуто інтеґральне представлення для безмасових симетричних спінорних полів у $D = 5$ просторі Мінковського, яке включає спінорні лоренцеві гармоніки та за побудовою задовольняє зазначені рівняння.

У підрозділі 4.3 розроблено опис безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ алгебри з додатною енергією у просторі амбітвісторів, який узагальнює відомий опис даблетонних представлень як однорідних функцій у (дуальному) твісторному просторі. Встановлено зв'язок між запропонованим амбітвісторним описом цих представлень та відомим осциляторним описом.

У підрозділі 4.4 запропоновано 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, в якому до її лагранжіана входять чотири $SU(2,2)$ твістора. Встановлено зв'язок цього формулювання з відомим 2-твісторним формулюванням. Проведено квантування за Діраком та здобуто нове представлення для хвильової функції частинки в амбітвісторному просторі, однорідними координатами якого є компоненти твістора та дуального твістора. Як узагальнення цих результатів у пункті 4.4.2 запропоновано співвідношення між компонентами $PSU(2,2|4)$ супертвісторів та координатами $AdS_5 \times S^5$ суперпростору. З його допомогою із суперпросторового формулювання моделі безмасової суперчастинки виведені відомі 4- та 8-супертвісторні формулювання, в яких динамічними змінними є відповідно чотири та вісім $PSU(2,2|4)$ супертвісторів. Проведено квантування за Діраком у 4-супертвісторному формулюванні та побудовані фізичні стани суперчастинки в термінах бозонних та ферміонних квантових осциляторів. Набір фізичних станів суперчастинки співпадає зі спектром збуджень полів $D=10$ IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом. Також розроблено опис в амбітвісторному просторі супермультиплета полів $D=5$ $\mathcal{N}=8$ каліброваної супергравітації, які відповідають безмасовим представленням у спектрі.

У заключному підрозділі 4.5 запропоновано формулювання безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як дійсний проєктивний багатовид. Проведено її квантування та здобуто рівняння Дірака для хвильової функції частинки в однорідних, неоднорідних та внутрішніх координатах цього простору. Знайдено узагальнення запропонованого формулювання на випадок взаємодії спінової частинки із зовнішніми електромагнітним та абелевими антисиметричними тензорними полями. Воно представляє розширення на простір анти-де Сіттера відомих моделей спінової частинки у просторі-часі Мінковського, які взаємодіють із цими полями. У пункті 4.5.2 запропоновано модель замкненої безнатягової спінової струни. Побудовано її БРСТ оператор та доведено відсутність аномалій для довільної розмірності простору анти-де Сіттера при упорядкуванні операторів змінних фазового простору та духів аналогічному до використаного при квантуванні нуль-(супер-)p-бран у (супер)просторі Мінковського.

Ключові слова: суперсиметрія, суперпростір, супертвістор, суперструна, суперчастинка, лагранжіан, гамільтоніан, класична інтеґровність, гамільтонова в'язь, осцилятор.

Abstract

Uvarov D.V. Supersymmetric models of spinning particles and strings in curved and twistor spaces. – Qualification scientific work retaining manuscript rights.

Thesis submitted for the scientific degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics on the specialty 01.04.02 "Theoretical Physics" (10 – Natural Sciences, 104 – Physics and Astronomy). – National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology" of NAS of Ukraine, Kharkiv, 2024.

In the thesis developed is supersymmetric theory of relativistic spinning particles and strings in curved and twistor spaces, studied are their classical and quantum symmetries on the basis of group-theoretical and geometric approaches of quantum field theory.

Structural elements of the thesis are introduction, four sections of the main part, conclusions, the list of references and the appendix. In the introduction motivated is the choice of the research topic and critically analyzed are previously obtained results, formulated is the aim and tasks of research, defined are its object and subject, specified are the utilized methods. Also in the introduction described are the scientific novelty and practical importance of obtained results, given is the information regarding their approbation.

In Section 1 of the main part examined is the two-dimensional σ-model that describes superstring dynamics in the $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ subspace of the $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ superspace. At the beginning considered is in detail isomorphic realization of the $osp(4|6)$ orthosymplectic superalgebra of the global symmetry of these superspaces as the $D=3$ $\mathcal{N}=6$ superconformal algebra $\mathit{sconf}(3|6)$. Then presented is novel formulation of the σ-model in terms of the Cartan forms for generators of this superconformal algebra. Equations for fermionic fields of the $\sigma-$model are presented in the form, in which they have the structure analogous to that of equations of the Green-Schwarz superstrings, and proved is their linear dependence. In accordance with the second Noether theorem this

indicates the action invariance under the local κ-symmetry. Also it is obtained explicit expression for the σ-model Lagrangian through the coordinates of the $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ supercoset space that are parameters for generators of the superconformal algebra. In subsection 1.3 studied is the σ-model invariance under the global $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry and obtained are expressions for respective Noether currents.

Two last subsections of this section are devoted to study of the superstring in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace in new light-cone gauge for local symmetries of the action, in which the light cone is formed by the null geodesics on conformal boundary of the anti-de Sitter space AdS_4. In subsection 1.4 it is proposed the light-cone gauge for the κ-symmetry and obtained superstring action in such gauge. In subsection 1.5 the superstring Lagrangian is presented in the phase-space variables, fixed is the world-sheet reparametrization symmetry gauge and obtained is expression for its Hamiltonian. It is shown that its quadratic part is isomorphic to the Hamiltonian of the superstring in flat superspace in the light-cone gauge.

Section 2 is devoted to study of the integrability of equations of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in various sectors and dynamical regimes. At the beginning of the section it is defined the Kaluza-Klein condition that simplifies the form of the supervielbein of the $AdS_4 \times S^7$ superspace and the supermembrane reduction procedure. For considered in the literature elements of the $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ supercoset space this condition restricts the coordinates of the sector of supersymmetries broken in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace. It was suggested to realize these coordinates by two $sl(2,\mathbb{R})$ spinors that are parameters for the generators of the Poincaré and special conformal supersymmetries from the $sconf(3|8)/sconf(3|6)$ quotient superalgebra. It is shown that the Kaluza-Klein condition can be satisfied by imposing the Majorana condition on these spinors and found are respective expressions for the components of the $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ supervielbeins. In the paragraph 2.2.2 obtained is representation as the zero-curvature condition of the world-sheet one-form connection for the superstring equations in the partial κ-symmetry gauge, in which in the sector of broken supersymmetries do not turn to zero only one $sl(2,\mathbb{R})$ Majorana spinor. Its components are two coordinates for broken Poincaré supersymmetries.

In subsection 2.3 it is proved classical integrability of equations of the models of massless superparticle in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace and its $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ supercoset subspace. Also it is established the connection between the Lax pair components of the superparticle and the Lax connection of the σ-model in the $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ supercoset space. In the paragraph 2.3.3 as a generalization of these results it is proved integrability of the $D0$-brane equations in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground.

In Section 3 proposed are supertwistor formulations of superstring models in flat superspaces of dimension $D = 4, 6, 10$ and studied are their symmetries. These formulations were derived from known Lorentz-harmonic formulations of superstrings. They include tangent to the world sheet components of the local orthonormal Cartan frame expressed via the spinor Lorentz harmonics and are classically equivalent to the Green-Schwarz formulations. As is known in the $D = 4$ space the spinor Lorentz harmonics coincide with the Newman-Penrose dyad so that in it the (super)twistor formulations for (super)strings include known Penrose-Ferber (super)twistors. Supertwistors that enter Lagrangians of superstrings in higher dimensions represent their generalizations. Obtained are constraints on the components of these supertwistors that ensure equality of the physical degrees of freedom in the supertwistor and superspace formulations. As the generalization of supertwistor formulations of the null-(super)strings to the case of tensile superstrings in subsections 3.2 and 3.3 there are proposed reduced supertwistor models. In subsection 3.4 $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ superstring in the supertwistor formulation is analyzed as constrained Hamiltonian system. Obtained are covariant and irreducible sets of the first- and second-class constraints, introduced are the Dirac brackets taking into account the second-class constraints and calculated are the Dirac-bracket relations of the first-class constraints to the leading order in the inverse superstring tension.

In the final subsection of Section 3 to compare the symmetry structures of obtained supertwistor formulations of the superstrings and of known models of the twistor strings studied are the global symmetries of the Lagrangians for left- and right-moving supertwistor fields in the Berkovits twistor-string model and its generalization for unconstrained supertwistors. It is shown that these Lagrangians are invariant under infinite-dimensional global symmetries that extend $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ superconformal symmetry. It is proved that on the quantum level they break down to this superconformal symmetry.

In Section 4 studied are formulations of supersymmetric models of relativistic particles and tensionless strings in the anti-de Sitter (super)spaces in terms of variables that realize linear representations of their isometry (super)groups. In subsections 4.2 and 4.3 there are obtained preliminary results necessary to study such formulations. Thus in subsection 4.2 it is developed spinor description of the Yang-Mills, Rarita-Schwinger and gravitational fields in the five-dimensional space. It is shown that in the free-field limit their dynamical equations and the Bianchi identities belong to the family of the Dirac-type equations for massless symmetric spinor fields. Differential Bianchi identities for the higher-spin generalizations of the linearized Weyl curvature spinor also belong to this family. In the paragraph 4.2.2 derived is the integral representation for massless symmetric spinor fields in the $D = 5$ Minkowski space that includes the Lorentz harmonics and by construction satisfies these equations.

In subsection 4.3 elaborated is the description of massless positive-energy unitary irreducible representations of the $su(2,2)$ algebra in the ambitwistor space that generalizes known description of the doubleton representations as homogeneous functions in the (dual) twistor space. Established is the connection between proposed (ambi)twistor description of these representations and known oscillator description.

In subsection 4.4 it is proposed four-twistor formulation of the massive particle model in the five-dimensional anti-de Sitter space, in which four $SU(2,2)$ twistors enter its Lagrangian. It is established the connection between this formulation and known two-twistor formulation. Performed is the Dirac quantization and obtained is novel representation for particle's wave function in the ambitwistor space, homogeneous coordinates of which are components of the twistor and the dual twistor. As the generalization of these results in the paragraph 4.4.2 proposed is the relation between the components of the $PSU(2,2|4)$ supertwistors and coordinates of the $AdS_5 \times S^5$ superspace. It is used to derive from the superspace formulation known four- and eight-supertwistor formulations, in which dynamical variables are respectively four and eight $PSU(2,2|4)$ supertwistors. Performed is the Dirac quantization in the four-supertwistor formulation and constructed are physical states of the superparticle in terms of bosonic and fermionic quantum oscillators. The set of superparticle's physical states coincides with the excitation spectrum of fields of the $D=10$ IIB supergravity over the $AdS_5 \times S^5$ superbackground. It is also elaborated the description in the ambitwistor space of the fields from the $D=5$ $\mathcal{N}=8$ gauged supergravity multiplet that correspond to massless representations in the spectrum.

In the final subsection 4.5 it is proposed the formulation of the massless spinning particle in the D-dimensional anti-de Sitter space realized as the real projective manifold. Performed is its quantization and obtained the Dirac equation for the particle's wave function in homogeneous, inhomogeneous and internal coordinates of this space. Found is the generalization of proposed formulation to the case of interaction of the spinning particle with external electromagnetic and Abelian antisymmetric tensor fields. It represents extension to the anti-de Sitter space of known spinning particle models in the Minkowski space-time that interact with these fields. In the paragraph 4.5.2 proposed is the

closed tensionless spinning string model. Constructed is its BRST operator and proved is the absence of anomalies for arbitrary dimension of the anti-de Sitter space, when used is the ordering of operators of the phase-space variables and ghosts analogous to one used in the course of quantization of the null-(super-)p-branes in the Minkowski (super)space.

Key words: supersymmetry, superspace, supertwistor, superstring, superparticle, Lagrangian, Hamiltonian, classical integrability, Hamiltonian constraint, oscillator.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список наукових праць, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, Physical Review D, 2009, V.79, 106007. arXiv:0811.2813 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

2. D.V. Uvarov, $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Classical and Quantum Gravity, 2011, V.28, 235010. arXiv:1011.5457 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in the light-cone gauge, Nuclear Physics B, 2010, V.826, P.294-312. arXiv:0906.4699 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

4. D.V. Uvarov, Light-cone gauge Hamiltonian for $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Modern Physics Letters A, 2010, V.25, P.1251-1265. arXiv:0912.1044 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

5. D.V. Uvarov, Kaluza-Klein gauge and minimal integrable extension of $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model, International Journal of Modern Physics A, 2012, V.27, 1250118. arXiv:1203.3041 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

6. D.V. Uvarov, Lagrangian mechanics of massless superparticle on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Nuclear Physics B, 2013, V.B867, P.354-369. arXiv:1205.5388 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

7. D.V. Uvarov, On integrability of massless $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superparticle equations, Modern Physics Letters A, 2014, V.29, 1350183. arXiv:1212.3157 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

8. D.V. Uvarov, On integrability of $D0$-brane equations on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of Physics: Conference Series, 2014, V.482, 012043. arXiv:1306.0732 [hep-th].

9. D.V. Uvarov, (Super)twistors and (super)strings, Classical and Quantum Gravity, 2006, V.23, P.2711-2726. arXiv:hep-th/0601149. (SJR квартиль Q1).

10. D.V. Uvarov, Gauge symmetries of strings in supertwistor space, International Journal of Modern Physics A, 2007, V.22, P.1663-1683. arXiv:hep-th/0606222. (SJR квартиль Q2).

11. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for higher dimensional superstrings, Classical Quantum Gravity, 2007, V.24, P.5383-5400. arXiv:hep-th/0703051. (SJR квартиль Q1).

12. D.V. Uvarov, Canonical description of $D = 10$ superstring formulated in supertwistor space, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, V.42, 115204. arXiv:0804.0908 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

13. D.V. Uvarov, Conformal higher-spin symmetries in twistor string theory, Nuclear Physics B, 2014, V.889, P.207-227. arXiv:1405.7829 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

14. D.V. Uvarov, Spinor description of $D = 5$ massless low-spin gauge fields, Classical and Quantum Gravity, 2016, V.33, 135010. arXiv:1506.01881 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

15. D.V. Uvarov, Ambitwistors, oscillators and massless fields on AdS_5, Physics Letters B, 2016, V.762, P.415-420. arXiv:1607.05233 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

16. D.V. Uvarov, Multitwistor mechanics of massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, Nuclear Physics B, 2020, V.950, 114830.

arXiv:1907.13613 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

17. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for massless superparticle in $AdS_5 \times S^5$ superspace, Nuclear Physics B, 2018, V.936, P.690-713. arXiv:1807.08318 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

18. D.V. Uvarov, Oscillator approach to quantization of $AdS_5 \times S^5$ superparticle in twistor formulation, Physics Letters B, 2021, V.815, 136132. arXiv:2004.03356 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

19. D.V. Uvarov, Massless spinning particle and null-string on AdS_d: projective-space approach, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, V.51, 285402. arXiv:1707.05761 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

20. D.V. Uvarov, Spinning particle interacting with electromagnetic and antisymmetric gauge fields in anti-de Sitter space, European Journal of Physics C, 2019, V.79, 425. (SJR квартиль Q1).

Список наукових праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for the first-order superstring action, in Proceedings of IV Summer School in Modern Mathematical Physics (3-14 September 2006, Institute of Physics, Belgrade), Institute of Physics, Belgrade 2007, P.391-402.

2. D.V. Uvarov, Twistor formulation for superstrings, in Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (15-18 September 2009, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.151.

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, in II Young Scientists Conference "Modern Problems of

Theoretical Physics" (22-24 December 2010, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.18.

4. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times CP^3$ superstring as $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model in conformal basis, in Proceedings of III International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics" (29 August - 2 September 2011, NSC KIPT, Kharkiv), Problems of Atomic Science and Technology, 2012, N1, P.32-36. (SJR квартиль Q4). http://vant.kipt.kharkov.ua/TABFRAME2.html

5. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in AdS-light-cone gauge, in III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (21-23 December 2011, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.21.

6. D.V. Uvarov, Spinor description and integral on-shell representation for curvatures of $D = 5$ gauge fields, in International Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation (24-26 May, 2016, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.43.

7. D.V. Uvarov, Classically integrable models of massless particle and $D0$-brane on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, in V International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to V.A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine (19-24 June 2017, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts P.51.

8. D.V. Uvarov, Ambitwistor space realization of $SU(2,2)$ positive energy unitary irreducible representations corresponding to massless fields on anti-de Sitter space, in VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to the centennial anniversary of the NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory (18-22 June 2018, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts

P.32-33.

9. D.V. Uvarov, Features of the twistor formulation of the massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, in Proceedings of XXVIth International Colloquium on Integrable Systems (8-12 July 2019, Czech Technical University, Prague), Journal of Physics: Conference Series, 2019, V.1416, 012039.

ЗМІСТ

...no decorous theorist would dare to live now without supersymmetry which (together with supergravity) has pervaded all of physics. This is even more true for string theories where world-sheet supersymmetry plays a crucial role.
From preface to "Supergravities in diverse dimensions". Eds. Abdus Salam and Ergin Sezgin.
Elsevier and World Scientific, 1989.

Вступ

Створення об'єднаної теорії фундаментальних взаємодій є однією з найглибших проблем фізики. Перший крок до її розв'язання було зроблено ще в середині дев'ятнадцятого століття, коли Джеймс Клерк Максвелл сформулював систему рівнянь, яка в єдиний спосіб описує електричну та магнітну взаємодії [1]. Методи симетрії дають важливий інструмент для пошуку можливих шляхів розв'язання цієї проблеми. Так слідуючи революційній роботі Альберта Ейнштейна зі Спеціальної теорії відносності [2], Герман Мінковський у 1907 році [3] представив рівняння Максвелла у явно релятивістській формі. Така форма виявляє коваріантність рівнянь Максвелла відносно групи симетрії чотиривимірного простору-часу [4], якою є група Пуанкаре. [1] В даний час симетрія Пуанкаре розглядається як фундаментальна симетрія в теорії поля та фізиці елементарних частинок.

У середині двадцятого століття дослідження слабкої та сильної субатомних взаємодій привело до введення поняття про внутрішній простір та виявило важливість його симетрій. Розгляд перетворень внутрішнього простору з параметрами, які залежать від просторово-часових координат,

[1] Трохи згодом Бейтмен [5] і Каннінгем [6] довели конформну коваріантність рівнянь Максвелла.

привів до концепції калібрувальної інваріантності. Вона реалізується в теорії Янга-Міллса [7], яка використовується для опису взаємодій безмасових калібрувальних бозонів між собою та з зарядженими полями матерії. Калібрувальна інваріантність в теорії Янга-Міллса дозволяє зберегти симетрію Пуанкаре та представляє собою неабелеве узагальнення калібувальних перетворень у квантовій електродинаміці.[2]

Концепція калібрувальної інваріантності разом з ідеєю спонтанного порушення симетрії [9], [10] та механізмом Хіггса [11], [12], [13] забезпечили необхідне теоретичне підґрунтя для єдиного опису електромагнітної, слабкої та сильної взаємодій в рамках Стандартної моделі – перенормовної польової теорії з $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калібрувальною симетрією. Стандартна модель зараз розглядається як теоретична основа фізики елементарних частинок, а її передбачення використовуються для пояснення експериментальних даних та планування експериментів з фізики високих енергій. Відкриття бозона Хіггса [14] стало завершальним етапом експериментального підтвердження існування усіх фундаментальних складових Стандартної моделі.

Незважаючи на значні успіхи, Стандартна модель не може розглядатись як остаточна теорія навіть електрослабкої та сильної взаємодій, оскільки її формулювання включає 19 параметрів, значення яких беруться з експеримента (маси кварків та лептонів, маса та вакуумне середнє бозона Хіггса, кути змішування). Іншими нерозв'язаними проблемами є необхідність пояснення спостережуваних ненульових значень мас нейтрино, ієрархії взаємодій, асиметрії між матерією та антиматерією, порушення CP симетрії та походження темної матерії, існування якої випливає із космологічних спостережень. Крім того залишається проблема об'єднання електрослабкої та сильної взаємодій з гравітацією, яка не описується Стандартною

[2] Формулювання квантової електродинаміки, в якому інваріантність відносно симетрії Пуанкаре та калібрувальної симетрії є явною, було розвинено у серії фундаментальних робіт Юліана Швінгера [8].

моделлю.

Гравітація, четверта з фундаментальних взаємодій, є найслабшою за енергій, експериментально досяжних в даний час, але визначає еволюцію матерії на космічних масштабах. Вона описується загальною теорією відносності, сформульованою в іншій піонерській роботі Альберта Ейнштейна [15]. В основі цієї теорії лежить ідея про те, що гравітація викривлює простір-час, відтак для її формулювання псевдоріманову геометрію було поєднано з класичною теорією поля. Динаміка гравітаційного поля та його взаємодії з іншими полями визначаються нелінійними диференційними рівняннями другого порядку у частинних похідних, які випливають із дії Ейнштейна-Гільберта, інваріантної відносно дифеоморфізмів просторово-часових координат. Їх також можна інтерпретувати як калібрувальні перетворення з некомпактною калібрувальною групою, в якості якої можуть розглядатись групи Лоренца, Пуанкаре або конформна.

Нещодавні прецизійні експерименти з детектування гравітаційних хвиль [16] та візуалізації пригоризонтної області чорної діри [17] дають необхідні свідчення коректності загальної теорії відносності як класичної теорії. Однак, її квантування та об'єднання з іншими взаємодіями в рамках пертурбативної квантової теорії поля, яка коректно описує взаємодії полів Стандартної моделі, приводить до неперенормовних ультрафіолетових розбіжностей [18]. Тому побудова самоузгодженої квантової гравітації та її об'єднання з іншими взаємодіями потребує модифікації загальної теорії відносності при високих енергіях та перегляду основ квантової теорії поля включно з припущеннями про точковоподібну природу збуджень квантованих полів та локальність їх взаємодій у просторі-часі.

На даний час найбільшого прогресу на шляху об'єднання всіх фундаментальних взаємодій, включаючи й гравітацію, було досягнуто в рамках теорії струн. Вона виникла як теорія одновимірних протяжних об'єктів – відкритих та замкнених релятивістських струн, які у просторі-часі замітають двовимірні поверхні світових листків та взаємодіють через їх розщеплення і з'єднання [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. Осциляторні моди квантованих струн відповідають полям у просторі-часі. Оскільки в загальному випадку при осциляціях вільних струн збуджується нескінченна кількість мод, їх спектр містить нескінченну кількість полів, маси та спіни яких лежать на лінійних траєкторіях Редже

$$\alpha' M^2 = s - a,$$

де a є безрозмірним параметром інтерсепту, а α' – нахил Редже розмірності $[L]^2$ у системі одиниць $c = \hbar = 1$. Він є єдиним вільним параметром теорії. В секторі відкритих струн для найнижчої траєкторії Редже $a_{\text{open}} = 1$, що означає присутність у спектрі безмасового поля зі спіном одиниця, визначеного з точністю до калібрувального перетворення. Для закмнених струн $a_{\text{closed}} = 2$, відтак у спектрі наявне безмасове збудження зі спіном два, яке можна ототожнити з гравітоном. Це привело до ідеї, що теорія струн могла б претендувати на роль теорії, в рамках якої можна об'єднати всі фундаментальні взаємодії [26]. В такому випадку струнна довжина $l_s \sim (\alpha')^{1/2}$ повинна бути порядку планківської довжини $l_{\text{Pl}} = \sqrt{G_{\text{N}}} \sim 10^{-19}(\text{GeV})^{-1}$, де G_{N} – стала Ньютона. Однак, початкова теорія, яка зараз має назву теорії бозонних струн, мала низку недоліків, які проявились на квантовому рівні. Найсерйознішими є присутність у спектрі лише збуджень із цілими спінами, серед яких є скалярний тахіон, та нереалістично висока розмірність простору часу $D = 26$, в якому струни можуть рухатись.

В якості невеликого відступу відзначимо, що з перших днів розвиток теорії струн ґрунтувався на досягненнях із різних галузей математики та теоретичної фізики, таких як диференційна та алгебраїчна геометрія, топологія, гравітація, конформна теорія поля. В свою чергу теорія струн дала поштовх їх подальшому розвитку. Наприклад, проблема геометричної інтерпретації в'язей та рівнянь класичних бозонних струн досліджувались кількома групами авторів [27], [28], [29], [30] з використанням методів диференційної геометрії [31]. Було показано, що з точки зору теорії вкладень поверхонь струнні в'язі представляють умови на індуковану листкову метрику, а рівняння струн еквівалентні умові мінімального вкладення світового листка. У диференційній геометрії вона виражається умовою обернення на нуль сліду другої фундаментальної форми вкладеної поверхні. Також було виявлено глибокий зв'язок між рівняннями струн та класично інтеґровними нелінійними диференційними рівняннями в частинних похідних для двох змінних. Зокрема, на основі методу ортогонального репера Е. Картана [32] було показано, що динаміка струн у тривимірному просторі Мінковського описується рівнянням Ліувілля [28], а у багатовимірних – його узагальненнями [33], [34]. В роботах [30], [33], [34] також було встановлено, що рівняння струн допускають інтерпретацію в'язей на початкові дані в теорії Янга-Міллса зі скалярними полями та $SO(1,1) \times SO(D-2)$ калібрувальною симетрією у двовимірному просторі.[3]

Для введення ферміонів до спектру струн П. Рамон [37] та незалежно А. Нев'є і Дж. Шварц [38] запропонували на додадок до полів просторово-часових координат бозонної струни $x^{\underline{m}}(\tau,\sigma)$ $(\underline{m} = 0, 1, \dots D-1)$ ввести просторово-часовий вектор $\psi_A^{\underline{m}}(\tau,\sigma)$ з грассманово-непарними компонентами $\psi_A^{\underline{m}}\psi_B^{\underline{n}} + \psi_B^{\underline{n}}\psi_A^{\underline{m}} = 0$. Він є двокомпонентним листковим спінорним полем, так що індекси A, B набувають значення $+$ і $-$, та описує спінові ступені свободи струни на класичному рівні. У 1972 році Ж.Л. Жерве та Б. Сакіта [39] встановили, що спінова струна Рамона-Нев'є-Шварца інваріантна відносно листкової суперсиметрії. Вона є частиною листкової суперконформної симетрії, яка узагальнює нескінченновимірну конформну симетрію бозонної струни. Вимога узгодженості моделі спінової струни Рамона-Нев'є-Шварца на квантовому рівні фіксує розмірність простору-часу $D = 10$ [40], [41] та організує бозонні та ферміонні поля в її спектрі у супермульти-

[3]Див. огляд диференційно-геометричного опису струн та його узагальнення на випадок бран в роботах [35], [36].

плети просторово-часової суперсиметрії [42]. Тому концепція суперсиметрії є основною в теорії струн. Відзначимо, що просторово-часова суперсиметрія у розмірності $D = 4$ була відкрита незалежно Ю.А. Гольфандом з Є.П. Ліхтманом [43] та Д.В. Волковим з В.П. Акуловим [44]. В теорії поля її активне дослідження розпочалось після того, як Ю. Весс та Б. Зуміно показали [45], що $D = 4$ суперсиметрія є природним узагальненням листкової суперконформної симетрії моделі Рамона-Нев'є-Шварца. У цей же час Д.В. Волков з В.О. Сорокою довели [46], що $D = 4$ просторово-часова суперсиметрія може бути локальною симетрію, яка розширює координатні дифеоморфізми у загальній теорії відносності, та побудували інваріантну дію супергравітації найбільш загального вигляду, у якій реалізується суперсиметричне узагальнення ефекту Хіггса.[4] Пізніше в роботі [53] було запропоновано мінімальну теорію $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ супергравітації, яка включає лише поля гравітона та гравітіно.

К середині 1980-х років були побудовані п'ять різних теорій струн із просторово-часовою суперсиметрією, які є узгодженими на квантовому рівні у розмірності $D = 10$ [54], [55]. Теорія типу I містить як відкриті, так і замкнені струни, а її фізичні стани в секторі відкритих струн співпадають зі станами відкритої спінової струни в секторах Нев'є-Шварца та Рамона після зрізання, введеного Льоцці, Шерком та Олівом [42]. В той же час теорії типів IIA та IIB містять лише замкнені струни на пертурбативному рівні. Для замкнених струн незалежність ліво- та право-біжних осциляційних мод відкриває можливість поєднувати різні моделі для ліво- та право-біжних листкових полів. Однак, лише дві комбінації виявляються узгодженими як квантові теорії – це гетеротичні струни з $SO(32)$ та $E_8 \times E_8$ калібрувальними симетріями. Існування п'яти теорій суперструн поставило ряд проблем як технічних, так і концептуальних, які визначили

[4] Історію відкриття супергравітації висвітлено як Д.В. Волковим [47], так і його учнями [48], [49], [50] (див. також [51], [52]).

напрями досліджень на наступні десятиліття. Найбільш важливими були питання чи дійсно ці п'ять теорій різні або лише різні форми однієї теорії та як із теорії у розмірності $D = 10$ здобути теорію у розмірності $D = 4$ з реалістичним спектром станів.

Більш технічну проблему побудови класичного формулювання теорій суперструн з явною просторово-часовою суперсиметрією було розв'язано у випадку плаского суперпростору М.Б. Гріном та Дж. Шварцем [56]. Воно відоме як формулювання Гріна-Шварца. Було показано, що на класичному рівні суперструни Гріна-Шварца існують у розмірностях $D = 3, 4, 6, 10$, а явна просторово-часова суперсиметрія забезпечується завдяки інваріантності дії відносно калібрувальної симетрії з грассманово-непарними параметрами, яка називається κ-симетрією [57], [58] та виявляється нескінченнозвідною. Суперструни Гріна-Шварца можна узагальнити на випадок взаємодії з полями $D = 10$ теорій супергравітації [59], [60], [61]. Однак нелінійнсть рівнянь суперструн навіть у пласкому суперпросторі[5] перешкоджає їх коваріантному квантуванню на відміну від спінових струн. Також у формулюванні Гріна-Шварца кінетичний член для антикомутуючих координат суперпростору θ є виродженим, що у канонічному описі приводить до первинних в'язей, кількість яких дорівнює кількості компонентів спінора θ. Половина з цих ферміонних в'язей належить до першого роду та генерує κ-симетрію, а решта є в'язями другого роду. У формулюванні Гріна-Шварца виявилось неможливим розділити первинні ферміонні в'язі на в'язі першого та другого роду без порушення лоренцевої симетрії.

Рівняння для фізичних ступенів свободи суперструн, якими є листкові поля поперечних просторових координат $x^I(\tau, \sigma)$ та половина грассманових координат $\theta(\tau, \sigma)$, лінеаризуються у нековаріантному калібруванні світлового конуса для κ-симетрії та листкових репараметризацій. У цьо-

[5] Нагадаємо, що пласкому суперпросторі суперсиметричний аналог тензора Рімана обертається на нуль, але 2-форма суперскруту має ненульові компоненти пропорційні γ-матрицям.

му калібруванні вони зводяться до рівнянь які випливають із нековаріантної дії [54], яка використовувалась для опису суперструн до побудови коваріантного формулювання [56]. Відтак у калібруванні світлового конуса можливо провести квантування суперструн. При цьому умову відсутності аномалій глобальної симетрії Пуанкаре задовольняється лише у розмірності $D = 10$. Спектри фізичних станів суперструн у цій розмірності співпадають зі спектрами відповідних моделей спінових струн. У калібруванні світлового конуса було побудувано амплітуди розсіяння суперструн [62] та сформульовано польову теорію суперструн [63]. Однак, відсутність явної $SO(1,9)$ лоренцевої коваріантності є істотним недоліком. Крім того закріплення калібрування світлового конуса приводить до лінеаризації рівнянь лише для суперструн у пласкому супербекграунді та супербекграунді *pp*-хвилі [64], [65]. Для суперструн у більш складних викривлених просторах рівняння руху хоча й спрощуються, але залишаються нелінійними.

Ці труднощі стимулювали пошук альтернативних формулювань суперструн, які б з одного боку були класично еквівалентними формулюванню Гріна-Шварца, а з іншого боку допускали лоренц-коваріантне розділення в'язей, що відкрило би шлях до їх коваріантного квантування. Це, у свою чергу, дало би можливість у коваріантний спосіб описати фізичні стани квантованих суперструн та їх взаємодії.

В роботі [66] було запропоноване класично еквівалентне формулювання суперструн Гріна-Шварца, яке включає спінорні змінні, обмежені в'язями, – спінорні лоренцеві гармоніки [67], [68], [66]. [6] Вони визначають рухомий спінорний репер, прикріплений до світового листка, а їх добутки, згорнуті з γ-матрицями, утворюють векторні лоренцеві гармоніки [71], які представляють ортонормований репер Картана [32], записаний у матричній формі. Умови, які закріплюють орієнтацію рухомого репера відносно світового

[6] Спроби ввести спінорні змінні з груповими властивостями близькими до спінорних лоренцевих гармонік здійснювались і раніше, зокрема, у розмірності $D = 10$ [69], [70].

листка, випливають із дії суперструни [66] як рівняння руху для лоренцевих гармонік та допоміжного листкового цвайбайна. Така геометрична реалізація лоренцевих гармонік є однією з характерних рис формулювання [66] на відміну від більш ранніх робіт [72], [73], де були запропоновані лагранжіани суперструн, які включають компоненти спінорних лоренцевих гармонік. У гамільтоновому описі лоренц-гармонічного формулювання [66] всі в'язі суперструн у розмірностях $D = 4$ та $D = 10$ було розділено на в'язі першого та другого роду у лоренц-коваріантний та незвідний спосіб [66], [74]. Відзначимо, що у розмірності $D = 4$ спінорні лоренцеві гармоніки співпадають з нормалізованою діадою Ньюмена-Пенроуза та спінорними частинами (супер)твісторів [75], [76]. Відповідно векторні лоренцеві гармоніки представляють нормалізовану тетраду, яка знаходить важливі застосування у загальній теорії відносності та теорії поля [77]. Перші формулювання моделей суперчастинок та струн, які включають векторні лоренцеві гармоніки як компоненти ортонормованого репера Картана були запропоновані в роботах [71] та [78].

Для посилань при подальшому викладенні коротко нагадємо загальні властивості лоренц-гармонічних змінних, які справедливі для будь-якої розмірності простору-часу [79], [74]. Векторні лоренцеві гармоніки представляють собою квадратну матрицю $u_{\underline{m}}^{(n)}$, яка задовольняє співвідношення

$$u_{\underline{m}}^{(n)} \eta^{\underline{mk}} u_{\underline{k}}^{(l)} = \eta^{(n)(l)}, \quad u_{\underline{m}}^{(n)} \eta_{(\underline{n})(\underline{l})} u_{\underline{k}}^{(l)} = \eta_{\underline{mk}}. \tag{1}$$

Це визначальні співвідношення для елементів групи Лоренца $SO(1, D-1)$. Індекс у круглих дужках матриці векторних лоренцевих гармонік нумерує її стовпці, які представляють собою вектори ортонормовного репера Картана, тоді як нижній індекс нумерує компоненти цих векторів. Співвідношення (1) інваріантні відносно $SO(1, D-1) \times SO(1, D-1)$ симетрії, яка діє незалежно на індекси кожного типу. В свою чергу спінорні лоренцеві гармоніки $v_{\underline{\alpha}}^{(\beta)}$ набувають значення у спіновій накривній відповідної групи Лоренца й пов'язані з векторними лоренцевими гармоніками наступним

чином
$$u_{\underline{m}}^{(n)} = \frac{1}{2^{\nu}} v_{\underline{\alpha}}^{(\alpha)} \gamma_{\underline{m}}^{\alpha\beta} v_{\underline{\beta}}^{(\beta)} \gamma_{(\underline{\alpha})(\underline{\beta})}^{(n)}, \tag{2}$$
де ν дорівнює $[D/2]$ або $(D-2)/2$ залежно від представлення, яке реалізують спінорні гармоніки. Аби набувати значення в групі $Spin(1, D-1)$, спінорні лоренцеві гармоніки мають задовольняти умови гармонічності, форма яких залежить від розмірності простору-часу D та типу спінорного представлення, яке розглядається. Умови гармонічності також забезпечують виконання умов ортонормованості (1) для векторних гармонік (2).

Закріплення орієнтації ортонормованого репера таким чином, що його часоподібна $u_{\underline{m}}^{(0)}$ та p просторовоподібних компонентів, наприклад, $u_{\underline{m}}^{(1)}$, $\ldots$, $u_{\underline{m}}^{(p)}$ є дотичними до світового об'єму (супер)-p-брани, тоді як інші просторовоподібні компоненти ортогональні до нього, порушує $SO(1, D-1)$ симетрію, яка діє на індекси в дужках до $SO(1,p) \times SO(D-p-1)$. Ця залишкова симетрія складає підгрупу групи калібрувальної симетрії у лоренцгармонічних формулюваннях функціоналів дії струн [78], [66] і бран [79], [80], а також польових теорій [33], [34], [35], [36], для яких рівняння вкладення (гіпер)поверхонь струн чи бран у методі ортонормованого репера Картана представляють умови на початкові дані, які визначають замкнений сектор у просторі розв'язків їх динамічних рівнянь. Ця симетрія зводить кількість незалежних ступенів свободи векторного та спінорного реперів до розмірності фактор-простору $SO(1, D-1)/SO(1,p) \times SO(D-p-1)$. Вона дорівнює кількості намбу-голдстоунівських мод, асоційованих зі спонтанним порушенням $SO(1, D-1)$ симетрії D-вимірного простору-часу Мінковського, викликаним вкладенням (гіпер)поверхні струни/брани. Подробиці геометричної реалізації намбу-голдстоунівських мод p-бран у методі ортонормованого репера наведено в огляді [36].

Відзначимо додатково, що групові змінні з трансформаційними властивостями подібними до трансформаційних властивостей лоренцевих гармонік входять до формулювань різних теоретико-польових моделей. Зокрема, введення гармонік, які набувають значення у фактор-просторах компактних груп, дозволяє побудувати, як вперше було показано в роботі [81], формулювання деяких теорій, які інваріантні відносно перетворень глобальної розширеної суперсиметрії без використання польових рівнянь. Також поля зі значеннями у фактор-просторах компактних та некомпактних груп використовуються в моделях, які описують спонтанне порушення неперервних симетрій (див., наприклад, [82]).

Складна форма лоренц-коваріантних та незвідних в'язей першого та другого родів, які виникають у канонічному описі суперструн у лоренц-гармонічному формулюванні [66], [74], перешкоджає подальшій реалізації процедури квантування з метою побудови БРСТ генератора. У підході, запропонованому Н. Берковіцем [83], проблема лоренц-коваріантного розділення в'язей першого та другого роду обходиться через постулювання виразу для листкової густини БРСТ генератора як згортки добутку первинних ферміонних в'язей з $D = 10$ вейлівським спінором λ, який відіграє роль духоподібного поля. В цьому випадку умова нільпотентності БРСТ генератора приводить до в'язей $\lambda\gamma^{\underline{m}}\lambda = 0$. Відтак λ є чистим спінором, а його компоненти представляють однорідні координати фактор-багатовиду $SO(10)/U(5)$. Тому цей підхід має назву підходу чистого спінора. У цьому підході дія суперструни у плаcкому просторі є квадратичною, що дозволяє застосувати потужні методи двовимірної конформної теорії поля для побудови деревних та петльових амплітуд явно інваріантних відносно $D = 10$ суперсиметрії. Було показано, що моделі суперструн у підході чистого спінора та суперструни Гріна-Шварца мають однакові спектри фізичних станів [84]. Також було перевірено [85], [86], що деякі з деревних та петльових амплітуд для безмасових та низьколежачих масивних станів співпадають з відповідними амплітудами в моделях спінових струн Рамона-Нев'є-Шварца та суперструн Гріна-Шварца у калібруванні світлового конуса. Однак, у цьому підході проблемою є пояснення того, як здобути запропонований вираз для БРСТ заряда у методі БРСТ-БФВ квантування [87]. Крім того відображення змінних суперструн у формулюванні чистового спінора у змінні формулювань Гріна-Шварца та Рамона-Нев'є-Шварца є нековаріантними і високо нелінійними [88] та нагадують співвідношення між грассманово-непарними компонентами вектора $\psi^{\underline{m}}$ у формулюванні Рамона-Нев'є-Шварца і спінора $\theta^{\underline{\alpha}}$ у формулюванні Гріна-Шварца [89]. Тому підхід чистого спінора представляє ще одне формулювання суперструн на додачу до формулювань Гріна-Шварца та Рамона-Нев'є-Шварца.

Для того аби знайти розв'язок проблеми коваріантного квантування суперструн Гріна-Шварца, корисно проаналізовати простіші суперсиметричні моделі точкових частинок та нуль-струн, які відповідають класичним границям нескінченного та нульового натягу суперструн. [7] Функціонали дії цих моделей інваріантні відносно просторово-часової суперсиметрії та κ-симетрії для довільної розмірності простору-часу і будь-якої кількості суперсиметрій [92], [93], [94], [95]. Оскільки вони не містять розмірних параметрів, ці моделі інваріантні відносно просторово-часової конформної симетрії [96]. Сингулярність нуль-струн проявляється через неоднозначності у процедурі квантування – можливі різні вакуумні стани та квантові реалізації класичних в'язей, які приводять до квантової алгебри калібрувальних симетрій з центральним розширенням або без нього. У випадку квантової алгебри з центральним розширенням вимога його обернення на нуль накладає обмеження на розмірність простору-часу. Така неоднозначність приводить до різних просторів фізичних станів нуль-струн [97], [98], [93], [99], [100], [101]. Як і у випадку суперструн з натягом, коваріантне квантування нуль-суперструн вимагає виділення в'язей першого та другого роду у незвідний та лоренц-коваріантний спосіб. Ця проблема була розв'язана для $D = 4$ нуль-суперструн та p-бран в рамках лоренц-гармонічного фор-

[7] Зазначимо, що нуль-струни можуть також виникати й у спеціально визначеній границі нескінченного натягу [90], [91].

мулювання [102], [103]. [8] [9] Було побудовано класичний БРСТ генератор та знайдено впорядкування для операторів змінних фазового простору та допоміжних змінних, для якого квадрат квантового БРСТ оператора не містить аномальних членів та обертається на нуль. Процедура коваріантного квантування моделей безмасових суперчастинок, формулювання яких включають лоренцеві гармоніки, розглядалась в роботах [107], [108], [109].

Незважаючи на вказані проблеми з коваріантним квантуванням суперструн у формулюванні Гріна-Шварца, цей підхід виявляється єдиною можливістю побудувати суперсиметричні моделі протяжних об'єктів розмірності $p > 1$ – p-бран. Перші суперсиметричні та κ-інваріантні функціонали дії бран були побудовані у другій половині 1980-х років [110], [111]. Також було показано [112], що суперсиметричні моделі бран існують у просторах розмірності $D \leq 11$,[10] яка є найвищою розмірністю, де можна визначити теорію супергравітації. Важливий клас p-бран у розмірності $D = 10$ складають D-брани [114], [115], [116], теорії у світовому об'ємі яких включають векторні абелеві калібрувальні поля та представляють розширення нелінійної електродинаміки Борна-Інфельда [117]. D-брани є непертурбативними об'єктами з натягами обернено пропорційними константі взаємодії замкнених струн. До них можуть прикріплятись кінці відкритих струн, які задовольняють межові умови Дирихле. Відтак в теорії струн концепція бран є ключовою поряд із суперсиметрією. [11]

Важливі результати, які показують, що різні теорії струн пов'язані між собою за допомогою дуальностей, почали з'являтись практично одночасно з їх відкриттям та побудовою перших суперсиметричних моделей бран.

[8]Розв'язок в'язей Вірасоро $D = 4$ нуль-(супер)струн з використанням компонентів нормалізованої діади Ньюмена-Пенроуза вперше було знайдено в роботі [104]. У лоренц-гармонічному формулюванні [102] цей розв'язок випливає з лагранжівих рівнянь для гармонік.

[9]Узагальнення лоренц-гармонічного формулювання для нуль-суперструн на випадок розмірностей $D = 6$ та $D = 10$ було розглянуто в [105], [106].

[10]Перелік усіх відомих на даний час p-бран можна знайти, наприклад, в роботі [113].

[11]Див., наприклад, огляд зародження та розвитку теорії бран [118].

Першою була відкрита Т-дуальність [119]. Вона є дискретною симетрією, яка зв'язує різні компактифікації однієї теорії струн. Також Т-дуальність може проявлятись у вигляді еквівалентності між спектрами та кореляційними функціями двох різних теорій струн. Натомість S-дуальність є непертурбативною симетрією, оскільки вона зв'язує теорію в режимі слабкої взаємодії із собою або з іншою теорією в режимі великої константи взаємодії. В теорії струн перші вказівки на існування S-дуальності було знайдено в аксіон-дилатонному секторі гетеротичної струни, компактифікованої до чотиривимірного простору [120]. U-дуальність поєднує перетворення S- та Т-дуальностей, але також включає перетворення, які змішують радіуси компактних розмірностей та константи взаємодії. На основі структури струнних дуальностей Е. Віттеном було наведено аргументи на користь існування об'єднаної непертурбативної М-теорії [121], у вакуумному просторі якої п'ять теорій суперструн та $D = 11$ супергравітація [122] представляють різні пертурбативні області. М-теорія також включає супермембрани у розмірності $D = 11$, дія для яких зводиться до дії суперструн типу IIA при подвійній розмірній редукції, а також 5-брани. Однак, до цього часу відсутнє формулювання М-теорії поза наближенням 11-вимірної супергравітації. Розглядаються можливості формулювання М-теорії в рамках матричної теорії [123] та AdS/CFT відповідності [124].

Гіпотеза AdS/CFT відповідності була висунута Х. Малдасеною [124] на основі вивчення властивостей бран, класичних розв'язків рівнянь теорій супергравітації та струнних дуальностей. Їх формулювання в подальшому було уточнено в роботах [125], [126]. Концептуальні основи цієї гіпотези було закладено у попередніх піонерських роботах Дж. Бекенштейна [127] і С. Хоукінга [128], які показали, що ентропія чорної діри пропорційна площі її горизонту, а не об'єму всередині нього, та Г. 'т Хофта [129], який припустив, що ця закономірність має загальний характер й відтак квантова гравітація у деякій відкритій області чотиривимірного простору-часу може бути описана ґратковою теорією на її межі, яка має не більше одного ступеня свободи на планківську площу. Ідеї 'т Хофта були далі розвинені Л. Саскіндом та одержали назву голографічного принципу [130]. Також Саскінд висунув ідею існування голографічного формулювання теорії струн.

Перші приклади AdS/CFT відповідності [124], [125], [126] запропонували дуальний опис теорій струн та M-теорії у максимально суперсиметричних просторах, які представляють собою добутки просторів анти-де Сіттера та сфер, як суперсиметричних негравітаційних конформних теорій поля на межі просторів анти-де Сіттера. Як добре відомо, простір анти-де Сіттера розмірності D є розв'язком рівнянь Ейнштейна з від'ємною космологічною сталою. Його ізометрія описується групою $SO(2, D-1)$ розмірності $D(D+1)/2$, яка є найбільшою групою ізометрії просторів з однією часовою та $D-1$ просторовими розмірностями (групи ізометрії такої ж розмірності мають простори Мінковського та де Сіттера). Вона є локально ізоморфною конформній групі $(D-1)$-вимірного простору Мінковського. Цей ізоморфізм став важливим симетрійним аргументом на користь AdS/CFT відповідності. Подібним чином $SO(D+1)$ група ізометрії D-вимірної сфери має найбільшу розмірність серед груп ізометрії просторів з евклідовою сигнатурою метрики.

У теоріях супергравітації у вищих розмірностях існують три вакуумні розв'язки з $AdS \times S$ геометрією, які зберігають всі суперсиметрії, а саме $AdS_4 \times S^7$ і $AdS_7 \times S^4$ розв'язки [131] 11-вимірної супергравітації [122] та $AdS_5 \times S^5$ розв'язок супергравітації типу IIB [132], [133].[12] Завдяки збереженню всіх 32 суперсиметрій припускається, що ці бекграунди є точними розв'язками теорії струн/M-теорії, а їх суперізометрії генерують $osp(4|8)$, $osp(8^*|4)$ та $su(2,2|4)$ супералгебри відповідно. Вони мають ізоморфні реалізації як алгебри суперконформних ізометрій просторів на межі супер-

[12]Можна довести, що 10- та 11-вимірні теорії супергравітації не мають інших максимально суперсиметричних вакуумних розв'язків крім зазначених, а також їх границь Пенроуза та плаского простору [134].

просторів анти-де Сіттера. Так ортосимплектична $osp(4|8)$ супералгебра завдяки ізоморфізму її некомпактної підалгебри $sp(4) = so(2,3)$ може бути реалізована як $D = 3$ $\mathcal{N} = 8$ суперконформна алгебра. Бозонна $so(8^*)$ підалгебра $osp(8^*|4)$ супералгебри ізоморфна $so(2,6)$ конформній алгебрі шестивимірного простору Мінковського, відтак ця супералгебра ізоморфна $D = 6$ $\mathcal{N} = (2,0)$ суперконформній алгебрі. Подібним чином $su(2,2)$ підалгебра $su(2,2|4)$ супералгебри ізоморфна $so(2,4)$ конформній алгебрі чотиривимірного простору Мінковського, тому така супералгебра допускає реалізацію як $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперконформна алгебра.

Однак, в той час, коли було висунуто гіпотезу AdS/CFT відповідності, формулювання більшості теорій з описаними симетріями залишались нерозробленими. Тому сформулювати у доступній для перевірки формі було можливо лише один її приклад. Він зв'язує $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ теорію супер-Янга-Міллса з $U(N)$ калібрувальною симетрією [135] та теорію струн типу IIB в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді. Лагранжіан суперструни у даному супербекграунді було побудовано в роботах [136], [137], [138] на основі суперкосетного підходу як двовимірну $PSU(2,2|4)/(SO(1,4) \times SO(5))$ σ-модель. Малдасеною були запропоновані співвідношення між рангом групи калібрувальної симетрії N і константою взаємодії g_{YM}, яка входить до лагранжіана $\mathcal{N} = 4$ суперконформної теорії Янга-Міллса, та константою взаємодії IIB суперструн g_s і радіусом R простору анти-де Сіттера AdS_5 та п'ятивимірної сфери S^5

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s, \quad \lambda = R^4/\alpha'^2.$$

До другого із співвідношень входить константа взаємодії 'т Хофта в теорії Янга-Міллса $\lambda = g_{YM}^2 N$ [139], яка прирівнюється безрозмірному натягу суперструни R^2/α'.[13]

[13]Відзначимо, що ідея введення безрозмірного натягу, побудованого з параметра нахилу траєкторій Редже та параметрів метрики, в теоріях струн у викривлених бекграундах висувалась і раніше (див., наприклад, роботу [140]).

Для спрощення в $\mathcal{N} = 4$ теорії супер-Янга-Міллса розглядається планарна границя наскільки завгодно великих значень N, у якій параметр λ залишається скінченним та відіграє роль константи взаємодії. В теорії суперструн типу IIB цій границі відповідають малі значення струнної константи взаємодії g_s. Дуальне співвідношення між теоріями у цій границі проявляється у тому, що пертурбативному режиму $\lambda \ll 1$ в $\mathcal{N} = 4$ теорії супер-Янга-Міллса відповідає сильно викривлений простір анти-де Сіттера $R^4/\alpha'^2 \ll 1$, а режиму сильного зв'язку $\lambda \gg 1$ – малі значення кривизни $R^4/\alpha'^2 \gg 1$. В останньому випапку маси збуджень вільної $AdS_5 \times S^5$ суперструни в одиницях α' стають великими і провідний внесок до її статистичної суми, яка за припущенням дорівнює статистичній сумі $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричної теорії Янга-Міллса, дається класичною дією теорії IIB супергравітації. Це дозволяє здобути інформацію про непертурбативну поведінку спостережуваних у $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричній теорії Янга-Міллса на основі пертурбативної теорії струн/супергравітації. Також можливо вивчати непертурбативні ефекти в теорії струн в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді в рамках пертурбативної теорії Янга-Міллса (див., наприклад, відомий огляд [141]).

Цікаві властивості $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричної теорії Янга-Міллса, такі як скорочення ультрафіолетових розбіжностей та точна суперконформна симетрія, стимулювали всебічне вивчення AdS_5/CFT_4 відповідності після роботи Х. Малдасени [124]. Незважаючи на численні перевірки цієї відповідності та низку доволі успішних застосувань, наприклад, для обчислення коефіцієнта зсувної в'язкості у кварк-глюонній плазмі [142], точного її доведення до теперішнього часу не існує.

Важливим подальшим кроком у дослідженні AdS_5/CFT_4 відповідності стало відкриття інтеґровних структур у дуальних теоріях. У теорії $\mathcal{N} = 4$ супер-Янга-Міллса цей напрям досліджень було ініційовано в роботі [143]. Було показано, що у планарній границі спектр конформних розмірностей певного набору локальних скалярних калібрувально-інваріантних однослідових операторів включно з однопетльовими поправками, який визначається власними значеннями оператора дилатацій, співпадає зі спектром гамільтоніана $so(6)$ інтеґровного спінового ланцюжка. В теорії $AdS_5 \times S^5$ суперструни вивчення інтеґровної структури почалось із доведення класичної інтеґровності її рівнянь [144] (див. також огляд [145]).

Активне дослідження AdS_4/CFT_3 відповідності розпочалось пізніше слідом за роботою О. Аароні, О. Бергмана, Д. Джафферіса та Х. Малдасени [146], в якій було побудовано $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформну теорію Черна-Саймонса з полями матерії та $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ калібрувальною симетрією. При $k = 1, 2$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформна симетрія теорії розширюється до $\mathcal{N} = 8$ суперконформної симетрії [147], [148], а при $N = 2$ ця теорія зводиться до теорії, запропонованої раніше Дж. Беггером з Н. Лембертом [149] та А. Густавссоном [150].[14]

Згідно гіпотези [146] побудована теорія Черна-Саймонса з полями матерії має дуальний опис як М-теорія в $AdS_4 \times (S^7/\mathbb{Z}_k)$ супербекграунді. На теперішній час детально розроблене лише її низькоенергетичне формулювання в термінах полів $D = 11$ теорії супергравітації над даним супербекграундом. Він представляє розв'язок рівнянь $D = 11$ супергравітації, який при $k > 2$ зберігає 24 з 32 суперсиметрій. При реалізації семивимірної сфери як розшарування Хопфа $S^7 = \mathbb{CP}^3 \times S^1$ [15] орбіфолдівська проєкція $\mathbb{Z}_k$ $(k > 1)$ діє на коло S^1: $S^7/\mathbb{Z}_k = \mathbb{CP}^3 \times (S^1/\mathbb{Z}_k)$. Сегмент $S^1/\mathbb{Z}_k$, який одержується в результаті, має довжину $2\pi R/k \sim (Nk)^{1/6}/k$ в одиницях планківської довжини у розмірності $D = 11$. Тому одинадцята розмірність просторучасу, якій відповідає цей сегмент, стає макроскопчно неспостережуваною при $k^5 \gg N$ і гравітаційна теорія може розглядатись як 10-вимірна та опи-

---

[14]Детальний опис цих теорій можна знайти в огляді [151].

[15]Математично вірним позначенням реалізації семивимірної сфери як розшарування Хопфа є $S^1 \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^3$. Однак у теорфізичній літературі здебільшого використовується позначення $S^7 = \mathbb{CP}^3 \times S^1$ хоча воно відповідає прямому добутку $\mathbb{CP}^3$ та S^1.

суватись полями IIA супергравітації над $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Цей супербекграунд є розв'язком рівнянь IIA супергравітації та зберігає 24 суперсиметрії. Він може бути виведений із $AdS_4 \times S^7$ розв'язку $D = 11$ теорії супергравітації [152], [153]. В роботі [146] було висунуто гіпотезу про те, що дуальність є справедливою не лише у наближенні супергравітації за великого радіуса метрики у струнній системі $R^2_{str} = 2^{5/2}\pi(N/k)^{1/2} \gg 1$, а й з урахуванням масивних збуджень суперструни. Відтак за припущенням теорія суперструн типу IIA в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді має дуальний опис в термінах $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної теорії Черна-Саймонса з полями матерії за умови $k^5 \gg N$. Ця границя відповідає малому значенню константи взаємодії в теорії струн типу IIA $g_s = (R/k)^{3/2} \sim (N/k^5)^{1/4}$. У протилежній границі великої струнної константи взаємодії теорія суперструн типу IIA описується в рамках 11-вимірної M-теорії.

Подібно до випадку AdS_5/CFT_4 відповідності ключову роль у вивченні цієї дуальності відіграють інтеґровні структури, які, однак, виявляються складнішими для дослідження через нижчу симетрію дуальних теорій. Зокрема, застосування суперкосетного підходу дозволяє побудувати класично інтеґровну двовимірну σ-модель на супербагатовиді $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ [154], [155], який представляє підпростір повного $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору [156]. Причиною цього є порушення $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом восьми з 32 суперсиметрій. Тому з генераторами непорушених суперсиметрій, які входять до $osp(4|6)$ супералгебри його ізометрії, можуть бути асоційовані лише 24 антикомутуючі координати. В результаті 1-форми $D = 10$ суперфільбайна та $so(1,3) \oplus u(3)$ зв'язності, компоненти яких ототожнюються з $osp(4|6)$ формами Картана, побудованими з елемента $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору, залежать від десяти координат $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ простору та цих 24 координат. $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-модель описує динаміку суперструни у тих секторах, де умова обернення на нуль восьми координат для порушених суперсиметрій представляє часткове калібруванння κ-симетрії, зокрема, коли суперструна одночасно рухається в AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$ просторах. Якщо ж суперструна рухається, наприклад, лише у чотиривимірному просторі анти-де Сіттера, ця умова включає також в'язі на початкові дані,[16] які виключають 4 фізичні ферміонні ступені свободи.[17] Тому у цьому секторі динаміка суперструни описується повною дією [156]. Також у повній дії необхідно накладати калібрування κ-симетрії, в яких фізичні ферміонні ступені свободи присутні у секторі порушених суперсиметрій.

Через те що $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростір не може бути реалізований як суперсиметричний фактор-простір, повну дію суперструни неможливо побудувати з використанням суперкосетного підходу. Тому для її побудови в роботі [156] було застосовано подвійну розмірну редукцію [160] дії супермембрани в $AdS_4 \times S^7$ супербекграунді [161], [162]. Дія, яка здобувається в результаті, є високонелінійною та залежить від усіх 32 антикомутуючих координат $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору. Спроби довести інтеґровність рівнянь, які випливають із неї, було здійснено в роботах [163], [164]. Це привело до необхідності розширення зв'язності Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі лінійними та квадратичними членами за вісьмома координатами сектора порушених суперсиметрій. Було показано, що її кривизна обертається на нуль на рівняннях суперструни з точністю до членів вищих порядків за цими координатами. Відтак незважаючи на наявні свідчення класичної інтеґровності рівнянь $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, проблема її точного доведення залишається нерозв'язаною.

На даний час AdS/CFT відповідність вважається найбільш конкретним означенням квантової теорії гравітації в просторах анти-де Сіттера [165]. Ще один підхід до побудови цієї теорії, в якому можливий спільний опис

[16] В'язі на початкові дані представляють калібрувально-інваріантні умови, які зберігаються в процесі еволюції, визначеної динамічними рівняннями теорії. Приклади таких умов відомі в теорії гравітації [157] (див. також сучасний огляд [158]), теоріях Янга-Міллса [82], струн [30], [33] і бран [36].

[17] Див. обговорення в огляді [159].

бозонних і ферміонних полів, відомий як твісторна програма Роджера Пенроуза [166]. Теорія твісторів була запропонована як основа нового формулювання теорії поля, в якому простір-час не представляв би фундаментальну концепцію, а випливав із геометрії твісторного простору [75], [167], [77]. Подібно до того, як у квантовій теорії станам системи відповідають вектори у гільбертовому просторі над комплексними числами, теорія твісторів ґрунтується на ідеї про те, що комплексна геометрія твісторного простору визначає геометрію простору-часу як на класичному, так і на квантовому рівні. Такий підхід за задумом мав бути вільним від проблем, наявних у просторо-часовому формулюванні теорії поля, що могло б відкрити шлях до квантування гравітації та її об'єднання з іншими взаємодіями.

Твісторний простір $\mathbb{T}$, який відповідає пласкому простору-часу, за означенням ізоморфний чотиривимірному комплексному простору $\mathbb{C}^4$, координати якого традиційно позначаються $Z^{\boldsymbol{\alpha}} = (\omega^\alpha, \bar{u}_{\dot\alpha})$. Спінорні частини твістора ω^α та $\bar{u}_{\dot\alpha}$ є двокомпонентними $SL(2,\mathbb{C})$ спінорами. У класичній механіці безмасової частинки $\bar{u}_{\dot\alpha}$ є «квадратним коренем» із її 4-імпульсу в представленні Картана-Пенроуза

$$p_m \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} = u_\alpha \bar{u}_{\dot\alpha}. \tag{3}$$

Головна спінорна частина ω^α та координати $z^m = x^m + iy^m$ комплексифікованого простору Мінковського зв'язані співвідношенням

$$\omega^\alpha = i\bar{u}_{\dot\alpha} z^m \tilde{\sigma}^{\dot\alpha\alpha}_m, \tag{4}$$

яке є розв'язком твісторного рівняння $\partial^{\dot\alpha\alpha}\omega^\beta + \partial^{\dot\alpha\beta}\omega^\alpha = 0$. Зі співвідношення (4) випливає відповідність між геометричними об'єктами у твісторному просторі та у комплексифікованому просторі-часі. Зокрема, точкам у твісторному просторі відповідають нуль-площини в просторі-часі, а точкам у просторі-часі відповідають площини комплексної розмірності два у твісторному просторі [77]. Завдяки відповідності такого типу застосування твісторних методів дозволяє виявити геометричні стуктури, які є прихованими у просторово-часовому формулюванні польових теорій.

Подібно до 4-імпульсу частинки її кутовий момент $M^{mn} = \sigma^{mn}_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}^{mn}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{M}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ визначається через компоненти твісторів виразом $M^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha} u^{\beta} + \omega^{\beta} u^{\alpha}$ та комплексно-спряженим до нього. Розглянемо дуальний твісторний простір $\bar{\mathbb{T}}$ з координатами $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} = (Z^{\boldsymbol{\beta}})^{\dagger} H^{\boldsymbol{\beta}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}$, означеними з використанням 4×4 матриці

$$H^{\boldsymbol{\beta}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix},$$

яка має два власні значення $+1$ і два -1. Таке означення дуального твістора дозволяє ввести твісторну норму $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}}$, інваріантну відносно групи $SU(2,2)$ симетрії локально ізоморфної конформній групі $D = 4$ простору-часу Мінковського. Тоді зі співвідношення $S^m = sp^m$ між вектором Паулі-Любанського та імпульсом безмасової частинки випливає, що значення твісторної норми

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}} = u_{\alpha}\omega^{\alpha} + \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} \bar{u}_{\dot{\alpha}} = 2s \tag{5}$$

є пропорційним класичному аналогу оператора спіральності частинки s. Підстановка (4) у це співвідношення показує, що твісторна норма не обертається на нуль за умови $y^m \neq 0$. Відтак уявні частини координат комплексифікованого простору-часу у механіці точкової частинки відіграють роль класичних аналогів спінових ступеней свободи [167], [168], [169].

У квантовій теорії оператори, які зіставляються класичним твісторам, задовольняють такі комутаційні співвідношення [170]

$$[Z^{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}}] = \delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}}, \quad [Z^{\boldsymbol{\alpha}}, Z^{\boldsymbol{\beta}}] = [\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}}] = 0. \tag{6}$$

Зазвичай використовуються дві реалізації цих операторів: в одній $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ є класичним твістором, а $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$ діє як диференційний оператор $-\partial/\partial Z^{\boldsymbol{\alpha}}$, в іншій реалізації компоненти дуального твістора $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$ є класичними величинами, тоді як $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ представлений диференційним оператором $\partial/\partial \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Перша реалізація застосовна для опису хвильової функції частинки $f(Z)$ у твісторному просторі, в той час як друга – до опису хвильової функції $\tilde{f}(\bar{Z})$ у дуальному твісторному просторі. Відповідно ермітів оператор, який відповідає класичній спіральності (5) має дві реалізації. Якщо він виражений через $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$

$$s = -\frac{1}{2} Z^{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z^{\boldsymbol{\alpha}}} - 1, \tag{7}$$

хвильова функція частинки зі спіральністю s у твісторному просторі $f(Z)$ має бути однорідною функцією степеня $-2s-2$. Це приводить до поняття про проєктивний твісторний простір $\mathbb{PT}^{\bullet}$, для якого $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ є однорідними координатами, визначеними з точністю до відмінного від нуля комплексного фактора. Подібним чином можна виразити оператор спіральності в термінах дуального твістора, ввести проєктивний дуальний твісторний простір $\mathbb{PT}_{\bullet}$ та хвильову функцію частинки у ньому. Обидва описи доповнюють один одного й перехід від однорідних функцій у проєктивному (дуальному) твісторному просторі до полів у просторі-часі, відомий як перетворення Пенроуза, здійснюється за допомогою контурних інтеґралів Пенроуза [170].

Для функцій у $\mathbb{PT}^{\bullet}$ $f_{(-2s-2)}(Z)$ зі степенем однорідності $-2s-2 \le -2$ інтеґрал

$$\begin{gathered} W_{\dot{\alpha}(2s)}(x) = \int\limits_{\mathbb{CP}^1} \bar{u}^{\dot{\beta}} d\bar{u}_{\dot{\beta}}\, \bar{u}_{\dot{\alpha}_1} \cdots \bar{u}_{\dot{\alpha}_{2s}}\, \rho_x f_{(-2s-2)}(Z), \\ \rho_x f_{(-2s-2)}(Z) = f_{(-2s-2)}(\omega^{\gamma} = i\bar{u}_{\dot{\gamma}} x^m \tilde{\sigma}_m^{\dot{\gamma}\gamma}, \bar{u}_{\dot{\gamma}}) \end{gathered} \tag{8}$$

визначає поля невід'ємної спіральності $s \ge 0$.[18] Інтеґрування в (8) здійснюється за простором спінорів $\bar{u}_{\dot{\gamma}}$, визначених з точністю до масштабного фактора, який представляє одновимірний комплексний проєктивний багатовид $\mathbb{CP}^1$ ізоморфний двовимірній сфері S^2. Аби інтеґрал не обертався на нуль, сингулярності підінтеґральної функції мають лежати всередені неї.

[18] Форма запису індекса у поля $W_{\dot{\alpha}(2s)}(x)$ є прикладом прийнятого у даній дисертації скороченого запису для набору індексів, симетризованих з одиничною вагою, за допомогою одного індекса, за яким у круглих дужках наведено число, яке дорівнює кількості індексів у наборі. Подібним чином число у прямих дужках за індексом позначає набір індексів, антисиметризованих з одиничною вагою.

Функції $f_{(2s-2)}(Z)$ зі степенем однорідності $2s-2 > -2$ перетворенням Пенроуза відображаються у поля $\Gamma_{\alpha\dot{\alpha}(2s-1)}(x)$ від'ємної спіральності $-s < 0$, визначені з точністю до лінеаризованих калібрувальних перетворень. При $s > 2$ ці поля представляють спінорну форму узагальнених зв'язностей Кристоффеля для вільних безмасових полів [171].

Для однорідних функцій степеня $-2s-2 \leq -2$ у $\mathbb{PT}_\bullet$ інтеґрал Пенроуза подібний до (8) визначає поля з недодатною спіральністю $-s \leq 0$

$$\begin{gathered} \widetilde{W}_{\alpha(2s)}(x) = \int\limits_{\mathbb{CP}^1} u^\beta du_\beta \, u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_{2s}} \, \rho_x \tilde{f}_{(-2s-2)}(\bar{Z}), \\ \rho_x \tilde{f}_{(-2s-2)}(\bar{Z}) = \tilde{f}_{(-2s-2)}(u_\gamma, \bar{\omega}^{\dot{\gamma}} = -ix^m \tilde{\sigma}_m^{\dot{\gamma}\gamma} u_\gamma). \end{gathered} \tag{9}$$

Тоді як функціям зі степенем однорідності $2s - 2 > -2$ відповідають поля $\Gamma_{\dot{\alpha}\alpha(2s-1)}(x)$ додатної спіральності $s > 0$, які при $s > 2$ є спінорною формою узагальнених зв'язностей Кристоффеля. Відзначимо, що комутаційні співвідношення квантованих твісторів (6) та вираз для оператора спіральності (7) можна вивести при квантуванні за Діраком моделі безмасової частинки у твісторному формулюванні [169]. Тоді $f(Z)$ та $\tilde{f}(\bar{Z})$ є двома представленнями її хвильової функції.

Просторово-часові поля, які визначаються інтеґралами (8) та (9), задовольняють рівняння для безмасових вільних полів, а саме рівняння Клейна-Гордона при $s = 0$, рівняння Вейля при $s = \pm 1/2$, вакуумні рівняння Максвелла і Раріти-Швінгера при $s = \pm 1$ та $s = \pm 3/2$. Рівняння для $s = \pm 2$ представляють спінорну форму лінеаризованих тотожностей Б'янкі для тензора Вейля, а при $s > 2$ – їх високоспінові узагальнення.

В рамках теорії твісторів виявляється можливим також знайти розв'язки деяких нелінійних рівнянь. Зокрема, було встановлено взаємно однозначне співвідношення між полями Янга-Міллса з (анти-)самодуальними напруженостями, які відтак є розв'язками вакуумних рівнянь Янга-Міллса, та комплексними векторними розшаруваннями над проєктивним (дуальним) твісторним простором, що дає можливість класифікувати такі розв'язки [172]. Узагальнення цього співвідношення зв'язує викривлені простори, метрики яких задовольнють вакуумні рівняння Ейнштейна і додатково обертається на нуль один із спінорів кривизни Вейля, що відповідає (анти-)самодуальності тензора Вейля, та комплексні тривимірні простори, в яких існують чотирипараметричні сімейства голоморфних кривих спеціального вигляду [173]. Такі комплексні тривимірні простори можна побудувати за допомогою деформації комплексної структури проєктивного (дуального) твісторного простору.

Причина обмеження (анти-)самодуальними полями зазначених важливих результатів, здобутих у ході реалізації твісторної програми Пенроуза [166], корениться у різниці в описі полів з додатною та від'ємною спіральністю у твісторному просторі. Аби усунути таке обмеження в роботах [174], [175] було запропоновано описувати поля Янга-Міллса не у (дуальному) твісторному просторі, а на квадриці $Z^{\boldsymbol{\alpha}}\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ у прямому добутку твісторного простору та дуального твісторного простору, який параметризовано $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ та $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Пару, складену з твістора та дуального твістора, які задовольняють умову ортогональності $Z^{\boldsymbol{\alpha}}\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$, було названо амбітвістором в роботі [176]. Проєктивний амбітвісторний простір є п'ятивимірним комплексним простором ізоморфним простору комплексних нуль геодезичних у комплексифікованому чотиривимірному просторі-часі. Узагальнення перетворення Пенроуза на однорідні функції в амбітвісторному просторі приводить до полів у просторі-часі, на які не накладено польових рівнянь [174], [175], [177]. Тому амбітвісторне перетворення не є методом побудови розв'язків польових рівнянь. Однак, умови продовження функцій у амбітвісторному просторі поза квадрику приводять до динамічних рівнянь для відповідних просторово-часових полів [174], [175], [177], [178].

Твістори допускають суперсиметричне узагальнення, запропоноване А. Фербером [76]. Супертвістори на додачу до чотирьох бозоних компонентів, які перетворюются за фундаментальним представленням $su(2, 2)$, мають $\mathcal{N}$ ферміонних компонентів у фундаментальному представленні $su(\mathcal{N})$. Відтак вони лінійно перетворюються відносно $su(2,2|\mathcal{N})$ суперконформної симетрії. Співвідношення між компонентами супертвісторів та координатами $(x^m\tilde{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha}, \theta_A^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}A})$ $\mathcal{N}$-розширеного суперпростору Мінковського є узагальненнями відповідних співвідношень для твісторів Пенроуза (4)

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mu^\alpha \\ \bar{u}_{\dot{\alpha}} \\ \eta^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\tilde{x}_+^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{u}_{\dot{\alpha}} \\ \bar{u}_{\dot{\alpha}} \\ 2i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}A}\bar{u}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_+^{\dot{\alpha}\alpha} = \tilde{x}^{\dot{\alpha}\alpha} + 2i\theta_A^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}A}.$$

Подібним чином суперамбітвістор складається з супертвістора $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$ та дуального супертвістора $\bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}$, на які накладено умову ортогональності $\bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} = 0$ [174], [177].

(Супер)твістори відіграють важливу роль у розробці нових представлень для амплітуд розсіяння у польових теоріях та дозволяють виявити їх симетрії, які є прихованими у традиційній теорії збурень, а також прояснити їх зв'язок із амплітудами розсіяння (супер)струн. Ці дослідженння почали активно розвиватись після того як Е. Віттен, узагальнив попередню роботу В. Наіра [179] та запропонував топологічну струнну модель у супертвісторному просторі [180], кореляційні функції в якій відтворюють амплітуди розсіяння в $\mathcal{N} = 4$ теорії супер-Янга-Міллса виражені в термінах супертвісторів. Нещодавній огляд цього та інших результатів застосування твісторних методів у теорії поля та теорії струн, можна знайти в [181].

Обґрунтування вибору теми дослідження. Останнім часом у фізиці високих енергій та астрофізиці було здобуто низку експериментальних результатів, які мають фундаментальне значення для розуміння будови Всесвіту та взаємодій матерії. До них відносяться відкриття мікрохвильового космічного фону, бозона Хіггса, доведення існування чорних дір та гравітаційних хвиль. Це загострило проблему побудови теорії квантової гравітації, яка на сучасному етапі розвитку ґрунтується на теорії суперструн. У просторах анти-де Сіттера активно досліджується побудова квантової теорії гравітації на основі гіпотези AdS/CFT відповідності як конформно-інваріантної теорії типу Янга-Міллса або Черна-Саймонса на їх межі. Дана гіпотеза та її узагальнення вказують можливий шлях до об'єднання загальної теорії відносності та Стандартної моделі, у якій ферміонні поля відіграють фундаментальну роль.

Серйозною перешкодою на цьому шляху є проблема пояснення природи темної матерії. Найбільш розроблені сценарії її опису виходять із того, що вона складається з ферміонів таких як нейтрино, нейтраліно або більш складних ферміонних компонентів супермультиплетів теорії суперструн або супергравітації.

У цьому зв'язку особливу увагу привертають теоретико-польові підходи, які дають можливість спільного опису бозонів та ферміонів у викривлених просторах. На додаток до теорії струн та супергравітації таким підходом є твісторна програма Р. Пенроуза, яка пропонує єдину математичну основу для опису польових теорій у пласких і викривлених просторах та сумісна з теорією гравітації Ейнштейна.

Тому застосування теорії твісторів у теоріях суперструн та супергравітації є важливим напрямом, який на основі об'єднання математичних та теорфізичних принципів може привести до прогресу у розв'язанні проблеми побудови квантової теорії гравітації з включенням темної матерії.

Зв'язок роботи з науковими програмами і темами. Результати, представлені в дисертації, були здобуті під час виконання наступних тем базового фінансування відділу статистичної фізики та квантової теорії поля Інституту теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ НАН України:

- «Теоретичні дослідження зі статистичної фізики конденсованих середовищ зі спонтанно порушеною симетрією та газоподібних систем і теоретико-групових методів у теорії поля», 2006-2010 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 080906UP0010;

- «Розвиток методів статистичної фізики та квантової теорії поля для дослідження проблем конденсованих і газоподібних середовищ та динаміки полів і суперсиметричних подовжених об'єктів», 2011-2015 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0111U009549;

- «Дослідження класичних і квантових симетрій у теоретико-польових та струнних моделях та проблем статистичної механіки конденсованих середовищ», 2016-2020 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0116U007065;

- «Розвиток методів статистичної фізики та квантової теорії поля для дослідження проблем фізики квантових систем багатьох частинок та індукованої гравітації й калібрувальних полів у теорії (супер)струн і бран», 2021-2025 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0121U108722.

Мета та завдання дослідження. Метою дисертації є розвиток суперсиметричної теорії релятивістських спінових частинок та струн у викривлених та твісторних просторах, вивчення їх класичних і квантових симетрій на основі теоретико-групових і геометричних підходів квантової теорії поля. Задачі дослідження полягали у вивченні структури цих симетрій та її залежності від геометрії простору, спінових ступенів свободи, характеру взаємодії із зовнішніми полями. Для розв'язання поставлених задач були побудовані нові моделі частинок і струн в узагальнених просторах, а також розширено відомі моделі на випадок викривлених та твісторних суперпросторів у різних динамічних режимах. У цих моделях були досліджені умови класичної інтеґровності здобутих нелінійних рівнянь та можливості їх зведення до лінійних рівнянь. Розглядалась також задача квантування побудованих моделей.

Розгорнутий перелік завдань, які розв'язуються у дисертаційній роботі, наведено нижче.

1. Вивчити нелінійну реалізацію групи симетрії двовимірної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі у конформній параметризації, яка відповідає генераторам $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Дослідити глобальну

суперконформну симетрію σ-моделі.

2. Для даної σ-моделі довести лінійну залежність рівнянь для ферміонних полів, сформульованих з використанням форм Картана, та здобути густини відповідних ньотерових струмів як в термінах цих форм, так і параметрів суперконформної алгебри.

3. Здобути лагранжіан та гамільтоніан суперструни в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді у калібруванні світлового конуса для локальних симетрій дії, який утворено нуль-геодезичними на конформній межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 в координатах Пуанкаре.

4. Для суперструни у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді розглянути можливість часткового закріплення калібрування κ-симетрії, в якому залишаються дві з восьми координат у секторі суперсиметрій, порушених даним бекграундом. Представити рівняння суперструни у цьому калібруванні у вигляді умови нульової кривизни для листкової 1-форми. Проаналізувати умову Калуци-Клейна.

5. Довести класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі. Встановити співвідношення між компонентами пари Лакса суперчастинки та зв'язністю Лакса відповідної двовимірної σ-моделі. Довести інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі.

6. Здобути супертвісторні формулювання моделей струн інваріантних відносно просторово-часової суперсиметрії у розмірностях $D = 4, 6, 10$. Здобути в'язі на компоненти $OSp(8^*|2)$ та $OSp(32|1)$ супертвісторів, які забезпечують їх відповідність координатам $\mathcal{N} = 1$ суперпросторів у розмірностях $D = 6$ та $D = 10$. Здобути редуковані супертвісторні моделі та проаналізувати модель, яка відповідає $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонову систему з в'язями.

7. Провести аналіз моделі $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у здобутому супертвісторному формулюванні як гамільтонової системи з в'язями.

8. Вивчити реалізації нескінченновимірних класичних суперконформних симетрій у моделі твісторної струни Берковіца та її узагальненні для вільних $SL(4|4,\mathbb{R})$ супертвісторів. Дослідити відповідні квантові симетрії.

9. Розробити лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у просторі Мінковського розмірності $D=5$.

10. Розробити опис в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією. Встановити співвідношення між амбітвісторним та відомим осциляторним описами цих представлень.

11. Здобути 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, встановити його зв'язок з раніше відомим 2-твісторним формулюванням та провести її квантування в термінах амбітвісторів.

12. Встановити зв'язок між змінними, які входять до суперпросторового та супертвісторних формулювань моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5\times S^5$ супербекграунді, а також між цими формулюваннями. Провести квантування за Діраком даної моделі у 4-супертвісторному формулюванні.

13. Здобути формулювання моделі безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як дійсний проєктивний багатовид. Узагальнити модель на випадок взаємодії з фоновими електромагнітним та абелевими антисиметричними калібрувальними полями і провести її квантування за Діраком.

14. Побудувати модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у зазначеній реалізації. Побудувати БРСТ генератор струни та дослідити його квантові аномалії.

Об'єкт досліджень. Класичний і квантовий опис взаємодіючих бозонів і ферміонів як релятивістських точкових та протяжних об'єктів у суперсиметричних польових та струнних теоріях.

Предмет досліджень. Суперсиметричні моделі релятивістських частинок і струн у викривлених і твісторних просторах, їх лагранжеві та гамільтонові формулювання і симетрії.

Методи досліджень. Для дослідження суперсиметричних моделей релятивістських частинок і струн використовуються лагранжів та гамільтонів формалізми. Оскільки досліджувані моделі є динамічними системами з в'язями, для їх гамільтонового опису і квантування застосовуються метод Дірака та метод БРСТ квантування. Для опису їх класичної динаміки та квантових станів також використовуються відомі геометричні та теоретико-групові методи, такі як метод ортонормованого репера Е. Картана, метод осциляторної реалізації унітарних незвідних представлень некомпактних алгебр та методи теорії твісторів Р. Пенроуза.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації запропоновані та досліджені нові суперсиметричні моделі релятивістських об'єктів та нові формулювання відомих моделей точкових частинок, безнатягових струн і струн з ненульовим натягом як у просторі-часі, так і у твісторних просторах. Також у дисертації здобуто нові результати при дослідженні відомих формулювань суперсиметричних моделей частинок і струн. Більш детально новизну результатів, представлених у дисертаційній роботі, розкривають наведені нижче твердження.

1. Виведено нове формулювання $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі в термінах 1-форм Картана, асоційованих з генераторами $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри. Здобуто явний вираз для лагранжіана σ-моделі в термінах координат, які відповідають генераторам цієї супералгебри. Доведено, що ферміонні рівняння σ-моделі є лінійно залежними, що передбачає інваріантність її дії відносно калібрувальної κ-симетрії.

2. Здобуто вирази для густин ньотерових струмів, пов'язаних з інваріантністю дії $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі відносно глобальної $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії.

3. Для локальних симетрій дії суперструни в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі запропоновані нові калібрувальні умови світлового конуса, який утворено нуль-геодезичними на конформній межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 у конформно-пласкій параметризації. Здобуті лагранжіан та гамільтоніан суперструни у цьому калібруванні в термінах суперпросторових координат.

4. В моделі $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни введено нову калібрувальну умову для κ-симетрії, яка виключає 6 з восьми координат для суперсиметрій, порушених даним супербекграундом. Рівняння суперструни в даному частковому калібруванні представлено у вигляді умови нульової кривизни для листкової 1-форми, яка розширює зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі внесками координат для порушених суперсиметрій.

5. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Встановлено відповідність між інтеґровними структурами безмасової суперчастинки та σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ симетричному суперпросторі.

6. Запропоновані нові супертвісторні формулювання суперструн у розмірностях $D = 4, 6, 10$. Введені редуковані супертвісторні моделі, які відповідають $\mathcal{N} = 1, 2$ суперструнам у цих розмірностях та узагальнюють (супер)твісторні формулювання безмасових (супер)частинок та нуль-(супер)струн.

7. $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструну у запропонованому супертвісторному формулюванні проаналізовано як гамільтонову систему з в'язями. Здобуто набори в'язей першого роду і другого роду, для яких побудовані дужки Дірака. Досліджено алгебру в'язей першого роду на дужках Дірака.

8. Виявлені класичні нескінченновимірні глобальні симетрії лагранжіанів ліво- і право-біжних полів вільних $PSL(4|4, \mathbb{R})$ супертвісторів у моделі твісторної струни Берковіца та її розширенні, в якому відсутня $GL(1, \mathbb{R})$ калібрувальна симетрія. Доведено, що ці симетрії порушуються у квантовій

теорії.

9. Запропоновано лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для симетричних спінорних полів у п'ятивимірному просторі Мінковського, які задовольняють рівняння типу Дірака для вільних безмасових полів.

10. Знайдено реалізацію в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією. Встановлено відповідність між відомою осциляторною та амбітвісторною реалізаціями цих представлень.

11. Запропоновано 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера та встановлено його зв'язок з відомим 2-твісторним формулюванням. Здобуто нове амбітвісторне представлення хвильової функції частинки.

12. Встановлено зв'язок між компонентами $psu(2,2|4)$ супертвісторів та елементами суперматриці, параметризованої координатами $AdS_5 \times S^5$ суперпростору, й між суперпросторовим і супертвісторними формулюваннями моделі безмасової суперчастинки у цьому суперпросторі. Проведено її квантування за Діраком у 4-супертвісторному формулюванні. Розроблено амбітвісторний опис супермультиплета $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації.

13. Запропоновано нове формулювання моделі вільної безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як проєктивний багатовид. Побудовані взаємодії спінової частинки з фоновими електромагнітним та абелевими антисиметричними калібрувальними полями, які узагальнюють на випадок простору анти-де Сіттера відповідні взаємодії спінової частинки у просторі Мінковського. Проведено квантування моделі за Діраком та здобуто рівняння для хвильової функції частинки.

14. Запропоновано модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у даній реалізації. Побудовано її квантовий БРСТ генератор, який є вільним від аномалій для довільної роз-

мірності D подібно до квантових нуль-(супер)струн і нуль-(супер-)p-бран у (супер)просторі Мінковського.

Практичне значення одержаних результатів. Здобуті у дисертації результати знаходяться на стику теорій суперструн, калібрувальних полів та супергравітації. Тому вони мають практичне значення для розробки єдиного теорфізичного і математичного підходу до опису бозонних і ферміонних полів у пласких та викривлених просторах. Розробка такого підходу необхідна для об'єднання принципів релятивістської квантової механіки та загальної теорії відносності.

Побудовані у дисертації нові суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах можуть представляти інтерес для реалізації даного підходу за зазначеними нижче напрямами.

Запропоновані супертвісторні формулювання суперструн цікаво використати для їх квантування у супертвісторному просторі. Як відомо, окрім координат суперпростору супертвістори включають додаткові комутуючі спінорні координати. Врахування їх внеску у скорочення квантових аномалій може привести до зниження критичної розмірності D=10 у теорії суперструн та побудови моделей квантової теорії гравітації у розширеному супертвісторному просторі. Такий підхід може прояснити механізм утворення просторово-часової структури у ранньому Всесвіті.

Проведене у дисертації квантування моделі безмасової суперчастинки у супертвісторному формулюванні дає представлення її хвильової функції у супертвісторному просторі. Було показано, що ця хвильова функція описує поля мультиплета супергравітації, які відповідають безмасовим збудженням суперструн. У цьому зв‘язку цікаво дослідити можливості розширення запропонованого опису включенням масивних бозонних і ферміонних полів з вищими спінами зі спектра збуджень суперструн. Ці поля можуть розглядатись в якості кандидатів на роль складових темної матерії поряд з іншими сценаріями, які активно досліджуються у теперішній час.

Запропоновані суперсиметричні моделі частинки зі спіном $1/2$ містять нову інформацію про властивості та можливі взаємодії ферміонних та бозонних полів. Видається важливим узагальнити ці моделі на випадок масивних частинок у просторі де Сіттера та дослідити розширені суперсиметрії на його геодезичних лініях.

Результати досліджень $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі та суперструни у $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді використовуються при вивченні квантової теорії гравітації у даному бекграунді в рамках AdS_4/CFT_3 відповідності.

Особистий внесок здобувача. Усі роботи, результати яких увійшли до дисертації, виконані здобувачем особисто без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Результати, представлені в дисертації, доповідались на численних наукових заходах в Україні та за кордоном:

• IV Summer School in Modern Mathematical Physics, Institute of Physics, Belgrade, Serbia, 3-14 September 2006;

• Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 15-18 September 2009;

• II-nd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 22-24 December 2010;

• III-rd International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics", NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 29 August - 2 September 2011;

• III-rd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 21-23 December 2011;

• International Conference "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena", Gallipoli, Italy, 22-29 June 2013;

• International Seminar "Quantum Field Theory and Supersymmetry" dedicated to the 90-th birhtday anniversary of Academician D.V. Volkov, NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 3 July 2015;

• International Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation, Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 24-26 May 2016;

• V International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to V.A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 19-24 June 2017;

• VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to the centennial anniversary of the NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 18-22 June 2018;

• XXVIth International Colloquium on Integrable Systems, Czech Technical University, Prague, Czech Republic, 8-12 July 2019.

Автор також доповідав матеріали дисертації на семінарах в Інституті теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 20 статтях, які проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus та Web of Science. Додатково 9 робіт засвідчують апробацію матеріалів дисертації та опубліковані у працях наукових конференцій, школи та колоквіуму. 11 робіт опубліковані у наукових журналах, які за класифікацією SCImago Journal and Country Rank входять до першого квартиля (Q1). 6 робіт опубліковані у наукових виданнях, віднесених до другого квартиля (Q2).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку. У ньому наведено список публікацій за темою дисертації та дані щодо апробації її результатів. Загальний обсяг дисертації 378 сторінок, в тому числі 13 таблиць. Список використаних джерел включає 371 посилання та займає 45 сторінок.

Розділ 1
Суперструна у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі та $\mathcal{N} = 6$ суперконформна симетрія у (1+2) розмірностях

1.1 Вступ

Підрозділ 1.2 присвячено виведенню нового формулювання лагранжіана $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі [182] в термінах форм Картана, які відповідають генераторам $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Дія $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі випливає із дії суперструни типу IIA в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді [156] при накладенні умови обернення на нуль координат, пов'язаних із вісьмома порушеними бекграундом суперсиметріями. Як обговорювалось у вступі, σ-модель описує динаміку суперструни лише у тих секторах, де ця умова закріплює калібрування κ-симетрії. Генератори 32–8=24 суперсиметрій, які зберігаються цим супербекграундом, входять до $osp(4|6)$ ортосимплектичної супералгебри його ізометрії. Ця супералгебра включає $sp(4)$ [19] симплектичну та $so(6)$ ортогональну підалгебри. Як відомо $sp(4)$ алгебра є ізоморфною $so(2,3)$ алгебрі. Її можна представити як $ads(1,3)$ алгебру ізометрії чотиривимірного простору анти-де Сіттера $AdS_4 = SO(2,3)/SO(1,3)$ та $conf(1,2)$ конформну алгебру його $D = 1 + 2$ [20] межового простору Мінковського. $so(6)$ алгебра ізоморфна

[19] $sp(4)$ позначає розщеплену дійсну форму комплексної алгебри Лі $sp(4,\mathbb{C})$. Для цієї алгебри також використовуються позначення $sp(4,\mathbb{R})$ та $sp(2,\mathbb{R})$. Крім того у позначенні дійсних ортосимплектичних супералгебр, таких як $osp(4|6)$ та $osp(4|8)$, зліва від вертикальної риски ми наводимо парне число, яке характеризує некомпактну симплектичну підалгебру. Позначення подібної форми використовується для унітарних супералгебр, наприклад, $su(2,2|\mathcal{N})$. У літературі широко розповсюдженою є інша угода, згідно з якою ці ортосимплектичні супералгебри позначаються як $osp(6|4)$ та $osp(8|4)$ відповідно.

[20] Тут і далі запис розмірності простору у вигляді $D = T + S$ підкреслює, що він має T часових та S просторових розмірностей.

$su(4)$ алгебрі, яка описує ізометрію комплексного проєктивного простору $\mathbb{CP}^3 = SU(4)/U(3)$ дійсної розмірності 6. Завдяки цим ізоморфізмам, які будуть докладно описані у пункті 1.2.1, $osp(4|6)$ супералгебру можна реалізувати як $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформну алгебру. Така реалізація застосовується у цьому та наступному розділах.

$OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричний фактор-простір є підпростором $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору та параметризований 10 бозонними координатами просторів AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$, а також 24 грассманово-непарними координатами. Як відомо, 1-форми (супер)фільбайна та зв'язності (суперсиметричних) фактор-просторів будуються із форм Картана, які відповідають генераторам їх алгебр (супер)ізометрії. Відтак бозонні компоненти суперфільбайна $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ супербагатовиду дорівнюють $so(2,3)/so(1,3)$ та $su(4)/u(3)$ формам Картана, а ферміонні компоненти – грассманово-непарним формам Картана. 1-форма зв'язності визначається формами Картана для генераторів $so(1,3) \oplus u(3)$ підалгебри стабільності.

Також у даному підрозділі ферміонні рівняння σ-моделі буде представлено у формі, подібній до тієї, яку мають ферміонні рівняння суперструн Гріна-Шварца [56], та доведено їх лінійну залежність. Це свідчить про інваріантність дії σ-моделі відносно калібрувальної κ-симетрії, яка є залишком κ-симетрії $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни. З метою вивчення нелінійної структури лагранжіана σ-моделі буде здобуто явні вирази для форм Картана, які є його складовими. Їх вигляд визначається формою $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ елемента. Буде розглянуто його параметризацію координатами Пуанкаре для простору AdS_4, які відповідають генераторам трансляцій P_m та дилатацій D конформної алгебри $conf(1,2)$, а також 24 антикомутуючими координатами, які є параметрами для генераторів суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри.

Інваріантність $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі відносно глобальної $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії досліджується у підрозділі 1.3 на основі нашої роботи [183]. Спочатку буде досліджено трансформаційні властивості елемента $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору та здобуто загальні вирази для густин ньотерових струмів, які відповідають інваріантності дії відносно кожного із перетворень $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії. Далі буде наведено вирази для густин ньотерових струмів в термінах координат, які параметризують $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ елемент, розглянутий у попередньому підрозділі.

У підрозділі 1.4 запропоновано нове калібрування світлового конуса для κ-симетрії в моделі $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни [184]. Це калібрування відповідає світловому конуса на конформній межі простору анти-де Сіттера, параметризованого координатами Пуанкаре, що відрізняє його від раніше запропонованих калібрувальних умов [185], [186], [187], [188], [189], [190], [191].

У заключному підрозділі 1.5 виводиться гамільтоніан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни в калібруванні світлового конуса, слідуючи нашій роботі [192]. Для цього здобутий лагранжіан суперструни буде представлено через змінні фазового простору. Калібрування репараметризаційної симетрії буде закріплено умовами на одну із просторово-часових координат світлового конуса та на густину імпульсу, спряжену іншій координаті світлового конуса. Це дозволяє виразити гамільтоніан через калібрувально-інваріантні поперечні координати і компоненти густини імпульсу суперструни та показати, що у наближенні вільних полів він співпадає з гамільтоніаном IIA суперструни у пласкому суперпросторі у калібруванні світлового конуса.

1.2 Лагранжіве формулювання $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі в термінах форм Картана в конформному базисі

Як зазначалось у вступі, конкретне формулювання гіпотези AdS_4/CFT_3 дуальності було наведено у роботі [146], у якій було побудовано $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформну теорію Черна-Саймонса з полями матерії та знайдено область у просторі її параметрів, де дуальну теорію можна описати в термінах слабковзаємодійних IIA суперструн в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді. Перевірка висунутої гіпотези вимагає розробки квантової теорії суперструн у даному супербекграунді. Передумовою для цього є побудова лагранжіана класичної $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни. Спочатку було знайдено лагранжіан σ-моделі у $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі [154], [155],[21] який є підпростором $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору, а згодом було побудовано і повний лагранжіан суперструни [156].

В роботах [154], [155] лагранжіан $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі було представлено в термінах 1-форм Картана, які відповідають генераторам алгебри $ads(1,3)$. Оскільки у дуальній теорії Черна-Саймонса з полями матерії $OSp(4|6)$ симетрію реалізовано як $\mathcal{N} = 6$ суперконформну симетрію у розмірності $D = 1 + 2$ [194], для перевірки гіпотези AdS_4/CFT_3 дуальності важливо здобути сформулювання лагранжіана σ-моделі в термінах 1-форм Картана, які відповідають генераторам суперконформної алгебри. Аби отримати уявлення про нелінійну структуру лагранжіана σ-моделі, також важливо здобути явні вирази для відповідних форм Картана, вигляд яких визначається елементом $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору.

У пункті 1.2.1 розглядається низка базисів для генераторів $osp(4|6)$ су-

[21] Див. також [193], де розглядалось формулювання $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни з використанням чистих спінорів.

пералгебри та асоційованих з ними форм Картана, зокрема, той, що відповідає її реалізації як $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Також обговорюється $\mathbb{Z}_4$ автоморфізм $osp(4|6)$ супералгебри та базис її генераторів з певними власними значеннями.

У пункті 1.2.2 будуть здобуті різні представлення лагранжіана $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі в термінах форм Картана для генераторів $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Ферміонні рівняння σ-моделі буде представлено у формі подібній до рівнянь суперструн Гріна-Шварца та доведено, що у загальному випадку 8 з 24 рівнянь не є незалежними. Це свідчить про 8-параметричну $\kappa-$інваріантність дії. Також буде наведено явний вигляд перетворень $\kappa-$симетрії, що дозволяє порівняти їх з перетвореннями $\kappa-$симетрії в моделях суперструн Гріна-Шварца. Окрім того, будуть здобуті вирази для форм Картана в термінах координат, які зіставляються генераторам $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри.

1.2.1 Генератори $osp(4|6)$ супералгебри, форми Картана та рівняння Маурера-Картана

Лагранжіан $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі побудовано із відображень на світовий листок 1-форм Картана, вигляд яких визначається елементом $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору $\mathscr{G}$. Лівоковаріантні $osp(4|6)$ 1-форми Картана означаються виразом

$$\mathscr{G}^{-1}d\mathscr{G} = G_{\mathrm{sp}(4)}(d) + G_{\mathrm{so}(6)}(d) + G_{24\mathrm{susy}}(d) \in osp(4|6), \tag{1.1}$$

праву частину якого зручно представити як суму трьох доданків. До перших двох входять добутки форм Картана та генераторів $sp(4) = so(2,3) = ads(1,3) = conf(1,2)$ і $so(6) = su(4)$ підалгебр $osp(4|6)$ супералгебри $\mathfrak{g}$. Останній член включає добутки грассманово-непарних форм Картана з 24 генераторами суперсиметрій. Кожен з трьох членів можна представити декількома способами, які буде розглянуто нижче.

Для першого члена у відповідності до ізоморфних реалізацій $sp(4)$ алгебри наведемо чотири представлення

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{sp}(4)}(d) = G^{\alpha\beta}(d)O_{\alpha\beta} = G^{\underline{mn}}(d)M_{\underline{mn}} \\ = 2G^{0'm'}(d)M_{0'm'} + G^{m'n'}(d)M_{m'n'} \\ = G^{mn}(d)M_{mn} + \omega^m(d)P_m + c^m(d)K_m + \Delta(d)D \in sp(4). \end{aligned} \tag{1.2}$$

У першому з них $O_{\alpha\beta} = O_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots 4)$ є генераторами $sp(4)$ алгебри, а $G^{\alpha\beta}(d)$ є 1-формами Картана.

Друга рівність відповідає ізоморфній реалізації $sp(4)$ як $so(2,3)$ алгебри. $M_{\underline{mn}} = \frac{i}{4}\gamma_{\underline{mn}}{}^{\alpha\beta}O_{\alpha\beta}$ $(\underline{m}, \underline{n} = 0', 0, 1, 2, 3)$ є $so(2,3)$ генераторами, а $\gamma_{\underline{mn}}{}^{\alpha\beta}$ позначає антисиметризований добуток $D = 2 + 3$ γ-матриць (деталі спінорної алгебри наведено у додатку А нашої роботи [182]). $G^{\underline{mn}}(d) = -\frac{i}{2}\gamma^{\underline{mn}}{}_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}(d)$ є $so(2,3)$ формами Картана.

У другому рядку генератори $so(2,3)$ алгебри розкладено на $M_{0'm'}$ та $M_{m'n'}$ $(m', n' = 0, 1, 2, 3)$, що відповідає реалізації $so(2,3)$ алгебри як алгебри ізометрії чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4. Форми Картана $G^{0'm'}(d)$ будуть ототожнені з бозонними компонентами $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 або ж із фільбайном простору AdS_4 у бозонній теорії. $G^{m'n'}(d)$ є 1-формою $so(1,3)$ зв'язності. Співвідношення алгебри $ads(1,3)$

$$\begin{aligned} [M_{0'm'}, M_{0'n'}] = M_{m'n'}, \quad [M_{0'k'}, M_{m'n'}] = \eta_{k'm'}M_{0'n'} - \eta_{k'n'}M_{0'm'}, \\ [M_{k'l'}, M_{m'n'}] = \eta_{k'n'}M_{l'm'} - \eta_{k'm'}M_{l'n'} - \eta_{l'n'}M_{k'm'} + \eta_{l'm'}M_{k'n'} \end{aligned} \tag{1.3}$$

інваріантні відносно двохелементної групи автоморфізму $\mathbb{Z}_2$. Під його дією генератори $M_{0'm'}$ змінюють знак, а генератори $M_{m'n'}$ не змінюються. Цей автоморфізм розширюється до $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму $osp(4|6)$ супералгебри.

В останньому рядку (1.2) наведено ще одну ізоморфну реалізацію $so(2,3)$ алгебри як $conf(1,2)$ конформної алгебри $D = 1+2$ простору Мінковського. Ми додержуємось наступних означень генераторів дилатацій, трансляцій, конформних бустів

$$D = -2M_{0'3}, \quad P_m = M_{0'm} - M_{3m}, \quad K_m = M_{0'm} + M_{3m}, \quad m = 0, 1, 2$$

та відповідних форм Картана

$$\Delta(d)=-G^{0'3}(d),\ \omega^m(d)=G^{0'm}(d)-G^{3m}(d),\ c^m(d)=G^{0'm}(d)+G^{3m}(d). \quad (1.4)$$

Для другого доданку в (1.1) наведемо три представлення

$$G_{\mathrm{so}(6)}(d) = \Omega^{IJ}(d)V^{IJ} = \Omega_A{}^B(d)V_B{}^A = \Omega_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d)V_{\hat{b}}{}^{\hat{a}}. \quad (1.5)$$

У першому з них $V^{IJ} = -V^{JI}$ є генераторами $so(6)$ алгебри, а $\Omega^{IJ}(d)$ – відповідні форми Картана. Друге представлення відповідає ізморфній реалізації $so(6)$ алгебри як $su(4)$ алгебри. Форми Картана та генератори у цьому представленні є безслідовими і зв'язані з генераторами $so(6)$ алгебри та формами Картана наступним чином

$$\Omega_A{}^B(d) = \frac{i}{2}\Omega^{IJ}(d)\rho^{IJ}{}_A{}^B = \begin{pmatrix} \Omega_a{}^b(d) & \Omega_a{}^4(d) \\ \Omega_4{}^b(d) & \Omega_4{}^4(d) \end{pmatrix}, \quad \Omega_4{}^4(d) = -\Omega_a{}^a(d) \quad (1.6)$$

та

$$V_A{}^B = \frac{i}{4}\rho^{IJ}{}_A{}^B V^{IJ} = \begin{pmatrix} V_a{}^b & V_a{}^4 \\ V_4{}^b & V_4{}^4 \end{pmatrix}, \quad V_4{}^4 = -V_a{}^a, \quad (1.7)$$

де $\rho^{IJ}{}_A{}^B = \frac{1}{2}(\rho^I_{AC}\tilde{\rho}^{JCB} - \rho^J_{AC}\tilde{\rho}^{ICB})$ – $so(6)$ генератори у спінорному представленні, реалізовані $D = 6$ кіральними γ-матрицями ρ^I_{AB} та $\tilde{\rho}^{IAB}$ антисиметричними за спінорними індексами. В (1.6) і (1.7) також наведено розклади форм Картана та генераторів на незвідні $su(3)$ представлення. 1-форми $\Omega_a{}^4(d)$ та $\Omega_4{}^a(d)$ ототожнюються з компонентами комплексного фільбайна $\mathbb{CP}^3$ багатовиду, $\Omega_a{}^b(d)$ – з 1-формою $u(3)$ зв'язності. Відповідно $V_a{}^b$ є генераторами $u(3) \subset su(4)$ підалгебри, тоді як $V_a{}^4$ і $V_4{}^a$ – генератори $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри. Після розкладення генераторів $su(4)$ алгебри на незвідні $su(3)$ представлення стає наочною інваріантність її комутаційних співвідношень

$$\left[V_a{}^4, V_4{}^b\right] = i(V_a{}^b + \delta_a^b V_c{}^c), \quad \left[V_a{}^b, V_c{}^d\right] = i(\delta_c^b V_a{}^d - \delta_a^d V_c{}^b),$$
$$\left[V_a{}^4, V_b{}^c\right] = -i\delta_a^c V_b{}^4, \quad \left[V_4{}^a, V_b{}^c\right] = i\delta_b^a V_4{}^c$$

при заміні знака генераторів $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри подібно до згаданого вище $\mathbb{Z}_2$ автоморфізму $ads(1,3)$ алгебри (1.3).

Третє представлення в (1.5) наведено в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі, який відповідає розкладу $D = 6$ вектора на $su(3)$ представлення: $\mathbf{6} = \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$. Зв'язок між цим та звичайним базисами дається співвідношеннями $O^I = M^{I\hat{a}} O_{\hat{a}}$ та $O_{\hat{a}} = M^{-1}_{\hat{a}I} O^I$, де $O_{\hat{a}}$ – компоненти вектора в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі. Вигляд трансформаційних матриць

$$M^{I\hat{a}} = \frac{1}{2}(\tilde{\rho}^{Ia4},\ \rho^I_{a4}), \quad M^{-1}_{\hat{a}I} = \left(\begin{array}{c} \rho^I_{4a} \\ \tilde{\rho}^{I4a} \end{array} \right) : \quad MM^{-1} = I$$

визначається матрицями ρ^I_{AB} та $\tilde{\rho}^{IAB}$ розкладеними на $su(3)$-коваріантні блоки. Трансформаційні матриці задовольняють співвідношення $\delta^{IJ} = -2M^{I\hat{a}} H_{\hat{a}\hat{b}} M^{\mathrm{T}\,\hat{b}J}$ й $\delta_{IJ} = -\frac{1}{2} M^{-1\mathrm{T}}_{I\hat{a}} H^{\hat{a}\hat{b}} M^{-1}_{\hat{b}J}$, де симетричні матриці

$$H_{\hat{a}\hat{b}} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \delta^b_a \\ \delta^a_b & 0 \end{array} \right), \quad H^{\hat{a}\hat{b}} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \delta^a_b \\ \delta^b_a & 0 \end{array} \right)$$

є метричними тензорами в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі. Форми Картана та генератори $so(6)$ алгебри у цьомі базисі зв'язані з формами Картана та генераторами у звичайному базисі співвідношеннями

$$\Omega_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) = 2iM^{-1}_{\hat{a}I} \Omega^I{}_J(d) M^{J\hat{b}} = \left(\begin{array}{cc} \Omega_a{}^b(d) - \delta^b_a \Omega_c{}^c(d) & \varepsilon_{acb} \Omega_4{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb} \Omega_c{}^4(d) & -\Omega_b{}^a(d) + \delta^a_b \Omega_c{}^c(d) \end{array} \right) \tag{1.8}$$

та

$$V_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = \frac{i}{2} M^{-1}_{\hat{a}I} V^I{}_J M^{J\hat{b}} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} V_a{}^b - \delta^b_a V_c{}^c & \varepsilon_{acb} V_4{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb} V_c{}^4 & -V_b{}^a + \delta^a_b V_c{}^c \end{array} \right). \tag{1.9}$$

Третій доданок у (1.1) включає добутки грассманово-непарних форм Картана з 24 генераторами суперсиметрії з $osp(4|6)$ супералгебри

$$G_{24\mathrm{susy}}(d) = \mathsf{F}^\alpha_I(d) \mathsf{O}^I_\alpha = \mathsf{F}^{\alpha\hat{a}}(d) \mathsf{O}_{\alpha\hat{a}} = \bar{F}^{\alpha a}(d) \bar{\mathsf{O}}_{\alpha a} + \mathsf{F}^\alpha_a(d) \mathsf{O}^a_\alpha. \tag{1.10}$$

Як $\mathsf{F}^\alpha_I(d)$, так і O^I_α є 4-компонентними майоранівськими $spin(2,3)$ спінорами та $D = 6$ векторами. У другій рівності (1.10) їх представлено у $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$

базисі: $\mathsf{F}^{\alpha\hat{a}}(d) = M^{\mathrm{T}\hat{a}I}\mathsf{F}_I^{\alpha}$, $\mathsf{O}_{\alpha\hat{a}} = M_{\hat{a}I}^{-1}\mathsf{O}_{\alpha}^{I}$. Генератори суперсиметрії можна розкласти на генератори суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії з $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри

$$\mathsf{O}_{\alpha\hat{a}} = \begin{pmatrix} Q_{\mu\hat{a}} \\ S^{\mu}_{\hat{a}} \end{pmatrix}: \quad Q_{\mu\hat{a}} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{\mu a} \\ Q^{a}_{\mu} \end{pmatrix}, \quad S^{\mu}_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \bar{S}^{\mu}_{a} \\ S^{\mu a} \end{pmatrix}.$$

Вони є двокомпонентними $sl(2,\mathbb{R}) = so(1,2)$ спінорами у (анти)фундаментальному представленні $su(3)$ алгебри ермітово спряженими один одному $\bar{Q}_{\mu a} = (Q^{a}_{\mu})^{\dagger}$, $\bar{S}^{\mu}_{a} = (S^{\mu a})^{\dagger}$. Для форм Картана справедливі аналогічні розклади

$$\mathsf{F}^{\alpha\hat{a}}(d) = \begin{pmatrix} \omega^{\mu\hat{a}}(d) \\ \chi^{\hat{a}}_{\mu}(d) \end{pmatrix}: \quad \omega^{\mu\hat{a}}(d) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{\mu a}(d) \\ \omega^{\mu}_{a}(d) \end{pmatrix}, \quad \chi^{\hat{a}}_{\mu}(d) = \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{a}_{\mu}(d) \\ \chi_{\mu a}(d) \end{pmatrix},$$

при чому $\bar{\omega}^{\mu a}(d) = (\omega^{\mu}_{a}(d))^{\dagger}$, $\bar{\chi}^{a}_{\mu}(d) = (\chi_{\mu a}(d))^{\dagger}$. Тому $G_{24\mathrm{susy}}(d)$ можна представити наступним чином

$$G_{24\mathrm{susy}}(d) = \omega^{\mu}_{a}(d)Q^{a}_{\mu} + \bar{\omega}^{\mu a}(d)\bar{Q}_{\mu a} + \chi_{\mu a}(d)S^{\mu a} + \bar{\chi}^{a}_{\mu}(d)\bar{S}^{\mu}_{a}. \tag{1.11}$$

Таким чином, ми означили ізоморфну реалізацію $osp(4|6)$ супералгебри як $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Цю реалізацію буде використано при подальшому викладенні.

Враховуючи, що існує базис $osp(4|6)$ супералгебри $\mathfrak{g}$, в якому генератори мають визначені власні значення відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму Υ: $\Upsilon(\mathfrak{g}_{\mathrm{j}}) = e^{i\pi\mathrm{j}/2}\mathfrak{g}_{\mathrm{j}}$, її співвідношення можна записати у стислій формі

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mathrm{j}=0}^{3}\mathfrak{g}_{\mathrm{j}}: \quad \{\mathfrak{g}_{\mathrm{i}}, \mathfrak{g}_{\mathrm{j}}] = g_{\mathrm{i}+\mathrm{j}(\mathrm{mod}\,4)}.$$

Цей автоморфізм є розширенням згаданих автоморфізмів $so(2,3)$ та $su(4)$ алгебр. Генераторам у цьому базисі можна зіставити форми Картана $\mathfrak{c}^{\mathrm{j}}(d)$, тоді (1.1) набуває вигляду

$$\mathscr{G}^{-1}d\mathscr{G} = \sum_{\mathrm{j}\in\{0,1,2,3\}} G_{\mathrm{j}}(d) = \sum_{\mathrm{j}\in\{0,1,2,3\}} \mathfrak{c}^{\mathrm{j}}(d)\mathfrak{g}_{\mathrm{j}}. \tag{1.12}$$

Явний вигляд кожного з доданків є таким

$$G_{\mathfrak{0}}(d) = G^{mn}(d)M_{mn} + 2G^{3m}(d)M_{3m} + \Omega_a{}^b(d)V_b{}^a + \Omega_4{}^4(d)V_4{}^4$$
$$= G^{mn}(d)M_{mn} + \tfrac{1}{2}(c^m(d) - \omega^m(d))(K_m - P_m) + \Omega_a{}^b(d)V_b{}^a + \Omega_4{}^4(d)V_4{}^4,$$

$$G_{\mathfrak{2}}(d) = 2G^{0'm}(d)M_{0'm} + 2G^{0'3}(d)M_{0'3} + \Omega_a{}^4(d)V_4{}^a + \Omega_4{}^a(d)V_a{}^4$$
$$= \tfrac{1}{2}(c^m(d) + \omega^m(d))(K_m + P_m) + \Delta(d)D + \Omega_a{}^4(d)V_4{}^a + \Omega_4{}^a(d)V_a{}^4,$$
$$G_{\mathfrak{1}}(d) = \omega_{(1)}{}_a^{\mu}(d)Q_{(1)}{}_{\mu}^{a} + \bar{\omega}^{\mu a}_{(1)}(d)\bar{Q}_{(1)\mu a}, \qquad (1.13)$$
$$G_{\mathfrak{3}}(d) = \omega_{(3)}{}_a^{\mu}(d)Q_{(3)}{}_{\mu}^{a} + \bar{\omega}^{\mu a}_{(3)}(d)\bar{Q}_{(3)\mu a}. \qquad (1.14)$$

В (1.13) та (1.14) генератори з власних просторів $\mathfrak{g}_{\mathfrak{1}}$ і $\mathfrak{g}_{\mathfrak{3}}$ визначаються лінійними комбінаціями генераторів суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії

$$Q_{(1,3)}{}_{\mu}^{a} = Q^a_\mu \pm iS^a_\mu, \quad \bar{Q}_{(1,3)\mu a} = \bar{Q}_{\mu a} \mp i\bar{S}_{\mu a}. \qquad (1.15)$$

Відповідні форми Картана дорівнюють

$$\omega_{(1,3)}{}_a^{\mu}(d) = \frac{1}{2}(\omega^\mu_a(d) \pm i\chi^\mu_a(d)), \quad \bar{\omega}^{\mu a}_{(1,3)}(d) = \frac{1}{2}(\bar{\omega}^{\mu a}(d) \mp i\bar{\chi}^{\mu a}(d)). \qquad (1.16)$$

Ці генератори можна також записати через 4-компонентні спінори

$$P_{+\alpha}{}^{\beta}\mathsf{O}^a_\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_{(1)}{}_{\mu}^{a} \\ -iQ^{\mu a}_{(1)} \end{pmatrix}, \quad P_{-\alpha}{}^{\beta}\bar{\mathsf{O}}_{\beta a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{Q}_{(1)\mu a} \\ i\bar{Q}_{(1)}{}_a^{\mu} \end{pmatrix}$$

та

$$P_{-\alpha}{}^{\beta}\mathsf{O}^a_\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_{(3)}{}_{\mu}^{a} \\ iQ^{\mu a}_{(3)} \end{pmatrix}, \quad P_{+\alpha}{}^{\beta}\bar{\mathsf{O}}_{\beta a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{Q}_{(3)\mu a} \\ -i\bar{Q}_{(3)}{}_a^{\mu} \end{pmatrix}$$

за допомогою $D = 1 + 3$ кіральних проєкторів

$$P_{\pm}{}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{2}(\delta^\beta_\alpha \pm i\Gamma^{5\,\beta}_{\alpha}), \quad \Gamma^{5\,\beta}_{\alpha} = (\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3)_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{\mu\nu} \\ -\varepsilon^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вони задовольняють визначальні співвідношення $P_+ + P_- = I$, $P_\pm P_\pm = P_\pm$, $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, а також $(P_{\pm}{}_\alpha{}^\beta)^{\mathrm{T}} = P_{\pm}{}^\beta{}_\alpha$, $(P_{\pm}{}_\alpha{}^\beta)^\dagger = P_{\pm}{}_\beta{}^\alpha$. Інші співвідношення, які задовольняють проєктори, а також подробиці означення

γ-матриць у розмірності $D=1+3$ та їх зв'язок з γ-матрицями у розмірностях $D=2+3$ і $D=1+2$ наведено в нашій роботі [182].

Подібним чином можна записати й форми Картана з (1.16)

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{+a}{}^{\alpha}(d)=\mathsf{F}_a^{\beta}(d)P_{+\beta}{}^{\alpha}=\Big(\omega_{(1)a}{}^{\mu}(d)\quad -i\omega_{(1)\mu a}(d)\Big)\,,\\ \bar{\mathsf{F}}_-^{\alpha a}(d)=\bar{\mathsf{F}}^{\beta a}(d)P_{-\beta}{}^{\alpha}=\Big(\bar{\omega}_{(1)}^{\mu a}(d)\ \ i\bar{\omega}_{(1)\mu}{}^{a}(d)\Big) \end{aligned} \tag{1.17}$$

та

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{-a}{}^{\alpha}(d)=\mathsf{F}_a^{\beta}(d)P_{-\beta}{}^{\alpha}=\Big(\omega_{(3)a}{}^{\mu}(d)\ \ i\omega_{(3)\mu a}(d)\Big)\,,\\ \bar{\mathsf{F}}_+^{\alpha a}(d)=\bar{\mathsf{F}}^{\beta a}(d)P_{+\beta}{}^{\alpha}=\Big(\bar{\omega}_{(3)}^{\mu a}(d)\quad -i\bar{\omega}_{(3)\mu}{}^{a}(d)\Big)\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Обидва представлення для форм Картана (1.16) та (1.17), (1.18) будуть використані в наступному пункті аби представити у різних формах лагранжіан Весса-Зуміно σ-моделі.

Для посилання при подальшому викладенні наведемо також рівняння Маурера-Картана для форм Картана, які входять до лагранжіана $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі. У базисі, який відповідає реалізації $so(2,3)$ алгебри як $ads(1,3)$, вони мають вигляд

$$\begin{gathered} dG^{0'm'}(d)-2G^{m'}{}_{n'}(d)\wedge G^{0'n'}(d)-i\mathsf{F}_a^{\alpha}(d)\wedge\gamma^{0'm'}_{\alpha\beta}\bar{\mathsf{F}}^{\beta a}(d)=0,\\ d\Omega_a{}^4(d)+i\Omega_{+a}{}^b(d)\wedge\Omega_b{}^4(d)-\varepsilon_{abc}\bar{\mathsf{F}}^{\alpha b}(d)\wedge C_{\alpha\beta}\bar{\mathsf{F}}^{\beta c}(d)=0,\\ d\Omega_4{}^a(d)+i\Omega_4{}^b(d)\wedge\Omega_{+b}{}^a(d)+\varepsilon^{abc}\mathsf{F}_b^{\alpha}(d)\wedge C_{\alpha\beta}\mathsf{F}_c^{\beta}(d)=0,\\ d\mathsf{F}_a^{\alpha}(d)+\frac{1}{2}\mathsf{F}_a^{\beta}(d)\wedge(2G_{0'm'}(d)\gamma^{0'm'}{}_{\alpha}{}^{\beta}+G_{m'n'}(d)\gamma^{m'n'}{}_{\alpha}{}^{\beta})\\ +i\Omega_{-a}{}^b(d)\wedge\mathsf{F}_b^{\alpha}(d)+i\varepsilon_{acb}\Omega_4{}^c(d)\wedge\bar{\mathsf{F}}^{\alpha b}(d)=0,\\ d\bar{\mathsf{F}}^{\alpha a}(d)+\frac{1}{2}\bar{\mathsf{F}}^{\beta a}(d)\wedge(2G_{0'm'}(d)\gamma^{0'm'}{}_{\alpha}{}^{\beta}+G_{m'n'}(d)\gamma^{m'n'}{}_{\alpha}{}^{\beta})\\ +i\bar{\mathsf{F}}^{\alpha b}(d)\wedge\Omega_{-b}{}^a(d)-i\varepsilon^{acb}\Omega_c{}^4(d)\wedge\mathsf{F}_b^{\alpha}(d)=0, \end{gathered} \tag{1.19}$$

де $\Omega_{\pm a}{}^b(d)=\Omega_a{}^b(d)\pm\delta_a^b\Omega_c{}^c(d)$, а $\wedge$ позначає зовнішній добуток диференційних форм. Іншим важливим представленням рівнянь Маурера-Картана є представлення в термінах форм Картана, які відповідають генераторам $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри

$$
\begin{gathered}
d\omega^m(d)-2\Delta(d)\wedge\omega^m(d)-2G^m{}_n(d)\wedge\omega^n(d)+2i\omega^\mu_a(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\bar\omega^{\nu a}(d)=0,\\
dc^m(d)+2\Delta(d)\wedge c^m(d)-2G^m{}_n(d)\wedge c^n(d)+2i\chi_{\mu a}(d)\wedge\tilde\sigma^{m\mu\nu}\bar\chi^a_\nu(d)=0,\\
d\Delta(d)-\omega^m(d)\wedge c_m(d)-i(\bar\omega^{\mu a}(d)\wedge\chi_{\mu a}(d)+\omega^\mu_a(d)\wedge\bar\chi^a_\mu(d))=0,\\
d\Omega_a{}^4(d)+i\Omega_{+a}{}^b(d)\wedge\Omega_b{}^4(d)-2\varepsilon_{abc}\bar\omega^{\mu b}(d)\wedge\bar\chi^c_\mu(d)=0,\\
d\Omega_4{}^a(d)+i\Omega_4{}^b(d)\wedge\Omega_{+b}{}^a(d)+2\varepsilon^{abc}\omega^\mu_b(d)\wedge\chi_{\mu c}(d)=0
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

та

$$
\begin{gathered}
d\omega^\mu_{\hat a}(d)-\Delta(d)\wedge\omega^\mu_{\hat a}(d)+\tfrac12\omega^\nu_{\hat a}(d)\wedge G_{mn}(d)\sigma^{mn}{}_\nu{}^\mu\\
+\omega^m(d)\wedge\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\chi_{\nu\hat a}(d)+i\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d)\wedge\omega^\mu_{\hat b}(d)=0,\\
d\chi_{\mu\hat a}(d)+\Delta(d)\wedge\chi_{\mu\hat a}(d)+\tfrac12 G_{mn}(d)\wedge\sigma^{mn}{}_\mu{}^\nu\chi_{\nu\hat a}(d)\\
-c_m(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\omega^\nu_{\hat a}(d)+i\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d)\wedge\chi_{\mu\hat b}(d)=0,
\end{gathered}
\tag{1.21}
$$

де матриці

$$\sigma^m_{\mu\nu}=(I,\sigma^1,-\sigma^3),\quad \tilde\sigma^{m\mu\nu}=\varepsilon^{\mu\lambda}\varepsilon^{\nu\rho}\sigma^m_{\lambda\rho}=(I,-\sigma^1,\sigma^3)$$

є аналогами релятивістських матриць Паулі у розмірності $D=1+2$ та $\sigma^{mn}{}_\mu{}^\nu=\frac12(\sigma^m_{\mu\lambda}\tilde\sigma^{n\lambda\nu}-\sigma^n_{\mu\lambda}\tilde\sigma^{m\lambda\nu})$, $\tilde\sigma^{mn\mu}{}_\nu=-\sigma^{mn}{}_\nu{}^\mu$.

1.2.2 Лагранжіан $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі

Як і у випадку суперструн Гріна-Шварца дія $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі є сумою кінетичного члена та члена Весса-Зуміно

$$
\begin{gathered}
S_{\sigma-\mathrm{model}}=S_{\sigma-\mathrm{model,\,kin}}+S_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}}:\\
S_{\sigma-\mathrm{model,\,kin}}=\int_\Sigma d^2\xi\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model,\,kin}},\quad S_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}}=\int_\Sigma d^2\xi\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}}
\end{gathered}
\tag{1.22}
$$

де ξ^i – локальні координати світового листка Σ. Лагранжіан σ-моделі будується з відображень на світовий листок форм Картана, ототожнених з компонентами $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперфільбайна, за допомогою того ж методу, який було розроблено для побудови лагранжіана $AdS_5\times S^5$ суперструни [136], [137], [138].

Кінетичний член Полякова має таку ж форму, як і для суперструн Гріна-Шварца у викривленому просторі, зокрема, у $AdS_5\times S^5$ супербекграунді. Його можна представити у вигляді відображення на світовий листок просторово-часової метрики

$$\mathscr{L}_{\sigma-\text{model, kin}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(g^{AdS_4}_{ij}+g^{CP^3}_{ij}), \tag{1.23}$$

де $g^{AdS_4}_{ij} = G_i{}^{0'm'}\eta_{m'n'}G_j{}^{0'n'}$ і $g^{CP^3}_{ij} = \frac{1}{2}(\Omega_{i\,a}{}^4\Omega_{j\,4}{}^a + \Omega_{j\,a}{}^4\Omega_{i\,4}{}^a)$ є внесками до індукованої листкової метрики, які визначаються метричними тензорами просторів AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$.[22] Їх побудовано з $so(2,3)/so(1,3)$ і $su(4)/u(3)$ форм Картана, які визначають фільбайни цих просторів. γ є детермінантом допоміжної листкової метрики γ_{ij}, а γ^{ij} – оберненою метрикою. Лагранжіан (1.23) інваріантний відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму, під дією якого ці форми Картана змінюють знак. $g^{AdS_4}_{ij}$ можна представити в термінах форм Картана для генераторів конформної алгебри $conf(1,2)$. Використання (1.4) приводить до таких виразів для компонентів AdS_4 фільбайна

$$G^{0'm}(d) = \frac{1}{2}(\omega^m(d)+c^m(d)), \quad G^{0'3}(d) = -\Delta(d). \tag{1.24}$$

Тоді лагранжіан (1.23) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\sigma-\text{model, kin}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\,\Big(&\tfrac{1}{4}(\omega^m_i + c^m_i)(\omega_{jm}+c_{jm}) + \Delta_i\Delta_j\\ &+\tfrac{1}{2}(\Omega_{ia}{}^4\Omega_{j4}{}^a + \Omega_{ja}{}^4\Omega_{i4}{}^a)\Big)\,.\end{aligned} \tag{1.25}$$

$OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-модель належить до сімейства σ-моделей у суперсиметричних фактор-просторах $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ із супералгебрами ізометрії

[22] У цьому та наступному розділах припускається, що суперпросторові координати є безрозмірними, а квадрат просторово-часового інтервалу відтак включає загальний фактор R^2, де R – радіус семивимірної сфери S^7. Тоді до лагранжіанів суперструни та σ-моделі як загальний фактор входить безрозмірний натяг $\widetilde{T}_{\text{string}} = \frac{R^2}{2\pi\alpha'}$, який покладається рівним одиниці. Зазначимо, що в M-теорії параметр нахилу траєкторій Редже α' виражається через довжину Планка у розмірності $D=11$ l_{P} та струнну константу взаємодії g_{s}: $\alpha' = g_{\text{s}}^{-2/3}l^2_{\text{P}}$. У випадку AdS_4/CFT_3 дуальності, що розглядається, струнна константа взаємодії дорівнює $g_{\text{s}} = (\frac{R}{kl_{\text{P}}})^{3/2} \ll 1$.

$\mathfrak{g}$ інваріантними відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму [195]. Характерною ознакою його є те, що інваріантним підпростором є алгебра стабільності $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Лагранжіани Весса-Зуміно для σ-моделей з цього сімейства мають такий загальний вигляд [23]

$$\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}} = \mathrm{sTr}\, G_1(d) \wedge G_3(d),$$

де sTr позначає суперслід добутку суперматриць у суперматричній реалізації генераторів $\mathfrak{g}$. На відміну від лагранжіанів Весса-Зуміно суперструн Гріна-Шварца у пласкому бекграунді [56] він дається відображенням на світовий листок 2-форми, побудованої із зовнішнього добутку грассманово-непарних форм Картана. Детальне обговорення властивостей члена Весса-Зуміно струн у AdS супербекграундах можна знайти, наприклад, у роботі [196].

В наших роботах [182] та [183] було здобуто низку нових представлень для лагранжіана Весса-Зуміно $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі. Зокрема, його можна записати в термінах $sl(2,\mathbb{R})$ спінорних форм Картана (1.16), які зіставляються генераторам (1.15) з власних просторів $\mathfrak{g}_1$ та $\mathfrak{g}_3$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}} &= -\varepsilon_{\mu\nu}(\omega_{(1)a}{}^{\mu}(d) \wedge \bar{\omega}^{\nu a}_{(3)}(d) + \omega_{(3)a}{}^{\mu}(d) \wedge \bar{\omega}^{\nu a}_{(1)}(d)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\omega^{\mu}_{a}(d) \wedge \varepsilon_{\mu\nu}\bar{\omega}^{\nu a}(d) + \chi_{\mu a}(d) \wedge \varepsilon^{\mu\nu}\bar{\chi}^{a}_{\nu}(d)\right).\end{aligned} \tag{1.26}$$

У другому рядку лагранжіан Весса-Зуміно виражено через форми Картана для генераторів суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії. Лагранжіан (1.26) також можна представити у $so(6)$-інваріантній формі в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі для $D = 6$ векторів

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model,\,WZ}} &= \tfrac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\left(\omega_{(1)\hat{b}}{}^{\mu}(d) \wedge \omega^{\nu\hat{a}}_{(3)}(d) + \omega_{(3)\hat{b}}{}^{\mu}(d) \wedge \omega^{\nu\hat{a}}_{(1)}(d)\right) \\ &= \tfrac{i}{8}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\left(\omega^{\mu}_{\hat{b}}(d) \wedge \varepsilon_{\mu\nu}\omega^{\nu\hat{a}}(d) + \chi_{\mu\hat{b}}(d) \wedge \varepsilon^{\mu\nu}\chi^{\hat{a}}_{\nu}(d)\right),\end{aligned} \tag{1.27}$$

[23] Як і для суперструн Гріна-Шварца лагранжіани Весса-Зуміно σ-моделей означені з точністю до знака. Ця неоднозначність сумісна з κ-інваріантністю дії.

де антисиметрична матриця

$$\mathfrak{J}_{\hat{a}\hat{b}} = \mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{c}} H_{\hat{c}\hat{b}} = 2i \begin{pmatrix} 0 & \delta_a^b \\ -\delta_b^a & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

означає компоненти келерової 2-форми простору $\mathbb{CP}^3$.[24]

Нові представлення лагранжіана $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі (1.25), (1.26) і (1.27) віднесено до результатів, які виносяться на захист.

Лагранжіан Весса-Зуміно набуває більш компактної форми, якщо його виразити в термінах грассманово-непарних форм Картана, які є 4-компонентними $spin(1,3)$ спінорами

$$\mathscr{L}_{\sigma-\text{model, WZ}} = \frac{i}{2}\mathsf{F}_a^\alpha(d)\wedge C'_{\alpha\beta}\bar{\mathsf{F}}^{\beta a}(d) = \frac{1}{8}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\mathsf{F}_{\hat{b}}^\alpha(d)\wedge C'_{\alpha\beta}\mathsf{F}^{\beta\hat{a}}(d),$$

де $C'_{\alpha\beta}$ є антисиметричною матрицею зарядового спряження у розмірності $D = 1+3$. В термінах форм Картана (1.17) та (1.18) лагранжіан Весса-Зуміно можна записати як

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\sigma-\text{model, WZ}} &= \tfrac{i}{2}(\mathsf{F}_{+a}{}^{\alpha}(d)\wedge C'_{\alpha\beta}\bar{\mathsf{F}}_{+}^{\beta a}(d) + \mathsf{F}_{-a}{}^{\alpha}(d)\wedge C'_{\alpha\beta}\bar{\mathsf{F}}_{-}^{\beta a}(d)) \\ &= \tfrac{1}{4}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\mathscr{F}_{+\hat{b}}^{\mathrm{T}\alpha}(d)\wedge C'_{\alpha\beta}\mathscr{F}_{-}^{\beta\hat{a}}(d),\end{aligned}$$

де 1-форми

$$\mathscr{F}_{+\hat{a}}^{\mathrm{T}\alpha}(d) = \left(\mathsf{F}_{+a}{}^{\alpha}(d)\ \bar{\mathsf{F}}_{-}^{\alpha a}(d)\right), \quad \mathscr{F}_{-}^{\alpha\hat{a}}(d) = \begin{pmatrix} \bar{\mathsf{F}}_{+}^{\alpha a}(d) \\ \mathsf{F}_{-a}{}^{\alpha}(d), \end{pmatrix}$$

які є $spin(1,3)$ спінорами та $D=6$ векторами у $\mathbf{3}\oplus\bar{\mathbf{3}}$ базисі й відтак мають 24 дійсні компоненти, буде використано нижче для запису ферміонних рівнянь та перетворень κ-симетрії σ-моделі у формі подібній до ферміонних рівнянь та перетворень κ-симетрії суперструн Гріна-Шварца.

[24] У звичайному базисі для $D=6$ векторів відповідний вираз для компонентів келерової 2-форми є таким $J^{IJ} = \frac{i}{2}(\rho^I_{4a}\tilde{\rho}^{J4a} - \rho^J_{4a}\tilde{\rho}^{I4a})$. Після згортки з $so(6)$ генераторами у спінорному представленні вони утворюють 4×4 діагональну матрицю

$$J_A{}^B = J^{IJ}\rho^{IJ}{}_A{}^B = \begin{pmatrix} -2i\delta_a^b & 0 \\ 0 & 6i \end{pmatrix}.$$

Можна показати, що матриця $J_A{}^B$ задовольняє рівняння $J_A{}^C J_C{}^B - 4iJ_A{}^B + 12\delta_A^B = 0$.

Для цього розглянемо внесок ферміонних форм Картана до варіації дії (1.22). Будемо використовувати рівняння Маурера-Картана (1.19) та відомий загальний вираз для варіації диференційної форми

$$\delta F(d) = d(i_\delta F(d)) + i_\delta(dF(d)), \tag{1.29}$$

де оператор i_δ замінює диференціал варіацією та діє на добуток форм як і оператор зовнішнього диференціювання у відповідності до правила Лейбниця. Тоді здобуваємо такий вираз для шуканої варіації

$$\begin{aligned} \delta_f S_{\sigma-\text{model}} = \int\limits_{\Sigma} d^2\xi \, \Big(& \mathscr{F}_{+i}^{\mathrm{T}\alpha\hat{a}} V_-^{ij} M_{j\alpha\hat{a}}{}^{\beta\hat{b}} C_{\beta\gamma} \mathscr{F}_{+\hat{b}}{}^{\gamma}(\delta) \\ & + \mathscr{F}_{-i}^{\mathrm{T}\alpha\hat{a}} V_+^{ij} M_{j\alpha\hat{a}}{}^{\beta\hat{b}} C_{\beta\gamma} \mathscr{F}_{-\hat{b}}{}^{\gamma}(\delta) \Big) . \end{aligned} \tag{1.30}$$

Варіація (1.30) включає матрицю

$$M_{i\alpha\hat{a}}{}^{\beta\hat{b}} = \begin{pmatrix} -\delta_a^b G_i{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'}{}_\alpha{}^\beta & \delta_\alpha^\beta \varepsilon_{acb} \Omega_{i4}{}^c \\ -\delta_\alpha^\beta \varepsilon^{acb} \Omega_{ic}{}^4 & -\delta_b^a G_i{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'}{}_\alpha{}^\beta \end{pmatrix},$$

до якої входять листкові проєкції фільбайнів AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$ просторів $G_i{}^{0'}{}_{m'}$, $\Omega_{i4}{}^c$ і $\Omega_{ic}{}^4$, а також листкові проєктори

$$V_\pm^{ij} = \frac{1}{2}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij} \pm \varepsilon^{ij}). \tag{1.31}$$

Ті ж проєктори входять до ферміонних рівнянь та перетворень κ-симетрії суперструн Гріна-Шварца. Вони задовольняють такі співвідношення

$$\begin{gathered} V_+^{ij} + V_-^{ij} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}, \quad V_\pm^{ik}\gamma_{kl}V_\pm^{jl} = 0, \\ V_\pm^{ik}\gamma_{kl}V_\pm^{lj} = \sqrt{-\gamma}V_\pm^{ij}, \quad V_\pm^{ij}V_\pm^{kl} = V_\pm^{kj}V_\pm^{il} \end{gathered}$$

та дозволяють розкласти $D = 1+1$ вектор $v_i = (v_\tau, v_\sigma)$ за базисом із світлоподібних векторів (див., наприклад, [197])

$$\begin{gathered} V_\pm^{ij} v_j = V_\pm^i v_{\mp\tau}, \quad V_\pm^i = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{-\gamma}\gamma^{\tau\sigma} \mp 1}{\sqrt{-\gamma}\gamma^{\tau\tau}} \end{pmatrix}, \\ v_{\mp\tau} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\tau\tau} v_\tau + (\sqrt{-\gamma}\gamma^{\tau\sigma} \pm 1) v_\sigma, \end{gathered}$$

де $V_{\pm}^{i}$ – базисні вектори. У конформному калібруванні для метрики $\gamma_{ij} = e^{\lambda}\eta_{ij}$ $v_{\pm\tau}$ дорівнюють компонентам вектора у базисі світлового конуса. Розгляд компонентів $\mathscr{F}_{\pm\hat{a}}^{\ \alpha}(\delta)$ як незалежних параметрів варіації приводить до ферміонних рівнянь $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі

$$V_{\mp}^{ij} M_{j}^{\mathrm{T}\alpha\hat{a}}{}_{\beta\hat{b}} \mathscr{F}_{\pm i}^{\beta\hat{b}} = 0, \tag{1.32}$$

до яких входять 24×24 матриці

$$V_{\pm}^{i} M_{\mp}^{\mathrm{T}\alpha\hat{a}}{}_{\beta\hat{b}} = V_{\pm}^{ij} M_{j}{}^{\mathrm{T}\alpha\hat{a}}{}_{\beta\hat{b}}. \tag{1.33}$$

Здобуті рівняння (1.32) мають таку ж структуру як і ферміонні рівняння суперструн Гріна-Шварца, що дає можливість встановити динаміку скількох фізичних ферміонних ступенів свободи описує $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-модель у порівнянні з IIA суперструною. Як відомо 32×32 матриці, які входять до ферміонних рівнянь суперструн Гріна-Шварца типу II, мають половину нульових власних значень з урахуванням рівнянь для допоміжної метрики γ^{ij}. Тому половина з них є лінійно залежними, що згідно другої теореми Ньотер свідчить про інваріантність суперструн відносно локальної 16-параметричної κ-симетрії, а незалежні рівняння визначають динаміку 16 фізичних ферміонних полів суперструн. Для того аби показати, що σ-модель також описує динаміку 16 фізичних ферміонних полів, необхідно обчислити ранг матриць (1.33).

Це можна зробити використовуючи перетворення, яке не змінює ранг та приводить їх до трикутної форми

$$\begin{pmatrix} \delta_b^a G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_{\beta} & \delta_\beta^\alpha \varepsilon^{acb}\Omega_{\pm\tau c}{}^{4} \\ 0 & -\frac{\Omega_{\pm\tau a}{}^{4}\Omega_{\pm\tau 4}{}^{b}}{G_{\pm\tau}{}^{0'm'}G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_{\beta} \end{pmatrix} = A_{\pm}B_{\pm}, \tag{1.34}$$

де $G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}$, $\Omega_{\pm\tau 4}{}^{a}$ і $\Omega_{\pm\tau a}{}^{4}$ – компоненти $G_{i}{}^{0'}{}_{m'}$, $\Omega_{i4}{}^{a}$ та $\Omega_{ia}{}^{4}$, здобуті із застосуванням проєкторів (1.31). Відзначимо, що у базисі із світлоподібних векторів в'язі Вірасоро, які є рівняннями для допоміжної метрики γ_{ij}, мають вигляд

$$G_{\pm\tau}{}^{0'm'}G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} + \Omega_{\pm\tau a}{}^{4}\Omega_{\pm\tau 4}{}^{a} = 0. \tag{1.35}$$

У (1.34) матриці

$$A_\pm{}^{\alpha\hat{a}}{}_{\beta\hat{b}} = \begin{pmatrix} \delta^a_b G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_\beta & 0 \\ 0 & -\frac{\Omega_{\pm\tau a}{}^4\Omega_{\pm\tau 4}{}^b}{G_{\pm\tau}{}^{0'm'}G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \end{pmatrix}$$

є блочно-діагональними, а

$$B_\pm{}^{\alpha\hat{a}}{}_{\beta\hat{b}} = \begin{pmatrix} \delta^a_b\delta^\alpha_\beta & -\frac{\varepsilon^{acb}\Omega_{\pm\tau c}{}^4}{G_{\pm\tau}{}^{0'm'}G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \\ 0 & \delta^b_a\delta^\alpha_\beta \end{pmatrix}$$

невиродженими. Тому ранг матриць (1.34) дорівнює рангу матриць $A_\pm$. 4×4 матриці $G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'}\Gamma^{m'\alpha}{}_\beta$ є невиродженими, якщо $G_{\pm\tau}{}^{0'm'}G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} \neq 0$. Тоді із в'язей Вірасоро (1.35) випливає, шо $\Omega_{\pm\tau a}{}^4 \neq 0$, $\Omega_{\pm\tau 4}{}^a \neq 0$. Дані умови задовольняються, коли суперструна рухається в AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$ просторах. У такому випадку ранг 3×3 матриць $\Omega_{\pm\tau a}{}^4\Omega_{\pm\tau 4}{}^b$, які входять до нижніх діагональних блоків матриць $A_\pm$,[25] дорівнює одиниці, оскільки вони є добутком трикомпонентного фільбайна $\mathbb{CP}^3$ простору та комплексно-спряженого. В результаті ранг матриць $A_\pm$ і, відповідно, $M_\pm^{\mathrm{T}}$ дорівнює $4\times 3 + 4\times 1 = 16$. Відтак ця матриця є виродженою і має 16 ненульових власних значень. Це свідчить про те, що у цьому секторі динаміку суперструни типу IIA може бути описано σ-моделлю [154]. Висновком із виродженості матриці $M_\pm^{\mathrm{T}}$ є те, що 8 ферміонних рівнянь σ-моделі є лінійно залежними й виражаються через решту 16 рівнянь, а її дія (1.22) інваріантна відносно 8-параметричної κ-симетрії. Ця симетрія є залишком 16-параметричної κ-симетрії повної дії суперструни типу IIA у $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді [156].

Як зазначалось, коли суперструна рухається лише у AdS_4 просторі, тобто $\Omega_{\pm\tau a}{}^4 = \Omega_{\pm\tau 4}{}^a = 0$, умови обернення на нуль координат для порушених суперсиметрій не тільки закріплюють калібрування κ-симетрії, а й містять в'язі на початкові дані, які виключають 4 ферміонні фізичні ступені свободи. На рівні ферміонних рівнянь σ-моделі це проявляється у тому, що ранг

[25] Відмітимо, що у представленні (1.34) нижні діагональні блоки є доповненнями Шура верхніх діагональних блоків.

$M_{\pm}^{\mathrm{T}}$ зменшується до 12 порівняно із розглянутим вище загальним випадком. У результаті половина ферміонних рівнянь σ-моделі є незалежними, що свідчить про інваріантність її дії відносно 12-параметричних перетворень κ-симетрії, як було відмічено в [154]. Це доводить, що серед восьми умов обернення на нуль координат для порушених суперсиметрій лише 4 є калібрувальними умовами. Відтак σ-модель представляє зрізання суперструни у даному секторі, а динаміка суперструни у ньому має описуватись повною дією в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі.

Представлене вище доведення лінійної залежності ферміонних рівнянь $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі є новим незалежним підтвердженням того, що у загальному випадку вона описує динаміку такої ж кількості фізичних ферміонних полів як і суперструна Гріна-Шварца, та належить до результатів, які виносяться на захист.

Як вказувалось раніше, із лінійної залежності ферміонних рівнянь σ-моделі відповідно до другої теореми Ньотер випливає інваріантність її дії відносно κ-симетрії з локальними ферміонними параметрами. Тому альтернативним способом знайти, за яких умов σ-модель коректно описує динаміку суперструни, є визначення кількості незалежних параметрів у перетвореннях κ-симетрії. Для цього необхідно обчислити ранг матриць, які входять до цих перетворень. Як і у випадку суперструн Гріна-Шварца перетворення κ-симетрії σ-моделі зручно представити в термінах 1-форм, в яких диференціали суперпросторових координат замінено їх κ-варіаціями. Для ферміонних 1-форм відповідні вирази мають вигляд

$$\mathscr{F}_{+\hat{a}}{}^{\alpha}(\delta_\kappa) = V_+^{ij} V_+^{kl} K_{jl\hat{a}\beta}{}^{\alpha\hat{b}} \widetilde{\varkappa}_{+\hat{b}ik}{}^{\beta}, \quad \mathscr{F}_{-\hat{a}}{}^{\alpha}(\delta_\kappa) = V_-^{ij} V_-^{kl} K_{jl\hat{a}\beta}{}^{\alpha\hat{b}} \varkappa_{-\hat{b}ik}{}^{\beta}, \tag{1.36}$$

де

$$K_{ij\hat{a}\beta}{}^{\alpha\hat{b}} = \begin{pmatrix} \delta_\beta^\alpha (G_i^{0'm'} G_j{}^{0'}{}_{m'} \delta_a^b + \Omega_{ia}{}^4 \Omega_{j4}{}^b) & G_i{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \varepsilon_{acb} \Omega_{j4}{}^c \\ -G_i{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \varepsilon^{acb} \Omega_{jc}{}^4 & \delta_\beta^\alpha (G_i^{0'm'} G_j{}^{0'}{}_{m'} \delta_b^a + \Omega_{i4}{}^a \Omega_{jb}{}^4) \end{pmatrix}.$$

Заміна ж диференціалів суперпросторових координат їх κ-варіаціями у бозонних компонентах суперфільбайна, як відомо, дає нуль

$$G^{0'm'}(\delta_\kappa) = 0, \quad \Omega_4{}^a(\delta_\kappa) = 0, \quad \Omega_a{}^4(\delta_\kappa) = 0.$$

Відтак κ-варіація дії σ-моделі (1.22) дається виразом (1.30), до якого підставлено (1.36). Її компенсує варіація допоміжної листкової метрики

$$\delta_\kappa(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}) = 2i(\mathscr{F}^{\alpha\hat{a}}_{+p} V^{pr}_{+} G_r{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'}{}_\alpha{}^\gamma \Gamma^5_{\gamma\beta} V^{ki}_{+} V^{lj}_{+} \widetilde{\varkappa}_{+\hat{a}kl}{}^\beta \\ + \mathscr{F}^{\alpha\hat{a}}_{-p} V^{pr}_{-} G_r{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'}{}_\alpha{}^\gamma \Gamma^5_{\gamma\beta} V^{ki}_{-} V^{lj}_{-} \varkappa_{-\hat{a}kl}{}^\beta).$$

Локальні параметри $\varkappa_{-\hat{a}ij}{}^\beta(\xi)$ та $\widetilde{\varkappa}_{+\hat{a}ij}{}^\beta(\xi)$ мають по два листкових векторних індекси замість одного як у випадку суперструн Гріна-Шварца і задовольняють умови (анти-)самодуальності за кожним із цих індексів

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{ik} V^{kl}_{+} \varkappa_{-\hat{a}lj}{}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{jk} V^{kl}_{+} \varkappa_{-\hat{a}il}{}^\alpha = \varkappa_{-\hat{a}ij}{}^\alpha$$

та

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{ik} V^{kl}_{-} \widetilde{\varkappa}_{+\hat{a}lj}{}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{jk} V^{kl}_{-} \widetilde{\varkappa}_{+\hat{a}il}{}^\alpha = \widetilde{\varkappa}_{+\hat{a}ij}{}^\alpha.$$

На поверхні в'язей Вірасоро (1.35) ранг матриць $V^{ij}_{\pm} V^{kl}_{\pm} K_{jl\hat{a}}{}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\hat{b}}$ в (1.36) у загальному випадку, коли суперструна рухається як в AdS_4, так і в $\mathbb{CP}^3$ просторах, дорівнює 8. Тому лише третина з 24 параметрів дає внесок до перетворень κ-симетрії. Аби довести це твердження відзначимо спочатку, що їх листкові векторні індекси згорнуті з індексами проєкторів $V^{ij}_{\pm}$, тому вони мають лише дві незалежні компоненти $K_{\pm\tau\pm\tau\hat{a}\beta}{}^{\alpha\hat{b}}$ з чотирьох. Ранг цих матриць можна знайти розв'язуючи задачу на власні значення, яка зводиться до обчислення детермінантів матриць $K_{\pm\tau\pm\tau} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau} I$ з використанням їх блочної структури

$$\det(K_{\pm\tau\pm\tau} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau} I) = \det\begin{pmatrix} A_{\pm\tau\pm\tau a\beta}{}^{\alpha b} & B_{\pm\tau\pm\tau a\beta b}{}^{\alpha} \\ C_{\pm\tau\pm\tau}{}^{\alpha ab}{}_\beta & D_{\pm\tau\pm\tau}{}^{\alpha a}{}_{\beta b} \end{pmatrix} \\ = \det A_{\pm\tau\pm\tau} \det(D_{\pm\tau\pm\tau} - C_{\pm\tau\pm\tau} A^{-1}_{\pm\tau\pm\tau} B_{\pm\tau\pm\tau}), \tag{1.37}$$

де

$$A_{\pm\tau\pm\tau a\beta}^{\ \ \ \ \ \ \alpha b} = \delta^\alpha_\beta A_{\pm\tau\pm\tau a}{}^b,$$
$$A_{\pm\tau\pm\tau a}{}^b = (G_{\pm\tau}{}^{0'm'} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau})\delta^b_a + \Omega_{\pm\tau a}{}^4 \Omega_{\pm\tau 4}{}^b,$$
$$D_{\pm\tau\pm\tau}{}^{\alpha a}{}_{\beta b} = \delta^\alpha_\beta((G_{\pm\tau}{}^{0'm'} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau})\delta^a_b + \Omega_{\pm\tau 4}{}^a \Omega_{\pm\tau b}{}^4),$$
$$B_{\pm\tau\pm\tau a\beta b}^{\ \ \ \ \ \ \alpha} = -G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \varepsilon_{acb} \Omega_{\pm\tau 4}{}^c,$$
$$C_{\pm\tau\pm\tau}{}^{\alpha ab}{}_\beta = G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} \Gamma^{m'\alpha}{}_\beta \varepsilon^{acb} \Omega_{\pm\tau c}{}^4.$$

Завдяки доданку $\lambda_{\pm\tau\pm\tau} I$ матриці $A_{\pm\tau\pm\tau a}{}^b$ є несингулярними: $\det A_{\pm\tau\pm\tau} = -\lambda_{\pm\tau\pm\tau}(G_{\pm\tau}{}^{0'm'} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau})^2$, тому існують обернені до них матриці

$$A^{-1}{}_{\mp\tau\mp\tau b}{}^a = \frac{1}{\lambda_{\pm\tau\pm\tau}(G_{\pm\tau}{}^{0'm'} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau})} (\lambda_{\pm\tau\pm\tau}\delta^a_b + \Omega_{\pm\tau b}{}^4 \Omega_{\pm\tau 4}{}^a).$$

Тоді детермінанти (1.37) дорівнюють

$$\det(K_{\pm\tau\pm\tau} - \lambda_{\pm\tau\pm\tau} I) = \lambda^{16}_{\pm\tau\pm\tau}(\lambda_{\pm\tau\pm\tau} - 2G_{\pm\tau}{}^{0'm'} G_{\pm\tau}{}^{0'}{}_{m'})^8 = 0.$$

Відтак ранг матриць $K_{\pm\tau\pm\tau}$ дійсно дорівнює 8 у даному секторі. Матриці $M^{\mathrm{T}}_\pm$ та $K_{\pm\tau\pm\tau}$ є взаємно доповнюючими, у тому смислі що сума їх рангів дорівнює 24. Це є вираженням того факту, що з 24 грассманових координат $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперпростору 16 представляють калібрувально-інваріантні фізичні ступені свободи σ-моделі, а 8 є суто калібрувальними.

Для перевірки гіпотези AdS_4/CFT_3 дуальності [146] важливо мати явний вираз для лагранжіана $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі в термінах полів суперпросторових координат. Для цього необхідно вибрати представника $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору в (1.1) та знайти вирази для форм Картана в термінах координат суперпростору та їх диференціалів. У нашій роботі [182] було здобуто вирази для форм Картана, побудованих з елемента суперсиметричного фактор-простору

$$\mathscr{G} = e^{x^m P_m + \theta^\mu_a Q^a_\mu + \bar\theta^{\mu a} \bar Q_{\mu a}} e^{\eta_{\mu a} S^{\mu a} + \bar\eta^a_\mu \bar S^\mu_a} e^{z^a V_a{}^4 + \bar z_a V_4{}^a} e^{\varphi D}, \tag{1.38}$$

який включає генератори $D = 3\ \mathcal{N} = 6$ суперконформної алгебри. Зазначимо, що елементи суперсиметричних фактор-просторів подібної форми раніше використовувались аби здобути вирази для лагранжіанів струн і бран у бекграундах типу $AdS \times S$ [161], [198], [199], [200], [201], [202]. В (1.38) x^m та φ є координатами Пуанкаре простору AdS_4, а три комплексні координати z^a та $\bar{z}_a$ параметризують простір $\mathbb{CP}^3$. Антикомутуючі координати θ^μ_a, $\bar{\theta}^{\mu a}$ і $\eta_{\mu a}$, $\bar{\eta}^a_\mu$ є параметрами при генераторах суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії.

Отже підстановка (1.38) до (1.1) приводить до наступних виразів для форм Картана, які відповідають генераторам трансляцій, конформних бустів та дилатацій із $conf(1,2)$ алгебри

$$\begin{gathered} \omega^m(d) = e^{-2\varphi}\varsigma^m(d), \quad \varsigma^m(d) = dx^m - id\theta^\mu_a\sigma^m_{\mu\nu}\bar{\theta}^{\nu a} + i\theta^\mu_a\sigma^m_{\mu\nu}d\bar{\theta}^{\nu a}, \\ c^m(d) = e^{2\varphi}\upsilon^m(d), \quad \upsilon^m(d) = -id\eta_{\mu a}\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\bar{\eta}^a_\nu + i\eta_{\mu a}\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}d\bar{\eta}^a_\nu \\ +2(\bar{\eta}^b_\rho\eta^\rho_b)\left[\eta_{\mu a}\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\left(d\bar{\theta}^a_\nu + \tfrac{1}{4}\bar{\zeta}^a_\nu(d)\right) - \left(d\theta_{\mu a} + \tfrac{1}{4}\zeta_{\mu a}(d)\right)\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\bar{\eta}^a_\nu\right], \\ \Delta(d) = d\varphi + id\theta^\mu_a\bar{\eta}^a_\mu + id\bar{\theta}^{\mu a}\eta_{\mu a}, \end{gathered} \tag{1.39}$$

де

$$\zeta^\mu_a(d) = -\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\varsigma_m(d)\eta_{\nu a}, \quad \bar{\zeta}^{\mu a}(d) = -\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\varsigma_m(d)\bar{\eta}^a_\nu.$$

У бозонній границі ці форми Картана задають квадрат інфінітезимального елемента довжини в просторі AdS_4 у координатах Пуанкаре

$$ds^2_{AdS_4} = \frac{e^{-4\varphi}}{4}dx^m dx_m + d\varphi d\varphi. \tag{1.40}$$

Для даного елемента суперсиметричного фактор-простору (1.38) форми Картана, які відповідають генераторам $so(6)$ алгебри, представляють суму суто бозонного доданка та доданка, який залежить від грассманово-непарних координат

$$\Omega_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) = \Omega_{\mathrm{bos}\,\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) + \Omega_{\mathrm{ferm}\,\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d). \tag{1.41}$$

Бозонні форми Картана

$$\Omega_{\mathrm{bos}\,\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) = iT_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}d\bar{T}_{\hat{c}}{}^{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^b(d) - \delta^b_a\Omega_{\mathrm{bos}\,c}{}^c(d) & \varepsilon_{acb}\Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb}\Omega_{\mathrm{bos}\,c}{}^4(d) & -\Omega_{\mathrm{bos}\,b}{}^a(d) + \delta^a_b\Omega_{\mathrm{bos}\,c}{}^c(d) \end{pmatrix},$$

визначаються унітарною матрицею, яка в $\mathbf{3}\oplus\bar{\mathbf{3}}$ базисі (1.8) має вигляд

$$T_{\hat a}{}^{\hat b} = \left(\begin{array}{cc} \cos|z|\delta_a^b + \frac{(1-\cos|z|)}{|z|^2}\bar z_a z^b & i\frac{\sin|z|}{|z|}\,\varepsilon_{acb}z^c \\ -i\frac{\sin|z|}{|z|}\,\varepsilon^{acb}\bar z_c & \cos|z|\delta_b^a + \frac{(1-\cos|z|)}{|z|^2}z^a\bar z_b \end{array}\right), \tag{1.42}$$

де $|z|^2 = z^a\bar z_a$. Відтак елементи матриці $\Omega_{\mathrm{bos}\,\hat a}{}^{\hat b}(d)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^b(d) &= i\tfrac{(1-\cos|z|)}{|z|^2}(\bar z_a dz^b - d\bar z_a z^b) - i\bar z_a z^b\tfrac{(1-\cos|z|)^2}{2|z|^4}(dz^c\bar z_c - z^c d\bar z_c), \\ \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^4(d) &= d\bar z_a\tfrac{\sin|z|}{|z|} + \bar z_a\tfrac{\sin|z|(1-\cos|z|)}{2|z|^3}(dz^c\bar z_c - z^c d\bar z_c) + \bar z_a\left(\tfrac{1}{|z|} - \tfrac{\sin|z|}{|z|^2}\right)d|z|, \\ \Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^a(d) &= dz^a\tfrac{\sin|z|}{|z|} + z^a\tfrac{\sin|z|(1-\cos|z|)}{2|z|^3}(z^c d\bar z_c - dz^c\bar z_c) + z^a\left(\tfrac{1}{|z|} - \tfrac{\sin|z|}{|z|^2}\right)d|z|. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Другий член в (1.41) можна представити як

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathrm{ferm}\,\hat a}{}^{\hat b}(d) &= (T\Psi(d)\bar T)_{\hat a}{}^{\hat b}, \\ \Psi_{\hat a}{}^{\hat b}(d) &= \left(\begin{array}{cc} \Psi_a{}^b(d) - \delta_a^b\Psi_c{}^c(d) & \varepsilon_{acb}\Psi_4{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb}\Psi_c{}^4(d) & -\Psi_b{}^a(d) + \delta_b^a\Psi_c{}^c(d) \end{array}\right), \end{aligned} \tag{1.44}$$

де матриця $\Psi_{\hat a}{}^{\hat b}(d)$ має такі елементи

$$\begin{aligned} \Psi_a{}^b(d) &= 2(d\theta_a^\mu + \tfrac12\zeta_a^\mu(d))\bar\eta_\mu^b - 2(d\bar\theta^{\mu b} + \tfrac12\bar\zeta^{\mu b}(d))\eta_{\mu a} \\ &\quad -\delta_a^b((d\theta_c^\mu + \tfrac12\zeta_c^\mu(d))\bar\eta_\mu^c - (d\bar\theta^{\mu c} + \tfrac12\bar\zeta^{\mu c}(d))\eta_{\mu c}), \\ \Psi_a{}^4(d) &= 2\varepsilon_{abc}(d\bar\theta^{\mu b} + \tfrac12\bar\zeta^{\mu b}(d))\bar\eta_\mu^c, \\ \Psi_4{}^a(d) &= -2\varepsilon^{abc}(d\theta_b^\mu + \tfrac12\zeta_b^\mu(d))\eta_{\mu c}. \end{aligned}$$

Вигляд ферміонних форм Картана є таким

$$\omega_{\hat a}^\mu(d) = e^{-\varphi}T_{\hat a}{}^{\hat b}\left(\begin{array}{c} \varsigma_b^\mu(d) \\ \bar\varsigma^{\mu b}(d) \end{array}\right), \tag{1.45}$$

та

$$\chi_{\mu\hat a}(d) = e^{\varphi}T_{\hat a}{}^{\hat b}\left(\begin{array}{c} \upsilon_{\mu b}(d) \\ \bar\upsilon_\mu^b(d) \end{array}\right), \tag{1.46}$$

де

$$\varsigma_b^\mu(d) = d\theta_b^\mu + \zeta_b^\mu(d), \quad \bar\varsigma^{\mu b}(d) = d\bar\theta^{\mu b} + \bar\zeta^{\mu b}(d),$$

$$\upsilon_{\mu b}(d) = d\eta_{\mu b} + 2i\bar\eta_\mu^c d\theta_c^\nu\eta_{\nu b} + 2i\eta_{\mu c}d\bar\theta^{\nu c}\eta_{\nu b} + i(\eta_c^\nu\bar\eta_\nu^c)\varsigma_{\mu b}(d),$$

$$\bar\upsilon_\mu^b(d) = d\bar\eta_\mu^b + 2i\eta_{\mu c}d\bar\theta^{\nu c}\bar\eta_\nu^b + 2i\bar\eta_\mu^c d\theta_c^\nu\bar\eta_\nu^b + i(\eta_c^\nu\bar\eta_\nu^c)\varsigma_\mu^b(d).$$

Здобуті вирази для форм Картана тотожно задовольняють рівняння Маурера-Картана (1.20) і (1.21) та належать до результатів, які винесено на захист.

Як видно із виразів для форм Картана, лагранжіан σ-моделі має достатньо складну нелінійну структуру, при чому кінетичний член включає внески до восьмого степеня за ферміонами, а член Весса-Зуміно – до шостого. Відзначимо, що подібно до $AdS_5 \times S^5$ суперструни антикомутуючі координати θ^μ_a і $\bar\theta^{\mu a}$, які відповідають генераторам суперсиметрії Пуанкаре, входять до виразів для форм Картана щонайбільше квадратично, а нелінійні ферміонні внески дають координати $\eta_{\mu a}$ та $\bar\eta^a_\mu$, які є параметрами при генераторах спеціальної конформної суперсиметрії.

Для $AdS_5 \times S^5$ суперструни можливо закріпити калібрування $\kappa-$симетрії умовами, які повністю видаляють координати η, так що лагранжіан стає квадратичним [203] чи четвертого порядку за антикомутуючими координатами θ [204], [205], [200], [201]. В даному випадку неможливо усунути всі 12 координат η за допомогою 8-параметричної $\kappa-$симетрії. Натомість можна розглянути, наприклад, $SL(2,\mathbb{R})$ коваріантну калібрувальну умову, яка усуває 8 координат η

$$\eta_{\mu a} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu A} \\ \eta_{\mu 3} \end{pmatrix}, \qquad \eta_{\mu A} = 0,$$

де A – індекс фундаментального $SU(2)$ представлення. У такому калібруванні обертаються на нуль наступні елементи матриці (1.44): ${\Psi_1}^2(d) = {\Psi_2}^1(d) = {\Psi_4}^3(d) = {\Psi_3}^4(d) = 0$, але кінетичний член лагранжіана σ-моделі (1.25) все одно включає члени до восьмого порядку за ферміонами. Калібрувальна умова

$$\theta^\mu_a = \begin{pmatrix} \theta^\mu_A \\ \theta^\mu_3 \end{pmatrix}, \qquad \theta^\mu_3 = 0, \qquad \eta_{\mu 3} = 0$$

усуває рівну кількість координат θ і η. У цьому калібруванні обертаються на нуль наступні компоненти форм Картана: ${\Psi_{1,2}}^4(d) = {\Psi_4}^{1,2}(d) =$

$\Psi_{1,2}{}^3(d) = \Psi_3{}^{1,2}(d) = 0$ та $\omega_3^\mu(d) = 0$, $\chi_{\mu 3}(d) = 0$. Однак більш суттєвого спрощення можна досягти розглядаючи $SL(2,\mathbb{R})$ нековаріантні умови, наприклад,

$$\eta_{1a} = 0,$$

яка частково закріплює калібрування $\kappa-$симетрії. У цьому випадку $c^1(d) = 0$, а інші компоненти бозонних форм Картана стають квадратичними за ферміонами. Також обертаються на нуль компоненти ферміонних форм Картана $\chi_{1a}(d) = \bar{\chi}_1^a(d) = 0$. Відтак кінетичний член лагранжіана (1.25) містить ферміонні внески до четвертого степеня, а член Весса-Зуміно – до другого степеня. Залишкову калібрувальну свободу можна використати для того, аби обернути на нуль додаткові компоненти форм Картана.

1.3 $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформна симетрія дії σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперпросторі

Лагранжіан $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі за побудовою інваріантний відносно глобальної $OSp(4|6)$ симетрії. Її можна представити як $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформну симетрію, яка діє на координати $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору. Для такої реалізації параметризація $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору координатами, які відповідають генераторам суперконформної алгебри, як в (1.38), є природною. Представник $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ фактор-багатовиду (1.38) включає координати Пуанкаре для AdS_4 простору та 24 дійсні ферміонні координати у двох наборах по 12 координат, пов'язаних з суперсиметріями Пуанкаре та спеціальними конформними суперсиметріями. У межовій границі координати, які відповідають генераторам трансляцій та суперсиметрій Пуанкаре, ототожнюються з координатами $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперпростору Мінковського,[26]

[26]Відзначимо певну неоднозначність при використанні терміну «$D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформна симетрія» як для перетворень координат $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ супербагатовиду із його супер-

а його суперконформна симетрія є ізоморфною глобальній симетрії теорії Черна-Саймонса з полями матерії, запропонованої О. Аароні, О. Бергманом, Д. Джафферисом і Х. Малдасеною [194].

У даному підрозділі буде детально досліджено реалізацію $D = 3\,\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі. Буде знайдено загальні вирази для густин ньотерових струмів для кожного з перетворень, які входять до цієї симетрії. У попередньому підрозділі було здобуто явні вирази для форм Картана, які входять до лагранжіана σ-моделі, в термінах координат $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору та їх диференціалів (див. (1.39), (1.41), (1.45) та (1.46)). У цьому підрозділі буде встановлено трансформаційні властивості цих координат при перетвореннях $D = 3\,\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії, а також здобуто вирази для густин ньотерових струмів у цих координатах. Ці густини можна розглядати як внески нульового порядку в розклади густин струмів, пов'язаних з інваріантністю повної дії $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, за грассмановими координатами для порушених суперсиметрій. В роботі [163] було показано, що ці густини струмів можуть бути використані як структурні блоки для побудови зв'язності Лакса для $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни.

1.3.1 Трансформаційні властивості форм Картана та координат $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору

Розглянемо представника $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору $\mathscr{G}$. При перетворенні глобальної $OSp(4|6)$ симетрії з па-

групи ізометрії, так і для їх граничного випадку, який відповідає суперконформним перетворенням координат межового суперпростору. В загальному випадку необхідно провести заміну координат суперсиметричного фактор-простору, аби координати його межового підсуперпростору мали коректні трансформаційні властивості відносно цієї симетрії (див., наприклад, обговорення в роботі [206]).

раметром G він перетворюється наступним чином

$$G\mathscr{G} = \mathscr{G}' H,$$

де H належить до групи стабільності $SO(1,3)\times U(3)$ та залежить від координат цього фактор-простору. При інфінітезимальному перетворенні варіація $\mathscr{G}$ дорівнює

$$\delta\mathscr{G} = g\mathscr{G} - \mathscr{G}h, \quad g\in osp(4|6), \quad h\in so(1,3)\oplus u(3).$$

Її також можна представити у наступному вигляді

$$\mathscr{G}^{-1}\delta\mathscr{G} = \mathscr{G}^{-1}g\mathscr{G} - h. \tag{1.47}$$

Розглянемо інфітезимальний параметр перетворення зі значенням у $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформній алгебрі

$$\begin{gathered} g = a^m P_m + b_m K^m + fD + \tfrac{1}{2} l^{mn} M_{mn} + y^a V_a{}^4 + \bar{y}_a V_4{}^a + w_a{}^b V_b{}^a \\ +\varepsilon^\mu_a Q^a_\mu + \bar{\varepsilon}^{\mu a}\bar{Q}_{\mu a} + \xi_{\mu a} S^{\mu a} + \bar{\xi}^a_\mu \bar{S}^\mu_a. \end{gathered} \tag{1.48}$$

Він включає параметри трансляцій a^m у $D=3$ просторі Мінковського, конформних бустів b_m, дилатацій f та лоренцевих обертань l^{mn}, а також антикомутуючі параметри $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперсиметрії Пуанкаре (ε^μ_a, $\bar{\varepsilon}^{\mu a}$) і спеціальної конформної суперсиметрії ($\xi_{\mu a}$, $\bar{\xi}^a_\mu$). До (1.48) також входять параметри інфітезимального $su(4)$ перетворення ($w_a{}^b$, y^a, $\bar{y}_a$). Разом ці параметри будемо позначати X. Тоді варіацію (1.47) можна записати в термінах форм Картана у конформному базисі із диференціалами заміненими на варіації та параметрів інфінітезимальних перетворень із групи стабільності $\hat{b}^m$, $\hat{l}^{mn}$ та $\hat{w}_a{}^b$

$$\begin{gathered} \mathscr{G}^{-1}g\mathscr{G} = (\omega^m(\delta) - \hat{b}^m)P_m + (c^m(\delta) + \hat{b}^m)K_m + \Delta(\delta)D \\ +(G^{mn}(\delta) + \tfrac{1}{2}\hat{l}^{mn})M_{mn} + \Omega_4{}^a(\delta)V_a{}^4 + \Omega_a{}^4(\delta)V_4{}^a + (\Omega_a{}^b(\delta) + \hat{w}_a{}^b)V_b{}^a \\ +\omega^\mu_a(\delta)Q^a_\mu + \bar{\omega}^{\mu a}(\delta)\bar{Q}_{\mu a} + \chi_{\mu a}(\delta)S^{\mu a} + \bar{\chi}^a_\mu(\delta)\bar{S}^\mu_a. \end{gathered}$$

Із (1.47) випливає, що форми Картана $\mathfrak{c}(d) = \mathscr{G}^{-1}d\mathscr{G}$ інваріантні відносно глобальної $OSp(4|6)$ симетрії з точністю до перетворень із алгебри стабільності

$$\delta\mathfrak{c}(d) = -[\mathfrak{c}, h] - dh.$$

Форми Картана, які відповідають генераторам фактор-алгебри, перетворюються відповідно до їх $so(1,3) \oplus u(3)$ представлень, а форми Картана, які відповідають генераторам алгебри стабільності, перетворюються як зв'язності. Зокрема, варіації бозонних компонентів суперфільбайна дотичних до простору AdS_4 дорівнюють

$$\begin{gathered}\delta\omega^m(d) + \delta c^m(d) = \hat{l}^{mn}(\omega_n(d) + c_n(d)) + 4\hat{b}^m\Delta(d),\\ \delta\Delta(d) = -\hat{b}_m(\omega^m(d) + c^m(d)),\end{gathered} \tag{1.49}$$

де $\hat{l}^{mn}$ та $\hat{b}_m$ – параметри інфінітезимального локального $SO(1,3)$ перетворення. Варіація $so(1,2)$ форм Картана у спінорному представленні $G^{\mu\nu}(d) = \varepsilon^{\mu\lambda}\sigma_{mn\lambda}{}^{\nu}G^{mn}(d)$ має вигляд

$$\begin{gathered}\delta G^{\mu\nu}(d) = \tfrac{1}{4}(G^{\mu\lambda}(d)\hat{l}_{\lambda}{}^{\nu} + G^{\nu\lambda}(d)\hat{l}_{\lambda}{}^{\mu})\\ +\hat{b}^{\mu}{}_{\lambda}(\tilde{\omega}(d) - \tilde{c}(d))^{\lambda\nu} + \hat{b}^{\nu}{}_{\lambda}(\tilde{\omega}(d) - \tilde{c}(d))^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}d\hat{l}^{\mu\nu}.\end{gathered} \tag{1.50}$$

Варіація $su(4)$ форм Картана в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі дається виразом

$$\delta\Omega_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) = i(\Omega_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}(d)\widehat{W}_{\hat{c}}{}^{\hat{b}} - \widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}\Omega_{\hat{c}}{}^{\hat{b}}(d)) - d\widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}, \tag{1.51}$$

де

$$\widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \hat{w}_a{}^b - \delta_a^b\hat{w}_c{}^c & 0 \\ 0 & -\hat{w}_b{}^a + \delta_b^a\hat{w}_c{}^c \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

– матриця інфінтезимального локального $U(3)$ перетворення. Із (1.51) можна знайти варіації бозонних компонентів суперфільбайна дотичних до $\mathbb{CP}^3$ багатовиду

$$\begin{gathered}\delta\Omega_a{}^4(d) = i\left(\hat{w}_b{}^b\Omega_a{}^4(d) - \hat{w}_a{}^b\Omega_b{}^4(d)\right),\\ \delta\Omega_4{}^a(d) = -i\left(\hat{w}_b{}^b\Omega_4{}^a(d) - \Omega_4{}^b(d)\hat{w}_b{}^a\right)\end{gathered} \tag{1.53}$$

та 1-форми $u(3)$ зв'язності

$$\delta\Omega_a{}^b(d) = i(\Omega_a{}^c(d)\hat{w}_c{}^b - \hat{w}_a{}^c\Omega_c{}^b(d)) - d\hat{w}_a{}^b.$$

Варіації грассманово-непарних форм Картана, які ототожнюються з ферміонними компонентами суперфільбайна, зводяться до інфінітезимальних перетворень з групи стабільності

$$\delta\omega_{\hat{a}}^{\nu}(d) = \frac{1}{4}\omega_{\hat{a}}^{\lambda}(d)\hat{l}_{\lambda}{}^{\nu} + \hat{\bar{b}}^{\nu\lambda}\chi_{\lambda\hat{a}}(d) - i\widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\omega_{\hat{b}}^{\nu}(d), \tag{1.54}$$

$$\delta\chi_{\nu\hat{a}}(d) = -\frac{1}{4}\hat{l}_{\nu}{}^{\lambda}\chi_{\lambda\hat{a}}(d) + \hat{b}_{\nu\lambda}\omega_{\hat{a}}^{\lambda}(d) - i\widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\chi_{\nu\hat{b}}(d). \tag{1.55}$$

Аби з наведених повних варіацій форм Картана здобути варіації, які відповідають кожному з параметрів в (1.48), необхідно виокремити їх внески до параметрів перетворень із групи стабільності.

Коли елемент суперсиметричного фактор-простору явно заданий, як в (1.38), стає можливим знайти вирази для параметрів перетворень із групи стабільності як функцій параметрів перетворень із групи глобальної симетрії та координат фактор-простору. У випадку інфітезимальних $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформних перетворень з параметром (1.48) відповідні параметри перетворень із $so(1,3)$ алгебри стабільності у (1.49), (1.50) та (1.54) дорівнюють

$$\hat{b}^{m} = e^{2\varphi}A^{-1}b^{m}(\theta), \quad A = 1 - e^{4\varphi}(\bar{\eta}\eta)^2,$$
$$\hat{l}^{mn} = l^{mn}(\theta) + ie^{2\varphi}\left[(\eta_a\hat{\bar{b}}\sigma^{mn}\bar{\eta}^a) + (\bar{\eta}^a\hat{\bar{b}}\sigma^{mn}\eta_a)\right],$$

де

$$b^{m}(\theta) = b^{m} - i\left[(\xi_a(\theta)\tilde{\sigma}^{m}\bar{\eta}^a) + (\bar{\xi}^a(\theta)\tilde{\sigma}^{m}\eta_a)\right], \quad \xi_{\mu a}(\theta) = \xi_{\mu a} + b_{\mu\nu}\theta_a^{\nu},$$
$$l^{mn}(\theta) = l^{mn} + 2(b^m x^n - b^n x^m) + 2i\left[(\theta_a\sigma^{mn}\bar{\xi}^a) + (\bar{\theta}^a\sigma^{mn}\xi_a)\right]$$
$$+i\left[(\theta_a\sigma^{mn}b\bar{\theta}^a) + (\bar{\theta}^a\sigma^{mn}b\theta_a)\right].$$

Параметри інфінітезимального перетворення із групи стабільності $U(3)$, які входять в (1.52), зручно представити у формі

$$\hat{w}_a{}^b = \widetilde{w}_a{}^b + \tfrac{i(1-\cos|z|)}{|z|\sin|z|}(\bar{z}_a\widetilde{y}^b - \widetilde{\bar{y}}_a z^b) + \tfrac{i(1-\cos|z|)^2}{|z|^3\sin 2|z|}((\widetilde{y}\bar{z}) - (z\widetilde{\bar{y}}))\bar{z}_a z^b,$$

де

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_a{}^b &= w_a{}^b(\theta) - e^{2\varphi}\left[2(\eta_a\hat{\bar{b}}\bar{\eta}^b) - \delta_a^b(\eta_c\hat{\bar{b}}\bar{\eta}^c)\right], \\ \widetilde{y}^a &= y^a(\theta) + e^{2\varphi}\varepsilon^{abc}(\eta_b\hat{\bar{b}}\eta_c), \quad \widetilde{\bar{y}}_a = \bar{y}_a(\theta) - e^{2\varphi}\varepsilon_{abc}(\bar{\eta}^b\hat{\bar{b}}\bar{\eta}^c) \end{aligned} \tag{1.56}$$

та

$$w_a{}^b(\theta) = w_a{}^b - 2(\xi_{\mu a}\bar{\theta}^{\mu b} + \theta^\mu_a \bar{\xi}^b_\mu) + \delta^b_a(\xi_{\mu c}\bar{\theta}^{\mu c} + \theta^\mu_c \bar{\xi}^c_\mu) - 2(\theta_a b \bar{\theta}^b) + \delta^b_a(\theta_c b \bar{\theta}^c),$$

$$y^a(\theta) = y^a + \varepsilon^{abc}\left(2\xi_{\mu b}\theta^\mu_c + (\theta_b b \theta_c)\right), \quad \bar{y}_a(\theta) = \bar{y}_a - \varepsilon_{abc}\left(2\bar{\xi}^b_\mu \bar{\theta}^{\mu c} + (\bar{\theta}^b b \bar{\theta}^c)\right).$$

Параметри (1.56) є елементами матриці

$$\widetilde{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \widetilde{w}_a{}^b - \delta^b_a \widetilde{w}_c{}^c & \varepsilon_{acb}\widetilde{y}^c \\ -\varepsilon^{acb}\widetilde{\bar{y}}_c & -\widetilde{w}_b{}^a + \delta^a_b \widetilde{w}_c{}^c \end{pmatrix}, \tag{1.57}$$

яку буде використано нижче для запису варіації (1.58) елемента $SU(4)/U(3)$ фактор-простору при інфінітезимальних $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформних перетвореннях.

Наведемо також варіації координат, які параметризують елемент $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору (1.38). Варіації координат, які відповідають генераторам $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ супералгебри Пуанкаре, даються виразами

$$\begin{aligned} \delta x^m &= a^m + l^m{}_n x^n + 2f x^m + b^m(x^2 + (\bar{\theta}\theta)^2) - 2x^m b_n x^n \\ &- i\left[(\varepsilon_a \sigma^m \bar{\theta}^a) + (\bar{\varepsilon}^a \sigma^m \theta_a)\right] - i\left[(\xi_a \hat{\tilde{x}} \sigma^m \bar{\theta}^a) + (\bar{\xi}^a \hat{\tilde{x}} \sigma^m \theta_a)\right] \\ &+ e^{2\varphi}\left\{\hat{b}^m + i\left[(\eta_a \hat{\tilde{b}} \sigma^m \bar{\theta}^a) + (\bar{\eta}^a \hat{\tilde{b}} \sigma^m \theta_a)\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\theta^\mu_a &= \varepsilon^\mu_a + \tfrac{1}{4} l^{mn}\theta^\nu_a \sigma_{mn\nu}{}^\mu + f\theta^\mu_a + i w_b{}^b \theta^\mu_a - i w_a{}^b \theta^\mu_b - i\varepsilon_{abc} y^b \bar{\theta}^{\mu c} \\ &+ \hat{\tilde{x}}^{\mu\nu} b_{\nu\lambda}\theta^\lambda_a + \hat{\tilde{x}}^{\mu\nu}\xi_{\nu a} - 2i(\theta^\mu_b \bar{\xi}^b_\nu + \bar{\theta}^{\mu b}\xi_{\nu b})\theta^\nu_a + e^{2\varphi}\hat{\tilde{b}}^{\mu\nu}\eta_{\nu a} \end{aligned}$$

та комплексно-спряженими до них, де $\hat{\tilde{x}}^{\mu\nu} = \tilde{x}^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta)$. Зазначимо, що члени пропорційні параметрам $\hat{b}^m$ обертаються на нуль у границі $\varphi \to -\infty$, яка відповідає конформній межі простору AdS_4. Відтак у межовій границі координати $(x^m, \theta^\mu_a, \bar{\theta}^{\mu a})$ утворюють замкнений набір відносно перетворень $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії й можуть бути обрані для параметризації межового суперпростору. Варіація координати φ, яка параметризує ортогональну до межі розмірність простору AdS_4 в координатах Пуанкаре, дорівнює

$$\delta\varphi = f(\theta) = f - b_m x^m + i(\xi_{\mu a}\bar{\theta}^{\mu a} + \bar{\xi}^a_\mu \theta^\mu_a).$$

Варіації комплексних координат $\mathbb{CP}^3$ багатовиду

$$\delta z^a = iz^b \widetilde{w}_b{}^a + i\widetilde{w}_b{}^b z^a + |z|\cot|z|\widetilde{y}^a + \tfrac{1}{2|z|^2}\left(1 - \tfrac{2|z|}{\sin 2|z|}\right)(\widetilde{y}\bar{z})z^a$$
$$+\tfrac{1}{2|z|^2}\left[1 + |z|(\tan|z| - \cot|z|)\right](z\widetilde{\bar{y}})z^a$$

визначають варіацію представника $SU(4)/U(3)$ фактор-простору (1.42)

$$\delta T_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = i(T_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}\widetilde{W}_{\hat{c}}{}^{\hat{b}} - \widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}T_{\hat{c}}{}^{\hat{b}}), \quad \delta\bar{T}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = -i(\widetilde{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}\bar{T}_{\hat{c}}{}^{\hat{b}} - \bar{T}_{\hat{a}}{}^{\hat{c}}\widehat{W}_{\hat{c}}{}^{\hat{b}}), \tag{1.58}$$

де матриці $\widetilde{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}$ та $\widehat{W}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}$ було введено в (1.57) та (1.52). Відзначимо, що варіація (1.58) має загальну форму, яка не залежить від параметризації елемента $SU(4)/U(3)$ фактор-простору. Нарешті варіації грассманових координат, які відповідають генераторам спеціальної конформної суперсиметрії, даються виразом

$$\delta\eta_{\mu a} = \xi_{\mu a}(\theta) - \tfrac{1}{4}l^{mn}(\theta)\sigma_{mn\mu}{}^{\nu}\eta_{\nu a} - f(\theta)\eta_{\mu a} + iw_b{}^b(\theta)\eta_{\mu a} - iw_a{}^b(\theta)\eta_{\mu b}$$
$$-i\varepsilon_{abc}y^b(\theta)\bar{\eta}^c_\mu + 2ie^{2\varphi}(\bar{\eta}\eta)\varepsilon_{\mu\lambda}\hat{\bar{b}}^{\lambda\nu}\eta_{\nu a}$$

та комплексно-спряженим до нього.

Здобуті варіації координат $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору при інфінітезимальних перетвореннях $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії входять до переліку результатів, які виносяться на захист.

1.3.2 Густини ньотерових струмів

Аби здобути вирази для густин ньотерових струмів, які відповідають інваріантності дії σ-моделі (1.22) відносно кожного із перетворень зі складу глобальної $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії, розглянемо варіації форм Картана, які входять до її лагранжіана, при таких перетвореннях з локальними параметрами. В такому випадку виведені у попередньому пункті варіації форм Картана (1.49), (1.53), (1.54) і (1.55) набувають додаткових членів пропорційних диференціалу параметрів перетворень. Із загальної формули для варіації диференційної форми (1.29) випливає, що такі внески виникають з першого доданка. Для форм Картана, які відповідають генераторам фактор-алгебри, ці члени мають вигляд

$$\begin{gathered}\delta_X\omega^m(d)+\delta_X c^m(d)=\frac{\partial}{\partial X}(\omega^m(\delta_X)+c^m(\delta_X))dX+\ldots=j^m{}_X dX+\ldots,\\ \delta_X\Delta(d)=\frac{\partial}{\partial X}\Delta(\delta_X)dX+\ldots=\mathrm{j}_X dX+\ldots\end{gathered} \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered}\delta_X\Omega_a{}^4(d)=\frac{\partial}{\partial X}\Omega_a{}^4(\delta_X)dX+\ldots=-{}^*\bar{J}_{aX}dX+\ldots,\\ \delta_X\Omega_4{}^a(d)=\frac{\partial}{\partial X}\Omega_4{}^a(\delta_X)dX+\ldots=-{}^*J^a{}_X dX+\ldots\end{gathered} \tag{1.60}$$

та[27]

$$\begin{gathered}\delta_X\omega^\mu_{\hat a}(d)=\frac{\partial}{\partial X}\omega^\mu_{\hat a}(\delta_X)dX+\ldots=\mathbf{j}^\mu_{\hat a X}dX+\ldots,\\ \delta_X\chi_{\mu\hat a}(d)=\frac{\partial}{\partial X}\chi_{\mu\hat a}(\delta_X)dX+\ldots=\mathbf{J}_{\mu\hat a X}dX+\ldots.\end{gathered} \tag{1.61}$$

де X позначає будь-який з параметрів перетворень $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії, а крапки позначають члени в правих частинах (1.49), (1.53), (1.54) і (1.55). Наведені в (1.60) варіації форм Картана, які відповідають генераторам $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри, можна здобути із загальної варіації $su(4)$ форм Картана

$$\delta_X\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d)=J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_X dX+\ldots,$$

де крапки позначють члени в правій частині (1.51) та

$$J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_X=\frac{\partial}{\partial X}\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(\delta_X)=\begin{pmatrix} J_a{}^b{}_X & J_{abX}\\ -\bar{J}^{ab}{}_X & -J_b{}^a{}_X\end{pmatrix}. \tag{1.62}$$

${}^*J^a{}_X$ і ${}^*\bar{J}_{aX}$ в (1.60) пов'язані з J_{abX} та $\bar{J}^{abX}$ в (1.62) дуалізацією

$${}^*J^a{}_X=\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}J_{bcX},\quad {}^*\bar{J}_{aX}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\bar{J}^{bc}{}_X.$$

Отже густини ньотерових струмів мають форму суми трьох доданків

$$\mathcal{J}^i_X(\tau,\sigma)=\mathcal{J}_{AdS_4}{}^i_X+\mathcal{J}_{CP^3}{}^i_X+\mathcal{J}_{\mathrm{WZ}}{}^i_X.$$

Перші два з них описують внесок кінетичного члена лагранжіана σ-моделі (1.25). Вони визначаються внесками до індукованої листкової метрики від

[27] Припускається, що похідні за грассманово-непарними змінними діють справа.

метрик просторів AdS_4

$$\mathcal{J}_{AdS_4}{}^{i}_{X} = -\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\left(\tfrac{1}{4}(\omega_{jm} + c_{jm})j^{m}_{X} + \Delta_j \mathrm{j}_X\right) \tag{1.63}$$

та $\mathbb{CP}^3$

$$\mathcal{J}_{CP^3}{}^{i}_{X} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\left(\Omega_{ja}{}^{4}\,{}^{*}J^{a}{}_{X} + \Omega_{j4}{}^{a}\,{}^{*}\bar{J}_{aX}\right). \tag{1.64}$$

Останній член дається внеском лагранжіана Весса-Зуміно (1.27)

$$\mathcal{J}_{\mathrm{WZ}}{}^{i}_{X} = \tfrac{i}{4}\varepsilon^{ij}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\left(\omega^{\mu\hat{a}}_{j}\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^{\nu}_{\hat{b}X} + \chi^{\hat{a}}_{j\mu}\varepsilon^{\mu\nu}\mathbf{J}_{\nu\hat{b}X}\right). \tag{1.65}$$

Тож аби побудувати густини ньотерових струмів для кожної із симетрій, достатньо підставити в (1.63), (1.64) та (1.65) вирази для множників при dX із (1.59), (1.60) та (1.61) відповідно.

Для елемента $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору (1.38) явні вирази для цих множників, що відповідають кожному із перетворень зі складу $D=3\ \mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії, зібрані в таблицях 1.1-1.8. Для стислості запису в деяких формулах з цих таблиць грассманово-непарні координати згруповано у $D=6$ вектори в $\mathbf{3}\oplus\bar{\mathbf{3}}$ базисі

$$\theta^{\mu}_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \theta^{\mu}_{a} \\ \bar{\theta}^{\mu a} \end{pmatrix}, \quad \eta_{\mu\hat{a}} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu a} \\ \bar{\eta}^{a}_{\mu} \end{pmatrix}$$

та $\theta^{\mu\hat{a}} = H^{\hat{a}\hat{b}}\theta^{\mu}_{\hat{b}}$, $\eta^{\hat{a}}_{\mu} = H^{\hat{a}\hat{b}}\eta_{\mu\hat{b}}$. Також введено T-перетворені координати, які позначено шляпками

$$\hat{\theta}^{\mu}_{\hat{a}} = T_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\theta^{\mu}_{\hat{b}}, \quad \hat{\eta}^{\mu\hat{a}} = H^{\hat{a}\hat{b}}\hat{\eta}^{\mu}_{\hat{b}}. \tag{1.66}$$

Здобуті густини ньотерових струмів, які відповідають інваріантності дії $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі відносно $D=3\ \mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії, належать до результатів, винесених на захист.

$\delta_a\omega^m(d) + \delta_a c^m(d) = j^m{}_n da^n :\ j^m{}_n = \frac{\partial(\omega^m(\delta_a)+c^m(\delta_a))}{\partial a^n} = e^{-2\varphi}A\delta^m_n$
$\delta_a\Delta(d) = 0 :\ \mathrm{j}_m = 0$
$\delta_a\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d) = J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_m da^m :\ J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_m = \frac{\partial}{\partial a^m}\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(\delta_a) = -2(\hat\eta_{\hat a}\sigma_m\hat\eta^{\hat b})$
$\delta_a\omega^\mu_{\hat a}(d) = \mathbf{j}^\mu_{\hat a m}da^m :\ \mathbf{j}^\mu_{\hat a m} = \frac{\partial\omega^\mu_{\hat a}(\delta_a)}{\partial a^m} = -e^{-\varphi}\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\hat\eta_{\nu\hat a}$
$\delta_a\chi_{\mu\hat a}(d) = \mathbf{J}_{\mu\hat a m}da^m :\ \mathbf{J}_{\mu\hat a m} = \frac{\partial\chi_{\mu\hat a}(\delta_a)}{\partial a^m} = -ie^{2\varphi}(\bar\eta\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^\nu_{\hat a m}$

Таблиця 1.1. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з $D = 3$ трансляційною інваріантністю.

1.4 Лагранжіан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни в калібруванні світлового конуса для κ-симетрії

Два попередні підрозділи було присвячено вивченню властивостей σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі [154]. Вона описує динаміку суперструни типу IIA в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді [156], коли умова обернення на нуль 8 координат для порушених суперсиметрій представляє часткове калібрування κ-симетрії як у випадку руху суперструни у просторі анти-де Сіттера та у $\mathbb{CP}^3$ просторі. У такому калібруванні фізичні ступені свободи суперструни знаходяться серед 24 координат, які відповідають непорушеним суперсиметріям. У даному підрозділі розглядається одне з калібрувань κ-симетрії, в якому фізичні ступені свободи присутні й у секторі порушених суперсиметрій і яке відтак можна накласти лише у повному лагранжіані суперструни. Це калібрування світлового конуса, утвореного нуль-геодезичними на конформній межі простору анти-де Сіттера в координатах Пуанкаре [184].[28]

Як зазначалось у вступі, повну дію $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни було виведено в [156] за допомогою подвійної розмірної редукції [160], [207] дії $D = 11$ супермембрани у $AdS_4 \times S^7$ супербекграунді [162]. В основі такого підхо-

[28] Для $AdS_5 \times S^5$ суперструни аналогічне калібрування вивчалось в роботах [200], [201].

$\delta_b\omega^m(d)+\delta_b c^m(d)=j^{mn}db_n+\dots\ :$ $j^{mn}=\frac{\partial(\omega^m(\delta_b)+c^m(\delta_b))}{\partial b_n}$ $=e^{-2\varphi}A\left[(x^2+(\bar\theta\theta)^2)\eta^{mn}-2x^mx^n+i(\theta_{\hat a}\sigma^m\hat{\tilde{x}}\sigma^n\theta^{\hat a})\right]$ $+A\frac{\partial\hat b^m}{\partial b_n}+ie^{2\varphi}\left[(\eta_{\hat a}\hat{\tilde{x}}\sigma^n\tilde\sigma^m\eta^{\hat a})+(\eta_{\hat a}\tilde\sigma^m\Lambda_-\sigma^n\theta^{\hat a})\right]$ $+2e^{2\varphi}(\bar\eta\eta)(\eta_{\hat a}\sigma^m\hat{\tilde{x}}\sigma^n\theta^{\hat a}),\ \Lambda_{\pm\mu}{}^{\nu}=\delta_\mu^\nu\pm 2i\eta_\mu^{\hat a}\theta_{\hat a}^\nu$
$\delta_b\Delta(d)=\mathrm{j}^m db_m+\dots\ :\ \mathrm{j}^m=\frac{\partial\Delta(\delta_b)}{\partial b_m}=-x^m-i(\eta_{\hat a}\hat{\tilde{x}}\sigma^m\theta^{\hat a})$
$\delta_b\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d)=J_{\hat a}{}^{\hat b m}db_m+\dots\ :$ $J_{\hat a}{}^{\hat b m}=\frac{\partial}{\partial b_m}\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(\delta_b)$ $=-2[(\hat\theta_{\hat a}\sigma^m\hat\theta^{\hat b})+(x^2+(\bar\theta\theta)^2)(\hat\eta_{\hat a}\tilde\sigma^m\hat\eta^{\hat b})$ $-2x^m(\hat\eta_{\hat a}\tilde x\hat\eta^{\hat b})-(\hat\eta_{\hat a}\hat{\tilde{x}}\sigma^m\hat Z^{\hat b})+(\hat\eta^{\hat b}\hat{\tilde{x}}\sigma^m\hat Z_{\hat a})],$ $Z^\mu_{\hat a}=\theta^\mu_{\hat a}-i(\bar\theta\theta)\eta^\mu_{\hat a}$
$\delta_b\omega^\mu_{\hat a}(d)=\mathbf{j}^{\mu m}_{\hat a}db_m+\dots\ :$ $\mathbf{j}^{\mu m}_{\hat a}=\frac{\partial\omega^\mu_{\hat a}(\delta_b)}{\partial b_m}$ $=e^{-\varphi}[\hat{\tilde{x}}^{\mu\nu}\sigma^m_{\nu\lambda}\hat Z^\lambda_{\hat a}-(x^2+(\bar\theta\theta)^2)\tilde\sigma^{m\mu\nu}\hat\eta_{\nu\hat a}$ $+2x^m\tilde x^{\mu\nu}\hat\eta_{\nu\hat a}+i(\bar\theta\theta)\varepsilon^{\mu\nu}\hat\eta_{\rho\hat a}\hat{\tilde{x}}^{\rho\lambda}\sigma^m_{\lambda\nu}]$
$\delta_b\chi_{\mu\hat a}(d)=\mathbf{J}_{\mu\hat a}{}^m db_m+\dots\ :$ $\mathbf{J}_{\mu\hat a}{}^m=\frac{\partial\chi_{\mu\hat a}(\delta_b)}{\partial b_m}$ $=e^{\varphi}(\Lambda_{-\mu}{}^{\nu}\sigma^m_{\nu\lambda}\hat\theta^\lambda_{\hat a}-\hat\eta_{\nu\hat a}\hat{\tilde{x}}^{\nu\lambda}\sigma^m_{\lambda\rho}\Lambda_{-\mu}{}^{\rho}-ie^{\varphi}(\bar\eta\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^{\nu m}_{\hat a})$

Таблиця 1.2. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з інваріантністю відносно конформних бустів.

$\delta_f\,\omega^m(d)+\delta_f c^m(d) = j^m df:$ $j^m = \frac{\partial(\omega^m(\delta_f)+c^m(\delta_f))}{\partial f} = 2e^{-2\varphi}Ax^m + 2e^{2\varphi}(\bar\eta\eta)(\eta_{\hat a}\sigma^m\theta^{\hat a})$
$\delta_f\Delta(d) = \mathrm{j}\,df:\ \mathrm{j}=\frac{\partial\Delta(\delta_f)}{\partial f} = 1+i\theta^\mu_{\hat a}\eta^{\hat a}_\mu$
$\delta_f\Omega_{\hat a}{}^{\hat b} = J_{\hat a}{}^{\hat b}df:$ $J_{\hat a}{}^{\hat b} = \frac{\partial}{\partial f}\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(\delta_f) = 2\left(\hat\Theta^\mu_{\hat a}\hat\eta^{\hat b}_\mu - \hat\Theta^{\mu\hat b}\hat\eta_{\mu\hat a}\right),$ $\Theta^\mu_{\hat a} = \theta^\mu_{\hat a} - \eta_{\nu\hat a}\hat{\tilde x}^{\nu\mu}$
$\delta_f\omega^\mu_{\hat a}(d) = \mathbf{j}^\mu_{\hat a}df:\ \mathbf{j}^\mu_{\hat a} = \frac{\partial\omega^\mu_{\hat a}(\delta f)}{\partial f} = e^{-\varphi}(\hat\Theta^\mu_{\hat a} - 2\tilde x^{\mu\nu}\hat\eta_{\nu\hat a})$
$\delta_f\chi_{\mu\hat a}(d) = \mathbf{J}_{\mu\hat a}df:$ $\mathbf{J}_{\mu\hat a} = \frac{\partial\chi_{\mu\hat a}(\delta_f)}{\partial f} = -e^\varphi\,(\Lambda_{-\mu}{}^\nu\hat\eta_{\nu\hat a} + ie^\varphi(\bar\eta\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^\nu_{\hat a})$

Таблиця 1.3. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з дилатаційною інваріантністю.

$\delta_l\omega^m(d)+\delta_l c^m(d) = j^m{}_{kn}dl^{kn}+\ldots:$ $j^m{}_{kn} = \frac{\partial(\omega^m(\delta_l)+c^m(\delta_l))}{\partial l^{kn}} = \frac{1}{2}e^{-2\varphi}A\left(\delta^m_k x_n - \delta^m_n x_k + i(\bar\theta\theta)\varepsilon^m{}_{kn}\right)$ $+\frac{1}{2}e^{2\varphi}(\bar\eta\eta)\left\{\delta^m_k(\eta_{\hat a}\sigma_n\bar\theta^{\hat a}) - (k\leftrightarrow n) + \varepsilon^m{}_{kn}\left[i+(\bar\eta\theta)+(\bar\theta\eta)\right]\right\}$
$\delta_l\Delta(d) = \mathrm{j}_{mn}dl^{mn}:\ \mathrm{j}_{mn} = \frac{\partial\Delta(\delta_l)}{\partial l^{mn}} = \frac{i}{4}(\theta_{\hat a}\sigma_{mn}\eta^{\hat a})$
$\delta_l\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(d) = J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_{mn}dl^{mn}:$ $J_{\hat a}{}^{\hat b}{}_{mn} = \frac{\partial}{\partial l^{mn}}\Omega_{\hat a}{}^{\hat b}(\delta_l) = \frac{1}{2}\left[(\hat\Theta_{\hat a}\sigma_{mn}\hat\eta^{\hat b}) - (\hat\Theta^{\hat b}\sigma_{mn}\hat\eta_{\hat a})\right]$
$\delta_l\omega^\mu_{\hat a}(d) = \mathbf{j}^\mu_{\hat a mn}dl^{mn}+\ldots,:$ $\mathbf{j}^\mu_{\hat a mn} = \frac{\partial\omega^\mu_{\hat a}(\delta_l)}{\partial l^{mn}} = \frac{1}{4}e^{-\varphi}\left(\hat\Theta^\nu_{\hat a}\sigma_{mn\nu}{}^\mu - \hat{\tilde x}^{\mu\lambda}\sigma_{mn\lambda}{}^\nu\hat\eta_{\nu\hat a}\right)$
$\delta_l\chi_{\mu\hat a}(d) = \mathbf{J}_{\mu\hat a mn}dl^{mn}+\ldots:$ $\mathbf{J}_{\mu\hat a mn} = \frac{\partial\chi_{\mu\hat a}(\delta_l)}{\partial l^{mn}} = -e^\varphi\left(\frac{1}{4}\Lambda_{-\mu}{}^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\lambda\hat\eta_{\lambda\hat a} + ie^\varphi(\bar\eta\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^\nu_{\hat a mn}\right)$

Таблиця 1.4. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з $D=3$ лоренцевою інваріантністю.

$\delta_w \omega^m(d) + \delta_w c^m(d) = j^m{}_a{}^b dw_b{}^a :$ $j^m{}_a{}^b = \frac{\partial(\omega^m(\delta_w)+c^m(\delta_w))}{\partial w_b{}^a} = 2e^{-2\varphi} A \left[\delta_a^b(\theta_c \sigma^m \bar\theta^c) - (\theta_a \sigma^m \bar\theta^b)\right]$ $+2e^{2\varphi}\delta_a^b \left\{(\eta_c \tilde\sigma^m \bar\eta^c) - i(\bar\eta\eta)\left[(\theta_c \sigma^m \bar\eta^c) + (\eta_c \sigma^m \bar\theta^c)\right]\right\}$ $-2e^{2\varphi}\left\{(\eta_a \tilde\sigma^m \bar\eta^b) - i(\bar\eta\eta)\left[(\theta_a \sigma^m \bar\eta^b) + (\eta_a \sigma^m \bar\theta^b)\right]\right\}$
$\delta_w \Delta = \mathrm{j}_a{}^b dw_b{}^a :$ $\mathrm{j}_a{}^b = \frac{\partial \Delta(\delta_w)}{\partial w_b{}^a} = \delta_a^b(\bar\theta^{\mu c}\eta_{\mu c} + \bar\eta_\mu^c \theta_c^\mu) + \theta_a^\mu \bar\eta_\mu^b + \eta_{\mu a}\bar\theta^{\mu b}$
$\delta_w \Omega_{\hat c}{}^{\hat d}(d) = J_{\hat c}{}^{\hat d}{}_a{}^b dw_b{}^a + \cdots :$ $J_{\hat c}{}^{\hat d}{}_a{}^b = \frac{\partial}{\partial w_b{}^a}\Omega_{\hat c}{}^{\hat d}(\delta_w) = \mathcal{T}_{\hat c}{}^b \mathcal{T}^{\hat d}{}_a - \mathcal{T}_{\hat c a}\mathcal{T}^{\hat d b} + \frac{i}{2}\delta_a^b(\mathcal{T}\mathfrak{J}\bar{\mathcal{T}})_{\hat c}{}^{\hat d},$ $\mathcal{T}_{\hat a}{}^{\hat b} = T_{\hat a}{}^{\hat b} + 2i\hat\eta_{\nu\hat a}\theta^{\nu\hat b}$
$\delta_w \omega_{\hat c}^\mu(d) = \mathbf{j}_{\hat c}^\mu{}_a{}^b dw_b{}^a + \ldots :$ $\mathbf{j}_{\hat c}^\mu{}_a{}^b = \frac{\partial \omega_{\hat c}^\mu(\delta_w)}{\partial w_b{}^a} = e^{-\varphi}\left[\frac{1}{2}\delta_a^b(\mathcal{T}\mathfrak{J}\,\theta^\mu)_{\hat c} - i\theta_a^\mu \mathcal{T}_{\hat c}{}^b + i\bar\theta^{\mu b}\mathcal{T}_{\hat c a}\right]$
$\delta_w \chi_{\mu\hat c}(d) = \mathbf{J}_{\mu\hat c a}{}^b dw_b{}^a + \ldots :$ $\mathbf{J}_{\mu\hat c a}{}^b = \frac{\partial \chi_{\mu\hat c}(\delta_w)}{\partial w_b{}^a} = e^{\varphi}\left[\frac{1}{2}\delta_a^b(\mathcal{T}\mathfrak{J}\eta_\mu)_{\hat c} - i\eta_{\mu a}\mathcal{T}_{\hat c}{}^b + i\bar\eta_\mu^b \mathcal{T}_{\hat c a} + ie^{\varphi}(\bar\eta\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}_{\hat c}^\nu{}_a{}^b\right]$

Таблиця 1.5. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з $u(3)$ інваріантністю.

$\delta_y\omega^m(d)+\delta_y c^m(d)=j^m{}_a dy^a+\bar{j}^{ma}d\bar{y}_a$: $j^m{}_a=\frac{\partial(\omega^m(\delta_y)+c^m(\delta_y))}{\partial y^a}$ $=-\varepsilon_{abc}\left\{e^{-2\varphi}A(\bar{\theta}^b\sigma^m\bar{\theta}^c)+e^{2\varphi}\left[(\bar{\eta}^b\tilde{\sigma}^m\bar{\eta}^c)-2i(\bar{\eta}\eta)(\bar{\theta}^b\tilde{\sigma}^m\bar{\eta}^c)\right]\right\}$
$\delta_y\Delta(d)=\mathrm{j}_a dy^a+\bar{\mathrm{j}}^a d\bar{y}_a$: $\mathrm{j}_a=\frac{\partial\Delta(\delta_y)}{\partial y^a}=\varepsilon_{abc}\bar{\theta}^{\mu b}\bar{\eta}^c_\mu$
$\delta_y\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(d)=J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}{}_a dy^a+\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}a}d\bar{y}_a+\ldots$: $J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}{}_a=\frac{\partial}{\partial y^a}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_y)=-\varepsilon_{ade}\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^d\mathcal{T}^{\hat{c}e}$, $\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}a}=\frac{\partial}{\partial\bar{y}_a}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_y)=\varepsilon^{ade}\mathcal{T}_{\hat{b}d}\mathcal{T}^{\hat{c}}{}_e$
$\delta_y\omega^\mu_{\hat{b}}(d)=\mathbf{j}^\mu_{\hat{b}a}dy^a+\bar{\mathbf{j}}^{\mu a}_{\hat{b}}d\bar{y}_a+\ldots$: $\mathbf{j}^\mu_{\hat{b}a}=\frac{\partial\omega^\mu_{\hat{b}}(\delta_y)}{\partial y^a}=ie^{-\varphi}\varepsilon_{acd}\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^c\bar{\theta}^{\mu d}$
$\delta_y\chi_{\mu\hat{b}}(d)=\mathbf{J}_{\mu\hat{b}a}dy^a+\bar{\mathbf{J}}_{\mu\hat{b}}{}^a d\bar{y}_a+\ldots$: $\mathbf{J}_{\mu\hat{b}a}=\frac{\partial\chi_{\mu\hat{b}}(\delta_y)}{\partial y^a}=ie^{\varphi}(\varepsilon_{acd}\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^c\bar{\eta}^d_\mu+e^{\varphi}(\bar{\eta}\eta)\varepsilon_{\mu\nu}\mathbf{j}^\nu_{\hat{b}a})$ and c.c.

Таблиця 1.6. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з $su(4)/u(3)$ інваріантністю.

$\delta_\varepsilon\omega^m(d)+\delta_\varepsilon c^m(d)=j^{ma}{}_\mu d\varepsilon^\mu_a-\bar{j}^m{}_{\mu a}d\bar{\varepsilon}^{\mu a}$: $j^{ma}{}_\mu=\frac{\partial(\omega^m(\delta_\varepsilon)+c^m(\delta_\varepsilon))}{\partial\varepsilon^\mu_a}=2\sigma^m_{\mu\nu}\left[ie^{-2\varphi}A\bar{\theta}^{\nu a}+e^{2\varphi}(\bar{\eta}\eta)\bar{\eta}^{\nu a}\right]$
$\delta_\varepsilon\Delta(d)=\mathrm{j}^a_\mu d\varepsilon^\mu_a-\bar{\mathrm{j}}_{\mu a}d\bar{\varepsilon}^{\mu a}$: $\mathrm{j}^a_\mu=\frac{\partial\Delta(\delta_\varepsilon)}{\partial\varepsilon^\mu_a}=-i\bar{\eta}^a_\mu$
$\delta_\varepsilon\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(d)=J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}a}{}_\mu d\varepsilon^\mu_a-\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}{}_{\mu a}d\bar{\varepsilon}^{\mu a}$: $J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}a}{}_\mu=\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu_a}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_\varepsilon)=2(\hat{\eta}_{\mu\hat{b}}\mathcal{T}^{\hat{c}a}-\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^a\hat{\eta}^{\hat{c}}_\mu)$ $\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}{}_{\mu a}=-\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mu a}}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_\varepsilon)=2(\mathcal{T}_{\hat{b}a}\hat{\eta}^{\hat{c}}_\mu-\hat{\eta}_{\mu\hat{b}}\mathcal{T}^{\hat{c}}{}_a)$
$\delta_\varepsilon\omega^\nu_{\hat{b}}(d)=\mathbf{j}^{\nu a}_{\hat{b}\,\mu}d\varepsilon^\mu_a+\bar{\mathbf{j}}^\nu_{\hat{b}\,\mu a}d\bar{\varepsilon}^{\mu a}$: $\mathbf{j}^{\nu a}_{\hat{b}\,\mu}=\frac{\partial\omega^\nu_{\hat{b}}(\delta_\varepsilon)}{\partial\varepsilon^\mu_a}=e^{-\varphi}\left(\delta^\nu_\mu\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^a+2i\hat{\eta}_{\mu\hat{b}}\bar{\theta}^{\nu a}\right)$
$\delta_\varepsilon\chi_{\nu\hat{b}}(d)=\mathbf{J}_{\nu\hat{b}\mu}{}^a d\varepsilon^\mu_a+\bar{\mathbf{J}}_{\nu\hat{b}\mu a}d\bar{\varepsilon}^{\mu a}$: $\mathbf{J}_{\nu\hat{b}\mu}{}^a=\frac{\partial\chi_{\nu\hat{b}}(\delta_\varepsilon)}{\partial\varepsilon^\mu_a}=ie^{\varphi}\left(2\hat{\eta}_{\mu\hat{b}}\bar{\eta}^a_\nu-e^{\varphi}(\bar{\eta}\eta)\varepsilon_{\nu\lambda}\mathbf{j}^{\lambda a}_{\hat{b}\,\mu}\right)$ and c.c.

Таблиця 1.7. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з інваріантністю відносно суперсиметрії Пуанкаре.

$\delta_\xi \omega^m(d)+\delta_\xi c^m(d)=j^{m\mu a}d\xi_{\mu a}-\bar{j}^{m\mu}{}_a d\bar{\xi}^a_\mu+\ldots:$ $j^{m\mu a}=\frac{\partial(\omega^m(\delta_\xi)+c^m(\delta_\xi))}{\partial\xi_{\mu a}}=2[ie^{-2\varphi}A\bar{\theta}^{\lambda a}\sigma^m_{\lambda\nu}\hat{\tilde{x}}^{\nu\mu}+ie^{2\varphi}\bar{\eta}^a_\lambda\tilde{\sigma}^{m\lambda\nu}\Lambda_{-\nu}{}^\mu$ $+e^{2\varphi}(\bar{\eta}\eta)(\bar{\eta}^{\lambda a}\sigma^m_{\lambda\nu}\hat{\tilde{x}}^{\nu\mu}-\bar{\theta}^a_\lambda\tilde{\sigma}^{m\lambda\nu}\Lambda_{+\nu}{}^\mu)]$
$\delta_\xi\Delta(d)=\mathrm{j}^{\mu a}d\xi_{\mu a}-\bar{\mathrm{j}}^\mu_a d\bar{\xi}^a_\mu+\ldots:\mathrm{j}^{\mu a}=\frac{\partial\Delta(\delta_\xi)}{\partial\xi_{\mu a}}=-i\left(\bar{\theta}^{\nu a}\Lambda_{-\nu}{}^\mu+\bar{\eta}^a_\nu\hat{\tilde{x}}^{\nu\mu}\right)$
$\delta_\xi\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(d)=J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}\mu a}d\xi_{\mu a}-\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}\mu}{}_a d\bar{\xi}^a_\mu:$ $J_{\hat{b}}{}^{\hat{c}\mu a}=\frac{\partial}{\partial\xi_{\mu a}}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_\xi)=2(\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^a\hat{\Theta}^{\mu\hat{c}}-\hat{\Theta}^\mu_{\hat{b}}\mathcal{T}^{\hat{c}a}),$ $\bar{J}_{\hat{b}}{}^{\hat{c}\mu}{}_a=-\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}^a_\mu}\Omega_{\hat{b}}{}^{\hat{c}}(\delta_\xi)=2(\hat{\Theta}^\mu_{\hat{b}}\mathcal{T}^{\hat{c}}{}_a-\mathcal{T}_{\hat{b}a}\hat{\Theta}^{\mu\hat{c}})$
$\delta_\xi\omega^\nu_{\hat{b}}(d)=\mathbf{j}^{\nu\mu a}_{\hat{b}}d\xi_{\mu a}+\bar{\mathbf{j}}^{\nu\mu}_{\hat{b}a}d\bar{\xi}^a_\mu+\ldots:$ $\mathbf{j}^{\nu\mu a}_{\hat{b}}=\frac{\partial\omega^\nu_{\hat{b}}(\delta_\xi)}{\partial\xi_{\mu a}}=e^{-\varphi}(\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^a\hat{\tilde{x}}^{\nu\mu}+2i\bar{\theta}^{\nu a}\hat{\Theta}^\mu_{\hat{b}})$
$\delta_\xi\chi_{\nu\hat{b}}(d)=\mathbf{J}_{\nu\hat{b}}{}^{\mu a}d\xi_{\mu a}+\bar{\mathbf{J}}_{\nu\hat{b}a}{}^\mu d\bar{\xi}^a_\mu+\ldots:$ $\mathbf{J}_{\nu\hat{b}}{}^{\mu a}=\frac{\partial\chi_{\nu\hat{b}}(\delta_\xi)}{\partial\xi_{\mu a}}=e^\varphi(\Lambda_{-\nu}{}^\mu\mathcal{T}_{\hat{b}}{}^a+2i\bar{\eta}^a_\nu\hat{\Theta}^\mu_{\hat{b}}-ie^\varphi(\bar{\eta}\eta)\varepsilon_{\nu\lambda}\mathbf{j}^{\lambda\mu a}_{\hat{b}})$ and c.c.

Таблиця 1.8. Тензори, які дають внесок до густини ньотерового струму, пов'язаного з інваріантністю відносно спеціальної конформної суперсиметрії.

ду лежить можливість ізоморфної реалізації $AdS_4\times S^7$ суперпростору як $(11|32)$-вимірного $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору, геометричні складові якого ототожнюються з $osp(4|8)$ формами Картана. Лагранжіан $AdS_4\times S^7$ супермембрани будується з форм Картана для генераторів відповідної фактор-алгебри подібно до того, як було побудовано лагранжіан $AdS_5\times S^5$ суперструни [136], [137]. Також для проведення подвійної розмірної редукції семивимірну сферу було реалізовано як розшарування Хопфа $\mathbb{CP}^3\times S^1$ [152], [153].

Нами було розглянуто елемент $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору

$$\hat{\mathscr{G}}=\mathscr{G}e^{yH}e^{\theta^\mu_4 Q^4_\mu+\bar{\theta}^{\mu4}\bar{Q}_{\mu4}}e^{\eta_{\mu4}S^{\mu4}+\bar{\eta}^4_\mu\bar{S}^\mu_4}\in OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7)).\quad(1.67)$$

Першим множником зліва у (1.67) є елемент суперсиметричного фактор-простору $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$

$$\mathscr{G}=e^{x_mP^m+\theta^{\mu}_aQ^a_{\mu}+\bar\theta^{\mu a}\bar Q_{\mu a}}e^{\eta_{\mu a}S^{\mu a}+\bar\eta^a_{\mu}\bar S^{\mu}_a}e^{z^aT_a+\bar z_aT^a}e^{\varphi D}\in OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3)),$$

який має таку ж форму, як і (1.38). Єдиною відмінністю є те, що елемент $SU(4)/U(3)$ фактор-простору включає генератори T_a та T^a, означені нижче в (1.82), замість $V_a{}^4$ і $V_4{}^a$. Структура елемента (1.67) відповідає реалізації $osp(4|8)$ супералгебри ізометрії $AdS_4\times S^7$ супербекграунда як $D=3$ $\mathcal{N}=8$ суперконформної алгебри й приводить до метрики Пуанкаре для простору анти-де Сіттера (1.40). 32 генератори суперсиметрій $D=3\,\mathcal{N}=8$ суперконформної алгебри

$$Q^A_{\mu}=\begin{pmatrix}Q^a_{\mu}\\ Q^4_{\mu}\end{pmatrix},\quad \bar Q_{\mu A}=\begin{pmatrix}\bar Q_{\mu a}\\ \bar Q_{\mu 4}\end{pmatrix}$$

та

$$S^{\mu A}=\begin{pmatrix}S^{\mu a}\\ S^{\mu 4}\end{pmatrix},\quad \bar S^{\mu}_A=\begin{pmatrix}\bar S^{\mu}_a\\ \bar S^{\mu}_4\end{pmatrix}$$

складаються з 24 генераторів Q^a_{μ}, $\bar Q_{\mu a}$ та $S^{\mu a}$, $\bar S^{\mu}_a$, які входять до $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри, разом із додатковими генераторами суперсиметрії Пуанкаре Q^4_{μ}, $\bar Q_{\mu 4}$ та спеціальної конформної суперсиметрії $S^{\mu 4}$, $\bar S^{\mu}_4$, які порушуються $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Відносне позиціювання множників у (1.67) продиктоване вимогою відсутності залежності суперфільбайна від координати y кола S^1, яке буде редуковано. Її можна задовольнити розмістивши фактор e^{yH} зліва від факторів, які включають генератори порушених суперсиметрій, якщо зовнішнє диференціювання діє справа.

Запропоноване калібрування світлового конуса для κ-симетрії закріплюється умовою обернення на нуль 16 грассманово-непарних координат

$$\theta^2_A=\bar\theta^{2A}=\eta_{1A}=\bar\eta^A_1=0, \tag{1.68}$$

які належать до $\mathbf{4}$ та $\bar{\mathbf{4}}$ представлень $su(4)$ алгебри. Ці координати відповідають генераторам Q^A_2, $\bar Q_{2A}$, S^{1A} та $\bar S^1_A$, які мають від'ємну вагу відносно

$SO(1,1) \subset SO(1,2)$ симетрії з генератором $M^{+-} = 2M^{02}$.

Побудовані з елемента (1.67) форми Картана, які відповідають генераторам $osp(4|8)/(so(1,3) \times so(7))$ фактор-алгебри, визначають лагранжіан супермембрани в термінах координат $AdS_4 \times S^7$ суперпростору та їх диференціалів, а подвійна розмірна редукція її дії приводить до дії $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни. Цю процедуру буде детально розглянуто у наступному пункті.

1.4.1 $AdS_4 \times S^7$ супермембрана та її редукція до $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни

Дія $D = 11$ супермембрани в $AdS_4 \times S^7$ супербекграунді [162] має вигляд

$$S^{AdS_4 \times S^7}_{\text{smembrane}} = -\int\limits_V d^3\hat{\xi}\sqrt{-g^{(3)}} + S^{AdS_4 \times S^7}_{\text{WZ}}. \qquad (1.69)$$

Кінетичний член представляє інтеґрал за світовим об'ємом V від детермінанта індукованої метрики

$$g^{(3)}_{\underline{ij}} = E^{\hat{m}}_{\underline{i}} E_{\underline{j}\hat{m}},$$

де $\hat{\xi}^{\underline{i}} = (\tau, \sigma, \rho)$ – локальні координати світового об'єма, а $E^{\hat{m}}_{\underline{i}}$ ($\hat{m}, \hat{n} = 0, 1, ...9, 11$) – відображення на світовий об'єм бозонних компонентів $D = 11$ суперфільбайна. Член Весса-Зуміно

$$S^{AdS_4 \times S^7}_{\text{WZ}} = s \int\limits_{\mathcal{M}_4} H_{(4)}$$

дається інтеґралом від замкненої 4-форми

$$\begin{gathered} H_{(4)}(d) = \tfrac{i}{8} F^{\hat{\alpha}}(d) \wedge \mathfrak{g}^{\hat{m}\hat{n}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}} F_{\hat{\beta}}(d) \wedge E_{\hat{m}}(d) \wedge E_{\hat{n}}(d) \\ + \tfrac{1}{4} \varepsilon_{m'n'k'l'} E^{m'}(d) \wedge E^{n'}(d) \wedge E^{k'}(d) \wedge E^{l'}(d) \end{gathered}$$

за допоміжною чотиривимірною гіперповерхнею $\mathcal{M}_4$, межою якої є світовий об'єм супермембрани V. Кінетичний член має таку ж стуктуру, як у пласкому суперпросторі [111], тоді як другий доданок в $H_{(4)}(d)$ включає внесок ненульової 4-форми $AdS_4 \times S^7$ бекграунда. Значення параметра $s = \pm 1$ фіксується вимогою κ-інваріантності дії супермембрани (1.69).

Бозонні компоненти $D = 11$ суперфільбайна $E^{\hat{m}}(d) = (E^{m'}(d), \mathsf{E}^{I'}(d))$ включають компоненти $E^{m'}(d)$ у дотичному просторі до $AdS_4 = SO(2,3)/SO(1,3)$ та компоненти $\mathsf{E}^{I'}(d)$ $(I' = 1, \dots, 7)$ у дотичному просторі до $S^7 = SO(8)/SO(7)$. Вони дорівнюють формам Картана $\underline{G}^{0'm'}(d)$ і $\Omega^{8I'}(d)$, які зіставляються означеним нижче генераторам $M_{0'm'}$ та $V^{8I'}$ фактор-алгебр $so(2,3)/so(1,3)$ і $so(8)/so(7)$ відповідно. Тут і далі підкреслювання літер, які позначають форми Картана для $osp(4|6)$ генераторів, вказує на те, що окрім координат $(10|24)$-вимірного $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3)$ суперпростору та їх диференціалів вони можуть залежати і від інших координат $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперпростору, але зводяться до форм Картана, введених у пункті 1.2.1, коли ці додаткові координати дорівнюють нулю. Ферміонні компоненти суперфільбайна ототожнюються з грассманово-непарними формами Картана $F^{\hat{\alpha}}(d) = F^{\alpha A'}(d)$ $(\hat{\alpha} = 1, \dots, 32,\ \alpha = 1, \dots, 4,\ A' = 1, \dots, 8)$, які відповідають генераторам суперсиметрії $O_{\hat{\alpha}} = O_{\alpha A'}$ із $osp(4|8)$ супералгебри. Вони несуть майоранівське спінорне представлення алгебри $spin(1,10)$, яке розкладається на добуток майоранівських спінорних представлень $spin(1,3)$ та $spin(7)$. $\mathfrak{g}^{\hat{m}\hat{n}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\hat{m}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}\mathfrak{g}^{\hat{n}}{}_{\hat{\gamma}}{}^{\hat{\beta}} - \mathfrak{g}^{\hat{n}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}\mathfrak{g}^{\hat{m}}{}_{\hat{\gamma}}{}^{\hat{\beta}})$ є генераторами $spin(1,10)$ алгебри, побудованими із γ-матриць у розмірності $D = 1 + 10$ $\mathfrak{g}^{\hat{m}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$.

Для проведення подвійної розмірної редукції [160], [207] супермембрани компоненти $D = 11$ суперфільбайна не повинні залежати від координати $y \in [0, 2\pi)$ компактної розмірності простору-часу, яка підлягає редукції. Однак, коли бозонні компоненти суперфільбайна включають член $dyE_y^{\hat{m}'}$ $(\hat{m}' = 0, 1, ..., 9)$, як у випадку елементів $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору розглянутих в [156], [208] та у наших роботах, необхідно провести локальне лоренцеве обертання у дотичному просторі

$$E^{\hat{m}}(d) \to L^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} E^{\hat{n}}(d), \quad L^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} \in SO(1,10),$$
$$F^{\hat{\alpha}}(d) \to L^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} F^{\hat{\beta}}(d), \quad L^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} \in Spin(1,10)$$

для приведення їх форми до анзацу Калуци-Клейна

$$(LE)^{\hat{m}'}(d) = \mathcal{E}^{\hat{m}'}(d), \quad (LE)^{11}(d) = \mathcal{E}^{11}(d) = \Phi_L(dy + A_L(d)). \qquad (1.70)$$

Компоненти перетвореного фільбайна $\mathcal{E}^{\hat{m}'}(d)$ не залежать від y і dy та ототожнюються з бозонними компонентами $D = 10$ суперфільбайна, $\Phi_L = e^{2\phi/3}$ визначає $D = 10$ IIA суперполе дилатона ϕ, а суперполе $A_L(d)$ є калібрувальною 1-формою, яка разом із калібрувальною 3-формою утворюють набір калібрувальних суперполів Рамона-Рамона в теорії суперструн типу IIA. У спектрі вільної суперструни вони виникають із добутку спінорних основних станів у секторах ліво- та право-біжних листкових полів. Ферміонні компоненти перетвореного $D = 11$ суперфільбайна

$$(LF)^{\hat{\alpha}}(d) = \mathcal{E}^{\hat{\alpha}}(d) + e^{-2\phi/3}\chi^{\hat{\alpha}}\mathcal{E}^{11}(d) \qquad (1.71)$$

визначають ферміонні компоненти $D = 10$ суперфільбайна

$$\mathcal{E}^{\hat{\alpha}}(d) = (Lf)^{\hat{\alpha}}(d) - (LF_y)^{\hat{\alpha}} A_L(d) \qquad (1.72)$$

та суперполе дилатіно

$$\chi^{\hat{\alpha}} = (LF_y)^{\hat{\alpha}}. \qquad (1.73)$$

У виразах (1.72) та (1.73) було використано розклад ферміонних компонентів $D = 11$ суперфільбайна

$$F^{\hat{\alpha}}(d) = f^{\hat{\alpha}}(d) + dyF_y^{\hat{\alpha}}, \qquad (1.74)$$

де $f^{\hat{\alpha}}(d)$ і $F_y^{\hat{\alpha}}$ не залежать від y, а $f^{\hat{\alpha}}(d)$ не містить членів пропорційних dy.

Далі компактна розмірність простору-часу ототожнюється з компактною розмірністю світового об'єму $y = \rho$ та виключається інтеґруванням.

Тоді кінетичний член дії супермембрани (1.69) зводиться до кінетичного члена дії суперструни у системі Калуци-Клейна

$$\int_V d^3\hat{\xi}\sqrt{-g^{(3)}} \to \int_\Sigma d^2\xi \Phi_L \sqrt{-g^{(2)}},$$

де $\xi^i = (\tau, \sigma)$ – локальні листкові координати, а $g^{(2)} = \det g^{(2)}_{ij}$ – детермінант індукованої листкової метрики

$$g^{(2)}_{ij} = \mathcal{E}_i^{\hat{m}'}\mathcal{E}_{j\hat{m}'}.$$

Член Весса-Зуміно супермембрани зводиться до члена Весса-Зуміно суперструни

$$\int_{\mathcal{M}_4} H_{(4)} \to \int_{\mathcal{M}_3} H_{(3)}, \tag{1.75}$$

представленого у вигляді інтеґрала від 3-форми $H_{(3)}(d) = dB_{(2)}(d)$ за тривимірною гіперповерхнею $\mathcal{M}_3$, границею якої є світовий листок суперструни Σ. 2-форма $B_{(2)}(d)$ виникає у спектрі орієнтованих суперструн із розкладу добутку бозонних осциляторів для ліво- та право-біжних частин полів просторово-часових координат й має назву калібрувального потенціалу Нев'є-Шварца-Нев'є-Шварца. Враховуючи його трансформаційні властивості, це поле можна розглядати як струнне узагальнення потенціалу електромагнітного поля, з яким мінімально взаємодіють заряджені точкові частинки.

Після опису загальної процедури подвійної розмірної редукції супермембрани перейдемо до означення $osp(4|8)$ форм Картана та базисів для $so(8)$ генераторів і форм Картана, сумісних з реалізацію семивимірної сфери як розшарування Хопфа. Для елемента $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору $\hat{\mathscr{G}}$ загальної форми коваріантні форми Картана визначаються співвідношенням

$$\hat{\mathscr{G}}^{-1}d\hat{\mathscr{G}} = \underline{G}_{\mathrm{sp}(4)}(d) + G_{\mathrm{so}(8)}(d) + G_{32\mathrm{susy}}(d) \in osp(4|8). \tag{1.76}$$

Перший член набуває значення в $sp(4) = so(2,3)$ алгебрі й може бути виражений через генератори $conf(1,2)$ алгебри та відповідні форми Картана

$$\underline{G}_{\mathrm{sp}(4)}(d) = \underline{G}^{m'n'}(d) M_{m'n'} + 2\underline{G}^{0'm'}(d) M_{0'm'}$$
$$= \underline{G}^{mn}(d) M_{mn} + \underline{\Delta}(d) D + \underline{\omega}^{m}(d) P_m + \underline{c}^{m}(d) K_m \in sp(4).$$

Форми Картана $\underline{G}^{0'm'}(d)$ ототожнюються з бозонними компонентами $D = 11$ суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 та зв'язані з формами Картана у конформному базисі виразами, аналогічними наведеним в (1.24)

$$\underline{G}^{0'm}(d) = \frac{1}{2}(\underline{\omega}^{m} + \underline{c}^{m})(d), \quad \underline{G}^{0'3}(d) = -\underline{\Delta}(d). \tag{1.77}$$

Другий член включає генератори $so(8)$ алгебри $V^{\underline{IJ}}$ разом із формами Картана $\Omega^{\underline{IJ}}(d)$

$$G_{\mathrm{so}(8)}(d) = \Omega^{\underline{IJ}}(d) V^{\underline{IJ}} \in so(8). \tag{1.78}$$

Його можна представити у формах з явною $so(7)$ або $so(6)$ коваріантністю

$$G_{\mathrm{so}(8)}(d) = \Omega^{I'J'}(d) V^{I'J'} + \Omega^{8I'}(d) V^{8I'}$$
$$= \mathit{\Omega}^{IJ}(d) V^{IJ} + \Omega^{87}(d) V^{87} + \Omega^{8I}(d) V^{8I} + 2\Omega^{7I}(d) V^{7I}.$$

Останню рівність може бути записано в $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ базисі

$$G_{\mathrm{so}(8)}(d) = \mathit{\Omega}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) V_{\hat{b}}{}^{\hat{a}} + \Omega^{87}(d) V^{87} - \frac{1}{2}\Omega^{8\hat{a}}(d) V^{8}{}_{\hat{a}} - \Omega^{7\hat{a}}(d) V^{7}{}_{\hat{a}}. \tag{1.79}$$

Означення $so(6)$ форм Картана та генераторів у цьому базисі

$$\mathit{\Omega}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(d) = \begin{pmatrix} \mathit{\Omega}_a{}^b(d) - \delta_a^b \mathit{\Omega}_c{}^c(d) & \varepsilon_{acb}\mathit{\Omega}_4{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb}\mathit{\Omega}_c{}^4(d) & -\mathit{\Omega}_b{}^a(d) + \delta_b^a \mathit{\Omega}_c{}^c(d) \end{pmatrix}$$

та

$$V_{\hat{a}}{}^{\hat{b}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} V_a{}^b - \delta_a^b V_c{}^c & \varepsilon_{acb} V_4{}^c(d) \\ -\varepsilon^{acb} V_c{}^4 & -V_b{}^a + \delta_b^a V_c{}^c \end{pmatrix}$$

співпадають з наведеними в (1.8) та (1.9). Генератори $so(8)/(so(2) \times so(6))$ фактор-алгебри та відповідні форми Картана в $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}$ базисі визначаються як

$$\Omega^{7(8)}{}_{\hat{a}}(d) = \begin{pmatrix} \Omega^{7(8)}{}_a(d) \\ \Omega^{7(8)a}(d) \end{pmatrix} = M_{\hat{a}I}^{-1}\Omega^{7(8)I}(d)$$

та

$$V^{7(8)}{}_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} V^{7(8)}{}_a \\ V^{7(8)a} \end{pmatrix} = M^{-1}_{\hat{a}I} V^{7(8)I}.$$

Для того аби здобути фільбайн семивимірної сфери S^7 у формі, яка відповідає її реалізації як розшарування Хопфа, необхідно розглянути інше вкладення $su(4) \oplus u(1)$ алгебри ізометрії $\mathbb{CP}^3 \times S^1$ в $so(8)$ алгебру порівняно зі звичайним, яке випливає з представлення її комутаційних співвідношень

$$[V^{\underline{IJ}}, V^{\underline{KL}}] = \delta^{\underline{IL}} V^{\underline{JK}} - \delta^{\underline{IK}} V^{\underline{JL}} + \delta^{\underline{JK}} V^{\underline{IL}} - \delta^{\underline{JL}} V^{\underline{IK}}$$

у формі з явною $so(6)$ коваріантністю

$$\begin{gathered} [V^{87}, V^{7I}] = V^{8I}, \ [V^{87}, V^{8I}] = -V^{7I}, \\ \left[V^{7I}, V^{7J}\right] = [V^{8I}, V^{8J}] = -V^{IJ}, \ [V^{7I}, V^{8J}] = -\delta^{IJ} V^{78}, \\ \left[V^{IJ}, V^{7(8)K}\right] = \delta^{JK} V^{7(8)I} - \delta^{IK} V^{7(8)J}, \\ \left[V^{IJ}, V^{KL}\right] = \delta^{IL} V^{JK} - \delta^{IK} V^{JL} + \delta^{JK} V^{IL} - \delta^{JL} V^{IK}. \end{gathered}$$

Причиною цього є те, що генератори V^{8I} і V^{87}, яким зіставляються бозонні компоненти суперфільбайна у дотичному просторі до S^7, не можна ототожнити з генераторами $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри та $u(1)$ підалгебри $so(8)$ алгебри, оскільки комутаційні співвідношення генераторів V^{8I} замикаються на $so(6) = su(4)$ генератори V^{IJ}, а не $u(3)$ генератори. Також генератор V^{87} не комутує з V^{8I} (див. обговорення в [156]). З урахуванням обраної реалізації компонентів келерової 2-форми (1.28) нові $u(1) \subset so(8)/su(4)$ та $u(3) \subset su(4)$ генератори означаються співвідношеннями

$$H = 2V_a{}^a - V^{78}, \tag{1.80}$$

$$\tilde{V}_a{}^b = V_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b V_c{}^c - \frac{1}{4}\delta_a^b V^{78} = V_a{}^b - \frac{1}{4}\delta_a^b H, \tag{1.81}$$

а нові генератори $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри даються виразами

$$T_a = \frac{1}{2}(V^7{}_a - iV^8{}_a), \quad T^a = -\frac{1}{2}(V^{7a} + iV^{8a}). \tag{1.82}$$

Ці генератори можна представити у формі з явною $so(6)$ коваріантністю в $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}$ базисі

$$T_{\hat a} = \begin{pmatrix} T_a \\ -T^a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(V^7{}_{\hat a} - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_{\hat a}{}^{\hat b} V^8{}_{\hat b}).$$

Введені генератори (1.81)-(1.82) дійсно задовольняють комутаційні співвідношення $su(4)$ алгебри

$$[T_a, T^b] = i(\tilde V_a{}^b + \delta_a^b \tilde V_c{}^c), \quad [T_a, \tilde V_b{}^c] = -i\delta_a^c T_b, \quad [T^a, \tilde V_b{}^c] = i\delta_b^a T^c,$$
$$[\tilde V_a{}^b, \tilde V_c{}^d] = i(\delta_c^b \tilde V_a{}^d - \delta_a^d \tilde V_c{}^b)$$

та комутують з генератором H (1.80). Решта 12 генераторів $so(8)$ алгебри, які належать до $so(8)/su(4) \times u(1)$ фактор-алгебри, дорівнюють

$$\tilde T_{\hat a} = \begin{pmatrix} -\tilde T_a \\ \tilde T^a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(V^7{}_{\hat a} + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_{\hat a}{}^{\hat b} V^8{}_{\hat b}\right), \quad V_a{}^4, \quad V_4{}^a. \tag{1.83}$$

Усі комутаційні співвідношення $so(8)$ алгебри в цьому базисі наведені в додатку Б нашої роботи [184].

Форми Картана, які зіставляються новим $u(1)$ та $u(3)$ генераторам, виражаються через форми Картана, які було введено в (1.79), наступним чином

$$h(d) = \frac{1}{4}(\Omega^{78}(d) + 2\Omega_a{}^a(d)) \tag{1.84}$$

та

$$\tilde\Omega_a{}^b(d) = \Omega_a{}^b(d) - \delta_a^b \Omega_c{}^c(d) + \delta_a^b h(d). \tag{1.85}$$

Форми Картана, які відповідають генераторам $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри, означаються співвідношеннями

$$\Omega_a(d) = \Omega^7{}_a(d) - \frac{i}{2}\Omega^8{}_a(d), \quad \Omega^a(d) = -\Omega^{7a}(d) - \frac{i}{2}\Omega^{8a}(d), \tag{1.86}$$

які можна представити у $so(6)$ коваріантний спосіб

$$\Omega_{\hat a}(d) = \begin{pmatrix} \Omega_a(d) \\ -\Omega^a(d) \end{pmatrix} = \Omega^7{}_{\hat a}(d) - \frac{1}{4}\mathfrak{J}_{\hat a}{}^{\hat b}\Omega^8{}_{\hat b}(d).$$

Нарешті форми Картана, які відповідають генераторам $\tilde{T}_a$ і $\tilde{T}^a$, введеним в (1.83),

$$\tilde{\Omega}_a(d) = -\Omega^7{}_a(d) - \frac{i}{2}\Omega^8{}_a(d), \quad \tilde{\Omega}^a(d) = \Omega^{7a}(d) - \frac{i}{2}\Omega^{8a}(d) \tag{1.87}$$

можна також представити у вигляді з явною $so(6)$ коваріантністю в $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}$ базисі

$$\tilde{\Omega}_{\hat{a}}(d) = \begin{pmatrix} -\tilde{\Omega}_a(d) \\ \tilde{\Omega}^a(d) \end{pmatrix} = \Omega^7{}_{\hat{a}}(d) + \frac{1}{4}\mathfrak{J}_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}\Omega^8{}_{\hat{b}}(d).$$

В результаті розклад (1.78) представляється в еквівалентній формі, яка відповідає вкладенню $su(4) \oplus u(1)$ алгебри в $so(8)$, сумісному з реалізацією S^7 як розшарування Хопфа

$$G_{\mathrm{so}(8)}(d) = \tilde{\Omega}_a{}^b(d)\tilde{V}_b{}^a + \tilde{\Omega}_b{}^b(d)\tilde{V}_a{}^a + \Omega_a(d)T^a + \Omega^a(d)T_a + h(d)H$$
$$+\tilde{\Omega}_a(d)\tilde{T}^a + \tilde{\Omega}^a(d)\tilde{T}_a + \mathit{\Omega}_a{}^4(d)V_4{}^a + \mathit{\Omega}_4{}^a(d)V_a{}^4.$$

В термінах форм Картана (1.84), (1.85), (1.86) та (1.87) компоненти S^7 фільбайна $\mathsf{E}^{I'}(d) = (\mathsf{E}_a(d), \mathsf{E}^a(d), \mathsf{E}^7(d))$ даються виразами

$$\mathsf{E}_a(d) = \Omega^8{}_a(d) = i(\Omega_a(d) + \tilde{\Omega}_a(d)),\ \mathsf{E}^a(d) = \Omega^{8a}(d) = i(\Omega^a(d) + \tilde{\Omega}^a(d)),$$
$$\mathsf{E}^7(d) = E^{11}(d) = \Omega^{87}(d) = h(d) + \tilde{\Omega}_a{}^a(d).$$

$G_{32\mathrm{susy}}(d)$ в (1.76) можна представити у формі подібній до $G_{24\mathrm{susy}}(d)$ із пункту 1.2.1

$$F^{\alpha A'}(d)O_{\alpha A'} = F^{\mu A'}(d)O_{\mu A'} + F_\mu^{A'}(d)O^\mu_{A'} = \omega^{\mu A'}(d)Q_{\mu A'} + \chi_\mu^{A'}(d)S^\mu_{A'}$$
$$= \bar{\omega}^{\mu A}(d)\bar{Q}_{\mu A} + \omega^\mu_A(d)Q^A_\mu + \bar{\chi}^A_\mu(d)\bar{S}^\mu_A + \chi_{\mu A}(d)S^{\mu A}.$$

Ферміонні компоненти $D = 11$ суперфільбайна мають наступні вирази

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{2}}F^{\mu A'}(d) &= \omega^{\mu A'}(d) = \big(\bar{\omega}^{\mu A}(d),\ \omega^\mu_A(d)\big), \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}F^{A'}_\mu(d) &= \chi^{A'}_\mu(d) = \big(\bar{\chi}^A_\mu(d),\ \chi_{\mu A}(d)\big) \end{aligned} \tag{1.88}$$

в термінах форм Картана, які відповідають генераторам суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії

$$O_{\mu A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{\mu A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{Q}_{\mu A} \\ Q^A_\mu \end{pmatrix},\ O^\mu_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}S^\mu_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{S}^\mu_A \\ S^{\mu A} \end{pmatrix}.$$

1.4.2 $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструна у калібруванні світлового конуса для κ-симетрії

Як зазначалось вище, калібрувальна умова світлового конуса для κ-симетрії (1.68) відповідає оберненню на нуль грассманово-непарних координат суперпростору, які зіставляються генераторам з від'ємною $so(1,1)$ вагою

$$[M^{+-},Q_{2A'}]=-Q_{2A'},\quad [M^{+-},S^1_{A'}]=-S^1_{A'}.$$

$so(1,1)$ генератор $M^{+-}=2M^{02}$ входить до алгебри $SO(1,2)$ групи Лоренца, яка діє на конформній межі простору AdS_4. Інші генератори суперсиметрії мають додатну $so(1,1)$ вагу

$$[M^{+-},Q_{1A'}]=Q_{1A'},\quad [M^{+-},S^2_{A'}]=S^2_{A'}.$$

Для координат, які відповідають цим генераторам, введемо наступні позначення

$$\theta^{1A'}=\begin{pmatrix}\bar\theta^{-A}\\ \theta^-_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\theta^{A}\\ \theta_A\end{pmatrix},\quad \eta_2^{A'}=\begin{pmatrix}\bar\eta^{-A}\\ \eta^-_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\eta^{A}\\ \eta_A\end{pmatrix}. \tag{1.89}$$

Вони є динамічними полями суперструни в калібруванні (1.68).

Далі наведемо вирази для форм Картана, які відповідають елементу суперсиметричного фактор-простору (1.67) та визначають суперфільбайн $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперпростору. В калібруванні світлового конуса для κ-симетрії компоненти суперфільбайна в дотичному просторі до AdS_4 (1.77) зводяться до

$$\begin{gathered}E^+(d)=\underline{G}^{0'+}(d)=\tfrac12 e^{-2\varphi}dx^+,\\ E^-(d)=\underline{G}^{0'-}(d)=\tfrac12 e^{-2\varphi}dx^-+\varpi(d)-2e^{-2\varphi}\Theta^2dx^+-4\Theta dy\\ E^1(d)=\underline{G}^{0'1}(d)=\tfrac12 e^{-2\varphi}dx^1,\ E^3(d)=\underline{G}^{0'3}(d)=-d\varphi,\end{gathered}\tag{1.90}$$

де $x^\pm=x^2\pm x^0$, $\Theta=\theta_4\bar\theta^4+\eta_4\bar\eta^4$ та

$$\begin{gathered}\varpi(d)=ie^{-2\varphi}(d\theta_a\bar\theta^a-\theta_a d\bar\theta^a)+i(d\theta_4\bar\theta^4-\theta_4 d\bar\theta^4)\\ +ie^{2\varphi}(d\eta_a\bar\eta^a-\eta_a d\bar\eta^a)+i(d\eta_4\bar\eta^4-\eta_4 d\bar\eta^4).\end{gathered}\tag{1.91}$$

Компоненти S^7 фільбайна набувають вигляду

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_a(d) &= \Omega^8{}_a(d) = i(\Omega_a(d) + \varepsilon_{abc}\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c dx^+ - 2e^{-\varphi}\hat\eta_a\eta_4 dx^+), \\ \mathsf{E}^a(d) &= \Omega^{8a}(d) = i(\Omega^a(d) - \varepsilon^{abc}\hat\eta_b\hat\eta_c dx^+ + 2e^{-\varphi}\hat{\bar\eta}^a\bar\eta^4 dx^+), \end{aligned} \tag{1.92}$$

$$\mathsf{E}^7 = h(d) + \tilde\Omega_a{}^a(d) = dy + A(d), \quad A(d) = \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d) - e^{-2\varphi}\eta_4\bar\eta^4 dx^+, \tag{1.93}$$

де T-перетворені координати зі шляпками були введені в (1.66), а форми Картана $\Omega_a(d)$, $\Omega^a(d)$ та $\tilde\Omega_a{}^a(d)$ у калібруванні світлового конуса дорівнюють відповідним бозонним формам Картана $\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^4(d)$, $\Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^a(d)$ та $\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d)$, наведеним в (1.43).

Відповідно до загального виразу (1.74) виділимо члени пропорційні диференціалу координати y кола S^1 в формах Картана (1.88), пов'язаних з генераторами суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії

$$\begin{aligned} \omega^\mu_A(d) &= \tilde\omega^\mu_A(d) + dy\,\omega_{yA}^{\ \mu}, \quad \bar\omega^{\mu A}(d) = \bar{\tilde\omega}^{\mu A}(d) + dy\,\bar\omega_y{}^{\mu A}, \\ \chi_{\mu A}(d) &= \tilde\chi_{\mu A}(d) + dy\,\chi_{y\mu A}, \quad \bar\chi^A_\mu(d) = \bar{\tilde\chi}^A_\mu(d) + dy\,\bar\chi_{y\mu}^{\ A}. \end{aligned}$$

У запропонованому калібруванні світлового конуса члени, які входять до цих форм Картана та не залежать від dy, дорівнюють

$$\tilde\omega^\mu_a(d) = e^{-\varphi}\begin{pmatrix} \hat d\theta_a + dx^1\hat\eta_a \\ dx^+\hat\eta_a \end{pmatrix}, \quad \bar{\tilde\omega}^{\mu a}(d) = e^{-\varphi}\begin{pmatrix} \hat d\bar\theta^a + dx^1\hat{\bar\eta}^a \\ dx^+\hat{\bar\eta}^a \end{pmatrix}, \tag{1.94}$$

$$\tilde\chi_{\mu a}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^\varphi\hat d\eta_a \end{pmatrix}, \quad \bar{\tilde\chi}^a_\mu(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^\varphi\hat d\bar\eta^a \end{pmatrix},$$

де $\hat d\theta_{\hat a} = T_{\hat a}{}^{\hat b}d\theta_{\hat b}$ та $\hat d\eta_{\hat a} = T_{\hat a}{}^{\hat b}d\eta^{\hat b}$, а також

$$\begin{aligned} \tilde\omega^\mu_4(d) &= \begin{pmatrix} d\theta_4 + d\varphi\theta_4 + e^{-2\varphi}dx^1\eta_4 \\ e^{-2\varphi}dx^+\eta_4 \end{pmatrix}, \\ \bar{\tilde\omega}^{\mu 4}(d) &= \begin{pmatrix} d\bar\theta^4 + d\varphi\bar\theta^4 + e^{-2\varphi}dx^1\bar\eta^4 \\ e^{-2\varphi}dx^+\bar\eta^4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.95}$$

$$\tilde{\chi}_{\mu 4}(d) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ d\eta_4 - d\varphi\eta_4 \end{array} \right), \quad \bar{\tilde{\chi}}^4_{\mu}(d) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ d\bar{\eta}^4 - d\varphi\bar{\eta}^4 \end{array} \right).$$

В той же час спінори пропорційні dy мають такі компоненти

$$\omega^{\mu}_{y4} = \left(\begin{array}{c} 2i\theta_4 \\ 0 \end{array} \right), \quad \bar{\omega}^{\mu 4}_{y} = \left(\begin{array}{c} -2i\bar{\theta}^4 \\ 0 \end{array} \right), \qquad (1.96)$$

$$\chi_{y\mu 4} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2i\eta_4 \end{array} \right), \quad \bar{\chi}^4_{y\mu} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -2i\bar{\eta}^4 \end{array} \right). \qquad (1.97)$$

Із виразів (1.90) випливає, що для елемента суперсиметричного фактор-простору (1.67) бозонні компоненти $D = 11$ суперфільбайна в дотичному просторі до AdS_4 включають члени пропорційні dy. Як обговорювалось у пункті 1.4.1, для приведення бозонних компонентів суперфільбайна до анзаца Калуци-Клейна (1.70) необхідно провести локальне лоренцеве обертання в дотичному просторі. Оскільки вигляд компонентів фільбайна дотичних до семивимірної сфери (1.92) та (1.93) узгоджується з анзацем Калуци-Клейна, необхідне лоренцеве обертання L проводиться лише у дотичному просторі до AdS_4 та розмірності, яку буде редуковано

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{E}^{m'}(d) \\ \mathcal{E}^{11}(d) \end{array} \right) = L \left(\begin{array}{c} \underline{G}^{0'm'}(d) \\ \Omega^{87}(d) \end{array} \right).$$

Елементи матриці L

$$L = \left(\begin{array}{cc} L^{m'}{}_{n'} & L^{m'}{}_{11} \\ L^{11}{}_{m'} & L^{11}{}_{11} \end{array} \right) \in SO(1,4) \qquad (1.98)$$

у каліброванні світлового конуса (1.68) дорівнюють

$$L^{m'}{}_{n'} = \delta^{m'}_{n'} - \frac{1}{2} G^{0'm'}_{y} G^{0'}_{yn'}, \ L^{m'}{}_{11} = -G^{0'm'}_{y}, \ L^{11}{}_{m'} = G^{0'}_{ym'}, \ L^{11}{}_{11} = 1, \quad (1.99)$$

де

$$G^{0'm'}_{y} = \left(\frac{1}{2}(\omega^m_y + c^m_y), 0 \right) = 2\Theta(1,0,-1,0).$$

Зазначимо, що у цьому калібруванні суперопле $\Phi_L = \sqrt{1 + G_y^{0'm'} G^{0'}_{ym'}}$ дорівнює одиниці для обраного нормування.[29] В результаті бозонні компоненти перетвореного $D = 11$ суперфільбайна дорівнюють

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^+(d) &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} dx^+, \\
\mathcal{E}^-(d) &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} dx^- + \varpi(d) - 2e^{-2\varphi}\Theta^2 dx^+ \\
&+ 4\Theta(\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d) - e^{-2\varphi}\eta_4\bar{\eta}^4 dx^+), \\
\mathcal{E}^1(d) &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} dx^1, \quad \mathcal{E}^3(d) = -d\varphi, \\
\mathcal{E}^{11}(d) &= dy + A_L(d), \quad A_L(d) = A(d) - e^{-2\varphi}\Theta dx^+.
\end{aligned}
\tag{1.100}
$$

Матриця відповідного лоренцевого перетворення, яке діє на ферміонні компоненти суперфільбайна, має вигляд

$$
L^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \frac{1}{2} G_y^{0'm'} \mathfrak{g}_{m'}{}^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\gamma}} \mathfrak{g}^{11\hat{\gamma}}{}_{\hat{\beta}}.
$$

Відтак $(Lf)^{\hat{\alpha}}(d)$ із (1.72) має такі компоненти

$$
(L\tilde{\chi})_{\mu a}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\varphi}\hat{d}\eta_a + 2ie^{-\varphi}\Theta\hat{\eta}_a dx^+ \end{pmatrix},
$$

$$
(L\bar{\tilde{\chi}})^a_{\mu}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\varphi}\hat{d}\bar{\eta}^a - 2ie^{-\varphi}\Theta\hat{\bar{\eta}}^a dx^+ \end{pmatrix}
$$

та

$$
(L\tilde{\chi})_{\mu 4}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ d\eta_4 - d\varphi\eta_4 + 2ie^{-2\varphi}\Theta\eta_4 dx^+ \end{pmatrix},
$$

$$
(L\bar{\tilde{\chi}})^4_{\mu}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ d\bar{\eta}^4 - d\varphi\bar{\eta}^4 - 2ie^{-2\varphi}\Theta\bar{\eta}^4 dx^+ \end{pmatrix}.
$$

[29] Аби здобути правильне значення для поля дилатона ϕ необхідно відновити залежність Φ_L від радіуса семивимірної сфери R, рангу орбіфолдівської проєкції k та планківської довжини у розмірності $D = 11$ l_{P}: $\Phi_L = \frac{R}{kl_{\mathrm{P}}}\sqrt{1 + G_y^{0'm'} G^{0'}_{ym'}}$. Відтак у запропонованому калібруванні поле дилатона дорівнює фоновому значенню $\phi_0 = \frac{3}{2}\ln\frac{R}{kl_{\mathrm{P}}}$, яке визначається вакуумним розв'язком рівнянь IIA супергравітації з $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ геометрією.

1-форми, наведені в (1.94), (1.95), а також компоненти $F_y^{\hat{\alpha}}$ (1.96) та (1.97) не змінюються при цьому перетворенні. Ферміонні компоненти $D = 10$ суперфільбайна та суперполе дилатіно виражаються в термінах цих 1-форм згідно із загальною формулою (1.71).

Бозонні компоненти $D = 10$ суперфільбайна (1.100) та (1.92) визначають індуковану листкову метрику в калібруванні (1.68)

$$g^{(2)}_{\text{l.c.}\,ij} = g^{AdS_4}_{\text{l.c.}\,ij} + g^{CP^3}_{\text{l.c.}\,ij}.$$

Форма двох доданків, які даються відображеннями метричних тензорів просторів AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$, є такою

$$\begin{aligned} g^{AdS_4}_{\text{l.c.}\,ij} &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{E}^+_i\mathcal{E}^-_j + \mathcal{E}^+_j\mathcal{E}^-_i) + \mathcal{E}^1_i\mathcal{E}^1_j + \mathcal{E}^3_i\mathcal{E}^3_j \\ &= \tfrac{1}{8}e^{-4\varphi}(\partial_i x^+\partial_j x^- + \partial_j x^+\partial_i x^-) + \tfrac{1}{4}e^{-4\varphi}\partial_i x^1\partial_j x^1 + \partial_i\varphi\partial_j\varphi \\ &+\tfrac{1}{4}e^{-2\varphi}[\partial_i x^+(\varpi_j + 4\Theta\Omega_{\text{bos}\,ja}{}^a) + \partial_j x^+(\varpi_i + 4\Theta\Omega_{\text{bos}\,ia}{}^a)] \\ &-4e^{-4\varphi}\theta_4\bar\theta^4\eta_4\bar\eta^4\partial_i x^+\partial_j x^+ \end{aligned} \tag{1.101}$$

та

$$\begin{aligned} g^{CP^3}_{\text{l.c.}\,ij} &= -\tfrac{1}{2}(\mathsf{E}_{ia}\mathsf{E}^a_j + \mathsf{E}_{ja}\mathsf{E}^a_i) = \frac{1}{2}(\Omega_{\text{bos}\,ia}{}^4\Omega_{\text{bos}\,j4}{}^a + \Omega_{\text{bos}\,ja}{}^4\Omega_{\text{bos}\,i4}{}^a) \\ &+e^{-\varphi}[\partial_i x^+(\Omega_{\text{bos}\,ja}{}^4\hat{\bar\eta}^a\bar\eta^4 - \Omega_{\text{bos}\,j4}{}^a\hat\eta_a\eta_4) \\ &+\partial_j x^+(\Omega_{\text{bos}\,ia}{}^4\hat{\bar\eta}^a\bar\eta^4 - \Omega_{\text{bos}\,i4}{}^a\hat\eta_a\eta_4)] \\ &+\tfrac{1}{2}[\partial_i x^+(\varepsilon_{abc}\Omega_{\text{bos}\,j4}{}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c - \varepsilon^{abc}\Omega_{\text{bos}\,ja}{}^4\hat\eta_b\hat\eta_c) \\ &+\partial_j x^+(\varepsilon_{abc}\Omega_{\text{bos}\,i4}{}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c - \varepsilon^{abc}\Omega_{\text{bos}\,ia}{}^4\hat\eta_b\hat\eta_c)] \\ &+2[(\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a)^2 + e^{-\varphi}(\varepsilon_{abc}\hat{\bar\eta}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c\bar\eta^4 + \varepsilon^{abc}\hat\eta_a\hat\eta_b\hat\eta_c\eta_4) \\ &+2e^{-2\varphi}\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a\eta_4\bar\eta^4]\partial_i x^+\partial_j x^+. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Член Весса-Зуміно задається інтеґралом від відображення на світовий листок суперструни 3-форми Нев'є-Шварца-Нев'є-Шварца (1.75), яка у запропонованому калібруванні світлового конуса для κ-симетрії дорівнює

$$\begin{aligned} H_{(3)\text{l.c.}}(d) &= \tfrac{i}{4}(\mathcal{E}^{\hat\alpha}(d)\mathfrak{g}^{\hat m'\hat n'}{}_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}\chi_{\hat\beta}\wedge\mathcal{E}_{\hat m'}(d)\wedge\mathcal{E}_{\hat n'}(d) \\ &+\mathcal{E}^{\hat\alpha}(d)\mathfrak{g}^{\hat m'11}{}_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}\wedge\mathcal{E}_{\hat\beta}(d)\wedge\mathcal{E}_{\hat m'}(d)) - \varepsilon_{m'n'k'l'}\mathcal{E}^{m'}(d)\wedge\mathcal{E}^{n'}(d)\wedge\mathcal{E}^{k'}(d)L^{l'}{}_{11}. \end{aligned} \tag{1.103}$$

У представленні (1.103) було залишено також компоненти фільбайна, які обертаються на нуль у даному калібруванні, аби вираз для цієї 3-форми мав компактний вигляд. Відтак у перших двох членах збережено явну $SO(1,9)$-інваріантність, а у третьому – $SO(1,3)$-інваріантність. 3-форму (1.103) можна представити у вигляді зовнішнього диференціала 2-форми потенціалу, який в термінах суперпросторових координат та їх диференціалів дорівнює

$$\begin{gathered} B_{(2)\mathrm{l.c.}}(d) = \tfrac{1}{2} e^{-4\varphi}(\theta_4\bar\theta^4 + \eta_4\bar\eta^4) dx^1 \wedge dx^+ + e^{-2\varphi}\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a dx^1 \wedge dx^+ \\ +\tfrac{1}{4} e^{-2\varphi}(d\theta_4\bar\eta^4 - d\eta_4\bar\theta^4 + \eta_4 d\bar\theta^4 - \theta_4 d\bar\eta^4) \wedge dx^+ \\ +\tfrac{1}{2} e^{-2\varphi}(\hat\eta_a\hat d\bar\theta^a + \hat d\theta_a\hat{\bar\eta}^a) \wedge dx^+ + ie^{-2\varphi}(\theta_4\bar\eta^4 - \eta_4\bar\theta^4) dx^+ \wedge \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d) \\ +ie^{-\varphi}\hat\eta_a\theta_4 dx^+ \wedge \Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^a(d) + ie^{-\varphi}\hat{\bar\eta}^a\bar\theta^4 dx^+ \wedge \Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^4(d). \end{gathered} \tag{1.104}$$

Отже, наведені вирази для індукованої листкової метрики та 2-форми $B_{(2)\mathrm{l.c.}}(d)$ визначають дію типу Полякова для $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни у калібруванні (1.68)

$$S^{AdS_4\times CP^3}_{\mathrm{sstring,\,l.c.}} = \int\limits_\Sigma d^2\xi \mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\mathrm{sstring,\,l.c.}}$$

з лагранжіаном

$$\mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\mathrm{sstring,\,l.c.}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij} g^{(2)}_{\mathrm{l.c.}ij} + s\varepsilon^{ij} B_{(2)\mathrm{l.c.}ij}. \tag{1.105}$$

Здобутий вираз для лагранжіана суперструни віднесено до результатів, які виносяться на захист. Із (1.101), (1.102) та (1.104) випливає, що кінетичний член лагранжіана включає внески до четвертого порядку за грассмановими координатами суперпростору (1.89), а член Весса-Зуміно – до другого порядку подібно до $AdS_5 \times S^5$ суперструни в аналогічному калібруванні світлового конуса [200], [201].

Лагранжіан суперструни (1.105) інваріантний відносно репараметризацій світового листка. Калібрувальну свободу, пов'язану з цією симетрією, можна закріпити у різний спосіб, зокрема, в рамках гамільтонова підходу (див., наприклад, роботи [200], [201], [209]). Відповідні калібрувальні умови буде розглянуто у наступному підрозділі.

1.5 Гамільтоніан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни у калібруванні світлового конуса

У даному підрозділі $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструну в калібруванні світлового конуса для κ-симетрії (1.68) буде розглянуто як гамільтонову систему з в'язями. Для закріплення калібрування репараметризаційної симетрії одну з просторово-часових координат у базисі світлового конуса буде прирівняно часовій координаті світового листка, а одну з компонентів густини імпульсу – константі подібно до відповідних калібрувальних умов у моделях суперструн у пласкому та $AdS_5 \times S^5$ супербекграундах [210], [200], [201], [211]. Основним результатом, який буде здобуто У цьому підрозділі, є вираз для гамільтоніана суперструни як фунції 8+8 калібрувально-інваріантних полів суперпросторових координат.

Буде показано, що у квадратичному наближенні, яке є провідним у границі великого натягу (або зазначеної компоненти імпульсу), цей гамільтоніан зводиться до гамільтоніана IIA суперструни у пласкому бекграунді [89]. В той же час гамільтоніан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни в іншому калібруванні світлового конуса, здобутий в [186], [187], [188], у цій границі переходить до гамільтоніана суперструни типу IIA у бекграунді, який є границею $pp-$хвилі [64] $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунда та який було описано в [212], [185]. Це пояснюється тим, що у запропонованому нами калібруванні світловий конус формують нуль-геодезичні на межі простору AdS_4, яка представляє собою $D = 3$ простір Мінковського. Як відомо (див., наприклад, роботу [213]), для $AdS \times S$ просторів, а також для $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ простору, існує два різні види нуль-геодезичних. Якщо нуль-геодезична лежить повністю на межі простору анти-де Сіттера, то простір, який виникає в границі pp-хвилі, взятій в її околі, є з необхідністю пласким. Викривлені pp-хвильові простори виникають якщо вектор, дотичний до нуль-геодезичної, має ненульову компоненту в одному з вимірів дотичного простору до компактного багатовиду. В обох випадках лагранжіани суперструни в pp-хвильових бекграундах при закріпленні калібрування світлового конуса для κ-симетрії стають квадратичними й ці теорії можуть бути проквантовані [89], [65], [212]. Геометричну інтерпретацію членів вищого порядку в розкладі за степенями координат та імпульсів лагранжіана або гамільтоніана суперструни в калібруванні світлового конуса можна знайти в роботі [214].

1.5.1 Формулювання лагранжіана $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни у калібруванні світлового конуса для κ-симетрії у змінних фазового простору

Для введення густин імпульсу, спряжених бозонним координатам, представимо лагранжіан $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни в калібруванні світлового конуса для κ-симетрії (1.68) у вигляді[30]

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\text{sstring, l.c.}} = -\tfrac{T}{2}\gamma^{ij}\Big\{&\tfrac{e^{-4\varphi}}{4}\left[\tfrac12(\partial_i x^+\partial_j x^- + \partial_j x^+\partial_i x^-) + \partial_i x^1\partial_j x^1\right]\\ &+\partial_i\varphi\partial_j\varphi + g_{MN}\partial_i z^M\partial_j z^N + B\partial_i x^+\partial_j x^+\\ &+\tfrac{e^{-2\varphi}}{4}(\partial_i x^+\varpi_j + \partial_j x^+\varpi_i) + (\partial_i x^+\partial_j z^M + \partial_j x^+\partial_i z^M)q_M\Big\}\\ &+T\varepsilon^{ij}\left(\tilde\omega_i\partial_j x^+ + C\partial_i x^1\partial_j x^+ + \partial_i x^+\partial_j z^M\tilde q_M\right),\end{aligned} \tag{1.106}$$

в якому виділено похідні за цими координатами. Тут z^M $(M=1,...,6)$ є дійсними координатами $\mathbb{CP}^3$ багатовиду, а вигляд метрики $g_{MN}(z)$ буде конкретизовано пізніше. Для спрощення подальшого розгляду в (1.106) було введено наступні величини

$$\tilde\omega_i = \tfrac{e^{-2\varphi}}{2}(\hat\eta_a\hat\partial_i\bar\theta^a + \hat\partial_i\theta_a\hat{\bar\eta}^a) + \tfrac{e^{-2\varphi}}{4}(\partial_i\theta_4\bar\eta^4 - \partial_i\eta_4\bar\theta^4 + \eta_4\partial_i\bar\theta^4 - \theta_4\partial_i\bar\eta^4),$$

$$\begin{aligned}B = 2[(\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a)^2 &+ e^{-\varphi}(\varepsilon_{abc}\hat{\bar\eta}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c\bar\eta^4 + \varepsilon^{abc}\hat\eta_a\hat\eta_b\hat\eta_c\eta_4)\\ &+2e^{-2\varphi}\eta_4\bar\eta^4(\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a - e^{-2\varphi}\theta_4\bar\theta^4)],\end{aligned}$$

$$C = e^{-2\varphi}(\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a + \tfrac{e^{-2\varphi}}{2}\Theta),\ \Theta = \theta_4\bar\theta^4 + \eta_4\bar\eta^4,$$

[30] Даний вираз відповідає значенню $s=1$ знакового фактора в (1.105).

$$q_M = \tfrac{1}{2}(\Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^{a}\varepsilon_{abc}\hat{\bar{\eta}}^{b}\hat{\bar{\eta}}^{c} - \Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^{4}\varepsilon^{abc}\hat{\eta}_b\hat{\eta}_c)$$

$$+e^{-\varphi}(\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^{4}\hat{\bar{\eta}}^{a}\bar{\eta}^{4} - \Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^{a}\hat{\eta}_a\eta_4) + e^{-2\varphi}\Theta\,\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^{a},$$

$$\tilde{q}_M = ie^{-\varphi}\left[\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^{4}\hat{\bar{\eta}}^{a}\bar{\theta}^{4} + \Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^{a}\hat{\eta}_a\theta_4 + e^{-\varphi}(\theta_4\bar{\eta}^{4} - \eta_4\bar{\theta}^{4})\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^{a}\right],$$

а 1-форму $\varpi(d)$ означено в (1.91). Також було відновлено залежість від натягу струни T.

Компоненти густини імпульсу, спряжені координатам Пуанкаре простору AdS_4, дорівнюють

$$p_-(\tau,\sigma) = -\tfrac{Te^{-4\varphi}}{8}\gamma^{\tau i}\partial_i x^+,$$

$$p_+(\tau,\sigma) = -T\gamma^{\tau i}\left(\tfrac{e^{-4\varphi}}{8}\partial_i x^- + B\partial_i x^+ + q_M\partial_i z^M + \tfrac{e^{-2\varphi}}{4}\varpi_i\right)$$

$$-T(C\partial_\sigma x^1 - \tilde{q}_M\partial_\sigma z^M + \tilde{\omega}_\sigma), \tag{1.107}$$

$$p_1(\tau,\sigma) = -\tfrac{Te^{-4\varphi}}{4}\gamma^{\tau i}\partial_i x^1 + TC\partial_\sigma x^+,$$

$$p_\varphi(\tau,\sigma) = -T\gamma^{\tau i}\partial_i\varphi.$$

В той же час для компонентів густини імпульсу, спряжених координатам $\mathbb{CP}^3$ простору, здобуваємо такий вираз

$$p_M(\tau,\sigma) = -T\gamma^{\tau i}(g_{MN}\partial_i z^N + q_M\partial_i x^+) - T\tilde{q}_M\partial_\sigma x^+. \tag{1.108}$$

За допомогою цих співвідношень можна виразити похідні від координатних полів за листковим часом через компоненти густини імпульсу

$$\partial_\tau x^+ = -\tfrac{8e^{4\varphi}}{T\gamma^{\tau\tau}}p_- - \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}\partial_\sigma x^+,$$

$$\partial_\tau x^- = -2e^{2\varphi}\varpi_\tau + \tfrac{1}{\gamma^{\tau\tau}}A^- - \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}(\partial_\sigma x^- + 2e^{2\varphi}\varpi_\sigma),$$

$$\partial_\tau x^1 = -\tfrac{4e^{4\varphi}}{T\gamma^{\tau\tau}}(p_1 - TC\partial_\sigma x^+) - \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}\partial_\sigma x^1, \tag{1.109}$$

$$\partial_\tau\varphi = -\tfrac{1}{T\gamma^{\tau\tau}}p_\varphi - \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}\partial_\sigma\varphi,$$

$$\partial_\tau z^M = -\tfrac{g^{MN}}{T\gamma^{\tau\tau}}(p_N - 8e^{4\varphi}p_- q_N + T\tilde{q}_N\partial_\sigma x^+) - \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}\partial_\sigma z^M,$$

де

$$
\begin{aligned}
A^- = -\tfrac{8e^{4\varphi}}{T}\big(&p_+ - 8e^{4\varphi}p_-(B-(q\cdot q)) - (p\cdot q)) \\
&+8e^{4\varphi}((q\cdot\tilde{q})\partial_\sigma x^+ - C\partial_\sigma x^1 + \tilde{q}_M\partial_\sigma z^M - \tilde{\omega}_\sigma\big)\,.
\end{aligned}
\tag{1.110}
$$

В (1.110) та подальших виразах буде використано скорочене позначення скалярного добутку $D=6$ векторів з оберненою $\mathbb{CP}^3$ метрикою $g^{MN}(z)$: $q_M g^{MN} q_N = (q\cdot q)$ і т.д. Із означень густин імпульсу (1.107) та (1.108) випливають в'язі Вірасоро

$$
\begin{aligned}
T_1 = {}& \tfrac{8e^{4\varphi}}{T}p_+p_- + \tfrac{Te^{-4\varphi}}{8}\partial_\sigma x^+\partial_\sigma x^- + \tfrac{2e^{4\varphi}}{T}p_1^2 + \tfrac{Te^{-4\varphi}}{8}\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1 \\
&+\tfrac{1}{2T}p_\varphi^2 + \tfrac{T}{2}\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi + \tfrac{1}{2T}(p\cdot p) + \tfrac{T}{2}\partial_\sigma z^M g_{MN}\partial_\sigma z^N \\
&+\tfrac{32e^{8\varphi}}{T}p_-^2((q\cdot q)-B) + 8e^{4\varphi}p_-(\tilde{\omega}_\sigma - \tfrac{1}{T}(p\cdot q) - (q\cdot\tilde{q})\partial_\sigma x^+ \\
&+C\partial_\sigma x^1 - \tilde{q}_M\partial_\sigma z^M) - (\tfrac{Te^{-2\varphi}}{2}\varpi_\sigma - Tq_M\partial_\sigma z^M - (p\cdot\tilde{q}) \\
&+4e^{4\varphi}p_1C)\partial_\sigma x^+ + \tfrac{T}{2}((\tilde{q}\cdot\tilde{q}) + B + 4e^{4\varphi}C^2)\partial_\sigma x^+\partial_\sigma x^+ \approx 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2 = {}& p_+\partial_\sigma x^+ + p_-\partial_\sigma x^- + p_1\partial_\sigma x^1 + p_\varphi\partial_\sigma\varphi + p_M\partial_\sigma z^M \\
&+2e^{2\varphi}p_-\varpi_\sigma + T\tilde{\omega}_\sigma\partial_\sigma x^+ \approx 0.
\end{aligned}
$$

Підставляючи вирази для швидкостей (1.109) назад в (1.106), здобуваємо представлення для лагранжіана $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни в калібруванні світлового конуса для κ-симетрії в термінах змінних фазвого простору

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\mathrm{sstring,\,l.c.}} = {}& p_+\partial_\tau x^+ + p_-\partial_\tau x^- + p_1\partial_\tau x^1 + p_\varphi\partial_\tau\varphi + p_M\partial_\tau z^M \\
&+2e^{2\varphi}p_-\varpi_\tau + T\tilde{\omega}_\tau\partial_\sigma x^+ + \tfrac{1}{\gamma^{\tau\tau}}T_1 + \tfrac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}T_2.
\end{aligned}
\tag{1.111}
$$

Відзначимо, що в (1.111) компоненти оберненої допоміжної метрики $\frac{1}{\gamma^{\tau\tau}}$ та $\frac{\gamma^{\tau\sigma}}{\gamma^{\tau\tau}}$ відіграють роль множників Лагранжа для в'язей Вірасоро.

1.5.2 Калібрування світлового конуса для репараметризаційної симетрії та гамільтоніан $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни

Зафіксуємо калібрування світлового конуса для репараметризаційної симетрії умовами, аналогічними розглянутим в роботах [210], [200], [201]

$$
x^+(\tau,\sigma) = \tau, \quad p_-(\tau,\sigma) = \tfrac{1}{2}\tilde{P}_- = \mathrm{const}.
$$

Використовуючи рівняння для p_+, можна виразити $\gamma^{\tau\tau}$ через $\tilde{P}_-$

$$\gamma^{\tau\tau} = -\tfrac{4e^{4\varphi}}{T}\tilde{P}_-.$$

Крім того, аби привести в (1.111) кінетичний член для ферміонів $2e^{2\varphi}p_-\varpi_\tau$ до найпростішої форми, проведемо дилатаційне перетворення грассманових координат

$$\begin{aligned} \theta_a(\bar{\theta}^a) &\to \tfrac{1}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\theta_a(\bar{\theta}^a), \quad \eta_a(\bar{\eta}^a) \to \frac{\exp\left(-\frac{2\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\eta_a(\bar{\eta}^a), \\ \theta_4(\bar{\theta}^4) &\to \frac{\exp\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\theta_4(\bar{\theta}^4), \quad \eta_4(\bar{\eta}^4) \to \frac{\exp\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\eta_4(\bar{\eta}^4) \end{aligned} \tag{1.112}$$

разом із канонічним перетворенням поперечних бозонних змінних фазового простору

$$\begin{aligned} &x^1 \to \tfrac{1}{\sqrt{\tilde{P}_-}}x^1, \quad \varphi \to \tfrac{1}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\varphi, \quad z^M \to \tfrac{1}{\sqrt{\tilde{P}_-}}z^M, \\ &p_1 \to \sqrt{\tilde{P}_-}p_1, \quad p_\varphi \to \sqrt{\tilde{P}_-}p_\varphi, \quad p_M \to \sqrt{\tilde{P}_-}p_M. \end{aligned} \tag{1.113}$$

Таке переозначення, як буде показано нижче, дозволяє здійснити степеневе розкладання гамільтоніана в границі великого $\tilde{P}_-$. Отже лагранжіан (1.111) набуває вигляду

$$\mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\text{sstring, l.c.}} = p_1\partial_\tau x^1 + p_\varphi\partial_\tau\varphi + p_M\partial_\tau z^M$$
$$+i(\partial_\tau\theta_A\bar{\theta}^A - \theta_A\partial_\tau\bar{\theta}^A + \partial_\tau\eta_A\bar{\eta}^A - \eta_A\partial_\tau\bar{\eta}^A) - \mathscr{H}^{AdS_4\times CP^3}_{\text{sstring, l.c.}},$$

де густина гамільтоніана в калібруванні світлового конуса містить члени до четвертого степеня за грассмановими координатами

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{AdS_4\times CP^3}_{\text{sstring, l.c.}}(\tau,\sigma) &= \tfrac{\tilde{T}}{2}\exp\left(-\tfrac{4\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)[\hat{\eta}_a\hat{\partial}_\sigma\bar{\theta}^a + \hat{\partial}_\sigma\theta_a\hat{\bar{\eta}}^a + \tfrac{1}{2}(\partial_\sigma\theta_4\bar{\eta}^4 \\ &-\theta_4\partial_\sigma\bar{\eta}^4 - \partial_\sigma\eta_4\bar{\theta}^4 + \eta_4\partial_\sigma\bar{\theta}^4)] + \tfrac{\tilde{T}}{4}\exp\left(-\tfrac{4\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)\left[\tfrac{2}{\tilde{T}}\exp\left(\tfrac{4\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)p_1^2\right. \\ &+\tfrac{\tilde{T}}{8}\exp\left(-\tfrac{4\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1 + \tfrac{1}{2\tilde{T}}p_\varphi^2 + \tfrac{\tilde{T}}{2}\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi + \tfrac{1}{2\tilde{T}}(p\cdot p) \\ &+\tfrac{\tilde{T}}{2}\partial_\sigma z^M g_{MN}\partial_\sigma z^N + \tfrac{8\tilde{P}_-}{\tilde{T}}\exp\left(\tfrac{8\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)((q\cdot q) - B) \end{aligned} \tag{1.114}$$

$$+4\sqrt{\tilde{P}_-}\exp\left(\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde{P}_-}}\right)\left(C\partial_\sigma x^1-\tilde{q}_M\partial_\sigma z^M-\frac{1}{\tilde{T}}(p\cdot q)\right)\Big]$$

та $\tilde{T}=\frac{T}{\tilde{P}_-}$. Як завжди в теорії (супер)струн у калібруванні світлового конуса в'язь $T_2\approx 0$ вважається явно розв'язаною відносно похідної $\partial_\sigma x^-$, яка не входить до гамільтоніана. Залишається лише нульова мода цієї в'язі, яка виражає умову рівності рівнів у змінних фазового простору

$$\int_0^{2\pi}d\sigma[p_1\partial_\sigma x^1+p_\varphi\partial_\sigma\varphi+p_M\partial_\sigma z^M$$
$$+i(\partial_\sigma\theta_A\bar{\theta}^A-\theta_A\partial_\sigma\bar{\theta}^A+\partial_\sigma\eta_A\bar{\eta}^A-\eta_A\partial_\sigma\bar{\eta}^A)]=0.$$

В моделях замкнених (супер)струн у пласкому (супер)просторі ця умова зводиться до рівності власних значень операторів числа частинок для осциляторів, пов'язаних з ліво- та право-біжними полями поперечних координат, для кожного з фізичних станів.

Здобутий вираз для гамільтоніана належить до результатів, які виносяться на захист.

Оскільки гамільтоніан суперструни у калібруванні світлового конуса (1.114) є високо нелінійним, можна розглянути низку граничних випадків, у яких його структура спрощується (див., наприклад, огляд [209]). Дилатації змінних фазового простору, означені в (1.112) та (1.113), приводять гамільтоніан до форми підхожої для його розкладання в границі великих $\tilde{P}_-$ та T при фіксованому $\tilde{T}$. Відповідний розклад є розкладом за степенями змінних фазового простору.

Аби здобути його явний вигляд необхідно вибрати параметризацію $\mathbb{CP}^3$ багатовиду. Як і в підрозділі 1.2.2, розглянемо елемент $SU(4)/U(3)$ фактор-простору (1.42), параметризований трьома комплексними координатами z^a та спряженими до них $\bar{z}_a$. Відтак комплексний фільбайн та $u(3)$ зв'язність $\mathbb{CP}^3$ простору даються 1-формами Картана (1.43), а квадрат інфінітезимального елемента довжини дорівнює

$$ds^2_{CP^3}=g_{ab}dz^adz^b+g^{ab}d\bar{z}_ad\bar{z}_b+2g_a{}^bdz^ad\bar{z}_b,$$

де компоненти метрики мають вигляд

$$
\begin{aligned}
g_{ab} &= \tfrac{1}{4|z|^4}(|z|^2 - \sin^2|z| + \sin^4|z|)\bar{z}_a\bar{z}_b,\\
g^{ab} &= \tfrac{1}{4|z|^4}(|z|^2 - \sin^2|z| + \sin^4|z|)z^a z^b,\\
g_a{}^b &= \tfrac{\sin^2|z|}{2|z|^2}\delta_a^b + \tfrac{1}{4|z|^4}(|z|^2 - \sin^2|z| - \sin^4|z|)\bar{z}_a z^b.
\end{aligned}
\tag{1.115}
$$

Компоненти ж оберненої метрики визначаються виразами

$$
\begin{gathered}
g^{-1}_{ab} = \tfrac{|z|^2-\sin^2|z|+\sin^4|z|}{|z|^2(\sin^4|z|-\sin^2|z|)}\bar{z}_a\bar{z}_b, \quad g^{-1ab} = \tfrac{|z|^2-\sin^2|z|+\sin^4|z|}{|z|^2(\sin^4|z|-\sin^2|z|)}z^a z^b,\\
g^{-1}{}_a{}^b = \tfrac{2|z|^2}{\sin^2|z|}\delta_a^b + \tfrac{\sin^2|z|(1+2|z|^2)-\sin^4|z|-|z|^2}{|z|^2(\sin^2|z|-\sin^4|z|)}\bar{z}_a z^b.
\end{gathered}
\tag{1.116}
$$

Компоненти (1.115) і (1.116) допускають степеневі розклади

$$
\begin{gathered}
g_{ab} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{8}{45}|z|^2\right)\bar{z}_a\bar{z}_b + O(z^6), \quad g^{ab} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{8}{45}|z|^2\right)z^a z^b + O(z^6),\\
g_a{}^b = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}|z|^2 + \tfrac{1}{45}|z|^4\right)\delta_a^b - \bar{z}_a z^b\left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{7}{45}|z|^2\right) + O(z^6)
\end{gathered}
$$

та

$$
\begin{gathered}
g^{-1ab} = -\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{48}{45}|z|^2\right)z^a z^b + O(z^6), \quad g^{-1}_{ab} = -\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{48}{45}|z|^2\right)\bar{z}_a\bar{z}_b + O(z^6),\\
g^{-1}{}_a{}^b = 2\left(1 + \tfrac{1}{3}|z|^2 + \tfrac{1}{15}|z|^4\right)\delta_a^b + 2\bar{z}_a z^b\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{21}{45}|z|^2\right) + O(z^6).
\end{gathered}
$$

Аналогічно можна здобути розклади компонентів елемента $SU(4)/U(3)$ фактор-простору (1.42)

$$
\begin{gathered}
T_a{}^b = T^b{}_a = \left(1 - \tfrac{1}{2}|z|^2 + \tfrac{1}{24}|z|^4\right)\delta_a^b + \tfrac{1}{2}\bar{z}_a z^b\left(1 - \tfrac{1}{12}|z|^2\right) + O(z^6),\\
T_{ab} = i\varepsilon_{acb}z^c(1 - \tfrac{1}{6}|z|^2) + O(z^5),\\
T^{ab} = -i\varepsilon^{acb}\bar{z}_c(1 - \tfrac{1}{6}|z|^2) + O(z^5)
\end{gathered}
$$

та комплексного $\mathbb{CP}^3$ фільбайна в (1.92), а також бозонної частини 1-форми Рамона-Рамона в (1.93)

$$
\begin{gathered}
\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^4(d) = \Omega_{a,b}dz^b + \Omega_a{}^{,b}d\bar{z}_b: \quad \Omega_{a,b} = \bar{z}_a\bar{z}_b\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}|z| - \tfrac{1}{16}|z|^2\right) + O(z^6),\\
\Omega_a{}^{,b} = \left(1 - \tfrac{1}{6}|z|^2 + \tfrac{1}{120}|z|^4\right)\delta_a^b - \bar{z}_a z^b\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}|z| - \tfrac{1}{16}|z|^2\right) + O(z^6);\\
\Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^a(d) = \Omega^a{}_{,b}dz^b + \Omega^{a,b}d\bar{z}_b: \quad \Omega^a{}_{,b} = \Omega_b{}^{,a},
\end{gathered}
$$

$$\Omega^{a,b} = z^a z^b(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}|z| - \tfrac{1}{16}|z|^2) + O(z^6);$$

$$\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d) = \Omega_a{}^a{}_{,b} dz^b + \Omega_a{}^{a,b} d\bar{z}_b :$$

$$\Omega_a{}^a{}_{,b} = \tfrac{i}{2}\bar{z}_b(1 - \tfrac{1}{3}|z|^2) + O(z^5),\ \Omega_a{}^{a,b} = -\tfrac{i}{2} z^b(1 - \tfrac{1}{3}|z|^2) + O(z^5).$$

З урахуванням наведених розкладів можна здобути вираз для квадратичної частини гамільтоніана суперструни (1.114)

$$\mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{l.c.}} = \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{b}} + \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{f}},$$

де внески бозонних та ферміонних полів дорівнюють

$$\mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{b}} = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + \tfrac{\tilde{T}^2}{16}\partial_\sigma x^1 \partial_\sigma x^1) + \tfrac{1}{8}(p_\varphi^2 + \tilde{T}^2 \partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi) + \tfrac{1}{2}(p_a \bar{p}^a + \tfrac{\tilde{T}^2}{4}\partial_\sigma z^a \partial_\sigma \bar{z}_a),$$

$$\mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{f}} = \tfrac{\tilde{T}}{2}(\eta_a \partial_\sigma \bar{\theta}^a + \partial_\sigma \theta_a \bar{\eta}^a) + \tfrac{\tilde{T}}{4}(\partial_\sigma \theta_4 \bar{\eta}^4 - \partial_\sigma \eta_4 \bar{\theta}^4 + \eta_4 \partial_\sigma \bar{\theta}^4 - \theta_4 \partial_\sigma \bar{\eta}^4).$$

Відповідний квадратичний лагранжіан суперструни в калібруванні світлового конуса має форму

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)}_{\mathrm{l.c.}} &= \tfrac{1}{2}(\partial_\tau x^1 \partial_\tau x^1 - \tfrac{\tilde{T}^2}{16}\partial_\sigma x^1 \partial_\sigma x^1) \\ &+2(\partial_\tau\varphi\partial_\tau\varphi - \tfrac{\tilde{T}^2}{16}\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi) + 2(\partial_\tau z^a \partial_\tau \bar{z}_a - \tfrac{\tilde{T}^2}{16}\partial_\sigma z^a \partial_\sigma \bar{z}_a) \\ &-i(\partial_\tau \theta_A \bar{\theta}^A - \theta_A \partial_\tau \bar{\theta}^A + \partial_\tau \eta_A \bar{\eta}^A - \eta_A \partial_\tau \bar{\eta}^A) - \tfrac{\tilde{T}}{2}(\eta_A \partial_\sigma \bar{\theta}^A + \partial_\sigma \theta_A \bar{\eta}^A).\end{aligned} \tag{1.117}$$

Члени, які включають бозонні поля, співпадають з відповідними членами в лагранжіані (супер)струни в (супер)просторі Мінковського у калібруванні світлового конуса [89]. Для приведення квадратичних за ферміонами членів до вигляду, який має лагранжіан для безмасових спінорних полів в листковий теорії поля, введемо восьмикомпонентні спінорні поля

$$\Psi_{A'}(\tau,\sigma) = -C_{A'B'}\theta^{B'} + \gamma^7_{A'B'}\eta^{B'},\ \bar{\Psi}^{A'} = (\Psi_{A'})^\dagger,$$

$$\Phi_{A'}(\tau,\sigma) = -C_{A'B'}\theta^{B'} - \gamma^7_{A'B'}\eta^{B'},\ \bar{\Phi}^{A'} = (\Phi_{A'})^\dagger,$$

де $\theta^{B'}$ та $\eta^{B'}$ були введені в (1.89), а матрицю зарядового спряження та γ-матриці у розмірності $D = 7$ означено в додатку A нашої роботи [184]. Введені спінорні поля задовольняють умови $\bar{\Psi}^{A'} = -C^{A'B'}\Psi_{B'}$ та

$\bar\Phi^{A'} = -C^{A'B'}\Phi_{B'}$ й представляють собою $D=8$ майорана-вейлівські спінори різних кіральностей. У результаті члени з ферміонними полями в лагранжіані (1.117) набувають вигляду

$$-\tfrac{i}{2}\bar\Psi^{A'}\partial_-\Psi_{A'} - \tfrac{i}{2}\bar\Phi^{A'}\partial_+\Phi_{A'},$$

де $\partial_\pm \equiv \partial_\tau \pm \frac{\tilde T}{4}\partial_\sigma$. Отже, ми встановили, що квадратичний лагранжіан

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)}_{\text{l.c.}} &= \tfrac{1}{2}(\partial_\tau x^1\partial_\tau x^1 - \tfrac{\tilde T^2}{16}\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1) + 2(\partial_\tau\varphi\partial_\tau\varphi - \tfrac{\tilde T^2}{16}\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi)\\ &+2(\partial_\tau z^a\partial_\tau\bar z_a - \tfrac{\tilde T^2}{16}\partial_\sigma z^a\partial_\sigma\bar z_a) + \tfrac{i}{2}\Psi^{A'}\partial_-\Psi_{A'} + \tfrac{i}{2}\Phi^{A'}\partial_+\Phi_{A'}\end{aligned}$$

співпадає з лагранжіаном суперструни у пласкому суперпросторі у калібруванні світлового конуса [89].

Кубічні члени в розкладі гамільтоніана суперструни представляють суму членів, які включають лише бозонні поля, та членів, які включають добутки двох ферміонних полів

$$\sqrt{\tilde P_-}\mathscr{H}^{(3)}_{\text{l.c.}} = \mathscr{H}^{(3)}_{\text{b}} + \mathscr{H}^{(3)}_{\text{bf}},$$

де

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{(3)}_{\text{b}} &= -\tfrac{\tilde T^2}{4}\varphi\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1 - \tfrac{1}{2}\varphi(p_\varphi^2 + \tilde T^2\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi) - 2\varphi(p_a\bar p^a + \tfrac{\tilde T^2}{4}\partial_\sigma z^a\partial_\sigma\bar z_a),\\ \mathscr{H}^{(3)}_{\text{bf}} &= -2\tilde T\varphi(\eta_a\partial_\sigma\bar\theta^a + \partial_\sigma\theta_a\bar\eta^a) - i\tilde T(\varepsilon^{abc}\eta_a\bar z_b\partial_\sigma\theta_c + \varepsilon_{abc}\bar\eta^a z^b\partial_\sigma\bar\theta^c)\\ &-\tilde T\varphi(\partial_\sigma\theta_4\bar\eta^4 - \partial_\sigma\eta_4\bar\theta^4 + \eta_4\partial_\sigma\bar\theta^4 - \theta_4\partial_\sigma\bar\eta^4) - 2(p_a\bar\eta^a\bar\eta^4 - \bar p^a\eta_a\eta_4)\\ &+\varepsilon^{abc}p_a\eta_b\eta_c - \varepsilon_{abc}\bar p^a\bar\eta^b\bar\eta^c + 2\tilde T(\eta_a\bar\eta^a + \tfrac{1}{2}\Theta)\partial_\sigma x^1\\ &-2i\tilde T(\partial_\sigma z^a\eta_a\theta_4 + \partial_\sigma\bar z_a\bar\eta^a\bar\theta^4).\end{aligned}$$

Члени четвертого порядку можна представити як суму трьох внесків

$$\tilde P_-\mathscr{H}^{(4)}_{\text{l.c.}} = \mathscr{H}^{(4)}_{\text{b}} + \mathscr{H}^{(4)}_{\text{bf}} + \mathscr{H}^{(4)}_{\text{f}},$$

де

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{(4)}_{\text{b}} &= \tilde T^2\varphi^2\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1 + \varphi^2(p_\varphi^2 + \tilde T^2\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi) + 4\varphi^2(p_a\bar p^a + \tfrac{\tilde T^2}{4}\partial_\sigma z^a\partial_\sigma\bar z_a)\\ &-\tfrac{1}{6}((z^a p_a)^2 + (\bar p^a\bar z_a)^2 - |z|^2(\bar p^a p_a) - (z^a p_a)(\bar p^b\bar z_b))\\ &+\tfrac{\tilde T^2}{24}((\partial_\sigma z^a\bar z_a)^2 + (z^a\partial_\sigma\bar z_a)^2 - |z|^2(\partial_\sigma z^a\partial_\sigma\bar z_a) - (\partial_\sigma z^a\bar z_a)(z^b\partial_\sigma\bar z_b)),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^{(4)}_{\mathrm{bf}} &= 4\tilde{T}\varphi^2(\eta_a\partial_\sigma\bar{\theta}^a + \partial_\sigma\theta_a\bar{\eta}^a) + 4i\tilde{T}\varphi(\varepsilon^{abc}\eta_a\bar{z}_b\partial_\sigma\theta_c + \varepsilon_{abc}\bar{\eta}^a z^b\partial_\sigma\bar{\theta}^c)\\
&-\tilde{T}|z|^2(\eta_a\partial_\sigma\bar{\theta}^a + \partial_\sigma\theta_a\bar{\eta}^a) + \tilde{T}((z^a\eta_a)(\partial_\sigma\bar{\theta}^b\bar{z}_b) + (z^a\partial_\sigma\theta_a)(\bar{\eta}^b\bar{z}_b))\\
&+2\tilde{T}\varphi^2(\partial_\sigma\theta_4\bar{\eta}^4 - \partial_\sigma\eta_4\bar{\theta}^4 + \eta_4\partial_\sigma\bar{\theta}^4 - \theta_4\partial_\sigma\bar{\eta}^4) + 8\varphi(p_a\bar{\eta}^a\bar{\eta}^4 - \bar{p}^a\eta_a\eta_4)\\
&-4\varphi(\varepsilon^{abc}p_a\eta_b\eta_c - \varepsilon_{abc}\bar{p}^a\bar{\eta}^b\bar{\eta}^c) + 2i(\varepsilon^{abc}p_a\bar{z}_b\eta_c\bar{\eta}^4 + \varepsilon_{abc}\bar{p}^a z^b\bar{\eta}^c\eta_4)\\
&+i((z^a p_a) - (\bar{p}^a\bar{z}_a))\Theta - 12\tilde{T}\varphi(\eta_a\bar{\eta}^a + \tfrac{1}{2}\Theta)\partial_\sigma x^1\\
&-2i\tilde{T}(\varepsilon^{abc}\eta_a\bar{z}_b\eta_c + \varepsilon_{abc}\bar{\eta}^a z^b\bar{\eta}^c)\partial_\sigma x^1 + 8i\tilde{T}\varphi(\partial_\sigma z^a\eta_a\theta_4 + \partial_\sigma\bar{z}_a\bar{\eta}^a\bar{\theta}^4)\\
&+2\tilde{T}(\varepsilon_{abc}\partial_\sigma z^a z^b\bar{\eta}^c\theta_4 - \varepsilon^{abc}\partial_\sigma\bar{z}_a\bar{z}_b\eta_c\bar{\theta}^4)\\
&+\tilde{T}((\partial_\sigma z^a\bar{z}_a) - (z^a\partial_\sigma\bar{z}_a))(\theta_4\bar{\eta}^4 - \eta_4\bar{\theta}^4),\\
\mathscr{H}^{(4)}_{\mathrm{f}} &= 8\theta_4\bar{\theta}^4\eta_4\bar{\eta}^4.
\end{aligned}
$$

1.6 Основні результати розділу

Наостанок перелічимо результати, які було здобуто вперше та які виносяться на захист:

- з використанням ізоморфної реалізації $osp(4|6)$ супералгебри як $D = 1+2$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри здобуто вираз для лагранжіана σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі в термінах форм Картана для генераторів цієї суперконформної алгебри;

- ферміонні рівняння σ-моделі представлено у формі подібній до відповідних рівнянь суперструн Гріна-Шварца та доведено їх лінійну залежність. Згідно з другою теоремою Ньотер це свідчить про інваріантність дії σ-моделі відносно перетворень $\kappa-$симетрії;

- здобуто явний вираз для лагранжіана σ-моделі в термінах координат $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору, які відповідають генераторам $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри;

- здобуто загальні вирази в термінах форм Картана для густин ньотерових струмів, які відповідають інваріантності дії σ-моделі відносно глобальної $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформної симетрії. Для елемента

$OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору, параметризованого координатами Пуанкаре для простору AdS_4 та 24 грассмановими координатами, які є параметрами для генераторів $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперсиметрій Пуанкаре та спеціальних конформних суперсиметрій, здобуто явні вирази для густин ньотерових струмів через ці координати та їх листкові похідні. Також знайдено варіації цих координат при інфінітезимальних перетвореннях $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії;

- запропоновано калібрування світлового конуса для κ-симетрії та здобуто вираз для лагранжіана суперструни в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі у даному калібруванні. Розглянуте калібрування відповідає світловому конуса утвореному нуль-геодезичними на конформній межі простору AdS_4 в координатах Пуанкаре й відрізняється від інших калібрувальних умов світлового конуса, які досліджувались раніше;

- здобуто гамільтоніан $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни у калібруванні світлового конуса для κ-симетрії та листкових репараметризацій. Його власні значення визначають спектр енергій квантованої суперструни, який згідно з гіпотезою AdS_4/CFT_3 відповідності співпадає зі спектром аномальних розмірностей калібрувально-інваріантних операторів у $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформній теорії Черна-Саймонса з полями матерії. Показано, що квадратична частина гамільтоніана співпадає з гамільтоніаном суперструни типу IIA у пласкому бекграунді у калібруванні світлового конуса.

Розділ 2

Класична інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки і $D0$-брани у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Мінімальне розширення інтеґровної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі

2.1 Вступ

У підрозділі 2.2 буде введено умову Калуци-Клейна та досліджено висновки з неї для подвійної розмірної редукції $AdS_4 \times S^7$ супермембрани до $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни. Ця умова накладається на бозонні компоненти $D = 11$ суперфільбайна у дотичному просторі до $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ простору-часу і вимагає обернення на нуль членів пропорційних диференціалу координати y одинадцятої розмірності, яка представляє собою коло S^1 у розшаруванні Хопфа $S^7 = \mathbb{CP}^3 \times S^1$. Введення її зумовлено тим, що представники $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору, розглянуті іншими авторами [156], [208] та в нашій роботі [184], приводять до виразів для компонентів $D = 11$ суперфільбайна, які не залежать від y, але компоненти у дотичному просторі до AdS_4 включають доданки пропорційні dy. Відтак вирази для них відрізняються від анзаца Калуци-Клейна, який визначає форму $D = 11$ суперфільбайна необхідну для проведення подвійної розмірної редукції супермембрани. Такі доданки виключаються локальним $SO(1,4)$ обертанням компонентів суперфільбайна в дотичному просторі, що ускладнює його форму. Накладення умови Калуци-Клейна знімає необхідність такого перетворення, що спрощує процедуру редукції та лагранжіан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни.

Буде здобуто конкретний вигляд умови Калуци-Клейна для представника $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору, параметризованого координатами, які відповідають генераторам $D = 3$ $\mathcal{N} = 8$ суперконформної алгебри [184]. Буде показано, що пропорційні dy внески до компонентів $D = 11$ суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 залежать лише від восьми координат для суперсиметрій, які порушуються $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Буде проаналізовано $SL(2,\mathbb{R})$-коваріантні умови обернення цих внесків на нуль. Для цього двокомпонентні $SL(2,\mathbb{R})$ спінорні координати сектора порушених суперсиметрій буде розкладено на 4 (анти)майоранівські спінори, кожен з яких утворює мінімальний $SL(2,\mathbb{R})$-коваріантний набір координат. Буде показано, що умову Калуци-Клейна можна задовольнити поклавши два з них рівними нулю. Буде здобуто відповідні вирази для компонентів суперфільбайна суперпросторів $AdS_4 \times S^7$ та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$.

Для подальшого спрощення форми $AdS_4 \times S^7$ суперфільбайна та лагранжіана $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни буде розглянуто часткове калібрування κ-симетрії, в якому у секторі порушених суперсиметрій залишається $SL(2,\mathbb{R})$ майоранівська спінорна координата, яка відповідає генераторам порушених суперсиметрій Пуанкаре. Буде побудовано листкову 1-форму зі значенням в $osp(4|6)$ супералгебрі, яка розширює зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі лінійними та квадратичними членами за цим майоранівським спінором та його диференціалом, та доведено, що її кривизна обертається на нуль на рівняннях суперструни у даному калібруванні [215].

У підрозділі 2.3 буде доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі [216]. Окрім того буде встановлено співвдношення між зв'язністю Лакса σ-моделі та компонентами пари Лакса суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі. Як узагальнення здобутих результатів буде доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки [217] та $D0$-брани [218] в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді.

2.2 Калібрування Калуци-Клейна для κ-симетрії та мінімальне розширення інтеґровної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі

Як зазначалось у розділі 1, для розглянутих в [156], [208], [184] елементів $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору $so(2,3)/so(1,3)$ форми Картана, які визначають компоненти $AdS_4 \times S^7$ суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 простору, включають пропорційні dy доданки. Ці компоненти можна представити у вигляді подібному до ферміонних компонентів суперфільбайна (1.74)

$$E^{m'}(d) = G^{m'}(d) + dyG_y^{m'}. \tag{2.1}$$

Вираз (2.1) відрізняється від анзаца Калуци-Клейна другим доданком. Для його виключення необхідно провести у дотичному просторі локальне $SO(1,4)$ перетворення, параметри якого залежать від $G_y^{m'}$. Це ускладнює вигляд $D = 11$ суперфільбайна та лагранжіана $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни. В нашій роботі [215] було запропоновано умову Калуци-Клейна

$$G_y^{m'} = 0, \tag{2.2}$$

яка спрощує виведення лагранжіана суперструни та його форму. Для зазначених елементів $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору $G_y^{m'}$ залежить лише від восьми координат, які відповідають суперсиметріям, порушеним $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Тому для них умова Калуци-Клейна (2.2) накладає обмеження на координати сектора порушених суперсиметрій.

Вивчення калібрувальних умов для κ-симетрії, які накладають обмеження на координати сектора порушених суперсиметрій, викликає інтерес також у зв'язку з проблемою доведення інтеґровності рівнянь $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, яка розглядалась у роботах [163], [164]. Параметризація сектора порушених суперсиметрій чотирма (анти-)майоранівськими $SL(2,\mathbb{R})$ спінорними координатами, запропонована у нашій роботі [215], дозволяє розглянути часткові калібрування κ-симетрії, в яких 3 з них обертаються на нуль. У кожному з них для рівнянь суперструни можна знайти представлення нульової кривизни, до якого входить зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі, розширена членами, які залежать від решти координат сектора порушених суперсиметрій. Послаблюючи накладене калібрування, зв'язність Лакса σ-моделі можна розширити внесками інших координат із цього сектора зі збереженням умови обернення на нуль кривизни на рівняннях суперструни. У граничному випадку, коли не накладено калібрувальних умов, ця процедура має привести до шуканої зв'язності Лакса $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, вигляд якої залишається невідомим. Реалізація такого підходу в моделі безмасової суперчастинки, яка відповідає границі нескінченного натягу $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, дозволила, як буде описано в підрозділі 2.3, довести інтеґровність її рівнянь, а також рівнянь $D0$-брани.

У цьому підрозділі буде розглянуто приклад часткового калібрування [215], в якому не обертається на нуль лише спінорна координата для порушених суперсиметрій Пуанкаре, яка задовольняє майоранівську умову $\theta^\mu = \bar{\theta}^\mu$. Будуть виведені рівняння суперструни у даному калібруванні та здобуто листкову 1-форму, кривизна якої обертається на нуль на цих рівняннях. Вона включає, окрім зв'язності Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі, лінійні та квадратичні члени за θ^μ та її диференціалом. Ці члени становлять піднабір лінійних та квадратичних членів, знайдених в [164].

2.2.1 $AdS_4 \times S^7$ та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперфільбайни у калібруванні Калуци-Клейна

Для аналізу висновків із умови Калуци-Клейна (2.2) для $AdS_4 \times S^7$ супермембрани та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни необхідно здобути явний вираз для $G_y^{m'}$ в термінах координат, що вимагає задання представника $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору. Розглянемо представника

$$\widehat{\mathscr{G}} = \mathscr{G} e^{yH} e^{\theta^\mu Q_\mu^4 + \bar\theta^\mu \bar Q_{\mu 4}} e^{\eta_\mu S^{\mu 4} + \bar\eta_\mu \bar S_4^\mu} \in OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7)), \qquad (2.3)$$

вигляд якого є сумісним з реалізацією семивимірної сфери як розшарування Хопфа. Він узагальнює представника (1.67), розглянутого в розділі 1, включенням довільного елемента $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору $\mathscr{G}$. В (2.3) праворуч від нього розташовано три фактори. Перший із них містить генератор H $U(1)$ ізометрії кола S^1. Інші два фактори включають у показниках експоненти генератори суперсиметрій, які порушуються $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Така форма представника $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору гарантує, що компоненти $AdS_4\times S^7$ суперфільбайна не залежать від y, але бозонні компоненти у дотичному просторі до AdS_4 набувають внесків пропроційних dy. Компоненти вектора $G_y^{m'}$, які входять у (2.1), виражаються через пропорційні dy внески до $so(2,3)/so(1,3)$ форм Картана наступним чином

$$G_y^{m'} = \begin{pmatrix} G_y^m \\ G_y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\omega_y^m + c_y^m) \\ -\Delta_y \end{pmatrix}.$$

Для елемента (2.3) вони є функціями лише грассманових координат із сектора порушених суперсиметрій

$$\begin{gathered} \omega_y^m + c_y^m = 4[1-(\eta\bar\eta)^2](\theta\sigma^m\bar\theta) + 4\{1 - i[(\theta\bar\eta)+(\bar\theta\eta)]\}(\eta\sigma^m\bar\eta), \\ \Delta_y = 2[(\bar\theta\eta) - (\theta\bar\eta)]. \end{gathered} \qquad (2.4)$$

В (2.4) було введено наступні скорочені позначення для виразів, які включають згортки $SL(2,\mathbb{R})$ спінорів: $(\eta\bar{\eta}) = \eta^{\mu}\bar{\eta}_{\mu}$, $(\theta\sigma^{m}\bar{\theta}) = \theta^{\mu}\sigma^{m}_{\mu\nu}\bar{\theta}^{\nu}$ та інші. Вирази (2.4) можна обернути на нуль у $SL(2,\mathbb{R})$-коваріантний спосіб накладенням (анти-)майоранівської умови на спінорні координати

$$\bar{\theta}^{\mu} = s\theta^{\mu}, \quad \bar{\eta}^{\mu} = s\eta^{\mu}, \quad s = \pm 1. \tag{2.5}$$

Умови (2.5) включають спільний знаковий фактор для координат θ і η для того, аби обернути на нуль Δ_{y}. Ці умови залишають 4 координати в секторі порушених суперсиметрій.

Для визначеності зосередимось в подальшому на випадку $s = 1$ та продовжимо використовувати ті ж позначення θ^{μ} та η^{μ} для координат, які задовольняють майоранівську умову. Тоді бозонні компоненти $AdS_4 \times S^7$ суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 матимуть вигляд

$$\begin{gathered} E^{m}(d) = G^{m}(d) = G^{0'm}(d) - \tfrac{i}{2}\varepsilon^{mkl}G_{kl}(d)[(\theta\theta) + (\eta\eta)] \\ -2ic^{n}(d)(\theta\sigma_{n}\tilde{\sigma}^{m}\eta) - c^{m}(d)(\theta\theta)(\eta\eta) - i(d\theta\sigma^{m}\theta + d\eta\sigma^{m}\eta), \\ -E^{3}(d) = -G^{3}(d) = [1 + 2i(\theta\eta)]\Delta(d) + iG^{mn}(d)(\theta\sigma_{mn}\eta) + 2i(d\theta\eta), \end{gathered} \tag{2.6}$$

де $G^{0'm}(d) = \frac{1}{2}(\omega^{m} + c^{m})(d)$ і $-\Delta(d)$ – дотичні до AdS_4 компоненти суперфільбайна $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору (див. рівняння (1.24) з розділу 1). $G^{mn}(d)$ є $so(1,2)$ формою Картана, яка є складовою $so(1,3)$ зв'язності. Дотичні до $\mathbb{CP}^3$ багатовиду компоненти $AdS_4 \times S^7$ суперфільбайна дорівнюють

$$\begin{gathered} \mathsf{E}_{a}(d) = i(\Omega_{a} + \widetilde{\Omega}_{a})(d) \\ = i[\Omega_{a}(d) + 2\chi_{\mu a}(d)\theta^{\mu} - 2\omega^{\mu}_{a}(d)\eta_{\mu} - 2i\chi^{\mu}_{a}(d)\eta_{\mu}(\theta\theta)], \\ \mathsf{E}^{a}(d) = i(\Omega^{a} + \widetilde{\Omega}^{a})(d) \\ = i[\Omega^{a}(d) - 2\bar{\chi}^{a}_{\mu}(d)\theta^{\mu} + 2\bar{\omega}^{\mu a}(d)\eta_{\mu} + 2i\bar{\chi}^{\mu a}(d)\eta_{\mu}(\theta\theta)]. \end{gathered} \tag{2.7}$$

В (2.7) $su(4)/u(3)$ форми Картана $\Omega_{a}(d)$ та $\Omega^{a}(d)$ є відповідними компонентами $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперфільбайна. Грассманово-непарні форми Картана $\omega_a^\mu(d)$ та $\chi_{\mu a}(d)$ й комплексно-спряжені до них, які відповідають генераторам $D=3\,\mathcal{N}=6$ суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії, є ферміонними компонентами $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперфільбайна, як докладно обговорювалось в розділі 1. Оскільки вирази (2.4) обертаються на нуль, 1-форми (2.6) та (2.7) є бозонними компонентами суперфільбайна $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору. Одинадцята компонента $AdS_4\times S^7$ суперфільбайна дотична до кола S^1 має вигляд

$$\begin{gathered} E^{11}(d)=h(d)+\widetilde{\Omega}_a{}^a(d)=\Phi(dy+A(d)):\\ \Phi=1-4i(\theta\eta),\ A(d)=\Phi^{-1}\widetilde{\Omega}_a{}^a(d), \end{gathered}\tag{2.8}$$

де $h(d)$ є формою Картана для генератора H групи ізометрії $U(1)$ кола S^1, а $\widetilde{\Omega}_a{}^a(d)$ – $u(1)$ складова $u(3)$ зв'язності $\mathbb{CP}^3$ багатовиду $\widetilde{\Omega}_a{}^b(d)$. $\Phi=e^{2\phi/3}$ визначає суперполе $D=10$ дилатона ϕ. Серед ферміонних компонентів $AdS_4\times S^7$ суперфільбайна

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{\sqrt{2}}F^{\hat\alpha}(d)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(f^{\hat\alpha}(d)+dyF^{\hat\alpha}_y)\\ =\begin{pmatrix}\bar\omega^{\mu A}(d)\\ \omega^\mu_A(d)\\ \bar\chi^A_\mu(d)\\ \chi_{\mu A}(d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\tilde\omega}^{\mu A}(d)\\ \tilde\omega^\mu_A(d)\\ \bar{\tilde\chi}^A_\mu(d)\\ \tilde\chi_{\mu A}(d)\end{pmatrix}+dy\begin{pmatrix}\bar\omega^{\mu A}_y\\ \omega_{yA}{}^{\mu}\\ \bar\chi_{y\mu}{}^{A}\\ \chi_{y\mu A}\end{pmatrix} \end{gathered}\tag{2.9}$$

не обертаються на нуль наступні

$$\begin{gathered} \tilde\omega^\mu_a(d)=\omega^\mu_a(d)+i\chi^\mu_a(d)(\theta\theta),\\ \tilde\omega^\mu_4(d)=d\theta^\mu-2id\theta^\mu(\theta\eta)+2i\theta^\mu(d\theta\eta)+\frac{1}{2}G^{mn}(d)\theta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu\\ +\Delta(d)\theta^\mu-\omega^m(d)\tilde\sigma_m^{\mu\nu}\eta_\nu+iG^{mn}(d)\eta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu(\theta\theta),\\ \omega_{y4}{}^{\mu}=2i\theta^\mu,\\ \tilde\chi_{\mu a}(d)=\chi_{\mu a}(d)+4i\chi_{\nu a}(d)\theta^\nu\eta_\mu+i\omega_{\mu a}(d)(\eta\eta)-\chi_{\mu a}(d)(\theta\theta)(\eta\eta),\\ \tilde\chi_{\mu 4}(d)=d\eta_\mu+2i\eta_\mu(d\theta\eta)+c_m(d)\sigma^m_{\mu\nu}\theta^\nu-\frac{1}{2}G^{mn}(d)\sigma_{mn\mu}{}^\nu\eta_\nu \end{gathered}\tag{2.10}$$

$$-\Delta(d)\eta_\mu + ic_m(d)\sigma^m_{\mu\nu}\eta^\nu(\theta\theta)$$
$$+\frac{i}{2}G^{mn}(d)\sigma_{mn\mu}{}^\nu\theta_\nu(\eta\eta) + 2i\Delta(d)\eta_\mu(\theta\eta),$$
$$\chi_{y\mu 4} = 2i\eta_\mu[1 - 2i(\theta\eta)]$$

та комплексно-спряжені до них. Вони визначають ферміонні компоненти $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперфільбайна та суперполе дилатіно

$$E^{\hat{\alpha}}(d) = f^{\hat{\alpha}}(d) - F^{\hat{\alpha}}_y A(d), \quad \chi^{\hat{\alpha}} = F^{\hat{\alpha}}_y.$$

Здобуті вирази для компонентів суперфільбайна суперпросторів $AdS_4 \times S^7$ та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ належать до результатів, які виносяться на захист.

2.2.2 Мінімальне розширення інтеґровної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі

У попередньому пункті були здобуті вирази для компонентів суперфільбайна $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору, які входять до лагранжіана суперструни. Однак рівняння суперструни залишаються занадто складними, аби знайти представлення для них у вигляді умови нульової кривизни для листкової 1-форми. Їх можна спростити, виключивши ще координати у секторі порушених суперсиметрій. Тому у цьому пункті буде розглянуто $SL(2,\mathbb{R})$-коваріантне часткове калібрування κ-симетрії, в якому залишається тільки майоранівська спінорна координата θ^μ, які відповідає порушеним суперсиметріям Пуанкаре. Це приводить до подальшого спрощення $AdS_4 \times S^7$ суперфільбайна (2.6)-(2.10). Зокрема, його бозонні компоненти набувають вигляду

$$\begin{gathered} E^m(d) = G^{0'm}(d) - \tfrac{i}{2}\varepsilon^{mkl}G_{kl}(d)(\theta\theta) - id\theta\sigma^m\theta, \quad E^3(d) = -\Delta(d), \\ \mathsf{E}_a(d) = i(\Omega_a(d) + 2\chi_{\mu a}(d)\theta^\mu), \quad \mathsf{E}^a(d) = i(\Omega^a(d) - 2\bar{\chi}^a_\mu(d)\theta^\mu) \end{gathered} \tag{2.11}$$

та

$$E^{11}(d) = dy + \widetilde{\Omega}_a{}^a(d). \tag{2.12}$$

Із (2.12) видно, що $\Phi = 1$, як і у калібруванні світлового конуса, яке розглядалось у пункті 1.4.2. Ненульові ферміонні компоненти суперфільбайна у запропонованому калібруванні зводяться до

$$\tilde{\omega}_a^{\mu}(d) = \omega_a^{\mu}(d) + i\chi_a^{\mu}(d)(\theta\theta),$$
$$\tilde{\omega}_4^{\mu}(d) = d\theta^{\mu} + \frac{1}{2}G^{mn}(d)\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu} + \Delta(d)\theta^{\mu},$$
$$\omega_{y^4}{}^{\mu} = 2i\theta^{\mu} \tag{2.13}$$
$$\tilde{\chi}_{\mu a}(d) = \chi_{\mu a}(d),$$
$$\tilde{\chi}_{\mu 4}(d) = c_m(d)\sigma^m_{\mu\nu}\theta^{\nu}.$$

Компоненти $D = 11$ суперфільбайна (2.11)-(2.13) визначають лагранжіан супермембрани та мають необхідну форму для проведення її подвійної розмірної редукції. Дію $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни

$$S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min}} = \int\limits_{\Sigma} d^2\xi \left(\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min,\,kin}} + \mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min,\,WZ}}\right),$$

яка здобувається в результаті редукції, можна розглядати як мінімальне розширення $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі. Кінетичний член та член Весса-Зуміно в лагранжіані суперструни мають такий вигляд

$$\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min,\,kin}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\left(E_i^m E_{jm} + \Delta_i\Delta_j - \mathsf{E}_{ia}\mathsf{E}_j{}^a\right),$$
$$\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min,\,WZ}} = -\tfrac{1}{2}[(\omega_a^{\mu}(d) + 2i\Omega_a(d)\theta^{\mu}) \wedge (\bar{\omega}^a_{\mu}(d) - 2i\Omega^a(d)\theta_{\mu})$$
$$+\chi_{\mu a}(d) \wedge \bar{\chi}^{\mu a}(d)] + (\Omega_a(d) \wedge \Omega^a(d) + 2i\widetilde{\Omega}_a{}^a(d) \wedge \Delta(d))(\theta\theta).$$

Для виведення рівнянь суперструни у запропонованому калібруванні виберемо як незалежні варіаційні параметри подібно до випадку $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі, розглянутому у розділі 1, форми Картана, які відповідають генераторам $osp(4|6)/(so(1,3)\times u(3))$ фактор-супералгебри з певними власними значеннями відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму, із диференціалами координат заміненими їх варіаціями. Такий набір включає бозонні форми Картана з власного підпростору $\mathfrak{g}_2$, а саме $G^{0'm}(d)$, $\Delta(d)$ та

$\Omega_a(d)$, $\Omega^a(d)$, а також ферміонні форми Картана (1.16), які відповідають генераторам суперсиметрії (1.15) із власних підпросторів $\mathfrak{g}_{1,3}$. Причиною такого вибору є те, що ці форми Картана використовуються як варіаційні параметри при виведенні рівнянь $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі та входять до її зв'язності Лакса [154], [155].[31] Припускається, що вона дає провідний внесок у степеневий розклад зв'язності Лакса $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни за грассмановими координатами із сектора порушених суперсиметрій.

Отже, рівняння суперструни

$$\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta G^{0'}{}_m(\delta)}=\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_j{}^{0'm})+2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{mn}G_j{}^{0'}{}_n+2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i^{3m}\Delta_j$$
$$+2i\omega_{(1)}{}^{\mu}_{a}(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\bar\omega_{(1)}{}^{\nu a}(d)-2i\omega_{(3)}{}^{\mu}_{a}(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\bar\omega_{(3)}{}^{\nu a}(d)$$
$$+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}[\Omega_i{}^a(\omega_{ja}\sigma^m\theta)-\Omega_{ia}(\bar\omega^a_j\sigma^m\theta)]-i[\Omega^a(d)\wedge(\chi_a(d)\sigma^m\theta)$$
$$+\Omega_a(d)\wedge(\bar\chi^a(d)\sigma^m\theta)]-i\partial_i\left\{\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}[(\partial_j\theta\sigma^m\theta)+\tfrac12\varepsilon^{mnp}G_{j\,np}(\theta\theta)]\right\}$$
$$-2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{mn}[(\partial_j\theta\sigma_n\theta)+\tfrac12\varepsilon_{npr}G_j{}^{pr}(\theta\theta)]+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}[(\chi_{ia}\sigma^m\bar\omega^a_j)$$
$$-(\omega_{ia}\sigma^m\bar\chi^a_j)](\theta\theta)-4i\widetilde\Omega_a{}^a(d)\wedge G^{3m}(d)(\theta\theta)=0,$$

$$\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\Delta(\delta)}=\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Delta_j)-2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i^{3m}G_j{}^{0'}{}_m+2\omega_{(1)}{}^{\mu}_{a}(d)\wedge\bar\omega_{(1)}{}^{a}_{\mu}(d)$$
$$+2\omega_{(3)}{}^{\mu}_{a}(d)\wedge\bar\omega_{(3)}{}^{a}_{\mu}(d)+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{ia}\bar\chi_{j\mu}^{a}\theta^\mu-\Omega_i{}^a\chi_{j\mu a}\theta^\mu)$$
$$+i(\Omega^a(d)\wedge\omega^\mu_a(d)\theta_\mu+\Omega_a(d)\wedge\bar\omega^{\mu a}(d)\theta_\mu)+2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i^{3m}[(\partial_j\theta\sigma_m\theta)$$
$$+\tfrac12\varepsilon_{mnp}G_j{}^{np}(\theta\theta)]-2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi^{\mu}_{ia}\bar\chi_{j\mu}^{a}(\theta\theta)-4i\widetilde\Omega_a{}^a(d)\wedge(d\theta\theta)$$
$$-2\Omega_a(d)\wedge\Omega^a(d)(\theta\theta)+2i(\omega^\mu_a(d)\wedge\bar\chi^a_\mu(d)+\chi^\mu_a(d)\wedge\bar\omega^a_\mu(d))(\theta\theta)=0,$$

$$\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\Omega_a(\delta)}=\tfrac12\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_j{}^a)+\tfrac{i}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_i{}^b(\widetilde\Omega_{jb}{}^a+\delta^a_b\widetilde\Omega_{jc}{}^c)$$
$$-i\varepsilon^{abc}\omega_{(1)}{}^{\mu}_{b}(d)\wedge\omega_{(1)\mu c}(d)-i\varepsilon^{abc}\omega_{(3)}{}^{\mu}_{b}(d)\wedge\omega_{(3)\mu c}(d)-\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\bar\chi_{j\mu}^{a}\theta^\mu)$$
$$-i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\bar\chi_{i\mu}^{b}\theta^\mu(\widetilde\Omega_{jb}{}^a+\delta^a_b\widetilde\Omega_{jc}{}^c)+i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\varepsilon^{abc}\Omega_{ib}\chi_{j\mu c}\theta^\mu-id(\bar\omega^{\mu a}(d)\theta_\mu)$$

[31] Зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі є окремим випадком зв'язностей Лакса інтеґровних σ-моделей у суперсиметричних фактор-просторах, підалгебри стабільності яких інваріантні відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму їх супералгебр ізометрії [144], [219], [220], [221].

$$+\bar\omega^{\mu b}(d)\theta_\mu\wedge(\widetilde\Omega_b{}^a(d)+\delta^a_b\widetilde\Omega_c{}^c(d))+\varepsilon^{abc}\Omega_b(d)\wedge\omega^\mu_c(d)\theta_\mu+2(d\theta\theta)\wedge\Omega^a(d)$$

$$+2\Delta(d)\wedge\Omega^a(d)(\theta\theta)+3\varepsilon^{abc}\omega^\mu_b(d)\wedge\chi_{\mu c}(d)(\theta\theta)=0,$$

$$-\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\bar\omega_{(1)}{}^a_\mu(\delta)}=-2iV^{ij}_+G_i{}^{0'm}\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(1)j\nu a}-2V^{ij}_+\Delta_i\omega_{(1)j}{}^\mu_a+2iV^{ij}_+\varepsilon_{abc}\Omega_i{}^b\bar\omega_{(1)j}{}^{\mu c}$$

$$-i\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{ja}\theta^\mu)-\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\widetilde\Omega_{ia}{}^b-\delta^b_a\widetilde\Omega_{ic}{}^c)\Omega_{jb}\theta^\mu-i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{ia}(\Delta_j\theta^\mu$$

$$+\tfrac12 G_j{}^{mn}\theta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu+ic^m_j\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\theta_\nu)+4i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\varepsilon_{abc}\bar\omega_{(1)i}{}^{\mu b}\bar\chi_{j\nu}{}^c\theta^\nu$$

$$-i\Omega_a(d)\wedge[d\theta^\mu+(2i\widetilde\Omega_b{}^b(d)-\Delta(d))\theta^\mu+\tfrac12 G^{mn}(d)\theta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu-i\omega^m(d)\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\theta_\nu]$$

$$+\varepsilon_{abc}\Omega^b(d)\wedge\Omega^c(d)\theta^\mu-2i\varepsilon_{abc}\bar\omega^{\mu b}(d)\wedge\bar\chi^c_\nu(d)\theta^\nu-\varepsilon_{abc}\bar\omega^{\nu b}(d)\wedge\bar\omega^c_\nu(d)\theta^\mu$$

$$-i\partial_i[\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi_{ja}{}^\mu(\theta\theta)]-\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\widetilde\Omega_{ia}{}^b-\delta^b_a\widetilde\Omega_{ic}{}^c)\chi_{jb}{}^\mu(\theta\theta)$$

$$-\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\varepsilon_{abc}\Omega_i{}^b\bar\chi_j{}^{\mu c}(\theta\theta)+2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{0'm}\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(3)j\nu a}(\theta\theta)$$

$$-i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi_{ia}{}^\nu(\Delta_j\delta^\mu_\nu+\tfrac12 G_j{}^{mn}\sigma_{mn\nu}{}^\mu-ic^m_j\varepsilon^{\mu\rho}\sigma_{m\nu\rho})(\theta\theta)$$

$$-2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\partial_i\theta\sigma^m\theta)\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(1)j\nu a}+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{mn}\varepsilon^{\mu\rho}\sigma_{mn\rho}{}^\nu\omega_{(1)j\nu a}(\theta\theta)$$

$$+2\omega_{(3)}{}^\mu_a(d)\wedge(d\theta\theta)+2\Delta(d)\wedge\omega_{(3)}{}^\mu_a(d)(\theta\theta)$$

$$+4i\widetilde\Omega_c{}^c(d)\wedge\omega_{(1)}{}^\mu_a(d)(\theta\theta)-6i\varepsilon_{abc}\Omega^b(d)\wedge\bar\omega_{(1)}{}^{\mu c}(d)(\theta\theta)=0,$$

$$-\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\bar\omega_{(3)}{}^a_\mu(\delta)}=-2iV^{ij}_-G_i{}^{0'm}\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(3)j\nu a}+2V^{ij}_-\Delta_i\omega_{(3)j}{}^\mu_a-2iV^{ij}_-\varepsilon_{abc}\Omega_i{}^b\bar\omega_{(3)j}{}^{\mu c}$$

$$+i\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{ja}\theta^\mu)+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\widetilde\Omega_{ia}{}^b-\delta^b_a\widetilde\Omega_{ic}{}^c)\Omega_{jb}\theta^\mu+i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{ia}(\Delta_j\theta^\mu$$

$$+\tfrac12 G_j{}^{mn}\theta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu-ic^m_j\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\theta_\nu)-4i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\varepsilon_{abc}\bar\omega_{(3)i}{}^{\mu b}\bar\chi_{j\nu}{}^c\theta^\nu$$

$$-i\Omega_a(d)\wedge[d\theta^\mu+(2i\widetilde\Omega_b{}^b(d)-\Delta(d))\theta^\mu+\tfrac12 G^{mn}(d)\theta^\nu\sigma_{mn\nu}{}^\mu+i\omega^m(d)\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\theta_\nu]$$

$$+\varepsilon_{abc}\Omega^b(d)\wedge\Omega^c(d)\theta^\mu-2i\varepsilon_{abc}\bar\omega^{\mu b}(d)\wedge\bar\chi^c_\nu(d)\theta^\nu+\varepsilon_{abc}\bar\omega^{\nu b}(d)\wedge\bar\omega^c_\nu(d)\theta^\mu$$

$$+i\partial_i[\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi_{ja}{}^\mu(\theta\theta)]+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\widetilde\Omega_{ia}{}^b-\delta^b_a\widetilde\Omega_{ic}{}^c)\chi_{jb}{}^\mu(\theta\theta)$$

$$+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\varepsilon_{abc}\Omega_i{}^b\bar\chi_j{}^{\mu c}(\theta\theta)-2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{0'm}\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(1)j\nu a}(\theta\theta)$$

$$+i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi_{ia}{}^\nu(\Delta_j\delta^\mu_\nu+\tfrac12 G_j{}^{mn}\sigma_{mn\nu}{}^\mu+ic^m_j\varepsilon^{\mu\rho}\sigma_{m\nu\rho})(\theta\theta)$$

$$-2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\partial_j\theta\sigma^m\theta)\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\omega_{(3)j\nu a}+\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{mn}\varepsilon^{\mu\rho}\sigma_{mn\rho}{}^\nu\omega_{(3)j\nu a}(\theta\theta)$$

$$-2\omega_{(1)}{}^{\mu}_{a}(d)\wedge(d\theta\theta)-2\Delta(d)\wedge\omega_{(1)}{}^{\mu}_{a}(d)(\theta\theta)$$

$$-4i\widetilde{\Omega}_c{}^c(d)\wedge\omega_{(3)}{}^{\mu}_{a}(d)(\theta\theta)+6i\varepsilon_{abc}\Omega^b(d)\wedge\bar{\omega}_{(3)}{}^{\mu c}(d)(\theta\theta)=0$$

та комплексно-спряжені до них було представлено у вигляді ряду за θ^{μ} та $d\theta^{\mu}$. Наведені рівняння включають листкові проєктори $V_{\pm}^{ij}=\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\pm\varepsilon^{ij}$ та компоненти $so(1,3)$ зв'язності $G^{3m}(d)=\frac{1}{2}(c^m-\omega^m)(d)$. Ці рівняння є розширенням рівнянь $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі лінійними та квадратичними членами за спінорною координатою θ^{μ} та її диференціалом. Із дії суперструни крім цих рівнянь ще випливають рівняння, які відповідають варіації грассманових координат із сектора порушених суперсиметрій

$$\begin{gathered}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\theta_{\mu}}=\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{ia}\bar{\chi}_j{}^{\mu a}-\Omega_i{}^a\chi_{j}{}^{\mu}_{a})+i(\Omega^a(d)\wedge\omega^{\mu}_a(d)+\Omega_a(d)\wedge\bar{\omega}^{\mu a}(d))\\ -i\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G^{0'm}_j)\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\theta_{\nu}-2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G^{0'm}_i(\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\partial_j\theta_{\nu}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_{mkl}G^{kl}_j\theta^{\mu})\\ +2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\chi_{ia}^{\ \nu}\bar{\chi}_{j\nu}^{\ a}\theta^{\mu}+2(\Omega_a(d)\wedge\Omega^a(d)+2i\Delta(d)\wedge\widetilde{\Omega}_a{}^a(d))\theta^{\mu}\\ +i(\omega^{\nu}_a(d)\wedge\bar{\chi}^a_{\nu}(d)+\chi^{\nu}_a(d)\wedge\bar{\omega}^a_{\nu}(d))\theta^{\mu}-\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G^{mn}_i\partial_j\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu}(\theta\theta)\\ +\tfrac{3}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\partial_{ij}\theta^{\mu}(\theta\theta)-3\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\partial_i\theta\partial_j\theta)\theta^{\mu}=0,\end{gathered}\tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\vartheta_{\mu}}=i\sqrt{-g}\gamma^{ij}(\Omega_{ia}\bar{\chi}_j{}^{\mu a}+\Omega_i{}^a\chi_{j}{}^{\mu}_{a})+\Omega^a(d)\wedge\omega^{\mu}_a(d)-\Omega_a(d)\wedge\bar{\omega}^{\mu a}(d)\\ -4i\sqrt{-g}\gamma^{ij}\widetilde{\Omega}_{ia}{}^aG_j{}^{0'm}\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\theta_{\nu}+2i\sqrt{-g}\gamma^{ij}(\chi_{ia}^{\ \mu}\bar{\chi}_j{}^{\nu a}+\chi_{ia}^{\ \nu}\bar{\chi}_j{}^{\mu a})\theta_{\nu}\\ -2iG^{0'm}(d)\wedge G^{3n}(d)\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu}-2iG^{0'm}(d)\wedge G^3{}_m(d)\theta^{\mu}-2i\Delta(d)\wedge(d\theta^{\mu}\\ +\tfrac{1}{2}G^{mn}(d)\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu})-2(\omega^{\mu}_a(d)\wedge\bar{\chi}^{\nu a}(d)+\chi^{\nu}_a(d)\wedge\bar{\omega}^{\mu a}(d))\theta_{\nu}\\ +i(\Omega^a(d)\wedge\chi^{\mu}_a(d)-\Omega_a(d)\wedge\bar{\chi}^{\mu a}(d))(\theta\theta)+6\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\widetilde{\Omega}_{ia}{}^a\partial_j\theta^{\mu}(\theta\theta)\\ -4G^{0'm}(d)\wedge\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m d\theta_{\nu}(\theta\theta)+c^m(d)\wedge\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m d\theta_{\nu}(\theta\theta)=0,\end{gathered}\tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\eta_{\mu}}+\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\bar{\eta}_{\mu}}=\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_i{}^a\omega_{j}{}^{\mu}_{a}-\Omega_{ia}\bar{\omega}_j{}^{\mu a})+i(\Omega^a(d)\wedge\chi^{\mu}_a(d)\\ +\Omega_a(d)\wedge\bar{\chi}^{\mu a}(d))-2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{0'm}(G_j{}^{3n}\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu}+G_j{}^3{}_m\theta^{\mu})\\ -2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Delta_i(\partial_j\theta^{\mu}+\tfrac{1}{2}G_j{}^{mn}\theta^{\nu}\sigma_{mn\nu}{}^{\mu})+2i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{ia}\Omega_j{}^a\theta^{\mu}\\ +2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\omega_{ia}^{\ \mu}\bar{\chi}_j{}^{\nu a}-\chi_{ia}^{\ \nu}\bar{\omega}_j{}^{\mu a})\theta_{\nu}+4i\widetilde{\Omega}_a{}^a(d)\wedge G^{0'm}(d)\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\theta_{\nu}\end{gathered}\tag{2.16}$$

$$+2i\chi^{\nu}_{a}(d)\wedge\bar{\chi}^{a}_{\nu}(d)\theta^{\mu}+3i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i}{}^{a}\chi_{ja}^{\ \mu}-\Omega_{ia}\bar{\chi}_{j}{}^{\mu a})(\theta\theta)$$
$$-\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(c^{m}_{i}+2G_{i}{}^{0'm})\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{m}\partial_{j}\theta_{\nu}(\theta\theta)-6\widetilde{\Omega}_{a}{}^{a}(d)\wedge d\theta^{\mu}(\theta\theta)=0,$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\eta_{\mu}}-\tfrac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}}}{\delta\bar{\eta}_{\mu}}=\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i}{}^{a}\omega_{ja}^{\ \mu}+\Omega_{ia}\bar{\omega}_{j}{}^{\mu a})+i(\Omega^{a}(d)\wedge\chi^{\mu}_{a}(d)\\ -\Omega_{a}(d)\wedge\bar{\chi}^{\mu a}(d))+4\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Delta_{i}\widetilde{\Omega}_{ja}{}^{a}\theta^{\mu}+2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\omega_{ia}^{\ \mu}\bar{\chi}_{j}{}^{\nu a}\\ +\chi_{ia}^{\ \nu}\bar{\omega}_{j}{}^{\mu a})\theta_{\nu}-2G^{0'm}(d)\wedge\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{m}(d\theta_{\nu}-\tfrac{1}{2}G^{kl}(d)\sigma_{kl\nu}{}^{\lambda}\theta_{\lambda})\\ +2\Delta(d)\wedge G^{3m}(d)\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{m}\theta_{\nu}-2i(\chi^{\mu}_{a}(d)\wedge\bar{\chi}^{\nu a}(d)+\chi^{\nu}_{a}(d)\wedge\bar{\chi}^{\mu a}(d))\theta_{\nu}\\ +i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i}{}^{a}\chi_{ja}^{\ \mu}+\Omega_{ia}\bar{\chi}_{j}{}^{\mu a})(\theta\theta)-2id\theta^{\mu}\wedge(d\theta\theta)\\ +\tfrac{i}{2}\varepsilon^{lmn}G_{mn}(d)\wedge\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{l}d\theta_{\nu}(\theta\theta)-3i\Delta(d)\wedge d\theta^{\mu}(\theta\theta)=0,\end{gathered}\tag{2.17}$$

де $SL(2,\mathbb{R})$ спінорна координата ϑ^{μ} задовольняє анти-майоранівську умову. Коли θ^{μ} обертається на нуль рівняння (2.14)-(2.17) не перетворюються на тотожності. Як було доведено в [222], вони стають висновками з інших ферміонних рівнянь. Цей результат узагальнює доведення, представлене в [163] для рівнянь, лінеаризованих за грассмановими координатами $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору.

У нашій роботі [215] для здобутих рівнянь суперструни було знайдено представлення нульової кривизни

$$d\mathcal{L}(d)-\mathcal{L}(d)\wedge\mathcal{L}(d)=0,$$

до якого входить 1-форма

$$\mathcal{L}(d)=\mathcal{L}_{so(2,3)}(d)+\mathcal{L}_{su(4)}(d)+\mathcal{L}_{24\,\text{susy}}(d)\in osp(4|6)\tag{2.18}$$

зі значенням в $osp(4|6)$ супералгебрі ізометрії $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору.

Її зручно представити у вигляді суми трьох доданків. Перший доданок набуває значення в $so(2,3)$ алгебрі

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{so(2,3)}(d)=\mathbf{G}^{mn}(z,d)M_{mn}+2G^{3m}(d)M_{3m}\\ +2\mathbf{G}^{0'm}(z,d)M_{0'm}+\mathbf{\Delta}(z,d)D\in so(2,3)\end{gathered}$$

та включає коефіцієнтні 1-форми

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{mn}(z,d) &= G^{mn}(d) + i\ell_2\varepsilon^{mnk}(\ell_2 G^{0'}{}_k(d) + \ell_1 * G^{0'}{}_k(d))(\theta\theta),\\ \mathbf{G}^{0'm}(z,d) &= \ell_1 G^{0'm}(d) + \ell_2 * \left[G^{0'm}(d) - i(d\theta\sigma^m\theta) - \tfrac{i}{2}\varepsilon^{mnk}G_{nk}(d)(\theta\theta)\right],\\ \boldsymbol{\Delta}(z,d) &= \ell_1\Delta(d) + \ell_2 * \Delta(d) + 2i\ell_2\widetilde{\Omega}_a{}^a(d)(\theta\theta),\end{aligned} \qquad (2.19)$$

де $*$ позначає дуалізацію листкових 1-форм: $a(d) = d\xi^i a_i \to *a(d) = d\xi^i * a_i$, $*a_i = \sqrt{-\gamma}\varepsilon_{ij}\gamma^{jk}a_k = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{ij}\varepsilon^{jk}a_k$. Коефіцієнтні 1-форми в (2.19), як вказує їх перший аргумент, залежать від спектрального параметра z через функції $\ell_1(z)$ і $\ell_2(z)$, вигляд яких визначається умовою нульової кривизни. Другий доданок в (2.18) набуває значення $su(4)$ алгебрі ізометрії $\mathbb{CP}^3$ багатовиду

$$\mathcal{L}_{su(4)}(d) = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_a{}^b(z,d)\widetilde{V}_b{}^a + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_b{}^b(z,d)\widetilde{V}_a{}^a + \boldsymbol{\Omega}^a(z,d)T_a + \boldsymbol{\Omega}_a(z,d)T^a \in su(4),$$

а коефіцієнтні 1-форми дорівнюють

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_a{}^b(z,d) &= \widetilde{\Omega}_a{}^b(d) - i\ell_2\delta_a^b(\ell_1\Delta(d) + \ell_2 * \Delta(d))(\theta\theta),\\ \boldsymbol{\Omega}^a(z,d) &= \ell_1\Omega^a(d) + \ell_2 * \Omega^a(d) - 2i\ell_2\bar{\omega}^a_\mu(d)\theta^\mu\\ &\quad -2\ell_2 * \bar{\chi}^a_\mu(d)\theta^\mu + 2\ell_2\Omega^a(d)(\theta\theta).\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Останній член в (2.18)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{24\,\mathrm{susy}}(d) &= \boldsymbol{\omega}_{(1)}{}^\mu_a(z,d)Q_{(1)}{}^a_\mu + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)}{}^{\mu a}(z,d)\bar{Q}_{(1)\mu a}\\ &+\boldsymbol{\omega}_{(3)}{}^\mu_a(z,d)Q_{(3)}{}^a_\mu + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)}{}^{\mu a}(z,d)\bar{Q}_{(3)\mu a}\end{aligned}$$

є лінійною комбінацією генераторів суперсиметрії із власних просторів $\mathfrak{g}_{1,3}$, а 1-форми

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{(1)}{}^\mu_a(z,d) &= \ell_3\omega_{(1)}{}^\mu_a(d) - \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_4\Omega_a(d)\theta^\mu - \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_4 * \Omega_a(d)\theta^\mu\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\ell_2\ell_4\omega_{(1)}{}^\mu_a(d)(\theta\theta) - \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_4 * \chi^\mu_a(d)(\theta\theta),\\ \boldsymbol{\omega}_{(3)}{}^\mu_a(z,d) &= \ell_4\omega_{(3)}{}^\mu_a(d) + \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_3\Omega_a(d)\theta^\mu - \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_3 * \Omega_a(d)\theta^\mu\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\ell_2\ell_3\omega_{(3)}{}^\mu_a(d)(\theta\theta) - \tfrac{i}{2}\ell_2\ell_3 * \chi^\mu_a(d)(\theta\theta)\end{aligned} \qquad (2.21)$$

та комплексно-спряжені до них залежать від спектрального параметра z через функції $\ell_2(z)$, $\ell_3(z)$ та $\ell_4(z)$. З умови нульової кривизни випливає, що функції $\ell_1(z)$, $\ell_2(z)$, $\ell_3(z)$ та $\ell_4(z)$ задовольняють такий же набір алгебраїчних рівнянь, як і у випадку зв'язності Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі

$$\ell_1^2-\ell_2^2=\ell_3\ell_4=1, \quad (\ell_1-\ell_2)\ell_4=\ell_3, \quad (\ell_1+\ell_2)\ell_3=\ell_4. \tag{2.22}$$

У літературі часто використовується такий розв'язок цих рівнянь

$$\ell_1(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+z^2\right), \quad \ell_2(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}-z^2\right), \quad \ell_3(z)=z, \quad \ell_4(z)=\frac{1}{z}. \tag{2.23}$$

При $z=1$ 1-форми (2.19)-(2.21) зводяться до $osp(4|6)$ форм Картана в конформному базисі. Тоді (2.18), як і зв'язність Лакса σ-моделі, зводиться до визначального співвідношення для цих форм Картана (див. (1.1), (1.2), (1.5) та (1.11) із розділу 1). Також 1-форма (2.18) подібно до зв'язності Лакса σ-моделі інваріантна відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізма $osp(4|6)$ супералгебри, якщо перетворення її генераторів супроводжується перетворенням спектрального параметра $z\to -iz$. Відповідно із (2.23) випливає, що функції спектрального параметра, які входять до зв'язності Лакса, перетворюються як $\ell_{1,2}\to-\ell_{1,2}$, $\ell_3\to -i\ell_3$ і $\ell_4\to i\ell_4$.

Знайдене представлення нульової кривизни для рівнянь $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни у $sl(2,\mathbb{R})$-коваріантному частковому калібруванні для κ-симетрії включено до результатів, які виносяться на захист.

2.3 Класична інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани у $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді

У цьому підрозділі буде доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі та в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Подібно до взаємозв'язку між $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделлю та $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструною, лагранжіан безмасової $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки випливає із лагранжіана суперчастинки в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі при накладенні умови обернення на нуль восьми координат сектора порушених суперсиметрій. Ця умова представляє часткове закріплення калібрування κ-симетрії, коли суперчастинка рухається як в AdS_4, так і в $\mathbb{CP}^3$ просторі.

Як відомо безмасова $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинка відповідає границі нескінченного натягу $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі. Це передбачає, що їх інтеґровні структури взаємопов'язані. У пункті 2.3.1 буде встановлено зв'язок між компонентами пари Лакса суперчастинки та зв'язністю Лакса σ-моделі.

У заключному пункті 2.3.3 буде доведено класичну інтеґровність рівнянь, які випливають із дії $D0$-брани в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді [208].

2.3.1 Класична інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпросторі

Дія безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі має такий вигляд [155]

$$S_{\text{sparticle}}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}=\int\limits_L\frac{d\tau}{e}\left(G_\tau^{0'm'}G^{0'}_{\tau m'}+\Omega_{\tau a}\Omega_\tau{}^a\right). \tag{2.24}$$

Враховуючи (1.24), її можна записати через форми Картана для генераторів конформної алгебри $conf(1,2)$

$$S_{\text{sparticle}}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}=\int\limits_L\frac{d\tau}{e}\left(\frac{1}{4}(\omega_\tau^m+c_\tau^m)(\omega_{\tau m}+c_{\tau m})+\Delta_\tau\Delta_\tau+\Omega_{\tau a}\Omega_\tau{}^a\right).$$

Варіація дії за множником Лагранжа $e(\tau)$ приводить до в'язі масової поверхні

$$\frac{1}{4}(\omega_\tau^m+c_\tau^m)(\omega_{\tau m}+c_{\tau m})+\Delta_\tau\Delta_\tau+\Omega_{\tau a}\Omega_\tau{}^a=0.$$

Через те, що ця в'язь не використовується при доведенні інтеґровності динамічних рівнянь суперчастинки, покладемо $e(\tau)=1$ закріпленням калібрування репараметризаційної симетрії дії. Як і при виведенні рівнянь суперструни у пункті 2.2.2, будемо розглядати в якості незалежних варіаційних параметрів форми Картана, які відповідають генераторам з власних підпросторів $\mathfrak{g}_{1,2,3}$, із диференціалами координат заміненими їх варіаціями. В результаті приходимо до набору динамічних рівнянь суперчастинки

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2}\frac{\delta S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{\delta G^{0'}{}_{m}(\delta)} = \frac{dG_{\tau}{}^{0'm}}{d\tau} + 2G_{\tau}{}^{mn}G_{\tau}{}^{0'}{}_{n} + 2G_{\tau}{}^{3m}\Delta_{\tau} = 0,\\
-\frac{1}{2}\frac{\delta S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{\delta\Delta(\delta)} = \frac{d\Delta_{\tau}}{d\tau} - 2G_{\tau}{}^{3m}G_{\tau}{}^{0'}{}_{m} = 0,\\
-\frac{\delta S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{\delta\Omega_{a}(\delta)} = \frac{d\Omega_{\tau}{}^{a}}{d\tau} + i\Omega_{\tau}{}^{b}(\widetilde{\Omega}_{\tau b}{}^{a} + \delta^{a}_{b}\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^{c}) = 0
\end{gathered} \tag{2.25}$$

та

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\frac{\delta S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{\delta\bar{\omega}_{(1)}{}^{a}_{\mu}(\delta)} &= iG_{\tau}{}^{0'm}\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{m}\omega_{(1)\tau\nu a} + \Delta_{\tau}\omega_{(1)}{}^{\mu}_{\tau a} - i\varepsilon_{abc}\Omega_{\tau}{}^{b}\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^{\mu c} = 0,\\
-\frac{1}{4}\frac{\delta S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{\delta\bar{\omega}_{(3)}{}^{a}_{\mu}(\delta)} &= iG_{\tau}{}^{0'm}\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_{m}\omega_{(3)\tau\nu a} - \Delta_{\tau}\omega_{(3)}{}^{\mu}_{\tau a} + i\varepsilon_{abc}\Omega_{\tau}{}^{b}\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^{\mu c} = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

а також комплексно-спряжених до них.

Представимо рівняння (2.25) та (2.26) у формі рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}_{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}}{d\tau} + [\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}] = 0 \tag{2.27}$$

з компонентами пари Лакса

$$\mathfrak{L}_{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))} = 2G_{\tau}{}^{0'm}M_{0'm} + \Delta_{\tau}D + \Omega_{\tau a}T^{a} + \Omega_{\tau}{}^{a}T_{a} \in \mathfrak{c}^{2}_{\tau}\mathfrak{g}_{2} \tag{2.28}$$

та

$$\mathfrak{M} = \mathscr{G}^{-1}\frac{d}{d\tau}\mathscr{G} = \sum_{\mathrm{j}\in 0,1,2,3}\mathfrak{c}^{\mathrm{j}}_{\tau}\mathfrak{g}_{\mathrm{j}} \in osp(4|6) \tag{2.29}$$

(див. (1.12) із розділу 1). Оскільки $\mathfrak{L}_{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}$ визначається проєкціями на світову лінію форм Картана, які входять до дії суперчастинки (2.24), її можна представити у вигляді диференційного оператора зі значенням у власному підпросторі $\mathfrak{g}_{2}$, застосованого до функціоналу дії

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))} =\\
\left(M_{0'm}\frac{\partial}{\partial G_{\tau}{}^{0'}{}_{m}} + \frac{1}{2}D\frac{\partial}{\partial\Delta_{\tau}} + T^{a}\frac{\partial}{\partial\Omega_{\tau}{}^{a}} + T_{a}\frac{\partial}{\partial\Omega_{\tau a}}\right)S^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}.
\end{gathered} \tag{2.30}$$

В кінці цього пункту встановимо зв'язок між компонентами пари Лакса (2.28) і (2.29) та зв'язностями Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі та $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни. Зв'язність Лакса σ-моделі має випливати із зв'язності Лакса суперструни при оберненні на нуль координат сектора порушених суперсиметрій. Зокрема, якщо в (2.18) покласти $\theta^\mu=0$, то ця 1-форма перейде у зв'язність Лакса σ-моделі. Загальна структура зв'язності Лакса $\mathcal{L}_i$ є такою

$$\mathcal{L}_i=\widehat{\mathcal{L}}_i+*\widetilde{\mathcal{L}}_i. \tag{2.31}$$

Другий член в правій частині включає компоненти $*\widetilde{\mathcal{L}}_i=\varepsilon_{ij}\eta^{jk}\widetilde{\mathcal{L}}_k=\eta_{ij}\varepsilon^{jk}\widetilde{\mathcal{L}}_k$ 1-форми $*\widetilde{\mathcal{L}}(d)$ дуальної до $\widetilde{\mathcal{L}}(d)$, де η_{ij} і η^{ij} – листкова метрика Мінковського та обернена до неї. Обидва доданки в (2.31) залежать від функцій ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 та ℓ_4 спектрального параметра z, які задовольняють рівняння (2.22). Один з їх розв'язків було представлено в (2.23). Зв'язність Лакса (2.31) задовольняє умову нульової кривизни

$$\partial_\sigma\mathcal{L}_\tau-\partial_\tau\mathcal{L}_\sigma-[\mathcal{L}_\tau,\mathcal{L}_\sigma]=0. \tag{2.32}$$

Перехід до пари Лакса суперчастинки відповідає випусканню залежності полів суперкоординат від листкової просторовоподібної координати σ та переходу до границі $z\to 1$. В такому випадку $\widehat{\mathcal{L}}_\sigma=*\widetilde{\mathcal{L}}_\tau=0$. Тоді компоненти пари Лакса визначаються граничними значеннями ненульових компонентів зв'язності Лакса

$$\mathfrak{L}=\lim_{z\to1}\frac{1}{\ell_2}*\widetilde{\mathcal{L}}_\sigma,\quad \mathfrak{M}=\lim_{z\to1}\widehat{\mathcal{L}}_\tau,$$

а умова нульової кривизни (2.32) переходить до рівняння Лакса для суперчастинки. Зокрема, компоненти зв'язності Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі у цій границі переходять до компонентів пари Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки (2.28) та (2.29), а умова нульової кривизни для неї – до рівняння Лакса (2.27).

Розмірковуючи у зворотному напрямку, приходимо до висновку, що за допомогою відомого виразу для пари Лакса суперчастинки можна відновити залежність від суперпросторових координат (але не від спектрального параметра z) частини $\widehat{\mathcal{L}}_i$, яка не включає ℓ_2, та частини $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ лінійної за ℓ_2. Відтак вигляд компонентів пари Лакса для суперчастинки дає інформацію про структуру зв'язності Лакса суперструни. Це пояснює інтерес до представлення рівнянь безмасової суперчастинки в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі у формі рівняння Лакса, яке буде здобуто в наступному пункті.

На завершення цього пункту відзначимо, що здобуте співвідношення між компонентами пари Лакса безмасової суперчастинки та зв'язністю Лакса σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі включено до переліку результатів, які виносяться на захист.

2.3.2 Класична інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі

Як зазначалось на початку підрозділу 2.2 проблема доведення інтеґровності рівнянь $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни залишається нерозв'язаною. Однак, як буде показано у цьому пункті, можливо довести інтеґровність рівнянь суперструни у граничному випадку нескінченного натягу, який описується моделлю безмасової суперчастинки. Цю проблему було розв'язано в наших роботах [216] та [217], слідуючи підходу, запропонованому в [215], який ґрунтується на частковому закріпленні калібрування κ-симетрії в секторі порушених суперсиметрій. Спочатку в [216] пару Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперчастинки було розширено внесками чотирьох координат, які відповідають порушеним суперсиметріям Пуанкаре, а потім в роботі [217] було здобуто повний вираз для пари Лакса $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперчастинки, яка враховує залежність від чотирьох координат для порушених спеціальних конформних суперсиметрій. Здобуті компоненти пари Лакса входять до рівняння Лакса, яке задовольняється на рівняннях $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперчастинки.

Для виведення рівнянь безмасової $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперчастинки необхідно побудувати її лагранжіан. Його форма визначається бозонними компонентами $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперфільбайна, які залежать від усіх 24+8 грассманових координат суперпростору. Вирази для них буде здобуто нижче з використанням, як і раніше, реалізацій $osp(4|8)$ та $osp(4|6)$ супералгебр як $D=3$ $\mathcal{N}=8$ та $\mathcal{N}=6$ суперконформних алгебр.

Будемо розглядати елемент $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору, означений в (2.3). Як зазначалось, його структура забезпечує незалежність відовідних форм Картана від координати y кола S^1 у розшаруванні Хопфа $S^7=\mathbb{CP}^3\times S^1$. Однак $so(2,3)/so(1,3)$ форми Картана, які визначають бозонні компоненти суперфільбайна в дотичному просторі до AdS_4, включають доданки пропорційні dy (див. (2.1)). Аби виключити такі внески та привести $AdS_4\times S^7$ суперфільбайн до анзацу Калуци-Клейна необхідно провести локальне $SO(1,4)$ перетворення в дотичному просторі до $AdS_4\times S^1$. Окремий випадок такого перетворення розглядався в розділі 1 при виведенні лагранжіана $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни в калібруванні світлового конуса для κ-симетрії (див. (1.98) і (1.99)). Елементи матриці $SO(1,4)$ лоренцевого обертання (1.98) визначаються вимогою відсутності залежності від dy перетворених компонентів суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4: ${L^{m'}}_{n'}G_y^{n'}+{L^{m'}}_{11}\Phi=0$, де для компонентів суперфільбайна у дотичному просторі до AdS_4 та S^1 було використано представлення (2.1) і $E^{11}(d)=\Phi dy+A(d)$. У загальному випадку елементи цієї матриці мають таку форму (див. [156], [215])

$$
{L^{m'}}_{n'}=\delta_{n'}^{m'}+\tfrac{\Phi-\Phi_L}{(G_y\cdot G_y)\Phi_L}G_y^{m'}G_{yn'},\quad {L^{m'}}_{11}=-\tfrac{G_y^{m'}}{\Phi_L},
$$
$$
{L^{11}}_{m'}=\tfrac{G_{ym'}}{\Phi_L},\quad {L^{11}}_{11}=\tfrac{\Phi}{\Phi_L},
$$

де $\Phi_L=\exp\left(\frac{2\phi}{3}\right)=\sqrt{\Phi^2+(G_y\cdot G_y)}$. Відтак перетворені бозонні компоненти $D=11$ суперфільбайна дорівнюють

$$
\mathcal{E}^{m'}(d)=(LE)^{m'}(d)=G^{m'}(d)+\tfrac{\Phi-\Phi_L}{(G_yG_y)\Phi_L}(G_y\cdot G(d))G_y^{m'}-\tfrac{1}{\Phi_L}A(d)G_y^{m'},\qquad(2.33)
$$
$$
\mathcal{E}^{11}(d)=(LE)^{11}(d)=\Phi_L(dy+A_L(d)),
$$

де

$$A_L(d) = \tfrac{1}{\Phi_L}((G_y \cdot G(d)) + \Phi A(d)) \tag{2.34}$$

– 1-форма потенціалу Рамона-Рамона. Як було показано у пункті 2.2.1, для елемента $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ фактор-простору, який розглядається, $G_y^{m'}$ та Φ залежать лише від координат із сектора порушених суперсиметрій

$$G_y^m = 2\left(1 + \tfrac{1}{2}\eta^2\bar{\eta}^2\right)(\theta\sigma^m\bar{\theta}) + 2\{1 - i[(\theta\bar{\eta}) + (\bar{\theta}\eta)]\}(\eta\sigma^m\bar{\eta}),$$

$$G_y^3 = 2[(\theta\bar{\eta}) - (\bar{\theta}\eta)],$$

$$\Phi = 1 - 2i[(\theta\bar{\eta}) + (\bar{\theta}\eta)] + 4[(\theta\eta)(\bar{\theta}\bar{\eta}) - (\theta\bar{\eta})(\bar{\theta}\eta)].$$

Отже, лагранжіан безмасової $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперчастинки

$$\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}} = \tfrac{\Phi_L}{e}\left(\mathcal{E}_{\tau m'}\mathcal{E}_\tau^{m'} - \mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_\tau{}^a\right)$$

виражається через відображення на світову лінію бозонних компонентів суперфільбайна $\mathcal{E}^{m'}(d)$ та $\mathsf{E}_a(d)$, $\mathsf{E}^a(d)$. Після підстановки виразів (2.33) він записується у вигляді

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}} = \tfrac{\Phi_L}{e}\Big(&G_{\tau m'}G_\tau{}^{m'} - \Phi_L^{-2}[(G_\tau \cdot G_y)^2 \\ &-G_y^2A_\tau^2 + 2\Phi A_\tau(G_\tau \cdot G_y)] - \mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_\tau{}^a\Big)\,.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Як і у випадку безмасової $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки, в'язь масової поверхні, яка здобувається варіюванням дії

$$S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}} \tag{2.36}$$

за множником Лагранжа $e(\tau)$, не використовується при доведенні інтеґровності динамічних рівнянь. Тому покладемо $e(\tau) = 1$. Також відзначимо, що переозначенням $e(\tau)$ можливо «поглинути» загальний фактор Φ_L. Відповідний вираз для компоненти пари Лакса $\mathfrak{L}$ можна здобути, якщо покласти $\Phi_L = 1$ в (2.41)-(2.43).

Структура елемента $OSp(4|8)/(SO(1,3)\times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору (2.3) є такою, що 1-форми $G^{m'}(d)$, $\mathsf{E}_a(d)$, $\mathsf{E}^a(d)$ та $A(d)$ в (2.35) можна розкласти за $osp(4|6)$ формами Картана та диференціалами координат сектора порушених суперсиметрій

$$\begin{gathered}
G^{m'}(d)=G^{0'n}(d)M_n{}^{m'}+G^{3n}(d)N_n{}^{m'}+\Delta(d)L^{m'}+G^{kl}(d)K_{kl}{}^{m'}\\
+q^{m'\mu}d\theta_\mu+\bar{q}^{m'\mu}d\bar{\theta}_\mu+s^{m'\mu}d\eta_\mu+\bar{s}^{m'\mu}d\bar{\eta}_\mu,\\
\mathsf{E}_a(d)=i\Omega_a(d)+u_{(1)}{}^\mu\omega_{(1)\mu a}(d)+u_{(3)}{}^\mu\omega_{(3)\mu a}(d),\\
\mathsf{E}^a(d)=i\Omega^a(d)+\bar{u}_{(1)}{}^\mu\bar{\omega}_{(1)}{}^a_\mu(d)+\bar{u}_{(3)}{}^\mu\bar{\omega}_{(3)}{}^a_\mu(d),
\end{gathered}\tag{2.37}$$

$$\begin{gathered}
A(d)=\widetilde{\Omega}_a{}^a(d)+G^{0'm}(d)m_m+G^{3m}(d)n_m+\Delta(d)l+G^{mn}(d)k_{mn}\\
+h^\mu d\theta_\mu+\bar{h}^\mu d\bar{\theta}_\mu+p^\mu d\eta_\mu+\bar{p}^\mu d\bar{\eta}_\mu.
\end{gathered}\tag{2.38}$$

В розкладах (2.37) бозонні коефіцієнти дорівнюють

$$\begin{gathered}
M_n{}^m=\delta^m_n\left[1-(\theta\bar{\theta})(\eta\bar{\eta})+\tfrac14(\theta^2\bar{\theta}^2+\eta^2\bar{\eta}^2)+\tfrac18\theta^2\bar{\theta}^2\eta^2\bar{\eta}^2\right]\\
-i(\theta\sigma_n\tilde{\sigma}^m\bar{\eta}+\bar{\theta}\sigma_n\tilde{\sigma}^m\eta)+2\left\{1-\tfrac{i}{2}[(\theta\bar{\eta})+(\bar{\theta}\eta)]\right\}(\theta\sigma_n\bar{\theta})(\eta\sigma^m\bar{\eta}),\\
N_n{}^m=\delta^m_n\left[-(\theta\bar{\theta})(\eta\bar{\eta})+\tfrac14(\theta^2\bar{\theta}^2-\eta^2\bar{\eta}^2)+\tfrac18\theta^2\bar{\theta}^2\eta^2\bar{\eta}^2\right]\\
-i(\theta\sigma_n\tilde{\sigma}^m\bar{\eta}+\bar{\theta}\sigma_n\tilde{\sigma}^m\eta)+2\left\{1-\tfrac{i}{2}[(\theta\bar{\eta})+(\bar{\theta}\eta)]\right\}(\theta\sigma_n\bar{\theta})(\eta\sigma^m\bar{\eta}),\\
M_n{}^3=N_n{}^3=[(\theta\bar{\eta})-(\bar{\theta}\eta)](\theta\sigma_n\bar{\theta}),\\
L^m=[(\bar{\theta}\eta)-(\theta\bar{\eta})](\eta\sigma^m\bar{\eta}),\quad -L^3=1+i[(\theta\bar{\eta})+(\bar{\theta}\eta)],\\
K_{kl}{}^m=-\tfrac{i}{2}\varepsilon_{kl}{}^m\left\{\left(1+\tfrac12\eta^2\bar{\eta}^2\right)(\theta\bar{\theta})+(\eta\bar{\eta})\right\}+\tfrac12[(\bar{\theta}\sigma_{kl}\eta)-(\theta\sigma_{kl}\bar{\eta})](\eta\sigma^m\bar{\eta}),\\
K_{kl}{}^3=-\tfrac{i}{2}[(\bar{\theta}\sigma_{kl}\eta)+(\theta\sigma_{kl}\bar{\eta})]
\end{gathered}$$

та

$$u_{(1,3)}{}^\mu=\mp2\{\theta^\mu\pm i\eta^\mu[1\pm(\theta\bar{\theta})]\},\quad \bar{u}_{(1,3)}{}^\mu=\mp2\{\bar{\theta}^\mu\mp i\bar{\eta}^\mu[1\mp(\theta\bar{\theta})]\}.$$

Відповідно бозонні коефіцієнти в (2.38) мають такий вигляд

$$\begin{gathered}
m_m=\left\{1-i[(\theta\bar{\eta})+(\bar{\theta}\eta)]\right\}(\theta\sigma_m\bar{\theta})+\left(1-\tfrac12\theta^2\bar{\theta}^2\right)(\eta\sigma_m\bar{\eta}),\\
n_m=\left\{1-i[(\theta\bar{\eta})+(\bar{\theta}\eta)]\right\}(\theta\sigma_m\bar{\theta})-\left(1+\tfrac12\theta^2\bar{\theta}^2\right)(\eta\sigma_m\bar{\eta})\\
l=(\bar{\theta}\eta)-(\theta\bar{\eta}),\quad k_{mn}=\tfrac12[(\bar{\theta}\sigma_{mn}\eta)-(\theta\sigma_{mn}\bar{\eta})]-i(\theta\bar{\theta})(\eta\sigma_{mn}\bar{\eta}).
\end{gathered}$$

Ненульові грассманово-непарні коефіцієнти в (2.37) та (2.38) даються виразами

$$q^{m\mu} = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\bar{\eta}^2\right)\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\bar{\theta}_\nu + \frac{1}{2}\bar{\eta}^2\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\eta_\nu, \quad q^{3\mu} = -i\bar{\eta}^\mu,$$
$$s^{m\mu} = \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^{m\mu\nu}\bar{\eta}_\nu, \quad h^\mu = -\bar{\eta}^\mu + i(\bar{\theta}\eta)\bar{\eta}^\mu - i(\bar{\theta}\bar{\eta})\eta^\mu$$

та комплексно-спряженими до них. Як видно, усі наведені вище коефіцієнти є функціями лише восьми координат для порушених суперсиметрій.

Бозонні рівняння, які випливають із дії суперчастинки (2.36), можна привести до вигляду

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\delta G^{0'}{}_m(\delta)} = \dot{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'm} + 2(G_\tau{}^m{}_n\mathbf{G}_\tau{}^{0'n} - \mathbf{G}_\tau{}^m{}_n G_\tau{}^{0'}{}_n \\
+\boldsymbol{\Delta}_\tau G_\tau{}^{3m} - \Delta_\tau\mathbf{G}_\tau{}^{3m}) \\
-2i\left(\omega_{(1)\tau a}\sigma^m\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^a - \boldsymbol{\omega}_{(1)\tau a}\sigma^m\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^a\right. \\
\left.+\omega_{(3)\tau a}\sigma^m\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau}{}^a - \boldsymbol{\omega}_{(3)\tau a}\sigma^m\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^a\right) = 0, \\
-\frac{1}{2}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\delta\Delta(\delta)} = \dot{\boldsymbol{\Delta}}_\tau + 2G_\tau{}^{0'}{}_m\mathbf{G}_\tau{}^{3m} - 2G_{\tau 3m}\mathbf{G}_\tau{}^{0'm} \\
-2\left(\omega_{(1)\tau}{}^\mu_a\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^a_\mu - \boldsymbol{\omega}_{(1)\tau}{}^\mu_a\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^a_\mu\right. \\
\left.-\,\omega_{(3)\tau}{}^\mu_a\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau}{}^a_\mu + \boldsymbol{\omega}_{(3)\tau}{}^\mu_a\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^a_\mu\right) = 0, \\
-\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\delta\Omega_a(\delta)} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\tau{}^a + i\boldsymbol{\Omega}_\tau{}^b\left(\widetilde{\Omega}_{\tau b}{}^a + \delta^a_b\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^c\right) - 4i\mathbf{w}_\tau\Omega_\tau{}^a \\
+4i\varepsilon^{abc}\left(\omega_{(1)\tau}{}^\mu_b\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau\mu c} - \omega_{(3)\tau}{}^\mu_b\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau\mu c}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{2.39}$$

24 ферміонні рівняння, які відповідають варіаційним параметрам $\bar{\omega}_{(1)}{}^a_\mu(\delta)$, $\bar{\omega}_{(3)}{}^a_\mu(\delta)$ та комплексно-спряженим до них, даються виразами

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\delta\bar{\omega}_{(1)}{}^a_\mu(\delta)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^\mu + \frac{1}{2}\left(G_\tau{}^{mn}\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau a}{}^\nu - \mathbf{G}_\tau{}^{mn}\omega_{(3)\tau a}{}^\nu\right)\sigma_{mn\nu}{}^\mu \\
+i\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\left(G_\tau{}^{3m}\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau\nu a} - \mathbf{G}_\tau{}^{3m}\omega_{(3)\tau\nu a}\right) + i\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\left(G_\tau{}^{0'm}\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau\nu a}\right. \\
\left.-\mathbf{G}_\tau{}^{0'm}\omega_{(1)\tau\nu a}\right) + \Delta_\tau\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau a}{}^\mu - \boldsymbol{\Delta}_\tau\omega_{(1)\tau a}{}^\mu - i\left(\widetilde{\Omega}_{\tau a}{}^b - \delta^b_a\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^c\right)\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau b}{}^\mu \\
-2i\mathbf{w}_\tau\omega_{(3)\tau a}{}^\mu - i\varepsilon_{abc}\left(\Omega_\tau{}^b\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^{\mu c} - \boldsymbol{\Omega}_\tau{}^b\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^{\mu c}\right) = 0, \\
-\frac{1}{4}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\delta\bar{\omega}_{(3)}{}^a_\mu(\delta)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}{}^\mu + \frac{1}{2}\left(G_\tau{}^{mn}\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau a}{}^\nu - \mathbf{G}_\tau{}^{mn}\omega_{(1)\tau a}{}^\nu\right)\sigma_{mn\nu}{}^\mu
\end{gathered} \tag{2.40}$$

$$-i\tilde{\sigma}_m^{\mu\nu}\Big(G_\tau{}^{3m}\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau\nu a}-\mathbf{G}_\tau{}^{3m}\omega_{(1)\tau\nu a}\Big)-i\tilde{\sigma}_m^{\mu\nu}\left(G_\tau{}^{0'm}\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau\nu a}\right.$$
$$\left.-\mathbf{G}_\tau{}^{0'm}\omega_{(3)\tau\nu a}\right)+\Delta_\tau\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau a}{}^{\mu}-\boldsymbol{\Delta}_\tau\omega_{(3)\tau a}{}^{\mu}-i\Big(\widetilde{\Omega}_{\tau a}{}^{b}-\delta_a^b\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^{c}\Big)\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau b}{}^{\mu}$$
$$-2i\mathbf{w}_\tau\omega_{(1)\tau a}{}^{\mu}-i\varepsilon_{abc}\left(\Omega_\tau{}^{b}\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau}{}^{\mu}-\boldsymbol{\Omega}_\tau{}^{b}\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^{\mu c}\right)=0.$$

В (2.39) та (2.40) було введено такі бозонні та ферміонні величини

$$\begin{pmatrix}\mathbf{G}_\tau{}^{0'}{}_m\\ \boldsymbol{\Delta}_\tau\\ -\mathbf{G}_{\tau 3m}\\ -\frac{1}{2}\mathbf{G}_{\tau kl}\end{pmatrix}=\Phi_L\begin{pmatrix}M_m{}^{n'}\\ L^{n'}\\ N_m{}^{n'}\\ K_{kl}{}^{n'}\end{pmatrix}\left[G_{\tau n'}-\tfrac{1}{\Phi_L^2}((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)G_{yn'}\right]$$
$$+\tfrac{1}{\Phi_L}\begin{pmatrix}m_m\\ l\\ n_m\\ k_{kl}\end{pmatrix}(G_y^2A_\tau-\Phi(G_\tau\cdot G_y)), \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_\tau{}^{a}=-i\Phi_L\mathsf{E}_\tau{}^{a},\quad \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\tau a}=-i\Phi_L\mathsf{E}_{\tau a},\quad \mathbf{w}_\tau=\frac{1}{2\Phi_L}(G_y^2A_\tau-\Phi(G_\tau\cdot G_y)), \tag{2.42}$$

а також

$$\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau a}{}^{\mu}=-\tfrac{1}{4}\Phi_L\mathsf{E}_{\tau a}\bar{u}_{(3)}{}^{\mu},\quad \boldsymbol{\omega}_{(3)\tau a}{}^{\mu}=\tfrac{1}{4}\Phi_L\mathsf{E}_{\tau a}\bar{u}_{(1)}{}^{\mu},$$
$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^{\mu a}=\tfrac{1}{4}\Phi_L\mathsf{E}_\tau{}^{a}u_{(3)}{}^{\mu},\quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau}{}^{\mu a}=-\tfrac{1}{4}\Phi_L\mathsf{E}_\tau{}^{a}u_{(1)}{}^{\mu}, \tag{2.43}$$

які входять до компоненти пари Лакса $\mathfrak{L}_{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}$ (2.45). Крім того варіація дії (2.36) за координатами сектора порушених суперсиметрій приводить до ще восьми ферміонних рівнянь

$$-\tfrac{d}{d\tau}\left\{\Phi_L\left[G_{\tau m'}-\tfrac{1}{\Phi_L^2}((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)G_{ym'}\right]\tfrac{\partial G_\tau{}^{m'}}{\partial\dot{\upsilon}_\mu}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{\Phi_L}(G_y^2A_\tau-\Phi(G_\tau\cdot G_y))\tfrac{\partial A_\tau}{\partial\dot{\upsilon}_\mu}\right\}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{\partial\Phi_L}\tfrac{\partial\Phi_L}{\partial\upsilon_\mu}+\tfrac{1}{\Phi_L}A_\tau\Big(A_\tau\Big(G_y\cdot\tfrac{\partial G_y}{\partial\upsilon_\mu}\Big)$$
$$\left.-(G_\tau\cdot G_y)\tfrac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_\mu}\right)+\Phi_L\left[G_{\tau m'}\tfrac{\partial G_\tau^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}-\tfrac{1}{2}\left(\mathsf{E}_{\tau a}\tfrac{\partial\mathsf{E}_\tau^a}{\partial\upsilon_\mu}+\mathsf{E}_\tau{}^{a}\tfrac{\partial\mathsf{E}_{\tau a}}{\partial\upsilon_\mu}\right)\right] \tag{2.44}$$
$$-\frac{1}{\Phi_L}\left[((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)\frac{\partial(G_\tau\cdot G_y)}{\partial\upsilon_\mu}+(G_y^2A_\tau-\Phi(G_\tau\cdot G_y))\frac{\partial A_\tau}{\partial\upsilon_\mu}\right]=0.$$

Рівняння (2.44) були представлені у стислому вигляді завдяки введеним величинам $\frac{\partial G_\tau{}^{m'}}{\partial\dot{\upsilon}_\mu}=(q^{m'\mu},\bar{q}^{m'\mu},s^{m'\mu},\bar{s}^{m'\mu})$ та $\frac{\partial A_\tau}{\partial\dot{\upsilon}_\mu}=(h^\mu,\bar{h}^\mu,p^\mu,\bar{p}^\mu)$, де $\upsilon_\mu=$

$(\theta_\mu,\,\bar\theta_\mu,\,\eta_\mu,\,\bar\eta_\mu)$. Також, враховуючи розклади (2.37) та (2.38), маємо

$$\begin{gathered}\frac{\partial G_\tau{}^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}=G_\tau{}^{0'n}\frac{\partial M_n{}^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}+G_\tau{}^{3n}\frac{\partial N_n{}^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}+\Delta_\tau\frac{\partial L^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}+G_\tau{}^{kl}\frac{\partial K_{kl}{}^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}\\ -\dot\theta_\nu\frac{\partial q^{m'\nu}}{\partial\upsilon_\mu}-\dot{\bar\theta}_\nu\frac{\partial\bar q^{m'\nu}}{\partial\upsilon_\mu}-\dot\eta_\nu\frac{\partial s^{m'\nu}}{\partial\upsilon_\mu}-\dot{\bar\eta}_\nu\frac{\partial\bar s^{m'\nu}}{\partial\upsilon_\mu},\\ -\frac{\partial\mathsf{E}_{\tau a}}{\partial\upsilon_\mu}=\omega_{(1)\tau\nu a}\frac{\partial u_{(1)}{}^\nu}{\partial\upsilon_\mu}+\omega_{(3)\tau\nu a}\frac{\partial u_{(3)}{}^\nu}{\partial\upsilon_\mu},\ -\frac{\partial\mathsf{E}_\tau{}^a}{\partial\upsilon_\mu}=\bar\omega_{(1)\tau\nu}{}^a\frac{\partial\bar u_{(1)}{}^\nu}{\partial\upsilon_\mu}+\bar\omega_{(3)\tau\nu}{}^a\frac{\partial\bar u_{(3)}{}^\nu}{\partial\upsilon_\mu}.\end{gathered}$$

$\frac{\partial A_\tau}{\partial\upsilon_\mu}$ і $\frac{\partial(G_\tau\cdot\,G_y)}{\partial\upsilon_\mu}$ означені аналогічно.

Як і у випадку $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки, рівняння суперчастинки в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі (2.39), (2.40) та (2.44) можна представити у вигляді рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}_{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}}{d\tau}+[\mathfrak{M},\mathfrak{L}_{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}]=0,$$

де компонента пари Лакса $\mathfrak{M}$ була означена в (2.29), а інша компонента дорівнює

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}=\mathfrak{L}_{so(2,3)}+\mathfrak{L}_{su(4)}+\mathfrak{L}_{24\mathrm{susy}}\in osp(4|6):\\ \mathfrak{L}_{so(2,3)}=2\mathbf{G}_\tau{}^{0'm}M_{0'm}+\boldsymbol{\Delta}_\tau D+2\mathbf{G}_\tau{}^{3m}M_{3m}+\mathbf{G}_\tau{}^{mn}M_{mn},\\ \mathfrak{L}_{su(4)}=\boldsymbol{\Omega}_\tau{}^aT_a+\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\tau a}T^a+4\mathbf{w}_\tau\widetilde V_a{}^a,\\ \mathfrak{L}_{24\mathrm{susy}}=\boldsymbol{\omega}_{(1)\tau a}{}^{\mu}Q_{(1)\mu}{}^a+\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^{\mu a}\bar Q_{(1)\mu a}+\boldsymbol{\omega}_{(3)\tau a}{}^{\mu}Q_{(3)\mu}{}^a+\bar{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau}{}^{\mu a}\bar Q_{(3)\mu a}\end{gathered}\tag{2.45}$$

(див. (2.27) та (2.28)). З урахуванням розкладів (2.37) та (2.38) її можна представити у формі диференційного оператора зі значенням в $osp(4|6)$ супералгебрі, застостованого до дії суперчастинки (2.36)

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}=\Big(M_{0'm}\frac{\partial}{\partial G_\tau{}^{0'}{}_m}+\tfrac12 D\frac{\partial}{\partial\Delta_\tau}-M_{mn}\frac{\partial}{\partial G_{\tau mn}}-M_{3m}\frac{\partial}{\partial G_{\tau 3m}}\\ +T_a\frac{\partial}{\partial\Omega_{\tau a}}+T^a\frac{\partial}{\partial\Omega_\tau{}^a}+\widetilde V_a{}^a\frac{\partial}{\partial\widetilde\Omega_{\tau b}{}^b}-\tfrac14 Q_{(1)\mu}{}^a\frac{\partial}{\partial\bar\omega_{(3)\tau\mu}^{\ a}}\\ +\tfrac14\bar Q_{(1)\mu a}\frac{\partial}{\partial\omega_{(3)\tau\mu a}}+\tfrac14 Q_{(3)\mu}{}^a\frac{\partial}{\partial\bar\omega_{(1)\tau\mu}^{\ a}}-\tfrac14\bar Q_{(3)\mu a}\frac{\partial}{\partial\omega_{(1)\tau\mu a}}\Big)S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sparticle}}\end{gathered}\tag{2.46}$$

Коли координати сектора порушених суперсиметрій дорівнюють нулю, (2.45) та (2.46) переходять у відповідні вирази (2.28) та (2.30) для компонентів пари Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки.

Доведення інтеґровності рівнянь безмасової суперчастинки в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі виноситься на захист.

При $\upsilon_\mu = 0$ рівняння $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперчастинки (2.39) та (2.40) переходять у бозонні та ферміонні рівняння $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперчастинки (2.25) та (2.26) відповідно. Рівняння ж (2.44) стають висновками з ферміонних рівнянь (2.26) [222].

2.3.3 Класична інтеґровність рівнянь $D0$-брани у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді

Як узагальнення результатів попереднього пункту, у цьому пункті буде доведено інтеґровність рівнянь $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді.

Дія $D0-$брани

$$S^{AdS_4 \times \mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}^{AdS_4 \times \mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}$$

дається інтегралом за її світовою лінією L від лагранжіана

$$\mathscr{L}^{AdS_4 \times \mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}} = -\tfrac{m}{\Phi_L}\sqrt{-\left(\mathcal{E}_{\tau m'}\mathcal{E}^{m'}_{\tau} - \mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_{\tau}{}^{a}\right)} + mA_{L\tau},$$

який представляє суму кінетичного члена та члена Весса-Зуміно. Останній визначається відображенням на світову лінію 1-форми потенціалу Рамона-Рамона $A_L(d)$, а m є зарядом $D0$-брани, який дорівнює її масі. Введенням допоміжної метрики на світовій лінії $e(\tau)$ можна виключити квадратний корінь із лагранжіана

$$\mathscr{L}^{AdS_4 \times \mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{e\Phi_L^2}\left(\mathcal{E}_{\tau m'}\mathcal{E}^{m'}_{\tau} - \mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_{\tau}{}^{a}\right) - em^2\right] + mA_{L\tau}. \tag{2.47}$$

Відзначимо довільність в означенні $e(\tau)$. Так її переозначенням можливо «поглинути» фактор Φ_L^2. Тоді в границі $m \to 0$ лагранжіан, що випливає, зводиться до лагранжіана безмасової суперчастинки. Метрика $e(\tau)$ також є множником Лагранжа для в'язі масової поверхні. Означення, прийняте в (2.47), приводить до звичайного масового члена у цій в'язі. Оскільки в'язь масової поверхні не використовується при доведенні інтеґровності динамічних рівнянь $D0$-брани, для спрощення подальшого аналізу зручно закріпити репараметризаційну симетрію дії умовою $e = \frac{1}{2}$.

Як і у випадку безмасової суперчастинки, розгляд в якості незалежних параметрів форм Картана, які відповідають генераторам $osp(4|6)$ супералгебри з власних підпросторів $\mathfrak{g}_{1,2,3}$ відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму, із диференціалами координат, заміненими їх варіаціями, приводить до набору 10 бозонних та 24 ферміонних рівнянь $D0$-брани. Підстановкою виразів (2.33) для $\mathcal{E}^{m'}(d)$ та (2.34) для $A_L(d)$ можна привести рівняння $D0$-брани до системи диференційних рівнянь першого порядку у звичайних похідних з коефіцієнтами, які представляють відображення $osp(4|6)$ форм Картана на її світову лінію

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}}{\delta G^{0'}{}_m(\delta)} &= \dot{\widetilde{\mathbf{G}}}_\tau{}^{0'm} + 2(G_\tau{}^m{}_n\widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'n} - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^m{}_n G_\tau{}^{0'}{}_n \\
&\quad + \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_\tau G_\tau{}^{3m} - \Delta_\tau\widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{3m}) \\
&\quad -2i\left(\omega_{(1)\tau a}\sigma^m\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau}{}^a - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}\sigma^m\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^a\right. \\
&\quad \left. + \omega_{(3)\tau a}\sigma^m\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau}{}^a - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}\sigma^m\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^a\right) = 0, \\
-\frac{1}{2}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}}{\delta\Delta(\delta)} &= \dot{\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}}_\tau + 2G_\tau{}^{0'}{}_m\widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{3m} - 2G_{\tau 3m}\widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'm} \\
&\quad -2\left(\omega_{(1)\tau a}{}^\mu\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau\mu}{}^a - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}{}^\mu\bar{\omega}_{(1)\tau\mu}{}^a\right. \\
&\quad \left. - \omega_{(3)\tau a}{}^\mu\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau\mu}{}^a + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^\mu\bar{\omega}_{(3)\tau\mu}{}^a\right) = 0, \\
-\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}}{\delta\Omega_a(\delta)} &= \dot{\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}}_\tau{}^a + i\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_\tau{}^b\left(\widetilde{\Omega}_{\tau b}{}^a + \delta^a_b\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^c\right) - 4i\widetilde{\mathbf{w}}_\tau\Omega_\tau{}^a \\
&\quad +4i\varepsilon^{abc}\left(\omega_{(1)\tau b}{}^\mu\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau\mu c} - \omega_{(3)\tau b}{}^\mu\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau\mu c}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

та

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\frac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}}{\delta\bar{\omega}_{(1)}{}^a_\mu(\delta)} &= \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau a}{}^\mu + \tfrac{1}{2}\left(G_\tau{}^{mn}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^\nu - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{mn}\omega_{(3)\tau a}{}^\nu\right)\sigma_{mn\nu}{}^\mu \\
&\quad + i\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\left(G_\tau{}^{3m}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau\nu a} - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{3m}\omega_{(3)\tau\nu a}\right) + i\tilde{\sigma}^{\mu\nu}_m\left(G_\tau{}^{0'm}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau\nu a}\right. \\
&\quad \left. - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'm}\omega_{(1)\tau\nu a}\right) + \Delta_\tau\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^\mu - \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_\tau\omega_{(1)\tau a}{}^\mu - i\left(\widetilde{\Omega}_{\tau a}{}^b - \delta^b_a\widetilde{\Omega}_{\tau c}{}^c\right)\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau b}{}^\mu \\
&\quad -2i\widetilde{\mathbf{w}}_\tau\omega_{(3)\tau a}{}^\mu - i\varepsilon_{abc}\left(\Omega_\tau{}^b\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau}{}^{\mu c} - \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_\tau{}^b\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^{\mu c}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{4}\tfrac{\delta S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\mathrm{brane}}}{\delta\bar\omega_{(3)}{}^a_\mu(\delta)} = \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau a}{}^{\mu} + \tfrac{1}{2}\Big(G_\tau{}^{mn}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}{}^{\nu} - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{mn}\omega_{(1)\tau a}{}^{\nu}\Big)\sigma_{mn\nu}{}^{\mu} \\
-i\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\Big(G_\tau{}^{3m}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau\nu a} - \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{3m}\omega_{(1)\tau\nu a}\Big) - i\tilde\sigma^{\mu\nu}_m\,\Big(G_\tau{}^{0'm}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau\nu a} \\
-\widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'm}\omega_{(3)\tau\nu a}\Big) + \Delta_\tau\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_\tau\omega_{(3)\tau a}{}^{\mu} - i\Big(\widetilde\Omega_{\tau a}{}^{b} - \delta^b_a\widetilde\Omega_{\tau c}{}^{c}\Big)\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau}{}^{\mu} \\
-2i\widetilde{\mathbf{w}}_\tau\omega_{(1)\tau a}{}^{\mu} - i\varepsilon_{abc}\Big(\Omega_\tau{}^{b}\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau}{}^{\mu c} - \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_\tau{}^{b}\bar\omega_{(3)\tau}{}^{\mu c}\Big) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

а також комплексно-спряжених рівнянь. У рівняннях (2.48), (2.49) та (2.50) було введено такі величини

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}_\tau{}^{0'}{}_m \\ \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_\tau \\ -\widetilde{\mathbf{G}}_{\tau 3m} \\ -\tfrac{1}{2}\widetilde{\mathbf{G}}_{\tau kl} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\Phi_L^2}\begin{pmatrix} M_m{}^{n'} \\ L^{n'} \\ N_m{}^{n'} \\ K_{kl}{}^{n'} \end{pmatrix}\Big\{G_{\tau n'} - \Big[\tfrac{1}{\Phi_L^2}((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)+\tfrac{m}{2}\Big]G_{yn'}\Big\} \\
+\tfrac{1}{\Phi_L^2}\begin{pmatrix} m_m \\ l \\ n_m \\ k_{kl} \end{pmatrix}\Big[\tfrac{1}{\Phi_L^2}(G_y^2A_\tau - \Phi(G_\tau\cdot G_y)) + \tfrac{m}{2}\Phi\Big],
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_\tau{}^{a} = -\tfrac{i}{\Phi_L^2}\mathsf{E}_\tau{}^{a}, \quad \bar{\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}}_{\tau a} = -\tfrac{i}{\Phi_L^2}\mathsf{E}_{\tau a}, \\
2\Phi_L^2\widetilde{\mathbf{w}}_\tau = \tfrac{1}{\Phi_L^2}(G_y^2A_\tau - \Phi(G_\tau\cdot G_y)) + \tfrac{m}{2}\Phi
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

та

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}{}^{\mu} = -\tfrac{1}{4\Phi_L^2}\mathsf{E}_{\tau a}\bar u_{(3)}{}^{\mu}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^{\mu} = \tfrac{1}{4\Phi_L^2}\mathsf{E}_{\tau a}\bar u_{(1)}{}^{\mu}, \\
\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau}{}^{\mu a} = \tfrac{1}{4\Phi_L^2}\mathsf{E}_\tau{}^{a}u_{(3)}{}^{\mu}, \quad \bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau}{}^{\mu a} = -\tfrac{1}{4\Phi_L^2}\mathsf{E}_\tau{}^{a}u_{(1)}{}^{\mu}.
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Порівняно з моделлю безмасової $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперчастинки ці величини враховують внесок члена Весса-Зуміно та загальний фактор Φ_L^{-2} у кінетичному члені. Нарешті наявні 8 рівнянь, які відповідають варіації координат сектора порушених суперсиметрій

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{d}{d\tau}\Big\{\tfrac{1}{\Phi_L^2}\Big[G_{\tau m'} + \Big[\tfrac{m}{2} - \tfrac{1}{\Phi_L^2}((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)\Big]G_{ym'}\Big]\tfrac{\partial G_\tau{}^{m'}}{\partial\dot\upsilon_\mu} \\
+\tfrac{1}{\Phi_L^2}\Big[\tfrac{m}{2}\Phi + \tfrac{1}{\Phi_L^2}(G_y^2A_\tau - \Phi(G_\tau\cdot G_y))\Big]\tfrac{\partial A_\tau}{\partial\dot\upsilon_\mu}\Big\} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\mathrm{brane}}}{\partial\Phi_L}\tfrac{\partial\Phi_L}{\partial\upsilon_\mu} \\
+\tfrac{1}{\Phi_L^4}A_\tau\Big[A_\tau(G_y\cdot\tfrac{\partial G_y}{\partial\upsilon_\mu}) + (\tfrac{m}{2}\Phi_L^2 - (G_\tau\cdot G_y))\tfrac{\partial\Phi}{\partial\upsilon_\mu}\Big] + \tfrac{1}{\Phi_L^2}\Big\{G_{\tau m'}\tfrac{\partial G_\tau{}^{m'}}{\partial\upsilon_\mu}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathsf{E}_{\tau a}\frac{\partial \mathsf{E}_{\tau}{}^{a}}{\partial \upsilon_{\mu}}+\mathsf{E}_{\tau}{}^{a}\frac{\partial \mathsf{E}_{\tau a}}{\partial \upsilon_{\mu}}\right)+\left[\frac{m}{2}-\frac{1}{\Phi_L^2}((G_\tau\cdot G_y)+\Phi A_\tau)\right]\frac{\partial(G_\tau\cdot G_y)}{\partial \upsilon_\mu}$$
$$+\left[\frac{m}{2}\Phi+\frac{1}{\Phi_L^2}(G_y^2A_\tau-\Phi(G_\tau\cdot G_y))\right]\frac{\partial A_\tau}{\partial \upsilon_\mu}\Big\}=0.$$

Для рівнянь (2.48), (2.49), (2.50) та (2.54) нами було здобуто представлення у формі рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}}{d\tau}+[\mathfrak{M},\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}]=0.$$

Компонента пари Лакса $\mathfrak{M}$ є такою ж як і в (2.29), а компонента $\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}$ дається сумою

$$\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}=\widetilde{\mathfrak{L}}_{so(2,3)}+\widetilde{\mathfrak{L}}_{su(4)}+\widetilde{\mathfrak{L}}_{24\text{susy}}\in osp(4|6),$$

де кожний доданок є лінійною комбінацією величин, введених в (2.51)-(2.53)

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_{so(2,3)}=2\widetilde{\mathbf{G}}_{\tau}{}^{0'm}M_{0'm}+\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_\tau D+2\widetilde{\mathbf{G}}_{\tau}{}^{3m}M_{3m}+\widetilde{\mathbf{G}}_{\tau}{}^{mn}M_{mn},$$
$$\widetilde{\mathfrak{L}}_{su(4)}=\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\tau}{}^{a}T_a+\bar{\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}}_{\tau a}T^a+4\widetilde{\mathbf{w}}_\tau\widetilde{V}_a{}^a,$$
$$\widetilde{\mathfrak{L}}_{24\text{susy}}=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(1)\tau a}{}^{\mu}Q_{(1)\mu}{}^{a}+\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(1)\tau}{}^{\mu a}\bar{Q}_{(1)\mu a}+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(3)\tau a}{}^{\mu}Q_{(3)\mu}{}^{a}+\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{(3)\tau}{}^{\mu a}\bar{Q}_{(3)\mu a}.$$

$\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}$ має таку ж форму як і для безмасової $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперчастинки з точністю до означення коефіцієнтів (2.51)-(2.53). Подібно до випадку суперчастинки компоненту пари Лакса $\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}$ можна представити у вигляді диференційного оператора, який набуває значення в $osp(4|6)$ супералгебрі та застосовується до дії $D0-$брани

$$\mathfrak{L}_{D0-\text{brane}}=\Big(M_{0'm}\frac{\partial}{\partial G_{\tau}{}^{0'}{}_{m}}+\frac{1}{2}D\frac{\partial}{\partial\Delta_\tau}-M_{mn}\frac{\partial}{\partial G_{\tau mn}}-M_{3m}\frac{\partial}{\partial G_{\tau 3m}}$$
$$+T_a\frac{\partial}{\partial\Omega_{\tau a}}+T^a\frac{\partial}{\partial\Omega_{\tau}{}^{a}}+\widetilde{V}_a{}^a\frac{\partial}{\partial\widetilde{\Omega}_{\tau b}{}^{b}}-\frac{1}{4}Q_{(1)\mu}{}^{a}\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}_{(3)\tau\mu}{}^{a}}$$
$$+\frac{1}{4}\bar{Q}_{(1)\mu a}\frac{\partial}{\partial\omega_{(3)\tau\mu a}}+\frac{1}{4}Q_{(3)\mu}{}^{a}\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}_{(1)\tau\mu}{}^{a}}-\frac{1}{4}\bar{Q}_{(3)\mu a}\frac{\partial}{\partial\omega_{(1)\tau\mu a}}\Big)S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}.$$

Доведення інтеґровності рівнянь $D0$-брани в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді виноситься на захист.

2.4 Основні результати розділу

На завершення розіду підсумуємо результати, які було здобуто вперше та які виносяться на захист:

- запропоновано умову Калуци-Клейна, яка спрощує подвійну розмірну редукцію $AdS_4 \times S^7$ супермембрани та лагранжіан $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни, що одержується в результаті. Для розглянутих в літературі елементів $OSp(4|8)/(SO(1,3) \times SO(7))$ суперсиметричного фактор-простору умова Калуци-Клейна накладає обмеження на координати сектора порушених $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ бекграундом суперсиметрій. Запропоновано параметризацію цього сектора чотирма $SL(2, \mathbb{R})$ спінорними координатами, які задовольняють (анти-)майоранівські умови. Показано, що у такій параметризації умову Калуци-Клейна можна задовольнити у $SL(2, \mathbb{R})$-коваріантний спосіб. Здобуто відповідні вирази для 1-форм суперфільбайна суперпросторів $AdS_4 \times S^7$ та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$;

- здобуто лагранжіан та рівняння $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни у частковому калібруванні κ-симетрії, в якому у секторі порушених суперсиметрій залишається одна майоранівська спінорна координата. Вона є параметром для генераторів порушених суперсиметрій Пуанкаре. Для рівнянь суперструни знайдено представлення нульової кривизни. До нього входить листкова 1-форма, яка розширює зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі лінійними та квадратичними членами за цією координатою та її диференціалом;

- рівняння безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі представлено у формі рівняння Лакса і встановлено зв'язок між компонентами пари Лакса та зв'язністю Лакса σ-моделі. Доведено інтеґровність рівнянь моделей безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді.

Розділ 3
Класичні та квантові симетрії (супер)твісторних формулювань моделей релятивістських струн у (супер)просторах Мінковського

3.1 Вступ

У підрозділі 3.2 розглядаються твісторні формулювання бозонних струн та $\mathcal{N}=1,2$ суперструн у пласкому $D=4$ (супер)просторі [223], [224]. Вони будуть виведені із класично еквівалентних представлень [66], [74] лагранжіана Полякова для бозонної струни [225], [226], [227] та лагранжіана Гріна-Шварца для суперструн [56] й включають спінорні лоренц-гармонічні змінні [67], [68], [66]. У (супер)твісторному формулюванні лагранжіани (су-пер)струн виражаються в термінах компонентів (супер)твісторів Пенроуза-Фербера. На відміну від супертвісторних формулювань моделей безмасової суперчастинки [169] та безнатягової суперструни [106] дія суперструни з ненульовим натягом у супертвісторному формулюванні є інваріантною відносно κ-симетрії. Це свідчить про те, що у ферміонному секторі суперструн залишаються суто калібрувальні ступені свободи після переходу до супертвісторного формулювання.

Також у цьому підрозділі будуть введені редуковані супертвісторні моделі, які узагальнюють на випадок суперструн з натягом твісторні формулювання безмасової суперчастинки та безнатягової суперструни. Лагранжіани редукованих супертвісторних моделей є квадратичними за компонентами (супер)твісторів. Лагранжіан редукованої моделі, яка відповідає $\mathcal{N}=1$ суперструні, можна здобути підстановкою до лагранжіана Весса-Зуміно

$\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні рівнянь вкладення світового листка [28], [33]. Закріплення калібрування κ-симетрії у моделі $\mathcal{N} = 2$ суперструни приводить до іншої редукованої супертвісторної моделі, яка представляє розширення редукованої моделі для $\mathcal{N} = 1$ суперструни та твісторного формулювання бозонної струни. Тому в останньому пункті 3.2.3 буде проводено аналіз редукованої моделі, яка відповідає $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонової системи з в'язями згідно з процедурою Дірака [228]. Будуть встановлені усі первинні та вторинні в'язі та проведено їх розподіл на в'язі першого та другого роду.

У підрозділі 3.3 представлено формулювання [229] $\mathcal{N} = 1$ суперструн у пласких $D = 6$ та $D = 10$ суперпросторах у термінах супертвісторних змінних, які узагальнюють супертвістори Фербера. Будуть виведені в'язі на компоненти цих супертвісторів з вимоги їх відповідності координатам $D = 6, 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперпросторів. Подібно до випадку $D = 4$ суперструн будть введені редуковані моделі з лагранжіанами квадратичними за компонентами супертвісторів.

У наступному підрозділі 3.4 модель $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні буде вивчено в рамках канонічного підходу як динамічну систему з в'язями [230]. Будуть здобуті вирази для усіх первинних та вторинних в'язей у термінах компонентів супертвісторів та проведено їх розподіл на лоренц-коваріантні та незвідні набори в'язей першого та другого роду. Далі будуть введені дужки Дірака, які враховують в'язі другого роду, та досліджено деформацію алгебри в'язей першого роду при переході від дужок Пуассона до дужок Дірака. При цьому роль параметра деформації відіграє обернений натяг струни.

Представляє інтерес порівняння супертвісторних формулювань суперструн, розглянутих у попередніх підрозділах, з відомою моделлю твісторної струни Берковіца [231] та її симетріями. Відтак в останньому підрозділі 3.5 будуть досліджені глобальні симетрії лагранжіанів, які описують динаміку ліво(право)-біжних супертвісторних змінних у моделі твісторної струни Берковіца та її узагальненні на випадок супертвісторів, на компоненти яких не накладено в'язей [232]. Буде показано, що на класичному рівні ці симетрії є нескінченновимірними узагальненнями $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперконформної симетрії. Буде встановлено, що розклади добутків компонентів оператора тензора енергії-імпульсу, який відповідає інваріантності цих лагранжіанів відносно листкової конформної симетрії, та квантових генераторів знайдених високоспінових симетрій включають аномальні члени. Тому на квантовому рівні ці нескінченновимірні симетрії порушуються до скінченновимірної $(P)SL(4|4,\mathbb{R})$ симетрії.

3.2 Твісторні формулювання моделей бозонної струни та суперструн у $D = 4$ (супер)просторі Мінковського в лагранжівому та гамільтоновому підходах

З початкового етапу розвитку теорії твісторів [75], [167], [77], формулювання моделей релятивістських точкових частинок у термінах твісторів та супертвісторів привертають увагу з огляду на взаємозв'язок між твісторною геометрією та реалізаціями спінових ступенів свободи (див. роботи [168], [76], [169], [233], [234], [235], [236], [237], [238], [239], [240], [241], [242], [243]). Однією з найбільш привабливих властивостей твісторних формулювань моделей суперсиметричних частинок, яку вперше було виявлено в роботі [169], є незалежність лагранжіана від частини грассманових координат суперпростору. Саме ці координати перетворюються як суто калібрувальні величини під дією κ-симетрії. Перехід до супертвісторних змінних дозволяє виключити їх без порушення лоренцевої симетрії на відміну, наприклад, від калібрування світлового конуса.

Твісторні формулювання моделей протяжних об'єктів з нульовим натягом у $D = 4$ (супер)просторах розглядались у роботах [244], [245], [105],

[246], [106]. Перші спроби переформулювання в термінах твісторів рівнянь та в'язей бозонної струни з натягом були здійснені в роботах [247], [248] та [249].

У нашій роботі [223] було запропоновано лагранжеві формулювання в термінах (супер)твісторів Пенроуза-Фербера моделей бозонної струни та суперструн з $\mathcal{N} = 1$ та $\mathcal{N} = 2$ суперсиметріями у чотиривимірному просторі. Для їх побудови було взято за основу класично еквівалентні лоренц-гармонічні формулювання [66], [74] лагранжіанів бозонної струни і суперструн та використано той факт, що у чотиривимірному просторі спінорні лоренцеві гармоніки співпадають з нормованою діадою Ньюмена-Пенроуза [250]. Відзначимо, що розглядались й інші твісторні формулювання бозонної струни [251] та суперструн [252] з ненульовим натягом у чотиривимірному просторі.

Оскільки моделі масивних (супер)частинок та (супер)струн з натягом включають розмірні параметри, характерною особливістю (супер)твісторних формулювань їх лагранжіанів є присутність твісторної реалізації метричних тензорів у просторах двокомпонентних $SL(2, \mathbb{C})$ спінорів. Вони явно порушують просторово-часову (супер)конформну симетрію й називаються твісторами нескінченності [167], [77].

Інший клас суперсиметричних моделей струн у твісторному просторі складають моделі твісторних струн. Вперше такі моделі були запропоновані в роботах [180], [231], [253]. Твісторні струни з самого початку формулюються у супертвісторному просторі, не містять розмірних параметрів й відтак інваріантні відносно суперконформної симетрії за означенням. Зв'язок твісторних струн з твісторними формулюваннями безнатягових струн досліджувався в роботі [106].

У наступному пункті розглядається твісторне формулювання лагранжіана бозонної струни, яке потім узагальнюється на випадок $D = 4\, \mathcal{N} = 1$ суперструни. Лагранжіан суперструни у супертвісторному формулюванні наслідує нелінійності суперпросторового формулювання та містить суто калібрувальні грассманові змінні на відміну від супертвісторних формулювань моделей безмасових суперчастинок та безнатягових суперструн. Як їх узагальнення будуть запропоновані редуковані супертвісторні моделі, лагранжіани яких є квадратичними за компонентами (супер)твісторів. Також буде встановлено зв'язок редукованих моделей із суперструнами у супертвісторному формулюванні. Буде показано, що редуковані супертвісторні моделі, які відповідають $\mathcal{N} = 1$ суперструні, та модель бозонної струни у твісторному формулюванні є частинними випадками редукованої моделі для $\mathcal{N} = 2$ суперструни. В останньому пункті цю модель буде досліджено як гамільтонову систему з в'язями. Слідуючи методу Дірака [228], будуть встановлені всі в'язі моделі та розділені на лоренц-коваріантні і незвідні в'язі першого роду, які генерують калібрувальні симетрії дії, та в'язі другого роду.

3.2.1 Твісторне формулювання бозонної струни

У запропоноваму нами твісторному формулюванні бозонної струни основними динамічними змінними є пара твісторів Пенроуза

$$Z^{\boldsymbol{\alpha}} = (\mu^{\alpha},\ \bar{u}_{\dot{\alpha}}), \quad W^{\boldsymbol{\alpha}} = (\nu^{\alpha},\ \bar{v}_{\dot{\alpha}}), \quad \boldsymbol{\alpha} = 1, ..., 4;\ \alpha, \dot{\alpha} = 0, 1. \tag{3.1}$$

μ^{α} та ν^{α} представляють їх головні спінорні частини, а $\bar{u}_{\dot{\alpha}}$ і $\bar{v}_{\dot{\alpha}}$ є проєкційними частинами. Дуальні твістори мають такі складові

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} = (u_{\alpha},\ \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}), \quad \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} = (v_{\alpha},\ \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}).$$

Кожен твістор та дуальний твістор мають комплексні компоненти та за означенням реалізують (анти)фундаментальне представлення групи $SU(2,2)$ локально ізоморфної конформній групі чотиривимірного простору-часу Мінковського. При цьому припускається, що проєкційні частини твісторів утворюють нормовану діаду Ньюмена-Пенроуза

$$u^{\alpha} v_{\alpha} = 1, \quad \bar{u}^{\dot{\alpha}} \bar{v}_{\dot{\alpha}} = 1. \tag{3.2}$$

З умов (3.2) випливає, що 2×2 матриці

$$v^{\alpha}_{(\alpha)} = (u^{\alpha}, v^{\alpha}), \quad \bar{v}^{\dot{\alpha}}_{(\dot{\alpha})} = (\bar{u}^{\dot{\alpha}}, \bar{v}^{\dot{\alpha}}) \tag{3.3}$$

мають 6 дійсних незалежних компонентів і набувають значень у групі $SL(2,\mathbb{C})$. Відтак пара твісторів (3.1) має 14 незалежних компонентів. У твісторній формі умови нормування (3.2)

$$W^{\boldsymbol{\alpha}} I_{\boldsymbol{\alpha\beta}} Z^{\boldsymbol{\beta}} = 1, \quad \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} I^{\boldsymbol{\alpha\beta}} \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}} = 1 \tag{3.4}$$

включають твістори нескінченності

$$I_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad I^{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

які є виродженими матрицями та явно порушують конформну симетрію.

Для того, аби зіставити компонентам твісторів координати точок $D = 4$ простору-часу Мінковського, на них необхідно накласти 2 дійсні умови нульової норми

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}} = u_{\alpha}\mu^{\alpha} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} W^{\boldsymbol{\alpha}} = v_{\alpha}\nu^{\alpha} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}\bar{v}_{\dot{\alpha}} = 0 \tag{3.5}$$

та 2 дійсні умови ортогональності

$$\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}} = v_{\alpha}\mu^{\alpha} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}})^{\dagger} = \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} W^{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \tag{3.6}$$

Умови (3.5) та (3.6) зводять число незалежних компонентів твісторів (3.1) до десяти. Стільки ж незалежних компонентів мають у сумі просторово-часові координати $x^{\dot{\alpha}\alpha} = x^m \tilde{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_m$ та нормована діада (3.3). Розв'язком умов (3.5) та (3.6) є вирази для головних спінорних частин твісторів та дуальних твісторів як проєкцій просторово-часових координат на компоненти діади

$$\mu^{\alpha} = i\bar{u}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha}, \quad \nu^{\alpha} = i\bar{v}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha}, \tag{3.7}$$

$$\bar{\mu}^{\dot{\alpha}} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha} u_{\alpha}, \quad \bar{\nu}^{\dot{\alpha}} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha} v_{\alpha}. \tag{3.8}$$

Вирази (3.7) і (3.8) є прикладами співвідношень, які пов'язують компоненти твісторів з просторово-часовими координатами і в теорії твісторів мають назву *співвідношень інцидентності*.

В основі твісторного формулювання $D = 4$ бозонної струни, запропонованого в нашій роботі [223], лежить дія струни [66], [74], яка включає дотичні до світового листка компоненти локального ортонормованого репера Картана [32]. Як зазначалось у вступі вони представляють стовпці матриці векторних лоренцевих гармонік [71] й можуть бути реалізовані через добутки компонентів діади Ньюмена-Пенроуза [250]. В роботі [66] було введено таку дію для $D = 4$ струни

$$\begin{gathered} S^{D=4}_{\text{string}} = \int\limits_{\Sigma} L^{D=4}_{\text{string}}(\xi), \\ L^{D=4}_{\text{string}}(\xi) = \tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}} \left[e^{[+2]} \wedge (\bar{u}^{-} dx u^{-}) - e^{[-2]} \wedge (\bar{v}^{+} dx v^{+}) \right] + \tfrac{c}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Вона переходить до дії Полякова [225], [226], [227] після виключення компонентів діади

$$S^{D=4}_{\text{Pstring}} = -\tfrac{1}{2c\alpha'} \int\limits_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu x^m \partial_\nu x_m. \tag{3.10}$$

Лагранжіан (3.9) містить компоненти 1-форми цвайбайна $e^{[\pm 2]} = d\xi^\mu e^{[\pm 2]}_\mu$, де $\xi^\mu = (\tau, \sigma)$ – локальні листкові координати, а $e = \frac{1}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}$ – детермінант цвайбайна. Ваги компонентів цвайбайна та діади відносно $SO(1,1)$ групи локальної симетрії, яка діє у дотичному просторі до світового листка, наведено у вигляді їх верхніх індексів. Компоненти діади та компоненти локального репера, ортогональні до світового листка, перетворюються під дією локальної групи $SO(2) = U(1)$, однак їх ваги явно не вказуються. α' є нахилом траєкторій Редже, c – числовий коефіцієнт, тому натяг струни дорівнює $T = \frac{1}{2c\alpha'}$.

Для переходу до твісторного формулювання виразимо в термінах твісторів проєкції диференціалів полів просторово-часових координат на дотичні до світового листка струни компоненти локального репера

$$
\begin{aligned}
-\bar{u}^{-}dxu^{-} &= \tfrac{i}{2}\omega_Z^{[-2]}(d) = \tfrac{i}{2}(\bar{Z}^{-}dZ^{-} - d\bar{Z}^{-}Z^{-}),\\
-\bar{v}^{+}dxv^{+} &= \tfrac{i}{2}\omega_W^{[+2]}(d) = \tfrac{i}{2}(\bar{W}^{+}dW^{+} - d\bar{W}^{+}W^{+}).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Тоді дія струни набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
S^{D=4}_{\text{string, tw}} &= \int\limits_{\Sigma} L(\xi),\\
L^{D=4}_{\text{string, tw}}(\xi) &= \tfrac{-i}{4(\alpha')^{1/2}}\Big[e^{[+2]}\wedge\omega_Z^{[-2]}(d) - e^{[-2]}\wedge\omega_W^{[+2]}(d)\Big] + \tfrac{c}{2}e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Відзначимо, що вона інваріантна відносно глобальної $SU(2,2)$ симетрії, яка, однак, порушується в'язями (3.4). Твісторне формулювання бозонної струни (3.12) включено до результатів, які виносяться на захист.

Для того, аби здобути рівняння руху, які випливають з дії (3.12), необхідно врахувати в'язі для твісторів (3.5), (3.6) та (3.4). Їх можна додати до дії (3.12) з множниками Лагранжа або застосувати метод допустимих варіацій. Його детальне обговорення на прикладі лоренц-гармонічних формулювань моделей бозонної струни та суперструн наведено в роботі [74]. Допустимі варіації твісторів було знайдено у нашій роботі [223]

$$
\begin{aligned}
\delta Z^{\boldsymbol{\alpha}-} &= \omega(\delta)Z^{\boldsymbol{\alpha}-} + \tilde{\omega}^{[-2]}(\delta)W^{\boldsymbol{\alpha}+} + \tfrac{1}{2}\omega_{\bar{W}Z}(\delta)I^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\beta}} - \tfrac{1}{2}\omega_Z^{[-2]}(\delta)I^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\beta}},\\
\delta W^{\boldsymbol{\alpha}+} &= \Omega^{[+2]}(\delta)Z^{\boldsymbol{\alpha}-} - \omega(\delta)W^{\boldsymbol{\alpha}+} + \tfrac{1}{2}\omega_W^{[+2]}(\delta)I^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\beta}} - \tfrac{1}{2}\omega_{\bar{Z}W}(\delta)I^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\beta}},\\
\delta\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\omega}(\delta)\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{\tilde{\omega}}^{[-2]}(\delta)\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} - \tfrac{1}{2}\omega_{\bar{Z}W}(\delta)I_{\boldsymbol{\alpha\beta}}Z^{\boldsymbol{\beta}-} + \tfrac{1}{2}\omega_Z^{[-2]}(\delta)I_{\boldsymbol{\alpha\beta}}W^{\boldsymbol{\beta}+},\\
\delta\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\Omega}^{[+2]}(\delta)\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{\omega}(\delta)\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} - \tfrac{1}{2}\omega_W^{[+2]}(\delta)I_{\boldsymbol{\alpha\beta}}Z^{\boldsymbol{\beta}-} + \tfrac{1}{2}\omega_{\bar{W}Z}(\delta)I_{\boldsymbol{\alpha\beta}}W^{\boldsymbol{\beta}+}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Перші два члени у кожному рядку містять спінові коефіцієнти [250], в яких замість диференціалів було підставлено варіації

$$
\omega(\delta) = -\tfrac{1}{2}(\delta Z^{-}IW^{+} + \delta W^{+}IZ^{-}) = \tfrac{1}{2}(\delta\bar{u}^{\dot{\alpha}-}\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} + \delta\bar{v}^{\dot{\alpha}+}\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}}),
\tag{3.14}
$$

$$
\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta) = \delta Z^{-}IZ^{-} = \bar{u}^{\dot{\alpha}-}\delta\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}},\;\; \Omega^{[+2]}(\delta) = -\delta W^{+}IW^{+} = \delta\bar{v}^{\dot{\alpha}+}\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}}.
\tag{3.15}
$$

Ці члени в (3.13) походять із варіації компонентів діади й входять як до варіацій проєкційних частин твісторів, так і головних спінорних частин через співвідношення інцидентності (3.7) та (3.8). У методі ортонормованого репера [32] спінові коефіцієнти інтерпретуються як дериваційні коефіцієнти локального репера та дорівнюють 1-формам Картана, які відповідають генераторам $so(1,3)$ алгебри і побудовані з векторів репера та їх диференціалів [28], [33]. Два останні члени у кожному рядку в (3.13) походять від варіацій просторово-часових координат у головних спінорних частинах твісторів. Вони містять варіаційні параметри

$$\omega_Z^{[-2]}(\delta) = (\bar{Z}^-\delta Z^- - \delta\bar{Z}^-Z^-) = 2i\bar{u}^-\delta x u^-, \tag{3.16}$$

$$\omega_W^{[+2]}(\delta) = (\bar{W}^+\delta W^+ - \delta\bar{W}^+W^+) = 2i\bar{v}^+\delta x v^+, \tag{3.17}$$

$$\omega_{\bar{W}Z}(\delta) = (\bar{W}^+\delta Z^- - \delta\bar{W}^+Z^-) = 2i\bar{u}^-\delta x v^+,\ \omega_{\bar{Z}W}(\delta) = -(\omega_{\bar{W}Z}(\delta))^\dagger, \tag{3.18}$$

вирази для яких можна здобути із застосуванням співвідношень повноти для нормованої діади (3.2)

$$u^{\alpha-}v^+_\beta - u^-_\beta v^{\alpha+} = \delta^\alpha_\beta, \quad \bar{u}^{\dot\alpha-}\bar{v}^+_{\dot\beta} - \bar{u}^-_{\dot\beta}\bar{v}^{\dot\alpha+} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}. \tag{3.19}$$

Варіаційні параметри (3.14)-(3.18) відповідають, як було показано в [223], 10 диференційним операторам першого порядку, які задовольняють комутаційні співвідношення $D=4$ алгебри Пуанкаре $iso(1,3)$. Наявність лише 10 неазалежних варіаційних параметрів пов'язана з тим, що твісторні в'язі (3.4) інваріантні лише відносно підгрупи Пуанкаре $SU(2,2)$ симетрії.

Підстановка здобутих варіацій твісторів (3.13) до варіації дії (3.12) приводить до набору з 10 рівнянь струни

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta\omega} = e^{[+2]}\wedge\omega_Z^{[-2]}(d) + e^{[-2]}\wedge\omega_W^{[+2]}(d) = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta\tilde{\omega}^{[-2]}} = e^{[+2]}\wedge\omega_{\bar{Z}W}(d) = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta\Omega^{[+2]}} = e^{[-2]}\wedge\omega_{\bar{W}Z}(d) = 0, \tag{3.22}$$

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta\omega_Z^{[-2]}} = de^{[+2]} + e^{[+2]}\wedge(\omega+\bar{\omega})(d) = 0, \tag{3.23}$$

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta \omega^{[+2]}_{W}} = de^{[-2]} - e^{[-2]} \wedge (\omega + \bar{\omega})(d) = 0, \tag{3.24}$$

$$\frac{\delta S^{D=4}_{\text{string, tw}}}{\delta \omega_{\bar{Z}W}} = e^{[+2]} \wedge \tilde{\omega}^{[-2]}(d) - e^{[-2]} \wedge \bar{\Omega}^{[+2]}(d) = 0. \tag{3.25}$$

Зазначимо, що рівняння (3.20)-(3.22) і (3.25) є комплексними та мають бути доповнені спряженими до них. До наведеного набору рівнянь необхідно додати рівняння, які визначають 1-форму індукованого цвайбайна

$$e^{[-2]} = \tfrac{-i}{2c(\alpha')^{1/2}} \omega^{[-2]}_{Z}(d), \quad e^{[+2]} = \tfrac{-i}{2c(\alpha')^{1/2}} \omega^{[+2]}_{W}(d). \tag{3.26}$$

З'ясуємо, які з наведених вище рівнянь є незалежними. З (3.26) випливає, що рівняння (3.20) перетворюється на тотожність у відповідності з $SO(1,1) \times SO(2)$ калібрувальною інваріантністю дії (3.12) (див. також [66], [74]). З рівнянь (3.21) і (3.22) та комплексно-спряжених до них здобуваємо, що

$$\omega_{\bar{W}Z}(d) = \omega_{\bar{Z}W}(d) = 0. \tag{3.27}$$

Рівняння (3.26) та (3.27) є твісторною формою рівнянь, які у методі ортонормованого репера закріплюють його орієнтацію відносно світового листка струни [28], [33]. Рівняння (3.23) і (3.24) є умовами нульового скруту для індукованого цвайбайна й задовольняються тотожно з використанням (3.26) та (3.27). Нарешті рівняння (3.25) разом з єдиним нетривіальним співвідношенням, яке випливає з умов інтеґровності виразів для диференціалів твісторів (3.13)

$$e^{[+2]} \wedge \tilde{\omega}^{[-2]}(d) + e^{[-2]} \wedge \bar{\Omega}^{[+2]}(d) = 0,$$

приводять до рівнянь

$$e^{[+2]} \wedge \tilde{\omega}^{[-2]}(d) = e^{[-2]} \wedge \bar{\Omega}^{[+2]}(d) = 0$$

та комплексно-спряжених до них. Ці рівняння є умовами мінімального вкладення світового листка струни, інше еквівалентне представлення для яких було знайдено в роботі [33].

Тож нами було показано, що у твісторному формулюванні відтворюються рівняння, які визначають мінімальне вкладення світового листка струни у методі ортонормованого репера.

3.2.2 Супертвісторні формулювання $D = 4$ суперструн

Перейдемо до розгляду твісторного формулювання для $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни. Основними динамічними змінними є $SU(2,2|1)$ супертвістори та дуальні супертвістори

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} = (\mu^{\alpha}, \bar{u}_{\dot{\alpha}}, \bar{\eta}), \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}} = (u_{\alpha}, \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}, \eta); \quad \mathcal{W}^{\mathcal{A}} = (\nu^{\alpha}, \bar{v}_{\dot{\alpha}}, \bar{\zeta}), \quad \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}} = (v_{\alpha}, \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}, \zeta)$$

які задовольняють суперсиметричні узагальнення умов нульової норми та ортогональності

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} &= u_{\alpha}\mu^{\alpha} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}} + \eta\bar{\eta} = 0, \ \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}} = v_{\alpha}\nu^{\alpha} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}\bar{v}_{\dot{\alpha}} + \zeta\bar{\zeta} = 0, \\ \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} &= v_{\alpha}\mu^{\alpha} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}} + \zeta\bar{\eta} = 0, \ \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}} = u_{\alpha}\nu^{\alpha} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}\bar{v}_{\dot{\alpha}} + \eta\bar{\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ці умови забезпечують рівність числа незалежних компонентів двох супертвісторів сумі числа координат $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору Мінковського ($x_{\alpha\dot{\alpha}}$, θ^{α}, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$) та числа компонентів нормованої діади Ньюмена-Пенроуза (3.3). Справді, кожен супертвістор має чотири комплексні бозонні компоненти, на які накладено чотири дійсні бозонні умови (3.28) та дві дійсні умови нормування діади (3.2). Тому число незалежних бозонних компонентів двох супертвісторів дорівнює сумі числа просторово-часових координат та числа компонентів нормованої діади Ньюмена-Пенроуза. Також кожен супертвістор має комплексну грассманово-непарну компоненту, відтак пара супертвісторів має стільки ж грассманово-непарних ступенів свободи як і антикомутуючі координати $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору. Умови (3.28) можна явно розв'язати та виразити головні спінорні частини і грассманово-непарні компоненти супертвісторів в термінах суперпросторових координат. Розв'язок

$$\begin{array}{c} \mu^{\alpha} = i\bar{u}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} + \theta^{\alpha}\bar{\eta},\ \bar{\mu}^{\dot{\alpha}} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha}u_{\alpha} + \eta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\ \bar{\eta} = 2\bar{u}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\ \eta = 2u^{\alpha}\theta_{\alpha}; \\ \nu^{\alpha} = i\bar{v}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} + \theta^{\alpha}\bar{\zeta},\ \bar{\nu}^{\dot{\alpha}} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha}v_{\alpha} + \zeta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\ \bar{\zeta} = 2\bar{v}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\ \zeta = 2v^{\alpha}\theta_{\alpha} \end{array} \tag{3.29}$$

представляє суперсиметричне узагальнення співвідношень інцидентності (3.7) та (3.8).

Дія $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у лоренц-гармонічному формулюванні [66] дається сумою кінетичного члена та члена Весса-Зуміно

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring}} = S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{kin}} + S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{WZ}}. \tag{3.30}$$

Кінетичний член є суперсиметричним узагальненням дії бозонної струни у лоренц-гармонічному формулюванні (3.9) та включає суперсиметричні 1-форми Картана $\omega_{\alpha\dot{\alpha}}(d) = dx_{\alpha\dot{\alpha}} + 2id\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - 2i\theta_{\alpha}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{kin}} = \int\limits_{\Sigma}\Big(\tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}}\Big[e^{[+2]}\wedge(\bar{u}^{-}\omega(d)u^{-}) - e^{[-2]}\wedge(\bar{v}^{+}\omega(d)v^{+})\Big] + \tfrac{c}{2}e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}\Big)\,.$$

До дії Весса-Зуміно

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{WZ}} = \tfrac{is}{c\alpha'}\int\limits_{\Sigma}\omega^{\dot{\alpha}\alpha}(d)\wedge(d\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \theta_{\alpha}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \tag{3.31}$$

було введено знаковий фактор $s = \pm 1$, який відображає довільність її означення сумісну з κ-інваріантністю повної дії (3.30). Після виключення лоренц-гармонічних змінних дія (3.30) переходить до дії $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни Гріна-Шварца [56]

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{GSsstring}} = S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{GSkin}} + S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{WZ}}.$$

Її кінетичний член

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{GSkin}} = -\tfrac{1}{2c\alpha'}\int\limits_{\Sigma}d^2\xi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\omega^{m}_{\mu}\omega_{\nu m}$$

є суперсиметричним узагальненням дії Полякова (3.10), а член Весса-Зуміно є таким же, як і в (3.31).

Для переходу до формулювання кінетичного члена в термінах супертвісторів використовуються співвідношення

$$
\begin{aligned}
-\bar{u}^{-}\omega(d)u^{-} &= \tfrac{i}{2}\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) = \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}^{-}d\mathcal{Z}^{-} - d\bar{\mathcal{Z}}^{-}\mathcal{Z}^{-}),\\
-\bar{v}^{+}\omega(d)v^{+} &= \tfrac{i}{2}\omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d) = \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{W}}^{+}d\mathcal{W}^{+} - d\bar{\mathcal{W}}^{+}\mathcal{W}^{+}),
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

які узагальнюють (3.11). У результаті здобуваємо дію такого вигляду

$$
S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{kin,\,stw}} = \int\limits_{\Sigma}\!\Big(\tfrac{-i}{4(\alpha')^{1/2}}\left[e^{[+2]}\wedge\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) - e^{[-2]}\wedge\omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d)\right] + \tfrac{c}{2}e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}\Big)\,. \tag{3.33}
$$

Завдяки співвідношенням повноти для нормованої діади Ньюмена-Пенроуза (3.19) член Весса-Зуміно можна виразити

$$
\begin{aligned}
S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{WZ,\,stw}} = -\tfrac{s}{8c\alpha'}\int\limits_{\Sigma}\Big(&\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d)\wedge\omega^{[+2]}_{\zeta}(d) + \omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d)\wedge\omega^{[-2]}_{\eta}(d)\\
&- \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d)\wedge\omega_{\zeta\bar{\eta}}(d) - \omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d)\wedge\omega_{\eta\bar{\zeta}}(d)\Big)
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

через 1-форми (3.32) та

$$
\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) = \bar{\mathcal{W}}^{+}d\mathcal{Z}^{-} - d\bar{\mathcal{W}}^{+}\mathcal{Z}^{-}, \quad \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) = -(\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}})^{\dagger}, \tag{3.35}
$$

$$
\omega^{[-2]}_{\eta}(d) = \eta^{-}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} - \mathcal{D}\eta^{-}\bar{\eta}^{-}, \quad \omega^{[+2]}_{\zeta}(d) = \zeta^{+}\mathcal{D}\bar{\zeta}^{+} - \mathcal{D}\zeta^{+}\bar{\zeta}^{+}, \tag{3.36}
$$

$$
\omega_{\zeta\bar{\eta}}(d) = \zeta^{+}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} - \mathcal{D}\zeta^{+}\bar{\eta}^{-}, \quad \omega_{\eta\bar{\zeta}}(d) = -(\omega_{\zeta\bar{\eta}})^{\dagger}. \tag{3.37}
$$

1-форми (3.36) та (3.37) включають проєкції диференціалів грассманово-непарних суперпросторових координат, виражені через грассманово-непарні компоненти супертвісторів та спінові коефіцієнти

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} &= 2\bar{u}^{\dot{\alpha}-}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = d\bar{\eta}^{-} - \omega(d)\bar{\eta}^{-} - \tilde{\omega}^{[-2]}(d)\bar{\zeta}^{+}, \quad \mathcal{D}\eta^{-} = (\mathcal{D}\bar{\eta}^{-})^{*},\\
\mathcal{D}\bar{\zeta}^{+} &= 2\bar{v}^{\dot{\alpha}+}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = d\bar{\zeta}^{+} + \omega(d)\bar{\zeta}^{+} - \Omega^{[+2]}(d)\bar{\eta}^{-}, \quad \mathcal{D}\zeta^{+} = (\mathcal{D}\bar{\zeta}^{+})^{*}.
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Формулювання члена Весса-Зуміно в термінах компонентів супертвісторів явно показує, що дія суперструни інваріантна лише відносно підгрупи супер-Пуанкаре, яка входить до $SU(2,2|1)$ суперконформної симетрії. Це пояснюється наявністю розмірного натягу $T = \frac{1}{2c\alpha'}$. Супертвісторне формулювання $\mathcal{N}=1$ суперструни з дією

$$
S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}} = S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{kin,\,stw}} + S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{WZ,\,stw}} \tag{3.39}
$$

належить до результатів, які виносяться на захист.

Для виведення рівняння $D=4$ $\mathcal{N}=1$ суперструни у супертвісторному формулюванні у нашій роботі [223] було використано метод допустимих варіацій подібно до випадку бозонної струни. Було показано, що варіації супертвісторів сумісні з в'язями (3.28) та (3.4) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}&=\omega(\delta)\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}+\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta)\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}+(\tfrac{1}{2}\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(\delta)-\zeta^{+}\mathcal{D}(\delta)\bar{\eta}^{-})\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{B}}\\
&+(-\tfrac{1}{2}\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(\delta)+\eta^{-}\mathcal{D}(\delta)\bar{\eta}^{-})\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{B}}+\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta\mathcal{Z}^{\mathcal{B}-},\\
\delta\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}&=\Omega^{[+2]}(\delta)\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}-\omega(\delta)\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}+(\tfrac{1}{2}\omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(\delta)-\zeta^{+}\mathcal{D}(\delta)\bar{\zeta}^{+})\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{B}}\\
&+(-\tfrac{1}{2}\omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(\delta)+\eta^{-}\mathcal{D}(\delta)\bar{\zeta}^{+})\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{B}}+\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta\mathcal{W}^{\mathcal{B}+}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

та комплексно-спряжені до них. Суперматриці

$$
\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} I^{\alpha\beta} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

є суперсиметричними узагальненнями твісторів нескінченності. До варіацій (3.40) входять 10 бозонних та 4 ферміонних незалежних параметрів у відповідності з тим, що в'язі (3.4) інваріантні лише відносно підгрупи супер-Пуанкаре $SU(2,2|1)$ симетрії. Перші два члени у правій частині включають 6 параметрів (3.14) та (3.15), які відповідають спіновим коефіцієнтам. Вони походять із варіацій компонентів діади з урахуванням співвідношень інцидентності (3.29). Третій та четвертий члени відповідають варіаціям суперпросторових координат у головних спінорних частинах супертвісторів та включають 1-форми (3.32), (3.35) і (3.38), в яких диференціали замінено на варіації. Останні члени в правій частині (3.40) представляють варіації грассманово-непарних компонентів супертвісторів, які виокремлюються проєкційною суперматрицею $\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

Із рівнянь для компонентів цвайбайна випливає, що вони виражаються через 1-форми (3.32)

$$
e^{[-2]}=\tfrac{-i}{2c(\alpha')^{1/2}}\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d),\quad e^{[+2]}=\tfrac{-i}{2c(\alpha')^{1/2}}\omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d). \tag{3.41}
$$

Ці рівняння представляють суперсиметричне узагальнення рівнянь (3.26) для бозонної струни. Підстановка (3.41) до рівняння

$$\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\omega} = e^{[+2]} \wedge \omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) + e^{[-2]} \wedge \omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d) = 0$$

перетворює його на тотожність, як і у випадку бозонної струни. Це є висновком з $SO(1,1) \times SO(2)$ калібрувальної симетрії дії суперструни (3.39). Із рівнянь

$$\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\tilde{\omega}^{[-2]}} = e^{[+2]} \wedge \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) = 0, \quad \frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\Omega^{[+2]}} = e^{[-2]} \wedge \omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) = 0$$

та комплексно-спряжених до них випливає обертання на нуль 1-форм

$$\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) = \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) = 0. \tag{3.42}$$

Рівняння (3.41) та (3.42) є супертвісторною формою рівнянь, які фіксують орієнтацію локального репера відносно світового листка суперструни. Решта бозонних рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}} &= \left[de^{[+2]} + e^{[+2]} \wedge (\omega+\bar{\omega})(d)\right] + \tfrac{is}{c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\zeta^{+} \wedge \mathcal{D}\bar{\zeta}^{+} = 0,\\
\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}} &= \left[de^{[-2]} - e^{[-2]} \wedge (\omega+\bar{\omega})(d)\right] - \tfrac{is}{c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\eta^{-} \wedge \mathcal{D}\bar{\eta}^{-} = 0,\\
\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}} &= e^{[-2]} \wedge \bar{\Omega}^{[+2]}(d) - e^{[+2]} \wedge \tilde{\omega}^{[-2]}(d) + \tfrac{is}{c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\zeta^{+} \wedge \mathcal{D}\bar{\eta}^{-} = 0.
\end{aligned}$$

Останнє рівняння необхідно доповнити комплексно-спряженим. Перші два з цих рівнянь виражають індукований скрут на світовому листку $T^{[\pm 2]} \equiv de^{[\pm 2]} \pm e^{[\pm 2]} \wedge (\omega+\bar{\omega})(d)$ через косий добуток диференціалів грассманово-непарних компонентів супертвісторів (3.38). Третє рівняння разом із нетривіальним співвідношенням, яке випливає умов інтеґровності для допустимих диференціалів супертвісторів (3.40), приводять до наступних рівнянь

$$e^{[+2]} \wedge \tilde{\omega}^{[-2]}(d) - \tfrac{i(s+1)}{2c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} \wedge \mathcal{D}\zeta^{+} = 0, \; e^{[-2]} \wedge \Omega^{[+2]}(d) + \tfrac{i(s-1)}{2c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} \wedge \mathcal{D}\zeta^{+} = 0.$$

Із дії (3.39) також випливають ферміонні рівняння руху

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\mathcal{D}\bar{\eta}^{-}} &= e^{[+2]} \wedge \mathcal{D}\eta^{-} - \tfrac{is}{2c(\alpha')^{1/2}}\left[\omega^{[-2]}_{\mathcal{W}}(d) \wedge \mathcal{D}\eta^{-} - \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) \wedge \mathcal{D}\zeta^{+}\right] = 0,\\
\frac{\delta S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{sstring,\,stw}}}{\delta\mathcal{D}\bar{\zeta}^{+}} &= e^{[-2]} \wedge \mathcal{D}\zeta^{+} + \tfrac{is}{2c(\alpha')^{1/2}}\left[\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) \wedge \mathcal{D}\zeta^{+} - \omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) \wedge \mathcal{D}\eta^{-}\right] = 0
\end{aligned}$$

та комплексно-спряжені до них. Підстановка рівнянь (3.41) та (3.42) дозволяє привести їх до форми

$$(s+1)e^{[+2]}\wedge\mathcal{D}\eta^{-}=0,\quad (s-1)e^{[-2]}\wedge\mathcal{D}\zeta^{+}=0. \tag{3.43}$$

Для кожного з допустимих значень числового коефіцієнта s половина з наведених вище рівнянь перетворюється на тотожність. Відповідно до другої теореми Ньотер це пов'язано з κ-інваріантністю дії суперструни у супертвісторному формулюванні (3.39). Отже, після переходу до супертвісторного формулювання у ферміонному секторі $D=4$ $\mathcal{N}=1$ суперструни залишаються суто калібрувальні ступені свободи. Це відрізняє модель струни з натягом від моделей безмасової суперчастинки [169] та безнатягової супер p-брани [245], [105], [106]. У цих моделях суто калібрувальні компоненти грассманових координат суперпростору випадають із лагранжіана при переході від суперпросторового до супертвісторного формулювання, що означає неявне закріплення калібрування κ-симетрії.

Явний вигляд варіацій компонентів супертвісторів та цвайбайна відносно κ-симетрії залежить від значення s. При $s=-1$ варіації даються наступними виразами

$$\delta_\kappa\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}=\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta_\kappa)\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}-\zeta^{+}\kappa^{-}\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{B}}+\eta^{-}\kappa^{-}\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{B}}+\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^{\mathcal{B}-},$$

$$\delta_\kappa\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}=\Omega^{[+2]}(\delta_\kappa)\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-},$$

$$\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta_\kappa)=\tfrac{i}{2c(\alpha')^{1/2}}e^{\mu[-2]}\mathcal{D}_\mu\zeta^{+}\kappa^{-},\ \bar{\Omega}^{[+2]}(\delta_\kappa)=-\tfrac{i}{2c(\alpha')^{1/2}}e^{\mu[+2]}\mathcal{D}_\mu\zeta^{+}\kappa^{-},$$

$$\delta_\kappa e^{[+2]}_\mu=0,\quad \delta_\kappa e^{[-2]}_\mu=-\tfrac{i}{c(\alpha')^{1/2}}(\kappa^{-}\mathcal{D}_\mu\eta^{-}-\mathcal{D}_\mu\bar{\eta}^{-}\bar{\kappa}^{-})$$

та комплексно-спряженими до них. Комплексний грассманово-непарний параметр $\kappa^{-}(\xi^\mu)$ можна записати у супертвісторній формі як $\mathcal{K}^{\mathcal{A}-}=(0,0,\kappa^{-})$. Відповідно для $s=1$ варіації дорівнюють

$$\delta_\kappa\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}=\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta_\kappa)\mathcal{W}^{\mathcal{A}+},$$

$$\delta_\kappa\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}=\Omega^{[+2]}(\delta_\kappa)\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}-\zeta^{+}\kappa^{+}\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{B}}+\eta^{-}\kappa^{+}\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{B}}+\mathcal{J}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^{\mathcal{B}+},$$

$$\tilde{\omega}^{[-2]}(\delta_\kappa) = -\tfrac{i}{2c(\alpha')^{1/2}} e^{\mu[-2]}\mathcal{D}_\mu \bar{\eta}^- \bar{\kappa}^+, \ \bar{\Omega}^{[+2]}(\delta_\kappa) = \tfrac{i}{2c(\alpha')^{1/2}} e^{\mu[+2]}\mathcal{D}_\mu \bar{\eta}^- \bar{\kappa}^+,$$

$$\delta_\kappa e^{[+2]}_\mu = -\frac{i}{c(\alpha')^{1/2}}(\kappa^+ \mathcal{D}_\mu \zeta^+ - \mathcal{D}_\mu \bar{\zeta}^+ \bar{\kappa}^+), \quad \delta_\kappa e^{[-2]}_\mu = 0.$$

Лагранжіан $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні залишається нелінійним подібно до оригінального лагранжіана Гріна-Шварца та лагранжіана у лоренц-гармонічному формулюванні. Закріплення калібрування κ-симетрії не усуває нелінійностей. Тому означимо редуковані моделі, які узагальнюють на випадок струн з ненульовим натягом твісторні формулювання моделей безмасової суперчастинки [169] та безнатягової суперструни [106] інваріантні відносно $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперконформної симетрії. Лагранжіани редукованих моделей є квадратичними за компонентами (супер)твісторів.

Розглянемо дію

$$\begin{aligned} S^{D=4,\mathcal{N}=1/2}_{\text{sstring, stw}} = \int\limits_\Sigma \Big(& \tfrac{-i}{4(\alpha')^{1/2}} \Big[e^{[+2]} \wedge (\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^-_{\mathcal{A}} d\tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} - d\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^-_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-}) \\ & - e^{[-2]} \wedge (\bar{W}^+_{\boldsymbol{\alpha}} dW^{\boldsymbol{\alpha}+} - d\bar{W}^+_{\boldsymbol{\alpha}} W^{\boldsymbol{\alpha}+}) \Big] + \tfrac{c}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]} \Big). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Вона включає лише половину грассманово-непарних змінних порівняно з дією суперструни у супертвісторному формулюванні (3.39), на що вказує верхній індекс $\mathcal{N} = 1/2$. Цю модель можна здобути з дії (3.39) підстановкою рівнянь (3.41) та (3.42) до лагранжіана Весса-Зуміно (3.34) при $s = +1$ та підсумовуванням результату з лагранжіаном для кінетичного члена (3.33). У такому випадку компоненти супертвістора $\tilde{\mathcal{Z}}$ та дуального до нього мають наступні співвідношення інцидентності із суперпросторовими координатами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} = (\tilde{\mu}^{\alpha-}, \bar{u}^-_{\dot{\alpha}}, \bar{\tilde{\eta}}^-): \quad & \tilde{\mu}^{\alpha-} = i\bar{u}^-_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} + \sqrt{2}\theta^\alpha \bar{\tilde{\eta}}^-, \quad \bar{\tilde{\eta}}^- = 2\sqrt{2}\bar{u}^{\dot{\alpha}-}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \\ \bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^-_{\mathcal{A}} = (u^-_\alpha, \bar{\tilde{\mu}}^{\dot{\alpha}-}, \tilde{\eta}^-): \quad & \bar{\tilde{\mu}}^{\dot{\alpha}-} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha} u^-_\alpha - \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \tilde{\eta}^-, \quad \tilde{\eta}^- = 2\sqrt{2} u^{\alpha-}\theta_\alpha \end{aligned} \tag{3.45}$$

і задовольняють умову нульової норми

$$\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^-_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} = u^-_\alpha \tilde{\mu}^{\alpha-} + \bar{\tilde{\mu}}^{\dot{\alpha}-} \bar{u}^-_{\dot{\alpha}} + \tilde{\eta}^- \bar{\tilde{\eta}}^- = 0.$$

Співвідношення інцидентності (3.45) відрізняються від (3.29), тому сам супертвістор, його головна спінорна частина та грассманово-непарні компоненти позначені тильдою. $W^{\boldsymbol{\alpha}+}$ і $\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}}$ є бозонними твісторами, компоненти яких задовольняють умови інцидентності (3.7) та (3.8). Дія редукованої моделі, яка відповідає випадку $s=-1$, здобувається із (3.44) заміною модифікованих супертвісторів $\tilde{\mathcal{Z}}^{-}$, $\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}$ та твісторів W^{+}, $\bar{W}^{+}$ бозонними твісторами Z^{-}, $\bar{Z}^{-}$ та супертвісторами $\tilde{\mathcal{W}}^{+}$, $\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}$, означеними подібно до $\tilde{\mathcal{Z}}^{-}$ і $\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}$

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+}=(\tilde{\nu}^{\alpha+},\bar{v}^{+}_{\dot\alpha},\bar{\tilde{\zeta}}^{+}):\ \tilde{\nu}^{\alpha+}=i\bar{v}^{+}_{\dot\alpha}x^{\dot\alpha\alpha}+\sqrt{2}\theta^{\alpha}\bar{\tilde{\zeta}}^{+},\ \bar{\tilde{\zeta}}^{+}=2\sqrt{2}\bar{v}^{\dot\alpha+}\bar{\theta}_{\dot\alpha},\\
\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}}=(v^{+}_{\alpha},\bar{\tilde{\nu}}^{\dot\alpha+},\tilde{\zeta}^{+}):\ \bar{\tilde{\nu}}^{\dot\alpha+}=-ix^{\dot\alpha\alpha}v^{+}_{\alpha}-\sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot\alpha}\tilde{\zeta}^{+},\ \tilde{\zeta}^{+}=2\sqrt{2}v^{\alpha+}\theta_{\alpha},\\
\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+}=v^{+}_{\alpha}\tilde{\nu}^{\alpha+}+\bar{\tilde{\nu}}^{\dot\alpha+}\bar{v}^{+}_{\dot\alpha}+\tilde{\zeta}^{+}\bar{\tilde{\zeta}}^{+}=0.
\end{gathered}\tag{3.46}$$

На завершення цього пункту розглянемо модель $D=4$ $\mathcal{N}=2$ суперструни. Відомо, що її дія у лоренц-гармонічному формулюванні має вигляд

$$S^{D=4,\mathcal{N}=2}_{\text{sstring}}=S^{D=4,\mathcal{N}=2}_{\text{kin}}+S^{D=4,\mathcal{N}=2}_{\text{WZ}},$$

де

$$\begin{aligned}
S^{D=4,\mathcal{N}=2}_{\text{kin}}=\int\limits_{\Sigma}\Big(&\tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}}\Big[e^{[+2]}\wedge(\bar{u}^{-}\omega(d)u^{-})-e^{[-2]}\wedge(\bar{v}^{+}\omega(d)v^{+})\Big]\\
&+\tfrac{c}{2}e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}\Big),
\end{aligned}\tag{3.47}$$

$\omega_{\alpha\dot\alpha}(d)=dx_{\alpha\dot\alpha}+2id\theta^{I}_{\alpha}\bar{\theta}^{I}_{\dot\alpha}-2i\theta^{I}_{\alpha}d\bar{\theta}^{I}_{\dot\alpha}$, $I=1,2$, та

$$\begin{aligned}
S^{D=4,\mathcal{N}=2}_{\text{WZ}}=\tfrac{is}{c\alpha'}&\int\limits_{\Sigma}\omega^{\dot\alpha\alpha}(d)\wedge(d\theta^{1}_{\alpha}\bar{\theta}^{1}_{\dot\alpha}-\theta^{1}_{\alpha}d\bar{\theta}^{1}_{\dot\alpha}-d\theta^{2}_{\alpha}\bar{\theta}^{2}_{\dot\alpha}+\theta^{2}_{\alpha}d\bar{\theta}^{2}_{\dot\alpha})\\
+\tfrac{2s}{c\alpha'}&\int\limits_{\Sigma}(d\theta^{\alpha1}\bar{\theta}^{\dot\alpha1}-\theta^{\alpha1}d\bar{\theta}^{\dot\alpha1})\wedge(d\theta^{2}_{\alpha}\bar{\theta}^{2}_{\dot\alpha}-\theta^{2}_{\alpha}d\bar{\theta}^{2}_{\dot\alpha}),\quad s=\pm1.
\end{aligned}$$

Її лагранжіан можна виразити в термінах компонентів супертвісторів подібно до $\mathcal{N}=1$ суперструни. Розширення редукованої моделі (3.44) здобуваємо лоренц-коваріантним закріпленням калібрування κ-симетрії $\theta^{1}_{\alpha}=\theta^{2}_{\alpha}$. У такому випадку член Весса-Зуміно обертається на нуль, а кінетичний член (3.47) набуває вигляду

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1/2+1/2}_{\text{sstring, stw}} = \int\limits_{\Sigma} \Big(\tfrac{-i}{4(\alpha')^{1/2}} \Big[e^{[+2]} \wedge (\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}_{\mathcal{A}} d\tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} - d\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-}) \\ - e^{[-2]} \wedge (\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}} d\tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+} - d\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+}) \Big] + \tfrac{c}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]} \Big). \quad (3.48)$$

Умови інцидентності для компонентів супертвісторів є такими ж як і в (3.45) та (3.46). Супертвістори також задовольняють умови нульової норми та ортогональності $\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} = 0$ та $\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{+}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+} = 0$. Функціонали дії редукованої моделі (3.44), її аналога для випадку $s = -1$ та бозонної струни у твісторному формулюванні (3.12) випливають із (3.48), якщо покласти рівними нулю половину або всі грассманово-непарні компоненти супертвісторів.

Редуковані супертвісторні моделі (3.44) та (3.48) входять до переліку результатів, які виносяться на захист.

У наступному пункті на основі методу Дірака [228] буде проведено аналіз моделі (3.48) як гамільтонової системи з в'язями.

3.2.3 Гамільтонова механіка редукованої супертвісторної моделі $\mathcal{N} = 2$ суперструни

Для переходу до гамільтонова опису найбільш загальної редукованої моделі (3.48) зручно ввести обернений цвайбайн з компонентами $e^{\mu[\pm 2]}$. У базисі світлового конуса для метрики дотичного простору до світового листка вони задовольняють співвідношення $e^{\mu[\pm 2]} e^{[\pm 2]}_{\mu} = 0$, $e^{\mu[\pm 2]} e^{[\mp 2]}_{\mu} = 2$ (див. роботу [74]). Після введення оберненого цвайбайна дія (3.48) набуває вигляду

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1/2+1/2}_{\text{sstring, stw}} = \int\limits_{\Sigma} d^2\xi \Big(\tfrac{ie}{4(\alpha')^{1/2}} \Big[e^{\mu[+2]} (\bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}_{\mathcal{A}} \partial_\mu \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-} - \partial_\mu \bar{\tilde{\mathcal{Z}}}^{-}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}-}) \\ + e^{\mu[-2]} (\bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}} \partial_\mu \tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+} - \partial_\mu \bar{\tilde{\mathcal{W}}}^{+}_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{A}+}) \Big] + ce \Big).$$

Для додаткового спрощення аналізу будемо використовувати ненормовану діаду Ньюмена-Пенроуза, що дозволяє виключити пару в'язей другого роду (3.2). У такому випадку останній член у дії (3.48) необхідно замінити на

$$ce(\xi) \to ce(\xi)n(\xi)\bar{n}(\xi),$$

де $n(\xi) = u^{\alpha-}v^{+}_{\alpha}$ – комплексне скалярне поле, а $\bar{n}(\xi) = \bar{u}^{\dot{\alpha}-}\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}}$ є спряженим до нього. Кількість фізичних ступенів свободи при такій заміні зберігається, оскільки дія стає інваріантною відносно локального масштабного перетворення цвайбайна та компонентів діади. Зрештою визначимо безрозмірну густину цвайбайна $\rho^{\mu[+2]} = c(\alpha')^{1/2}ee^{\mu[+2]}$, $\rho^{\mu[-2]} = c(\alpha')^{1/2}ee^{\mu[-2]}$ (див. роботу [74]). Тож дія редукованої супертвісторної моделі для $\mathcal{N} = 2$ суперструни набуде вигляду

$$S'^{D=4,\mathcal{N}=1/2+1/2}_{\text{sstring, stw}} = \int\limits_{\Sigma} d^2\xi \mathcal{L}'^{D=4,\mathcal{N}=1/2+1/2}_{\text{sstring, stw}}(\xi) \tag{3.49}$$

з лагранжіаном[32]

$$\begin{gathered}\mathcal{L}'^{D=4,\mathcal{N}=1/2+1/2}_{\text{sstring, stw}}(\xi) = \tfrac{i}{4c\alpha'}\left[\rho^{\mu[+2]}(\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\partial_\mu\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - \partial_\mu\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-})\right. \\ \left.+\rho^{\mu[-2]}(\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}\partial_\mu\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - \partial_\mu\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+})\right] + \tfrac{1}{2c\alpha'}\varepsilon_{\mu\nu}\rho^{\mu[-2]}\rho^{\nu[+2]}n\bar{n}.\end{gathered} \tag{3.50}$$

До цього лагранжіана необхідно додати з множниками Лагранжа чотири в'язи на компоненти супертвісторів

$$\chi^{[-2]}_{\mathcal{Z}} = \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} \approx 0, \quad \chi^{[+2]}_{\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{W}}^{-}_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}-} \approx 0, \tag{3.51}$$

$$\chi_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}} = \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} \approx 0, \quad \chi_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} \approx 0. \tag{3.52}$$

Введемо загальне позначення для полів координат

$$\mathfrak{Q}^{\mathfrak{N}}(\tau,\sigma) = \left(\mu^{\beta-}, \bar{\mu}^{\dot{\beta}-}, u^{-}_{\beta}, \bar{u}^{-}_{\dot{\beta}}, \nu^{\beta+}, \bar{\nu}^{\dot{\beta}+}, v^{+}_{\beta}, \bar{v}^{+}_{\dot{\beta}}, \eta^{-}, \bar{\eta}^{-}, \zeta^{+}, \bar{\zeta}^{+}, \rho^{\nu[\pm2]}\right)$$

та спряжених густин імпульсів

$$\begin{gathered}\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}(\tau,\sigma) = \tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\tau\mathfrak{Q}^{\mathfrak{M}}} \\ = \left(p^{+}_{(\mu)\alpha}, \bar{p}^{+}_{(\mu)\dot{\alpha}}, p^{\alpha+}_{(u)}, \bar{p}^{\dot{\alpha}+}_{(u)}, p^{-}_{(\nu)\alpha}, \bar{p}^{-}_{(\nu)\dot{\alpha}}, p^{\alpha-}_{(v)}, \bar{p}^{\dot{\alpha}-}_{(v)}, p^{+}_{(\eta)}, \bar{p}^{+}_{(\eta)}, p^{-}_{(\zeta)}, \bar{p}^{-}_{(\zeta)}, P^{[\mp2]}_{\mu}\right),\end{gathered}$$

---

[32] У подальшому для спрощення позначень тильди над супертвісторами та їх компонентами не будуть проставлятись.

які задовольняють співвідношення на дужках Пуассона

$$\{\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}(\sigma), \mathfrak{Q}^{\mathfrak{N}}(\sigma')\}_{P.B.} = \delta^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{M}} \delta(\sigma - \sigma').$$

Із означень імпульсів, спряжених компонентам супертвісторів $\mathcal{Z}^-$ та $\mathcal{W}^+$, випливають первинні в'язі

$$\begin{gathered} T^+_{(\mu)\alpha} = p^+_{(\mu)\alpha} - \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}u^-_\alpha \approx 0, \quad \bar{T}^+_{(\mu)\dot{\alpha}} = \bar{p}^+_{(\mu)\dot{\alpha}} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}\bar{u}^-_{\dot{\alpha}} \approx 0, \\ T^{\alpha+}_{(u)} = p^{\alpha+}_{(u)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}\mu^{\alpha-} \approx 0, \quad \bar{T}^{\dot{\alpha}+}_{(u)} = \bar{p}^{\dot{\alpha}+}_{(u)} - \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}\bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} \approx 0, \\ T^+_{(\eta)} = p^+_{(\eta)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}\bar{\eta}^- \approx 0, \quad \bar{T}^+_{(\eta)} = \bar{p}^+_{(\eta)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[+2]}\eta^- \approx 0 \end{gathered} \tag{3.53}$$

та

$$\begin{gathered} T^-_{(\nu)\alpha} = p^-_{(\nu)\alpha} - \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}v^+_\alpha \approx 0, \quad \bar{T}^-_{(\nu)\dot{\alpha}} = \bar{p}^-_{(\nu)\dot{\alpha}} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}\bar{v}^+_{\dot{\alpha}} \approx 0, \\ T^{\alpha-}_{(v)} = p^{\alpha-}_{(v)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}\nu^{\alpha+} \approx 0, \quad \bar{T}^{\dot{\alpha}-}_{(v)} = \bar{p}^{\dot{\alpha}-}_{(v)} - \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}\bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} \approx 0, \\ T^-_{(\zeta)} = p^-_{(\zeta)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}\bar{\zeta}^+ \approx 0, \quad \bar{T}^-_{(\zeta)} = \bar{p}^-_{(\zeta)} + \tfrac{i}{4c\alpha'}\rho^{\tau[-2]}\zeta^+ \approx 0. \end{gathered} \tag{3.54}$$

Також наявні чотири первинні в'язі, які виникають через відсутність у лагранжіані (3.50) похідних за густинами цвайбайна

$$P^{[\mp 2]}_\mu \approx 0. \tag{3.55}$$

Густина повного гамільтоніана $H_T(\tau,\sigma)$ за означенням дається сумою густини канонічного гамільтоніана

$$\begin{gathered} H_0(\tau,\sigma) = -\tfrac{i}{4c\alpha'}\left[\rho^{\sigma[+2]}\left(\bar{\mathcal{Z}}^-_{\mathcal{A}}\partial_\sigma\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - \partial_\sigma\bar{\mathcal{Z}}^-_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} + 2in\bar{n}\rho^{\tau[-2]}\right)\right. \\ \left. +\rho^{\sigma[-2]}\left(\bar{\mathcal{W}}^+_{\mathcal{A}}\partial_\sigma\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - \partial_\sigma\bar{\mathcal{W}}^+_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - 2in\bar{n}\rho^{\tau[+2]}\right)\right] \end{gathered}$$

та первинних в'язей (3.51)-(3.55) з довільними множниками Лагранжа.

У підході Дірака [228] первинні в'язі (3.51)-(3.55) мають зберігатись у часі. Ця умова означає, що їх дужки Пуассона з повним гамльтоніаном мають обертатись на нуль у слабкому смислі. В результаті приходимо до вторинних бозонних в'язей

$$\begin{gathered} T^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} = -\tfrac{i}{4}\left(\bar{\mathcal{Z}}^-_{\mathcal{A}}\partial_\sigma\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - \partial_\sigma\bar{\mathcal{Z}}^-_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} + 2in\bar{n}\rho^{\tau[-2]}\right) \approx 0, \\ T^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma} = -\tfrac{i}{4}\left(\bar{\mathcal{W}}^+_{\mathcal{A}}\partial_\sigma\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - \partial_\sigma\bar{\mathcal{W}}^+_{\mathcal{A}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - 2in\bar{n}\rho^{\tau[+2]}\right) \approx 0 \end{gathered}$$

та

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}\,\sigma} &= \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}\partial_\sigma \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - \partial_\sigma \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} \approx 0,\\
\omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}\,\sigma} &= \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\partial_\sigma \mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - \partial_\sigma \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} \mathcal{W}^{\mathcal{A}+} \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

а також до рівнянь для множників Лагранжа. Ці рівняння дозволяють виразити множники Лагранжа для первинних в'язей в термінах меншого набору незалежних множників Лагранжа, які відповідають в'язям першого роду. Відтак густина повного гамільтоніана виражається як сума в'язей першого роду з довільними множниками Лагранжа

$$
\begin{aligned}
H_T(\tau,\sigma) = \tfrac{\rho^{\sigma[+2]}}{c\alpha'}\widetilde{T}^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} + \tfrac{\rho^{\sigma[-2]}}{c\alpha'}\widetilde{T}^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma} + s^{[+2]}_{\mathcal{Z}}\widetilde{\chi}^{[-2]}_{\mathcal{Z}} + s^{[-2]}_{\mathcal{W}}\widetilde{\chi}^{[+2]}_{\mathcal{W}}\\
+\beta_{\mathcal{Z}}\Delta_{\mathcal{Z}} + \beta_{\mathcal{W}}\Delta_{\mathcal{W}} + \beta^{[+2]}P^{[-2]}_{\sigma} + \beta^{[-2]}P^{[+2]}_{\sigma} \approx 0.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Відзначимо, що компоненти $\rho^{\sigma[+2]}$ та $\rho^{\sigma[-2]}$ введеної вище густини цвайбайна відіграють роль множників Лагранжа для в'язей першого роду $\widetilde{T}^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} \approx 0$ та $\widetilde{T}^{[+2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} \approx 0$ відповідно. Також відзначимо, що обернення на нуль у слабкому смислі густини повного гамільтоніана є характерною рисою моделей інваріантних відносно координатних дифеоморфізмів (див., наприклад, обговорення в [197]). В'язі першого роду, які входять до виразу для повного гамільтоніана (3.57), мають форму

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} = T^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} + c\alpha'\partial_\sigma P^{[-2]}_{\tau} - \tfrac{c\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}((\partial_\sigma\mu^{\alpha-} - i\rho^{\tau[-2]}\bar{n}v^{\alpha+})T^{+}_{(\mu)\alpha}\\
+(\partial_\sigma\bar{\mu}^{\dot\alpha-} + i\rho^{\tau[-2]}n\bar{v}^{\dot\alpha+})\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot\alpha} + \partial_\sigma u^{-}_{\alpha}T^{\alpha+}_{(u)} + \partial_\sigma\bar{u}^{-}_{\dot\alpha}\bar{T}^{\dot\alpha+}_{(u)} + \partial_\sigma\eta^{-}T^{+}_{(\eta)}\\
+\partial_\sigma\bar{\eta}^{-}\bar{T}^{+}_{(\eta)}) + ic\alpha'(n\bar{u}^{\dot\alpha-}\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot\alpha} - \bar{n}u^{\alpha-}T^{-}_{(\nu)\alpha}) - \tfrac{F}{\rho^{\tau[+2]}}(\chi_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}\\
+\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}(\bar{\nu}^{\dot\alpha+}\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot\alpha} + v^{+}_{\alpha}T^{\alpha+}_{(u)} + \zeta^{+}T^{+}_{(\eta)}) - \tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}(\mu^{\alpha-}T^{-}_{(\nu)\alpha} + \bar{u}^{-}_{\dot\alpha}\bar{T}^{\dot\alpha-}_{(v)}\\
+\bar{\eta}^{-}\bar{T}^{-}_{(\zeta)})) - \tfrac{\bar{F}}{\rho^{\tau[+2]}}(\chi_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}} - \tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}(\nu^{\alpha+}T^{+}_{(\mu)\alpha} + \bar{v}^{+}_{\dot\alpha}\bar{T}^{\dot\alpha+}_{(u)} + \bar{\zeta}^{+}\bar{T}^{+}_{(\eta)})\\
+\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}(\bar{\mu}^{\dot\alpha-}\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot\alpha} + u^{-}_{\alpha}T^{\alpha-}_{(v)} + \eta^{-}T^{-}_{(\zeta)})) \approx 0,\\
\widetilde{T}^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma} = T^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma} + c\alpha'\partial_\sigma P^{[+2]}_{\tau} - \tfrac{c\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}((\partial_\sigma\nu^{\alpha+} - i\rho^{\tau[+2]}\bar{n}u^{\alpha-})T^{-}_{(\nu)\alpha}\\
+(\partial_\sigma\bar{\nu}^{\dot\alpha+} + i\rho^{\tau[+2]}n\bar{u}^{\dot\alpha-})\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot\alpha} + \partial_\sigma v^{+}_{\alpha}T^{\alpha-}_{(v)} + \partial_\sigma\bar{v}^{+}_{\dot\alpha}\bar{T}^{\dot\alpha-}_{(v)} + \partial_\sigma\zeta^{+}T^{-}_{(\zeta)}\\
+\partial_\sigma\bar{\zeta}^{+}\bar{T}^{-}_{(\zeta)}) + ic\alpha'(n\bar{v}^{\dot\alpha+}\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot\alpha} - \bar{n}v^{\alpha+}T^{+}_{(\mu)\alpha}) + \tfrac{F}{\rho^{\tau[-2]}}(\chi_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}
\end{aligned}
$$

$$+\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}(\bar{\nu}^{\dot{\alpha}+}\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot{\alpha}}+v^{+}_{\alpha}T^{\alpha+}_{(u)}+\zeta^{+}T^{+}_{(\eta)})-\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}(\mu^{\alpha-}T^{-}_{(\nu)\alpha}+\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}}\bar{T}^{\dot{\alpha}-}_{(v)}$$
$$+\bar{\eta}^{-}\bar{T}^{-}_{(\zeta)}))+\tfrac{\bar{F}}{\rho^{\tau[-2]}}(\chi_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}-\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}(\nu^{\alpha+}T^{+}_{(\mu)\alpha}+\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}}\bar{T}^{\dot{\alpha}+}_{(u)}+\bar{\zeta}^{+}\bar{T}^{+}_{(\eta)})$$
$$+\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}(\bar{\mu}^{\dot{\alpha}-}\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot{\alpha}}+u^{-}_{\alpha}T^{\alpha-}_{(v)}+\eta^{-}T^{-}_{(\zeta)}))\approx 0,$$
$$\tilde{\chi}^{[-2]}_{\mathcal{Z}}=\chi^{[-2]}_{\mathcal{Z}}-\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}(\mu^{\alpha-}T^{+}_{(\mu)\alpha}-\bar{\mu}^{\dot{\alpha}-}\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot{\alpha}}-u^{-}_{\alpha}T^{\alpha+}_{(u)}+\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}}\bar{T}^{\dot{\alpha}+}_{(u)}-\eta^{-}T^{+}_{(\eta)}+\bar{\eta}^{-}\bar{T}^{+}_{(\eta)})\approx 0,$$
$$\tilde{\chi}^{[+2]}_{\mathcal{W}}=\chi^{[+2]}_{\mathcal{W}}-\tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}(\nu^{\alpha+}T^{-}_{(\nu)\alpha}-\bar{\nu}^{\dot{\alpha}+}\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot{\alpha}}-v^{+}_{\alpha}T^{\alpha-}_{(v)}+\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}}\bar{T}^{\dot{\alpha}-}_{(v)}-\zeta^{+}T^{-}_{(\zeta)}+\bar{\zeta}^{+}\bar{T}^{-}_{(\zeta)})\approx 0,$$
$$\Delta_{\mathcal{Z}}=\mu^{\alpha-}T^{+}_{(\mu)\alpha}+\bar{\mu}^{\dot{\alpha}-}\bar{T}^{+}_{(\mu)\dot{\alpha}}+u^{-}_{\alpha}T^{\alpha+}_{(u)}+\bar{u}^{-}_{\alpha}\bar{T}^{\dot{\alpha}+}_{(u)}+\eta^{-}T^{+}_{(\eta)}+\bar{\eta}^{-}\bar{T}^{+}_{(\eta)}-2\rho^{\mu[+2]}P^{[-2]}_{\mu}\approx 0,$$
$$\Delta_{\mathcal{W}}=\nu^{\alpha+}T^{-}_{\nu\alpha}+\bar{\nu}^{\dot{\alpha}+}\bar{T}^{-}_{(\nu)\dot{\alpha}}+v^{+}_{\alpha}T^{\alpha-}_{(v)}+\bar{v}^{+}_{\alpha}\bar{T}^{\dot{\alpha}-}_{(v)}+\zeta^{+}T^{-}_{(\zeta)}+\bar{\zeta}^{+}\bar{T}^{-}_{(\zeta)}-2\rho^{\mu[-2]}P^{[+2]}_{\mu}\approx 0,$$

де

$$F=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{n\bar{n}}\partial_{\sigma}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}\partial_{\sigma}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}-\tfrac{i}{n}\rho^{\tau[+2]}\bar{\tilde{\omega}}^{[-2]}_{\sigma}-\tfrac{i}{\bar{n}}\rho^{\tau[-2]}\Omega^{[+2]}_{\sigma}\right).$$

В'язі першого роду редукованої супертвісторної моделі, яка відповідає $\mathcal{N}=1$ суперструні, можна здобути з наведених вище виразів якщо покласти рівними нулю ζ^{+}, $\bar{\zeta}^{+}$ або η^{-}, $\bar{\eta}^{-}$ та спряжені ним імпульси в залежності від значення s. Аби здобути в'язі першого роду моделі бозонної струни у твісторному формулюванні, необхідно покласти рівними нулю як η^{-}, $\bar{\eta}^{-}$, так і ζ^{+}, $\bar{\zeta}^{+}$ та спряжені імпульси.

На дужках Пуассона здобуті в'язі першого роду генерують калібрувальні симетрії дії (3.49). Вони були проаналізовані у нашій роботі [224]. В'язі $\widetilde{T}^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma}\approx 0$ та $\widetilde{T}^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma}\approx 0$ є генераторами листкових репараметризацій. В'язі $\Delta_{\mathcal{Z}}\approx 0$ та $\Delta_{\mathcal{W}}\approx 0$ генерують дилатації компонентів супертвісторів та густини цвайбайна

$$\delta_{d_{\mathcal{Z}}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}=d_{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-},\quad \delta_{d_{\mathcal{Z}}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}}=d_{\mathcal{Z}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}},\quad \delta_{d_{\mathcal{Z}}}\rho^{\mu[+2]}=-2d_{\mathcal{Z}}\rho^{\mu[+2]},$$
$$\delta_{d_{\mathcal{W}}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}=d_{\mathcal{W}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+},\quad \delta_{d_{\mathcal{W}}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}=d_{\mathcal{W}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}},\quad \delta_{d_{\mathcal{W}}}\rho^{\mu[-2]}=-2d_{\mathcal{W}}\rho^{\mu[-2]}.$$

Ці дилатації є незалежними завдяки введенню ненормованої діади. Вони представляють комбінацію локальних вейлівських та $SO(1,1)$ перетворень у дотичному просторі до світового листка як можна побачити після переходу до параметрів $d_{\mathcal{Z}}=\varsigma-\varrho$, $d_{\mathcal{W}}=\varsigma+\varrho$. В'язі $\tilde{\chi}^{[-2]}_{\mathcal{Z}}\approx 0$ та $\tilde{\chi}^{[+2]}_{\mathcal{W}}\approx 0$

генерують локальні $U(1)$ обертання компонентів супертвісторів

$$\delta_{\varphi_{\mathcal{Z}}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} = i\varphi_{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}, \quad \delta_{\varphi_{\mathcal{Z}}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} = -i\varphi_{\mathcal{Z}}\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}},$$

$$\delta_{\varphi_{\mathcal{W}}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} = i\varphi_{\mathcal{W}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}, \quad \delta_{\varphi_{\mathcal{W}}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} = -i\varphi_{\mathcal{W}}\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}}.$$

Ці симетрії також є незалежними для ненормованої діади. Їх параметри $\varphi_{\mathcal{Z}} = \upsilon - \phi$ та $\varphi_{\mathcal{W}} = \upsilon + \phi$ можна виразити через нові параметри υ і ϕ, які відповідають $U(1)$ підгрупі $GL(1,\mathbb{C}) = GL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C})$ групи, яка діє на компоненти ненормованої діади, та $SO(2) = U(1) \subset SL(2,\mathbb{C})$ групі обертань ортогональних до світового листка струни компонентів локального репера.

Інші в'язі (3.52), (3.53), (3.54) та (3.56) належать до другого роду. Після переходу до дужок Дірака їх необхідно розглядати як рівності у сильному смислі тобто як звичайні рівності. На дужках Дірака, які враховують первинні в'язі (3.53) та (3.54), компоненти супертвісторів задовольняють співвідношення

$$\{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}(\sigma), \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{B}}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[+2]}}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$\{\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}(\sigma), \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{B}}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{2ic\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta(\sigma-\sigma').$$

Ці співвідношення є струнним узагальненням дужок Дірака, які виникають в моделях суперчастинок у супертвісторному формулюванні [169] (див. також [254]). Наявність τ-компонентів густини цвайбайна ($\rho^{\mu[+2]}$, $\rho^{\mu[-2]}$) у в'язях другого роду (3.53) та (3.54) приводить до ненульових дужок Дірака для спряжених їм імпульсів $P^{[\mp 2]}_{\tau}$ та супертвісторів

$$\{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}(\sigma), P^{[-2]}_{\tau}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{1}{2\rho^{\tau[+2]}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$\{\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}(\sigma), P^{[+2]}_{\tau}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{1}{2\rho^{\tau[-2]}}\mathcal{W}^{\mathcal{A}+}\delta(\sigma-\sigma')$$

та комплексно-спряжених співвідношень. Розгляд в'язей (3.53) та (3.54) як рівностей у сильному смислі приводить до спрощення в'язей першого роду. Вони зводяться до первинних в'язей (3.51), (3.55) та

$$\tilde{T}^{[-2]}_{\mathcal{Z}\,\sigma} = T^{[-2]}_{\mathcal{Z}\sigma} - \tfrac{F}{\rho^{\tau[+2]}}\chi_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}} - \tfrac{\bar{F}}{\rho^{\tau[+2]}}\chi_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}} \approx 0,$$

$$\tilde{T}^{[+2]}_{\mathcal{W}\,\sigma} = T^{[+2]}_{\mathcal{W}\sigma} + \tfrac{F}{\rho^{\tau[-2]}}\chi_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}} + \tfrac{\bar{F}}{\rho^{\tau[-2]}}\chi_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}} \approx 0.$$

Співвідношення на дужках Дірака цих в'язей першого роду між собою та з в'язями другого роду (3.52) і (3.56) наведено у нашій роботі [224].

Результати проведеного у цьому пункті аналізу виносяться на захист.

3.3 Твісторні формулювання суперструн у $D = 6$ та $D = 10$ суперпросторах Мінковського

У попередньому підрозділі лагранжіани $D = 4$ бозонної струни та $\mathcal{N} = 1, 2$ суперструн у лоренц-гармонічному формулюванні [66], [74] було представлено в термінах (супер)твісторів Пенроуза-Фербера. Як відомо κ-інваріантні функціонали дії класичних суперструн Гріна-Шварца існують також у розмірностях $D = 6$ та $D = 10$. У розмірності $D = 10$ завдяки скороченню аномалій теорії суперструн Гріна-Шварца є послідовними квантовими теоріями. Тому у даному підрозділі будуть розглянуті супертвісторні формулювання $D = 6$ та $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструн, які були запропоновані у нашій роботі [229].

Побудова таких формулювань вимагає узагальнення супертвісторів Фербера на розмірності $D > 4$, яке не є однозначним як вказують попередні дослідження [255], [234], [256], [257], [237], [258], [259]. Для означення супертвісторів у вищих розмірностях накладемо ті ж дві умови, які використовувались для побудови супертвісторних формулювань $D = 4$ суперструн. По-перше, вони мають нести фундаментальне представлення суперконформної алгебри у відповідній вимріності, а, по-друге, включати спінорні лоренцеві гармоніки.

Необхідно, однак, зазначити, що суперконформні алгебри, некомпактні бозонні підалгебри яких ізоморфні конформним алгебрам $so(2, D)$, існують лише у розмірностях $D \leq 6$ (див., наприклад, огляд [260] та посилання у ньому). Справа в тому, що генератори таких некомпактних бозонних підалгебр реалізуються матрицями зі спінорними індексами. У загальному випадку спінорне представлення має комплексну розмірність $2^{[D/2]}$ й для достатньо великих значень розмірності простору-часу вона стає більшою за D навіть після накладення майоранівської та/або вейлівської умов. Саме тому у розмірності $D = 10$ мінімальне суперсиметричне розширення $so(2, 10)$ конформної алгебри включає додаткові бозонні генератори та є ізоморфним $osp(32|1)$ супералгебрі [261]. Ця узагальнена суперконформна алгебра складається з генераторів бозонної симплектичної підалгебри $sp(32)$ та 32 генераторів суперсиметрії, які розкладаються на 16 генераторів суперсиметрії Пуанкаре та 16 генераторів спеціальної конформної суперсиметрії, представлених $D = 10$ майорана-вейлівськими спінорами різних кіральностей. 528 генераторів $sp(32)$ алгебри включають генератори $D = 10$ конформної алгебри разом із генераторами $A_{\underline{\hat{m}}[4]}$, $Z_{\underline{\hat{m}}[5]}$ та $Z'_{\underline{\hat{m}}[5]}$, які є антисиметричними $so(1, 9)$ тензорами [261].[33] Відзначимо, що згідно з гіпотезою, висунутою в роботі [262], контракція $osp(32|1)$ супералгебри відповідає симетрії, яка лежить в основі М-теорії.

У цьому розділі буде детально розглянуто випадок $D = 10$ суперструни з дією інваріантною відносно мінімальної $\mathcal{N} = 1$ суперсиметрії Пуанкаре. Вона представляє частину дії гетеротичної струни без урахування ступенів свободи, які реалізують генератори калібрувальної симетрії в теорії Янга-Міллса.[34] Відповідний лагранжіан буде виражено в термінах $OSp(32|1)$ супертвісторів [105]. Для того аби у супертвісторному формулюванні кількість фізичних ступенів свободи збігалась з їх кількістю в оригінальному формулюванні Гріна-Шварца та у лоренц-гармонічному формулюванні, необхідно накласти в'язі на супертвістори, форма яких була встановлена у нашій роботі [229]. Вони явно порушують (узагальнену) суперконформну симетрію до $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперсиметрії Пуанкаре, яка є глобальною

---

[33]Згідно з прийнятим позначенням число у квадратних дужках наведене слідом за індексом позначає набір антисиметризованих індексів, кількість яких дорівнює цьому числу.

[34]Нагадаємо, що супермультиплет Янга-Міллса входить до спектра безмасових збуджень гетеротичної струни.

симетрією суперструн Гріна-Шварца. Ці в'язі видаляють зі співвідношень інцидентності внески додаткових координат, так що залишаються лише координати простору Мінковського, які представляють параметри для генераторів імпульсу.

Пункти 3.3.1 та 3.3.2 присвячено твісторному формулюванню $D = 6$ суперструни. Після означення відповідних супертвісторів буде здобуто формулювання для лагранжіана суперструни, виведено рівняння руху та перетворення $\kappa-$симетрії в термінах їх компонентів. Подібно до випадку $D = 4$ суперструн також буде введено редуковану супертвісторну модель для $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни з квадратичним лагранжіаном. Узагальнення цих формулювань на випадок $D = 10$ суперструни буде розглянуто у пунктах 3.3.3 та 3.3.4.

3.3.1 $D = 6$ супертвістори та лоренцеві гармоніки

Як відомо $OSp(8^*|2)$ ортосимплектична супергрупа є мінімальною суперконформною групою у розмірності $D = 1 + 5$ [263]. Відзначимо, що структура її $osp(8^*|2)$ супералгебри відрізняється від структури ортосимплектичних супералгебр $osp(4|6)$ і $osp(4|8)$, які досліджувались у попередніх розділах, та $osp(32|1)$ супералгебри. У цих супералгебрах симплектична підалгебра є некомпактною, а ортогональна підалгебра компактна. Натомість $osp(8^*|2)$ супералгебра включає унітарно-симплектичну підалгебру $usp(2) = su(2)$, яка є компактною, та некомпактну ортогональну підалгебру $so(8^*) = so(2,6)$ ізоморфну конформній алгебрі, а також 16 генераторів суперсиметрії. Вона належить до іншого сімейства дійсних форм комплексних $osp(M|N,\mathbb{C})$ $(M = 2m)$ супералгебр ніж $osp(4|6)$ та $osp(4|8)$ супералгебри (див. огляд [260]).

За означенням $D = 6$ супертвістор перетворюється згідно з фундаментальним представленням $OSp(8^*|2)$

$$\mathcal{Z}^{\Lambda \mathrm{a}} = (\mu^{\underline{\alpha}\mathrm{a}},\ v_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{a}},\ \eta^{i\mathrm{a}}). \tag{3.58}$$

Будемо для компонентів $D = 6$ супертвісторів використовувати ті ж назви, як і для твісторів Пенроуза. Тож $\mu^{\underline{\alpha}\mathrm{a}}$ є головною спінорною частиною супертвістора, а $v_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{a}}$ – його проєкційною частиною. Вони перетворюються як $D = 6$ $SU(2)$-симплектичні майорана-вейлівські спінори різних кіральностей

$$(\mu^{\underline{\alpha}\mathrm{a}})^* = C^{\dot{\underline{\alpha}}}{}_{\underline{\beta}}\varepsilon_{\mathrm{ab}}\mu^{\underline{\beta}\mathrm{b}}, \quad (v_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{a}})^* = C^{-1\mathrm{T}}{}_{\dot{\underline{\alpha}}}{}^{\underline{\beta}}\varepsilon_{\mathrm{ab}}v_{\underline{\beta}}^{\mathrm{b}}. \tag{3.59}$$

Разом ці спінори складають $SU(2)$-симплектичний майорана-вейлівський $Spin(2,6)$ спінор. Відзначимо, що $D = 6$ матриця зарядового спряження $C^{\dot{\underline{\alpha}}}{}_{\underline{\beta}}$ та обернена до неї $C^{-1\underline{\beta}}{}_{\dot{\underline{\alpha}}}$ задовольняють співвідношення $(C^{\dot{\underline{\alpha}}}{}_{\underline{\beta}})^* = -C^{-1\underline{\alpha}}{}_{\dot{\underline{\beta}}}$. Прямі літери з початку латинської абетки позначають індекси фундаментального представлення групи $SU(2)$, відносно якої інваріантні одиничні антисиметричні тензори $\varepsilon_{\mathrm{ab}}$ і $\varepsilon^{\mathrm{ab}}$: $\varepsilon_{\mathrm{ab}}\varepsilon^{\mathrm{bc}} = \delta_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}}$. Проєкційну частину супертвістора $v_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{a}}$ буде ототожнено з одним із 4×2 прямокутних блоків матриці $D = 6$ спінорних лоренцевих гармонік. Тоді вказана $SU(2)$ група представляє один із факторів $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ групи. Остання є спінорною накривною $SO(4)$ групи обертань локального репера в ортогональному просторі до світового листка струни. Антикомутуючі компоненти супертвістора $\eta^{i\mathrm{a}}$ також несуть індекс i фундаментального представлення іншої $SU(2)$ групи. Це підгрупа $R-$симетрії $OSp(8^*|2)$ супергрупи, відносно якої перетворюються грассманові координати $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору. Відповідний інваріантний метричний тензор ε_{ij} використовується в означенні $SU(2)$-симплектичної майорана-вейлівської умови (3.64), яку задовольняють ці координати.

$D = 6$ спінорні лоренцеві гармоніки [67], [68] задовольняють умови дійсності

$$(v_{\underline{\alpha}}^{(\alpha)})^* = -C^{(\dot{\alpha})}{}_{(\underline{\beta})}v_{\underline{\beta}}^{(\beta)}C^{-1\underline{\beta}}{}_{\dot{\underline{\alpha}}}$$

та унімодулярності

$$\det v_{\underline{\alpha}}^{(\alpha)} = 1, \tag{3.60}$$

які зводять кількість їх незалежних компонентів до розмірності групи

$Spin(1,5)$ рівної 15. Як вказувалось у вступі лоренцеві гармоніки, які використовуються для опису (супер)струн у методі ортогонального репера, набувають значення у фактор-просторі $SO(1,D-1)/(SO(1,1)\times SO(D-2))$. У відповідності з цим 4×4 матриця $D=6$ спінорних лоренцевих гармонік розкладається на 4×2 прямокутні блоки

$$v_{\underline{\alpha}}^{(\alpha)} = (v_{\underline{\alpha}}^{+a}, v_{\underline{\alpha}}^{-\dot{a}}) \in Spin(1,5)/(SO(1,1)\times SU(2)\times SU(2)), \tag{3.61}$$

де курсивні латинські літери відповідають індексам фундаментальних представлень двох $SU(2)$ факторів у знаменнику. Кожен з цих блоків розглядається як проєкційна частина $OSp(8^*|2)$ супертвістора (3.58). Відтак лагранжіан $D=6$ суперструн у супертвісторному формулюванні буде включати два $OSp(8^*|2)$ супертвістори

$$\mathcal{Z}^{\Lambda+a} = (\mu^{\underline{\alpha}+a}, v_{\underline{\alpha}}^{+a}, \eta^{i+a}), \quad \mathcal{Z}^{\Lambda-\dot{a}} = (\mu^{\underline{\alpha}-\dot{a}}, v_{\underline{\alpha}}^{-\dot{a}}, \eta^{i-\dot{a}}). \tag{3.62}$$

На головні спінорні частини супертвісторів накладемо умови інцидентності

$$\mu^{\underline{\alpha}\mathrm{a}} = v_{\underline{\beta}}^{\mathrm{a}}(x^{\underline{\beta\alpha}} - 2i\theta_i^{\underline{\beta}}\theta^{\underline{\alpha}i}), \quad \eta^{i\mathrm{a}} = 2v_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{a}}\theta^{\underline{\alpha}i}, \tag{3.63}$$

де координати $D=6$ простору Мінковського реалізовано антисиметричними 4×4 матрицями $x^{\underline{\alpha\beta}} = x^{\underline{m}}\tilde{\gamma}_{\underline{m}}^{\underline{\alpha\beta}}$, а $\theta^{\underline{\alpha}i}$ є грассмановими координатами $\mathcal{N}=1$ суперпростору. Подібно до бозонних компонентів супертвісторів вони задовольняють $SU(2)$-симплектичну майорана-вейлівську умову

$$(\theta^{\underline{\alpha}i})^* = -C^{\underline{\dot{\alpha}}}{}_{\underline{\beta}}\varepsilon_{ij}\theta^{\underline{\beta}j}. \tag{3.64}$$

Тому спінор $\theta^{\underline{\alpha}i}$ має 8 дійсних незалежних компонентів. Як наслідок з (3.64) та (3.59) випливає, що грассманово-непарні компоненти супертвісторів задовольняють умову $(\eta^{i\mathrm{a}})^* = -\varepsilon_{\mathrm{ab}}\varepsilon_{ij}\eta^{\mathrm{b}j}$ і, таким чином, мають 4 дійсні незалежні компоненти. Для того аби виконувались співвідношення інцидентності (3.63), на супертвістори (3.62) мають бути накладені 10 в'язей

$$\mathcal{Z}^{\Lambda+a}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma+b} = \mathcal{Z}^{\Lambda-\dot{a}}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma-\dot{b}} = \mathcal{Z}^{\Lambda+a}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma-\dot{a}} = 0. \tag{3.65}$$

Вони виключають внески антисиметричних тензорних координат $y^{\underline{lmn}}$, які у спінорній формі даються симетричною 4×4 матрицею $y^{\underline{\alpha\beta}} = y^{\underline{lmn}}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}_{\underline{lmn}}$. У (3.65) і далі $OSp(8^*|2)$-інваріантний скалярний добуток супертвісторів береться з використанням градуйовано-симетричної метрики

$$G_{\Lambda\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\underline{\alpha}}^{\beta} & 0 \\ \delta^{\alpha}_{\underline{\beta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\varepsilon_{ij} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що після накладення в'язей (3.65) супертвістори (3.62) мають ту ж кількість незалежних компонентів, як і координати $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору. Як було показано вище, кожен із супертвісторів має 4 дійсні грассманово-непарні компоненти, що в сумі дорівнює числу дійсних грассманових координат суперпростору. Також кожен супертвістор має 16 дійсних бозонних компонентів, тому пара супертвісторів, на які накладено в'язі (3.65) та (3.60), має 21 компоненту. Їх число дорівнює сумі числа координат $D = 6$ простору-часу та незалежних компонентів лоренцевих гармонік.

3.3.2 Супертвісторне формулювання $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни

Спочатку розглянемо дію $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у лоренц-гармонічному формулюванні

$$S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring}} = S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{kin}} + S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{WZ}}. \tag{3.66}$$

Її кінетичний член

$$S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}} \int\limits_{\Sigma} \left(e^{[+2]} n^{[-2]}_{\underline{m}} - e^{[-2]} n^{[+2]}_{\underline{m}}\right) \wedge \omega^{\underline{m}}(d) + \tfrac{c}{2} \int\limits_{\Sigma} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}$$

містить два дотичні до світового листка світлоподібні вектори $n^{[\pm 2]}_{\underline{m}}(\xi)$ з локального ортонормованого репера $n^{(n)}_{\underline{m}}(\xi) = \left(n^{[+2]}_{\underline{m}}, n^{[-2]}_{\underline{m}}, n^{(\mathbf{i})}_{\underline{m}}\right)$ та 1-форму

$\omega^{\underline{m}}(d) = dx^{\underline{m}} - id\theta^{\underline{\alpha}}_{i}\gamma_{\underline{m}\underline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}i}$ інваріантну відносно перетворень $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперсиметрії Пуанкаре. Член Весса-Зуміно в (3.66) дається виразом

$$S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\mathrm{WZ}} = \tfrac{is}{c\alpha'}\int\limits_{\Sigma} \omega^{\underline{m}}(d) \wedge d\theta^{\underline{\alpha}}_{i}\gamma_{\underline{m}\underline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}i}.$$

Вектори ортонормованого репера мають таку реалізацію в термінах введених спінорних лоренцевих гармонік (3.61)

$$n^{[+2]}_{\underline{m}} = \tfrac{1}{2}v^{+a}_{\underline{\alpha}}\tilde{\gamma}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}_{\underline{m}}v^{+b}_{\underline{\beta}}\varepsilon_{ab}, \quad n^{[-2]}_{\underline{m}} = -\tfrac{1}{2}v^{-\dot{a}}_{\underline{\alpha}}\tilde{\gamma}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}_{\underline{m}}v^{-\dot{b}}_{\underline{\beta}}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad n^{(\mathbf{i})}_{\underline{m}} = -\tfrac{1}{2}v^{+a}_{\underline{\alpha}}\tilde{\gamma}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}_{\underline{m}}v^{-\dot{b}}_{\underline{\beta}}\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{b}},$$

де $n^{(\mathbf{i})}_{\underline{m}}$ $((\mathbf{i}) = 1, ..., 4)$ є векторами репера оротогональними до світового листка, а матриці $\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{b}}$ є $SO(4)$-інваріантними.

У твісторному формулюванні проєкції суперсиметричної 1-форми $\omega^{\underline{m}}(d)$ на дотичні до світового листка компоненти репера $n^{[\pm 2]}_{\underline{m}}$ виражаються через введені супертвістори (3.62)

$$\begin{aligned}
\omega^{[+2]}(d) &= n^{[+2]}_{\underline{m}}\omega^{\underline{m}}(d) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ab}d\mathcal{Z}^{\Lambda+a}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma+b} \\
&= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ab}(d\mu^{\underline{\alpha}+a}v^{+b}_{\underline{\alpha}} + dv^{+a}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}+b} - i\varepsilon_{ij}d\eta^{i+a}\eta^{j+b}), \\
\omega^{[-2]}(d) &= n^{[-2]}_{\underline{m}}\omega^{\underline{m}}(d) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}d\mathcal{Z}^{\Lambda-\dot{a}}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma-\dot{b}} \\
&= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}(d\mu^{\underline{\alpha}-\dot{a}}v^{-\dot{b}}_{\underline{\alpha}} + dv^{-\dot{a}}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}-\dot{b}} - i\varepsilon_{ij}d\eta^{i-\dot{a}}\eta^{j-\dot{b}}).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Аналогічно можна представити проєкції $\omega^{\underline{m}}(d)$ на ортогональні до світового листка компоненти локального репера

$$\omega^{(\mathbf{i})}(d) = n^{(\mathbf{i})}_{\underline{m}}\omega^{\underline{m}}(d) = \tfrac{1}{4}(\mathcal{Z}^{\Lambda+a}G_{\Lambda\Sigma}d\mathcal{Z}^{\Sigma-\dot{a}} - d\mathcal{Z}^{\Lambda+a}G_{\Lambda\Sigma}\mathcal{Z}^{\Sigma-\dot{a}})\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{a}}. \tag{3.68}$$

Відтак дія $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни (3.66) у супертвісторному формулюванні набуває вигляду

$$\begin{aligned}
S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{string, stw}} &= \tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}}\int\limits_{\Sigma}\Big(e^{[+2]}\wedge\omega^{[-2]}(d) - e^{[-2]}\wedge\omega^{[+2]}(d)\Big) + \tfrac{c}{2}\int\limits_{\Sigma} e^{[-2]}\wedge e^{[+2]} \\
&+ \tfrac{is}{c\alpha'}\int\limits_{\Sigma}\Big(\tfrac{1}{2}\omega^{[-2]}(d)\wedge\varphi^{[+2]}(d) + \tfrac{1}{2}\omega^{[+2]}(d)\wedge\varphi^{[-2]}(d) - \omega^{(\mathbf{i})}(d)\wedge\varphi^{(\mathbf{i})}(d)\Big).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Член Весса-Зуміно включає також 1-форми квадратичні за грассманово-непарними компонентами супертвісторів

$$\varphi^{[+2]}(d) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ab}\mathcal{D}\eta_i^{+a}\eta^{i+b}, \quad \varphi^{[-2]}(d) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}}\eta^{i-\dot{b}},$$
$$\varphi^{(\mathbf{i})}(d) = \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}\eta_i^{+a}\eta^{i-\dot{a}} - \mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}}\eta^{i+a})\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{a}},$$

які порушують $OSp(8^*|2)$ суперконформну симетрію до $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ супер-Пуанкаре симетрії. Таке порушення пояснюється наявністю розмірного параметра натягу в дії суперструни. Розширені диференціали грассманово-непарних компонентів супертвісторів визначаються як

$$\mathcal{D}\eta_i^{+a} = 2v_{\underline{\alpha}}^{+a}d\theta_i^{\underline{\alpha}}$$
$$= d\eta_i^{+a} + \tfrac{1}{4}\Omega^{[+2][-2]}(d)\eta_i^{+a} - \tfrac{1}{2}\Omega^{[+2](\mathbf{i})}(d)\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a}\eta^-_{i\dot{a}} - \tfrac{1}{2}\Omega^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}(d)\sigma^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}{}_b{}^a\eta_i^{+b},$$
$$\mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}} = 2v_{\underline{\alpha}}^{-\dot{a}}d\theta_i^{\underline{\alpha}}$$
$$= d\eta_i^{-\dot{a}} - \tfrac{1}{4}\Omega^{[+2][-2]}(d)\eta_i^{-\dot{a}} - \tfrac{1}{2}\Omega^{[-2](\mathbf{i})}(d)\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a}\eta^+_{ia} + \tfrac{1}{2}\Omega^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}(d)\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})\dot{a}}{}_{\dot{b}}\eta_i^{-\dot{b}},$$

де $\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})\dot{a}}{}_{\dot{b}} = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a}\sigma^{(\mathbf{j})}_{a\dot{b}} - \tilde{\sigma}^{(\mathbf{j})\dot{a}a}\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{b}})$, $\sigma^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}{}_b{}^a = \frac{1}{4}(\sigma^{(\mathbf{i})}_{b\dot{a}}\tilde{\sigma}^{(\mathbf{j})\dot{a}a} - \sigma^{(\mathbf{j})}_{b\dot{a}}\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a})$. Вони включають розкладені на $so(1,1) \oplus so(4)$-коваріантні складові $(\Omega^{[+2][-2]}(d), \Omega^{[\pm 2](\mathbf{i})}(d), \Omega^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}(d))$ лівоінваріантні форми Картана, які узагальнюють спінові коефіцієнти (3.14) та (3.15). У методі допустимих варіацій ці 1-форми з диференціалами заміненими варіаціями є незалежними варіаційними параметрами для лоренцевих гармонік. Здобуте супертвісторне формулювання $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни (3.69) належить до результатів, які виносяться на захист.

Перейдемо до виведення твісторної форми рівнянь суперструни. Завдяки $SO(1,1) \times SO(4)$ калібрувальній симетрії її дії у лоренц-гармонічному (3.66) та супертвісторному формулюваннях (3.69) рівняння, які відповідають варіаційним параметрам $\Omega^{[+2][-2]}(\delta)$ та $\Omega^{(\mathbf{i})(\mathbf{j})}(\delta)$, задовольняються тотожно. Рівняння, які відповідають параметрам $\Omega^{[\pm 2](\mathbf{i})}(\delta)$, пов'язаним з $SO(1,5)/(SO(1,1) \times SO(4))$ формами Картана, та варіаціям компонентів цвайбайна, можна привести до вигляду

$$\omega^{[\pm 2]}(d) = c(\alpha')^{1/2} e^{[\pm 2]}, \quad \omega^{(\mathbf{i})}(d) = 0, \tag{3.70}$$

де 1-форми у лівій частині означені в (3.67) та (3.68). Рівняння (3.70) представляють супертвісторну форму рівнянь, які закріплюють орієнтацію локального репера відносно світового листка. В якості інших незалежних бозонних варіаційних параметрів виберемо пов'язані з 1-формами (3.67) та (3.68). Відповідні рівняння мають вигляд

$$\begin{gathered}
de^{[+2]} + \tfrac{1}{2} e^{[+2]} \wedge \Omega^{[+2][-2]}(d) + \tfrac{is}{2c(\alpha')^{1/2}} \mathcal{D}\eta_i^{+a} \wedge \mathcal{D}\eta_a^{i+} = 0, \\
de^{[-2]} - \tfrac{1}{2} e^{[-2]} \wedge \Omega^{[+2][-2]}(d) + \tfrac{is}{2c(\alpha')^{1/2}} \mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}} \wedge \mathcal{D}\eta_{\dot{a}}^{i-} = 0, \\
e^{[+2]} \wedge \Omega^{[-2](\mathbf{i})}(d) - e^{[-2]} \wedge \Omega^{[+2](\mathbf{i})}(d) - \tfrac{is}{c(\alpha')^{1/2}} \mathcal{D}\eta_i^{+a} \wedge \mathcal{D}\eta^{i-\dot{a}} \sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{a}} = 0.
\end{gathered}$$

Як наслідок репараметризаційної симетрії дії суперструни перші два з цих рівнянь задовольняються тотожно з урахуванням інших рівнянь. Ферміонні рівняння суперструни, які відповідають варіаційним параметрам $\mathcal{D}(\delta)\eta_i^{+a}$, $\mathcal{D}(\delta)\eta_i^{-\dot{a}}$, дорівнюють

$$(1+s) e^{[-2]} \wedge \mathcal{D}\eta_a^{i+} = (1-s) e^{[+2]} \wedge \mathcal{D}\eta_{\dot{a}}^{i-} = 0. \tag{3.71}$$

Подібно до ферміонних рівнянь $D = 4\, \mathcal{N} = 1$ суперструни (див. (3.43)) для будь якого значення параметра $s = \pm 1$ одне з наведених вище рівнянь обертається на тотожність, що відповідно до другої теореми Ньотер є наслідком κ-інваріантності дії (3.69). Тож і у випадку $D = 6\, \mathcal{N} = 1$ суперструни після переходу від суперпросторового до супертвісторного формулювання у лагранжіані залишаються суто калібрувальні ферміонні ступені свободи.

Явний вигляд $\kappa-$варіацій компонентів $OSp(8^*|2)$ супертвісторів та цвайбайна залежить від значення параметра s. При $s = 1$ маємо

$$\begin{gathered}
\delta_\kappa \mathcal{Z}^{\Lambda+a} = \tfrac{1}{2} \Omega^{[+2](\mathbf{i})}(\delta_\kappa) \tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a} \mathcal{Z}^{\Lambda-}_{\dot{a}}, \\
\delta_\kappa \mathcal{Z}^{\Lambda-\dot{a}} = \tfrac{1}{2} \Omega^{[-2](\mathbf{i})}(\delta_\kappa) \tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a} \mathcal{Z}^{\Lambda+}_{a} - (K^{\Sigma-\dot{a}} \mathcal{Z}^{-\dot{b}}_{\Sigma}) V^{\Lambda+}_{\dot{b}} - (K^{\Sigma-\dot{a}} \mathcal{Z}^{+b}_{\Sigma}) V^{\Lambda-}_{b} + K^{\Lambda-\dot{a}}, \\
\delta_\kappa e^{[+2]} = 0, \quad \delta_\kappa e^{[-2]} = \tfrac{1}{c(\alpha')^{1/2}} K^{\Lambda-\dot{a}} \mathcal{D}\mathcal{Z}^{-}_{\Lambda\dot{a}},
\end{gathered}$$

де

$$\Omega^{\pm 2\mathbf{i}}(\delta_\kappa) = \pm\tfrac{1}{c(\alpha')^{1/2}} K^{\Lambda - \dot{b}} e^{\nu[\pm 2]} \mathcal{D}_\nu \mathcal{Z}^{+a}_\Lambda \sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{b}},$$

а локальний параметр $\kappa^{i-\dot{a}}(\xi)$ представлено як грассманово-непарну компоненту супертвістора $K^{\Lambda-\dot{a}} = (0, 0, \kappa^{i-\dot{a}})$. Для $s = -1$ $\kappa-$варіації дорівнюють

$$\delta_\kappa \mathcal{Z}^{\Lambda + a} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[+2](\mathbf{i})}(\delta_\kappa)\tilde{\sigma}^{\mathbf{i}\dot{a}a}\mathcal{Z}^{\Lambda-}_{\dot{a}} - (K^{\Sigma+a}\mathcal{Z}^{+b}_\Sigma)V^{\Lambda-}_b - (K^{\Sigma+a}\mathcal{Z}^{-\dot{b}}_\Sigma)V^{\Lambda+}_{\dot{b}} + K^{\Lambda+a},$$

$$\delta_\kappa \mathcal{Z}^{\Lambda - \dot{a}} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[-2](\mathbf{i})}(\delta_\kappa)\tilde{\sigma}^{(\mathbf{i})\dot{a}a}\mathcal{Z}^{\Lambda+}_a,$$

$$\delta_\kappa e^{[+2]} = \tfrac{1}{c(\alpha')^{1/2}} K^{\Lambda+}_a \mathcal{D}\mathcal{Z}^{+a}_\Lambda, \quad \delta_\kappa e^{[-2]} = 0,$$

де

$$\Omega^{[\pm 2](\mathbf{i})}(\delta_\kappa) = \pm\tfrac{1}{c(\alpha')^{1/2}} K^{\Lambda + a} e^{\nu[\pm 2]} \mathcal{D}_\nu \mathcal{Z}^{-\dot{b}}_\Lambda \sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{b}}$$

та $K^{\Lambda+a} = (0, 0, \kappa^{i+a})$.

Як і у випадку $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни можна ввести редуковану супертвісторну модель, яка відповідає $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструні. Її дію можна здобути підстановкою рівнянь (3.70) до лагранжіана Весса-Зуміно. При $s = 1$ дія редукованої моделі має вигляд

$$\begin{aligned} S^{D=6,\mathcal{N}=1/2}_{\text{sstring,stw},s=1} &= \tfrac{1}{4(\alpha')^{1/2}} \int\limits_\Sigma \left(e^{[+2]} \wedge dz^{\hat{\alpha}-}_{\dot{a}} z^{-\dot{a}}_{\hat{\alpha}} + e^{[-2]} \wedge d\tilde{\mathcal{Z}}^{\Lambda+}_a \tilde{\mathcal{Z}}^{+a}_\Lambda \right) \\ &\quad + \tfrac{c}{2}\int\limits_\Sigma e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Відповідно при $s = -1$ вона дорівнює

$$\begin{aligned} S^{D=6,\mathcal{N}=1/2}_{\text{sstring,stw},s=-1} &= \tfrac{1}{4(\alpha')^{1/2}} \int\limits_\Sigma \left(e^{[+2]} \wedge d\tilde{\mathcal{Z}}^{\Lambda-}_{\dot{a}} \tilde{\mathcal{Z}}^{-\dot{a}}_\Lambda + e^{[-2]} \wedge dz^{\hat{\alpha}+}_a z^{+a}_{\hat{\alpha}} \right) \\ &\quad + \tfrac{c}{2}\int\limits_\Sigma e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

У функціоналах дії (3.72) та (3.73) $z^{\hat{\alpha}+a}$ і $z^{\hat{\alpha}-\dot{a}}$ є бозонними $D = 6$ твісторами, які задовольняють $SU(2)$-симплектичну майорана-вейлівську умову для $Spin(2, 6)$ спінорів

$$(z^{\hat{\alpha}+a})^* = B^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}\varepsilon_{ab} z^{\hat{\beta}+b}, \quad (z^{\hat{\alpha}-\dot{a}})^* = B^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} z^{\hat{\beta}-\dot{b}}.$$

$\tilde{\mathcal{Z}}_{\Lambda}^{+a}$ та $\tilde{\mathcal{Z}}_{\Lambda}^{-\dot{a}}$ є переозначеними супертвісторами, для яких співвідношення інцидентності з координатами суперпростору відрізняються від (3.63) і мають вигляд

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{Z}}^{\Lambda+a}=(\tilde{\mu}^{\underline{\alpha}+a},v_{\underline{\alpha}}^{+a},\tilde{\eta}^{i+a}):\\ \tilde{\mu}^{\underline{\alpha}+a}=v_{\underline{\beta}}^{+a}(x^{\underline{\beta\alpha}}-4i\theta_{i}^{\underline{\beta}}\theta^{\underline{\alpha}i}),\quad \tilde{\eta}^{i+a}=2\sqrt{2}v_{\underline{\alpha}}^{+a}\theta^{\underline{\alpha}i},\\ \tilde{\mathcal{Z}}^{\Lambda-\dot{a}}=(\tilde{\mu}^{\underline{\alpha}-\dot{a}},v_{\underline{\alpha}}^{-\dot{a}},\tilde{\eta}^{i-\dot{a}}):\\ \tilde{\mu}^{\underline{\alpha}-\dot{a}}=v_{\underline{\beta}}^{-\dot{a}}(x^{\underline{\beta\alpha}}-4i\theta_{i}^{\underline{\beta}}\theta^{\underline{\alpha}i}),\quad \tilde{\eta}^{i-\dot{a}}=2\sqrt{2}v_{\underline{\alpha}}^{-\dot{a}}\theta^{\underline{\alpha}i}.\end{gathered}\tag{3.74}$$

Можна також визначити редуковану супертвісторну модель, яка відповідає $D=6$ $\mathcal{N}=(2,0)$ суперструні. Її дію

$$\begin{aligned}S_{\text{sstring, stw}}^{D=6,\mathcal{N}=(1/2+1/2,0)}=\tfrac{1}{4(\alpha')^{1/2}}&\int\limits_{\Sigma}\Big(e^{[+2]}\wedge d\tilde{\mathcal{Z}}_{\dot{a}}^{\Lambda-}\tilde{\mathcal{Z}}_{\Lambda}^{-\dot{a}}+e^{[-2]}\wedge d\tilde{\mathcal{Z}}_{a}^{\Lambda+}\tilde{\mathcal{Z}}_{\Lambda}^{+a}\Big)\\ &+\tfrac{c}{2}\int\limits_{\Sigma}e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}\end{aligned}\tag{3.75}$$

можна здобути закріпленням калібрування $\kappa-$симетрії умовами $\eta^{1i+a}=\eta^{2i+a}$ та $\eta^{1i-\dot{a}}=\eta^{2i-\dot{a}}$ у супертвісторному формулюванні дії $D=6$ $\mathcal{N}=(2,0)$ суперструни. Ця модель суперструни формулюється у $D=6$ суперпросторі з двома грассмановими координатами $\theta^{\underline{\alpha}i1}$ та $\theta^{\underline{\alpha}i2}$, які є $SU(2)$-симплектичними майорана-вейлівськими $Spin(1,5)$ спінорами однієї кіральності. Її дія у супертвісторному формулюванні є узагальненням дії (3.69). Дія редукованої моделі (3.75) включає $\mathcal{N}=1$ супертвістори означені в (3.74). Необхідно зазначити, що (супер)твістори, які входять до функціоналів дії (3.72), (3.73) та (3.75), задовольняють алгебраїчні в'язі подібні до (3.65). Вони представляють суміш в'язей першого роду, які генерують $SU(2)\times SU(2)$ калібрувальну симетрію, та в'язей другого роду.

Запропоновані редуковані супертвісторні моделі (3.72), (3.73) і (3.75), які відповідають $D=6$ $\mathcal{N}=1$ та $\mathcal{N}=(2,0)$ суперструнам, виносяться на захист.

3.3.3 $D = 10$ супертвістори та лоренцеві гармоніки

Розгляд супертвісторного формулювання $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у попередньому пункті був підготовчим кроком до вивчення супертвісторного формулювання $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни, якому присвячено цей пункт. Як обговорювалось у вступній частині до цього підрозділу, $D = 10$ супертвістор

$$Z^{\mathbf{\Lambda}} = (\mu^{\hat{\alpha}}, v_{\underline{\hat{\alpha}}}, \eta)$$

має реалізовувати фундаментальне представлення $OSp(32|1)$ супергрупи, оскільки це мінімальна супергрупа, яка включає конформну групу у розмірності $D = 10$. Супертвістор складається з пари майорана-вейлівських $Spin(1,9)$ спінорів різних кіральностей та грассманово-непарного скаляра. Його проєкційною частиною має бути матриця спінорних лоренцевих гармонік, відтак ми приходимо до розгляду 16-плета $OSp(32|1)$ супертвісторів

$$Z^{\mathbf{\Lambda}(\hat{\alpha})} = (\mu^{\hat{\alpha}(\hat{\alpha})}, v_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(\hat{\alpha})}, \eta^{(\hat{\alpha})}).$$

Як відомо [66] пристосована до опису суперструн 16×16 матриця $D = 10$ спінорних лоренцевих гармонік $v_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(\hat{\alpha})} = (v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+}, v_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}^{-})$ набуває значення у $Spin(1,9)/(SO(1,1) \times SO(8))$ фактор-просторі. Вона розкладається на два 16×8 блоки відповідно до розкладу майорана-вейлівського спінорного представлення правої групи симетрії $Spin(1,9)_R$ на $\mathbf{8}_c$ і $\mathbf{8}_s$ майорана-вейлівські спінорні представлення накривної $SO(8)$ групи обертань локального репера в ортогональному просторі до світового листка. Відповідно, введений 16-плет супертвісторів розкладається на два октети супертвісторів

$$Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} = (\mu_A^{\hat{\alpha}+}, v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+}, \eta_A^{+}), \quad Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} = (\mu_{\dot{A}}^{\hat{\alpha}-}, v_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}^{-}, \eta_{\dot{A}}^{-}). \tag{3.76}$$

Додатковою вимогою до головних спінорних частин та грассманово-непарних компонентів супертвісторів є інцидентність координатам $D = 10$

$\mathcal{N}=1$ суперпростору Мінковського $(x^{\underline{\hat{m}}}, \theta^{\underline{\hat{\alpha}}})$

$$\mu^{\underline{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha})} = (x^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} - 8i\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}\theta^{\underline{\hat{\beta}}})v_{\underline{\hat{\beta}}}^{(\hat{\alpha})}, \quad \eta^{(\hat{\alpha})} = 4v_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(\hat{\alpha})}\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}, \tag{3.77}$$

де $x^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} = x^{\underline{\hat{m}}}\tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}$ $(\underline{\hat{m}} = 0, 1, ..., 9)$, а симетричні 16×16 матриці $\tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}$, $\sigma_{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}$ є аналогами релятивістських матриць Паулі у розмірності $D = 10$. Для того, аби співвідношення інцидентності (3.77) виконувались, на компоненти супертвісторів мають бути накладені в'язі. $OSp(32|1)$-інваріантні в'язі

$$\begin{gathered} N_{AB}^{+2} = Z_A^{\mathbf{\Lambda}+}G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}}Z_B^{\mathbf{\Sigma}+} = 0, \quad N_{\dot{A}\dot{B}}^{-2} = Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-}G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}}Z_{\dot{B}}^{\mathbf{\Sigma}-} = 0, \\ N_{A\dot{A}} = Z_A^{\mathbf{\Lambda}+}G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}}Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Sigma}-} = 0, \end{gathered} \tag{3.78}$$

де

$$G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\underline{\hat{\alpha}}}^{\underline{\hat{\beta}}} & 0 \\ -\delta_{\underline{\hat{\beta}}}^{\underline{\hat{\alpha}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

є ортосимплектичною метрикою, виключають внесок 120 координат, які описуються антисиметричним тензором $y^{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{n}}\underline{\hat{k}}}$. У спінорній формі ці координати описуються антисиметричною матрицею $y^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} = y^{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{n}}\underline{\hat{k}}}\tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{n}}\underline{\hat{k}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}$. У загальному випадку співвідношення інцидентності (3.77) також включають внесок 126 координат, які описуються (анти-)самодуальним тензором $z^{\underline{\hat{m}}[5]}$. Ці координати відповідають тензорним генераторам $Z_{\underline{\hat{m}}[5]}$ $osp(32|1)$ супералгебри. У спінорній формі ці координати описуються симетричною σ-безслідовою матрицею $z^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} = z^{\underline{\hat{m}}[5]}\tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}[5]}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}$. Аби виключити їх внесок до співвідношень інцидентності, на компоненти супертвісторів накладемо додаткові в'язі

$$N_{\underline{\hat{m}}_1 \cdots \underline{\hat{m}}_5} = (\mu_A^{\underline{\hat{\gamma}}+}v_A^{\underline{\hat{\delta}}-} + \mu_{\dot{A}}^{\underline{\hat{\gamma}}-}v_{\dot{A}}^{\underline{\hat{\delta}}+})\sigma_{\underline{\hat{m}}_1 \cdots \underline{\hat{m}}_5 \underline{\hat{\gamma}}\underline{\hat{\delta}}} = 0. \tag{3.79}$$

Ці в'язі порушують $OSp(32|1)$ симетрію до $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ супер-Пуанкаре симетрії, яка є симетрією суперструн з ненульовим натягом у розмірності $D = 10$, та містять 16×8 блоки матриці обернених спінорних лоренцевих гармонік

$$v_{(\hat{\alpha})}^{\underline{\hat{\alpha}}} = (v_A^{\underline{\hat{\alpha}}-}, v_{\dot{A}}^{\underline{\hat{\alpha}}+}): \quad v_{(\hat{\alpha})}^{\underline{\hat{\alpha}}}v_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(\hat{\beta})} = \delta_{(\hat{\alpha})}^{(\hat{\beta})}. \tag{3.80}$$

Ці співвідношення можна розглядати як означення обернених спінорних лоренцевих гармонік. У такому випадку їх необхідно додати до набору умов гармонічності, для того аби не вводити додаткові ступені свободи (див. обговорення в роботі [74]).

3.3.4 Супертвісторне формулювання $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни

Розглянемо тепер представлення для дії $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни в термінах $OSp(32|1)$ супертвісторів (3.76). Як і при обговоренні супертвісторних формулювань суперструн у нижчих розмірностях нагадаємо спочатку лоренц-гармонічне формулювання дії $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни [66], [74]

$$S_{\text{sstring}}^{D=10,\mathcal{N}=1} = S_{\text{kin}}^{D=10,\mathcal{N}=1} + S_{\text{WZ}}^{D=10,\mathcal{N}=1},$$

де кінетичний член

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}}^{D=10,\mathcal{N}=1} = \tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}} \int\limits_{\Sigma} \left(e^{[+2]} n_{\underline{\hat{m}}}^{[-2]} - e^{[-2]} n_{\underline{\hat{m}}}^{[+2]} \right) \wedge \omega^{\underline{\hat{m}}}(d) \\ + \tfrac{c}{2} \int\limits_{\Sigma} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]} \end{aligned} \tag{3.81}$$

та член Весса-Зуміно

$$S_{\text{WZ}}^{D=10,\mathcal{N}=1} = \tfrac{is}{c\alpha'} \int\limits_{\Sigma} \omega^{\underline{\hat{m}}}(d) \wedge d\theta^{\underline{\hat{\alpha}}} \sigma_{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} \theta^{\underline{\hat{\beta}}}$$

включають 1-форми $\omega^{\underline{\hat{m}}}(d) = dx^{\underline{\hat{m}}} - id\theta^{\underline{\hat{\alpha}}} \sigma^{\underline{\hat{m}}}_{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} \theta^{\underline{\hat{\beta}}}$ інваріантні відносно $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперсиметрії Пуанкаре. Кінетичний член (3.81) включає також два дотичні до світового листка світлоподібні вектори $n_{\underline{\hat{m}}}^{[\pm 2]}(\xi)$ зі складу локального $D = 10$ ортонормованого репера $n_{\underline{\hat{m}}}^{(\hat{n})}(\xi) = \left(n_{\underline{\hat{m}}}^{[+2]}, n_{\underline{\hat{m}}}^{[-2]}, n_{\underline{\hat{m}}}^{(\mathbf{I})} \right)$. Ці вектори мають наступне представлення в термінах спінорних гармонік

$$n_{\underline{\hat{m}}}^{[+2]} = \tfrac{1}{8} v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+} \tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} v_{\underline{\hat{\beta}}A}^{+}, \quad n_{\underline{\hat{m}}}^{[-2]} = \tfrac{1}{8} v_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}^{-} \tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} v_{\underline{\hat{\beta}}\dot{A}}^{-}, \quad n_{\underline{\hat{m}}}^{(\mathbf{I})} = \tfrac{1}{8} v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+} \tilde{\sigma}_{\underline{\hat{m}}}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}} v_{\underline{\hat{\beta}}\dot{A}}^{-} \gamma_{A\dot{A}}^{(\mathbf{I})}, \tag{3.82}$$

де $(\mathbf{I}) = 1, ..., 8$ – $SO(8)$ векторний індекс, а $\gamma_{A\dot{A}}^{(\mathbf{I})}$ – 8×8 кіральні γ-матриці у розмірності $D = 8$.

Узагальнюючи обговорення попередніх пунктів на розмірність $D = 10$, виразимо проєкції 1-форми $\omega^{\hat{\underline{m}}}(d)$ на вектори локального репера в термінах $OSp(32|1)$ супертвісторів (3.76) з використанням представлення (3.82)

$$\begin{aligned} \omega^{[+2]}(d) &= \omega^{\hat{\underline{m}}}(d) n^{[+2]}_{\hat{\underline{m}}} = \tfrac{1}{8} dZ^{\mathbf{\Lambda}+}_{A} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} Z^{\mathbf{\Sigma}+}_{A}, \\ \omega^{[-2]}(d) &= \omega^{\hat{\underline{m}}}(d) n^{[-2]}_{\hat{\underline{m}}} = \tfrac{1}{8} dZ^{\mathbf{\Lambda}-}_{\dot{A}} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} Z^{\mathbf{\Sigma}-}_{\dot{A}} \end{aligned} \tag{3.83}$$

та

$$\omega^{(\mathbf{I})}(d) = \omega^{\hat{\underline{m}}}(d) n^{(\mathbf{I})}_{\hat{\underline{m}}} = \tfrac{1}{16} \gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} (dZ^{\mathbf{\Lambda}+}_{A} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} Z^{\mathbf{\Sigma}-}_{\dot{A}} + dZ^{\mathbf{\Lambda}-}_{\dot{A}} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} Z^{\mathbf{\Sigma}+}_{A}). \tag{3.84}$$

У результаті здобуваємо супертвісторне формулювання дії $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни

$$\begin{aligned} S^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring,stw}} = \tfrac{1}{2(\alpha')^{1/2}} & \int\limits_{\Sigma} \Big(e^{[+2]} \wedge \omega^{[-2]}(d) - e^{[-2]} \wedge \omega^{[+2]}(d) \Big) \\ & + \tfrac{c}{2} \int\limits_{\Sigma} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]} \\ + \tfrac{is}{c\alpha'} \int\limits_{\Sigma} \Big(\tfrac{1}{2} \omega^{-2}(d) \wedge \varphi^{+2}(d) & + \tfrac{1}{2} \omega^{+2}(d) \wedge \varphi^{-2}(d) - \omega^{\mathbf{I}}(d) \wedge \varphi^{\mathbf{I}}(d) \Big) . \end{aligned} \tag{3.85}$$

До останнього рядка у (3.85) дают внесок 1-форми квадратичні за грассманово-непарними компонентами супертвісторів

$$\begin{gathered} \varphi^{[+2]}(d) = \tfrac{1}{8} \mathcal{D}\eta^{+}_{A} \eta^{+}_{A}, \quad \varphi^{[-2]}(d) = \tfrac{1}{8} \mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}} \eta^{-}_{\dot{A}}, \\ \varphi^{(\mathbf{I})}(d) = \tfrac{1}{16} \gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} (\mathcal{D}\eta^{+}_{A} \eta^{-}_{\dot{A}} + \mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}} \eta^{+}_{A}). \end{gathered}$$

Вони інваріантні лише відносно $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ супер-Пуанкаре підгрупи $OSp(32|1)$ узагальненої суперконформної симетрії. Розширені диференціали непарних компонентів супертвісторів η^{+}_{A} та $\eta^{-}_{\dot{A}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\eta^{+}_{A} &= d\eta^{+}_{A} + \tfrac{1}{4} \Omega^{[+2][-2]}(d) \eta^{+}_{A} - \tfrac{1}{2} \Omega^{[+2](\mathbf{I})}(d) \gamma^{\mathbf{I}}_{A\dot{A}} \eta^{-}_{\dot{A}} - \tfrac{1}{4} \Omega^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(d) \gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{AB} \eta^{+}_{B}, \\ \mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}} &= d\eta^{-}_{\dot{A}} - \tfrac{1}{4} \Omega^{[+2][-2]}(d) \eta^{-}_{\dot{A}} - \tfrac{1}{2} \Omega^{[-2](\mathbf{I})}(d) \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} \eta^{+}_{A} - \tfrac{1}{4} \Omega^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(d) \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\dot{A}\dot{B}} \eta^{-}_{\dot{B}} \end{aligned} \tag{3.86}$$

включають антисиметричні матриці $\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{AB} = \frac{1}{2}(\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} \tilde{\gamma}^{(\mathbf{J})}_{\dot{A}B} - \gamma^{(\mathbf{J})}_{A\dot{A}} \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}B})$ і $\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} \gamma^{(\mathbf{J})}_{A\dot{B}} - \tilde{\gamma}^{(\mathbf{J})}_{\dot{A}A} \gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{B}})$, які є генераторами $spin(8)$ алгебри у **s** та **c** представленнях, та дериваційні коефіцієнти $D = 10$ ортонормованого репера, які дорівнюють лівоінваріантним формам Картана у $so(1,1)\oplus so(8)$ базисі. Ці форми Картана, а також 1-форми (3.83), (3.84) та (3.86), в яких диференціали замінено варіаціями, буде взято в якості незалежних параметрів у допустимих варіаціях супертвісторів (3.76). Вигляд варіацій супертвісторів, сумісних із в'язями (3.78) та (3.79), було знайдено у нашій роботі [229]. Вони застосовуються для виведення рівнянь руху суперструни.

Представлене супертвісторне формулювання $D=10\,\mathcal{N}=1$ суперструни (3.85) виноситься на захист.

Набір незалежних бозонних рівнянь $D=10\,\mathcal{N}=1$ суперструни у супертвісторному формулюванні включає рівняння, які закріплюють орієнтацію локального репера відносно світового листка

$$\omega^{[\pm 2]}(d)=c(\alpha')^{1/2}e^{[\pm 2]},\quad \omega^{(\mathbf{I})}(d)=0. \tag{3.87}$$

Вони є аналогами рівнянь (3.41) та (3.70) для суперструн у нижчих розмірностях. Інші незалежні бозонні рівняння можна записати у формі

$$e^{[-2]}\wedge\Omega^{[+2](\mathbf{I})}(d)-e^{[+2]}\wedge\Omega^{[-2](\mathbf{I})}(d)-\tfrac{is}{4c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}\eta^{+}_{A}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}\wedge\mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}}=0. \tag{3.88}$$

Відзначимо, що рівняння, які відповідають параметрам $\Omega^{[+2][-2]}(\delta)$ та $\Omega^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(\delta)$ задовольняються тотожно як наслідок $SO(1,1)\times SO(8)$ калібрувальної інваріантності дії (3.85). Аналогічно рівняння, які відповідають параметрам $\omega^{[\pm 2]}(\delta)$, обертаються на тотожності через репараметризаційну симетрію дії. З використанням рівнянь (3.87) та (3.88) ферміонні рівняння суперструни набувають наступного вигляду

$$(1+s)e^{[-2]}\wedge\mathcal{D}\eta^{+}_{A}=0,\quad (1-s)e^{[+2]}\wedge\mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}}=0.$$

Така форма цих рівнянь подібна до відповідної форми рівнянь для $D=4$ та $D=6$ суперструн (див. рівняння (3.43) та (3.71)) й віддзеркалює інваріантність дії відносно незвідних перетворень κ-симетрії.

Явний вигляд κ-варіацій компонентів супертвісторів та цвайбайна при

$s=1$ є таким

$$\delta_\kappa Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[+2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa)\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-},$$

$$\delta_\kappa Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[-2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa)\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} - (K_{\dot{A}}^{\mathbf{\Sigma}-} Z^-_{\mathbf{\Sigma}\dot{B}})V_{\dot{B}}^{\mathbf{\Lambda}+} - (K_{\dot{A}}^{\mathbf{\Sigma}-} Z^+_{\mathbf{\Sigma}B})V_B^{\mathbf{\Lambda}-} + K_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-},$$

$$\delta_\kappa e^{[+2]} = 0, \quad \delta_\kappa e^{[-2]} = \tfrac{1}{4c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} K^-_{\mathbf{\Lambda}\dot{A}},$$

де

$$\Omega^{[\pm2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa) = \pm\tfrac{1}{8c(\alpha')^{1/2}} e^{\mu[\pm2]}\mathcal{D}_\mu Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} K^-_{\mathbf{\Lambda}\dot{A}}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}$$

та $K_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} = (0,0,\kappa^-_{\dot{A}})$ є супертвісторною формою калібрувального параметра $\kappa^-_{\dot{A}}(\xi)$. Відповідно при $s=-1$ варіації мають вигляд

$$\delta_\kappa Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[+2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa)\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} - (K_A^{\mathbf{\Sigma}+} Z^+_{\mathbf{\Sigma}B})V_B^{\mathbf{\Lambda}-} - (K_A^{\mathbf{\Sigma}+} Z^-_{\mathbf{\Sigma}\dot{B}})V_{\dot{B}}^{\mathbf{\Lambda}+} + K_A^{\mathbf{\Lambda}+},$$

$$\delta_\kappa Z_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} = \tfrac{1}{2}\Omega^{[-2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa)\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} Z_A^{\mathbf{\Lambda}+},$$

$$\delta_\kappa e^{[+2]} = \tfrac{1}{4c(\alpha')^{1/2}}\mathcal{D}Z_A^{\mathbf{\Lambda}+} K^+_{\mathbf{\Lambda}A}, \quad \delta_\kappa e^{[-2]} = 0,$$

де

$$\Omega^{[\pm2](\mathbf{I})}(\delta_\kappa) = \pm\tfrac{1}{8c(\alpha')^{1/2}} e^{\mu[\pm2]} K_A^{\mathbf{\Lambda}+}\mathcal{D}_\mu Z^-_{\mathbf{\Lambda}\dot{A}}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}$$

з $K_A^{\mathbf{\Lambda}+} = (0,0,\kappa^+_A)$.

Подібно до випадків суперструн у розмірностях $D=4$ та $D=6$ введемо редуковану супертвісторну модель, яка відповідає $D=10$ $\mathcal{N}=1$ суперструні та має квадратичний за супертвісторами лагранжіан. Її дію означимо інтеґралом

$$\begin{aligned} S^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring, stw}, s=1} = \tfrac{1}{16(\alpha')^{1/2}} &\int\limits_\Sigma \left(e^{[+2]}\wedge dz^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}-}_{\dot{A}} z^-_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\dot{A}} - e^{[-2]}\wedge d\tilde{Z}_A^{\mathbf{\Lambda}+}\tilde{Z}^+_{\mathbf{\Lambda}A}\right) \\ &+\tfrac{c}{2}\int\limits_\Sigma e^{[-2]}\wedge e^{[+2]} \end{aligned} \tag{3.89}$$

або

$$\begin{aligned} S^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring, stw}, s=-1} = \tfrac{1}{16(\alpha')^{1/2}} &\int\limits_\Sigma \left(e^{[+2]}\wedge d\tilde{Z}_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-}\tilde{Z}^-_{\mathbf{\Lambda}\dot{A}} - e^{[-2]}\wedge dz^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}+}_A z^+_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}A}\right) \\ &+\tfrac{c}{2}\int\limits_\Sigma e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Наведені функціонали дії можна здобути підстановкою рівнянь (3.87) до дії (3.85). Дія (3.89) відповідає значенню $s = 1$ знакового параметра в (3.85), тоді як дія (3.90) – значенню $s = -1$. Співвідношення інцидентності для компонентів супертвісторів, які входять до (3.89) та (3.90), мають форму

$$\begin{gathered}
\tilde{Z}_{A}^{\mathbf{\Lambda}+} = (\tilde{\mu}_{A}^{\hat{\alpha}+}, v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+}, \tilde{\eta}_{A}^{+}) : \\
\tilde{\mu}_{A}^{\hat{\alpha}+} = (x^{\underline{\hat{\alpha}\hat{\beta}}} - 16i\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}\theta^{\underline{\hat{\beta}}})v_{\underline{\hat{\beta}}A}^{+}, \quad \tilde{\eta}_{A}^{+} = 4\sqrt{2}v_{\underline{\hat{\alpha}}A}^{+}\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}, \\
\tilde{Z}_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} = (\tilde{\mu}_{\dot{A}}^{\hat{\alpha}-}, v_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}^{-}, \tilde{\eta}_{\dot{A}}^{-}) : \\
\tilde{\mu}_{\dot{A}}^{\hat{\alpha}-} = (x^{\underline{\hat{\alpha}\hat{\beta}}} - 16i\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}\theta^{\underline{\hat{\beta}}})v_{\underline{\hat{\beta}}\dot{A}}^{-}, \quad \tilde{\eta}_{\dot{A}}^{-} = 4\sqrt{2}v_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}^{-}\theta^{\underline{\hat{\alpha}}}.
\end{gathered} \tag{3.91}$$

Функціонали дії (3.89) та (3.90) також включають 32-компонентні $Sp(32)$ твістори $z_{A}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}+}$, $z_{\dot{A}}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}-}$. Зазначимо, що на ці (супер)твістори мають бути накладені в'язі подібні до в'язей (3.78) та (3.79) для виключення зі співвідношень інцидентності координат, які відповідають тензорним генераторам $sp(32)$ алгебри.

Подібно до наведеного вище розгляду можна здобути супертвісторне представлення для суперструн типу II у лоренц-гармонічному формулюванні [66], [74] та означити відповідну редуковану супертвісторну модель. Наприклад, дія редукованої супертвісторної моделі для суперструни типу IIB здобувається із її дії у супертвісторному формулюванні закріпленням калібрування $\kappa-$симетрії умовами $\eta_{A}^{1+} = \eta_{A}^{2+}$, $\eta_{\dot{A}}^{1-} = \eta_{\dot{A}}^{2-}$

$$\begin{gathered}
S_{\text{sstring, stw, gf}}^{D=10,\text{IIB}} = \frac{1}{16(\alpha)^{1/2}} \int_{\Sigma} \Big(e^{[+2]} \wedge d\tilde{Z}_{\dot{A}}^{\mathbf{\Lambda}-} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} \tilde{Z}_{\dot{A}}^{\mathbf{\Sigma}-} - e^{[-2]} \wedge d\tilde{Z}_{A}^{\mathbf{\Lambda}+} G_{\mathbf{\Lambda\Sigma}} \tilde{Z}_{A}^{\mathbf{\Sigma}+} \Big) \\
+ \frac{c}{2} \int_{\Sigma} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}.
\end{gathered} \tag{3.92}$$

Відмітимо, що він включає обидва октети $\mathcal{N} = 1$ супертвісторів (3.91).

Запропоновані редуковані супертвісторні моделі (3.89), (3.90) та (3.92) виносяться на захист.

3.4 Гамільтонів опис $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні

Цей підрозділ присвячено вивченню моделі $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні (3.85) як гамільтонової системи з в'язями. Подібно до розгляду у пункті 3.2.3 гамільтонової механіки редукованої супертвісторної моделі у розмірності $D = 4$ будемо використовувати листкову векторну густину замість компонентів цвайбайна, від яких лагранжіан суперструни залежить нелінійно. У такому випадку приходимо до дії суперструни

$$S'^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring,stw}} = \int_{\Sigma} d^2\xi \mathscr{L}^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring,stw}}(\xi) \tag{3.93}$$

з густиною лагранжіана

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring,stw}}(\xi) = -\tfrac{1}{2c\alpha'}\Big(\rho^{\mu[+2]}\omega_\mu^{[-2]} + \rho^{\mu[-2]}\omega_\mu^{[+2]} + \varepsilon_{\mu\nu}\rho^{\mu[-2]}\rho^{\nu[+2]}\Big) \\ +\tfrac{is}{c\alpha'}\varepsilon^{\mu\nu}\Big(\tfrac{1}{2}\omega_\mu^{[+2]}\varphi_\nu^{[-2]} + \tfrac{1}{2}\omega_\mu^{[-2]}\varphi_\nu^{[+2]} - \omega_\mu^{(\mathbf{I})}\varphi_\nu^{(\mathbf{I})}\Big). \end{aligned} \tag{3.94}$$

У пункті 3.4.1 буде встановлено вигляд в'язей, які випливають з означень імпульсів для динамічних змінних у лагранжіані (3.94), та проведено їх класифікацію за родами. Далі у пункті 3.4.2 буде описано базис для в'язей другого роду, в якому матриця Дірака набуває вигляду суми блочно-діагональної суперматриці пропорційної $(\alpha')^{-1}$ та суперматриці лінійної за в'язями, означено дужки Дірака та обчислено деформацію алгебри в'язей першого роду у провідному порядку за α'.

3.4.1 Повний гамільтоніан та в'язі першого роду

Визначимо густини імпульсів

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{M}}(\tau,\sigma) = \tfrac{\vec{\delta} S'^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring,stw}}}{\delta\partial_\tau Q^{\mathfrak{M}}(\tau,\sigma)} \\ = \Big\{ p^-_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A}, p^+_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}, p^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{(v)A}, p^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{(v)\dot{A}}, \pi^-_{A}, \pi^+_{\dot{A}}, p^+_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A}, p^-_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}, P^{\pm 2}_{\mu} \Big\}, \end{aligned}$$

спряжених компонентам супертвісторів та листкової векторної густини

$$Q^{\mathfrak{M}}(\tau,\sigma)=\left\{\mu^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{A},\mu^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{\dot{A}},v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A},v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}},\eta^{+}_{A},\eta^{-}_{\dot{A}},v^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{A},v^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{\dot{A}},\rho^{\mu\pm2}\right\}$$

на дужках Пуассона

$$\{P_{\mathfrak{M}}(\sigma),Q^{\mathfrak{N}}(\sigma')\}=\delta^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{M}}\delta(\sigma-\sigma').$$

Відзначимо, що матрицю обернених спінорних гармонік (3.80) було додано до набору координат, а до набору імпульсів – $p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A}$ та $p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}$. У такому випадку співвідношення, які визначають матрицю обернених спінорних гармонік,

$$v^{(\hat{\alpha})}_{\underline{\hat{\alpha}}}v^{\hat{\underline{\alpha}}}_{(\hat{\beta})}-\delta^{(\hat{\alpha})}_{(\hat{\beta})}\approx 0 \tag{3.95}$$

необхідно додати до набору первинних в'язей суперструни.

Означення густин імпульсів приводить до первинних в'язей. Серед них є в'язі, які випливають із означень густин імпульсів спряжених головним спінорним частинам супертвісторів (3.76)

$$\begin{aligned}
\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}A}(\sigma)&=p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A}+\tfrac{1}{16\alpha'}\Big(\rho^{\tau[-2]}-is\varphi^{[-2]}_{\sigma}\Big)v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}+\tfrac{is}{16\alpha'}\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}\approx 0,\\
\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}(\sigma)&=p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}+\tfrac{1}{16\alpha'}\Big(\rho^{\tau[+2]}-is\varphi^{[+2]}_{\sigma}\Big)v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}+\tfrac{is}{16\alpha'}\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}\approx 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

та грассманово-непарним компонентам супертвіторів

$$\begin{aligned}
D^{-}_{A}(\sigma)&=\pi^{-}_{A}+\tfrac{1}{16\alpha'}\left(is\omega^{[-2]}_{\sigma}-s\varphi^{[-2]}_{\sigma}-i\rho^{\tau[-2]}\right)\eta^{+}_{A}\\
&+\tfrac{s}{16\alpha'}\left(\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}-i\omega^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\right)\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}\eta^{-}_{\dot{A}}+\tfrac{i}{2}(v^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{B}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A}-v^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{A}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}B})\eta^{+}_{B}\\
&+\tfrac{i}{2}(v^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{\dot{B}}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A}-v^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{A}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}})\eta^{-}_{\dot{B}}\approx 0,\\
D^{+}_{\dot{A}}(\sigma)&=\pi^{+}_{\dot{A}}+\tfrac{1}{16\alpha'}\left(is\omega^{[+2]}_{\sigma}-s\varphi^{[+2]}_{\sigma}-i\rho^{\tau[+2]}\right)\eta^{-}_{\dot{A}}\\
&+\tfrac{s}{16\alpha'}\left(\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}-i\omega^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\right)\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\eta^{+}_{A}+\tfrac{i}{2}(v^{\hat{\underline{\alpha}}-}_{B}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}-v^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{\dot{A}}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}B})\eta^{+}_{B}\\
&+\tfrac{i}{2}(v^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{\dot{B}}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}-v^{\hat{\underline{\alpha}}+}_{\dot{A}}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}})\eta^{-}_{\dot{B}}\approx 0.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Набір первинних в'язей також включає в'язі, які визначають густини імпульсів для спінорних гармонік

$$\begin{aligned} T^{\hat{\alpha}-}_{A}(\sigma) &= p^{\hat{\alpha}-}_{(v)A} + \tfrac{1}{16\alpha'}\left(is\varphi^{[-2]}_{\sigma} - \rho^{\tau[-2]}\right)\mu^{\hat{\alpha}+}_{A} - \tfrac{is}{16\alpha'}\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}} \\ &+ \tfrac{is}{256\alpha'}\left[\tfrac{1}{2}\omega^{[-2]}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{+}\right) + \tfrac{1}{2}\omega^{[+2]}_{\sigma}\left(\eta^{-}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{-}\right)\right. \\ &\left. -\omega^{(\mathbf{K})}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})(\mathbf{K})}\eta^{-}\right)\right]\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{AB}v^{\hat{\alpha}-}_{B} + \tfrac{is}{128\alpha'}\omega^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\eta^{-}\right)v^{\hat{\alpha}-}_{A} \\ &+ \tfrac{is}{128\alpha'}\left[\omega^{[-2]}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\eta^{-}\right) + \omega^{(\mathbf{J})}_{\sigma}\left(\eta^{-}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{-}\right)\right]\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} \approx 0, \end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned} T^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}(\sigma) &= p^{\hat{\alpha}+}_{(v)\dot{A}} + \tfrac{1}{16\alpha'}\left(is\varphi^{[+2]}_{\sigma} - \rho^{\tau[+2]}\right)\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}} - \tfrac{is}{16\alpha'}\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\mu^{\alpha+}_{A} \\ &+ \tfrac{is}{256\alpha'}\left[\tfrac{1}{2}\omega^{[-2]}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{+}\right) + \tfrac{1}{2}\omega^{[+2]}_{\sigma}\left(\eta^{-}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{-}\right)\right. \\ &\left. -\omega^{(\mathbf{K})}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})(\mathbf{K})}\eta^{-}\right)\right]\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\dot{A}\dot{B}}v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{B}} - \tfrac{is}{128\alpha'}\omega^{(\mathbf{I})}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\eta^{-}\right)v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} \\ &- \tfrac{is}{128\alpha'}\left[\omega^{[+2]}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\eta^{-}\right) - \omega^{(\mathbf{J})}_{\sigma}\left(\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\eta^{+}\right)\right]\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}v^{\hat{\alpha}-}_{A} \approx 0 \end{aligned} \tag{3.99}$$

та обернених спінорних гармонік

$$p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A}(\sigma) \approx 0, \quad p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}(\sigma) \approx 0. \tag{3.100}$$

Крім того обертаються на нуль імпульси для компонентів листкової векторної густини $\rho^{\mu[\pm 2]}$

$$P^{[\pm 2]}_{\tau}(\sigma) \approx 0, \tag{3.101}$$

$$P^{[\pm 2]}_{\sigma}(\sigma) \approx 0. \tag{3.102}$$

Набір первинних в'язей (3.96)-(3.102) необхідно розширити додаванням в'язей на лоренцеві гармоніки. 16×16 матриця спінорних гармонік $v^{(\hat{\alpha})}_{\underline{\hat{\alpha}}}$ задовольняє 211 співвідношень [67], [68], [66], які зводять число її незалежних компонентів до розмірності групи $Spin(1,9)$ рівної 45

$$\begin{aligned} n^{(\hat{k})}_{\underline{\hat{m}}}v^{(\hat{\alpha})}_{\underline{\hat{\alpha}}}\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{m}}_1\ldots\underline{\hat{m}}_4\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}v^{(\hat{\beta})}_{\underline{\hat{\beta}}}\sigma_{(\hat{k})(\hat{\alpha})(\hat{\beta})} \approx 0, \\ n^{[+2]}_{\underline{\hat{m}}}n^{\underline{\hat{m}}[-2]} - 2 = \tfrac{1}{64}(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}_{\underline{m}}v^{+}_{\underline{\hat{\beta}}A})(v^{-}_{\underline{\hat{\gamma}}\dot{A}}\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{m}}\underline{\hat{\gamma}}\underline{\hat{\delta}}}v^{-}_{\underline{\hat{\delta}}\dot{A}}) - 2 \approx 0. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Як обговорювалось вище, співвідношення (3.95), які визначають матрицю обернених спінорних гармонік, також мають розглядатись як первинні в'язі. Зрештою до набору первинних в'язей необхідно включити $120 + 126$ в'язей на компоненти супертвісторів (3.78) та (3.79).

Як було показано в роботі [74], канонічний аналіз моделей (супер)струн у лоренц-гаромнічному формулюванні істотно спрощується, якщо розглядати в'язі (3.95), які визначають обернені спінорні гармоніки, та умови гармонічності (3.103) як рівності у сильному смислі. Для цього було знайдено проєкції в'язей, які випливають із означень імпульсів для лоренцевих гармонік та утворюють спряжені пари в'язей другого роду із в'язями (3.95) і (3.103). Також було введено відповідні дужки Дірака. Привабливою особливістю таких дужок Дірака є те, що вони співпадають з дужками Пуассона у підпросторі фазового простору, який визначається іншими в'язями моделі. У супертвісторному формулюванні цей підпростір включає первинні в'язі (3.78), (3.79), (3.96), (3.97), (3.101), (3.102) та генератори $so(1,9)_R$ алгебри у $so(1,1)\oplus so(8)$ базисі

$$
\begin{aligned}
\hat{M}^{[+2][-2]}(\sigma) &= v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}T^{\hat{\alpha}-}_{A} - v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}T^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} - v^{\hat{\alpha}-}_{A}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A} + v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} \\
&\quad + \mu^{\hat{\alpha}+}_{A}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}A} - \mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \eta^{+}_{A}D^{-}_{A} - \eta^{-}_{\dot{A}}D^{+}_{\dot{A}} \approx 0, \\
\hat{M}^{[+2](\mathbf{I})}(\sigma) &= -\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}T^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} - v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A} + \mu^{\hat{\alpha}+}_{A}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \eta^{+}_{A}D^{+}_{\dot{A}}) \approx 0, \\
\hat{M}^{[-2](\mathbf{I})}(\sigma) &= -\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}T^{\hat{\alpha}-}_{A} - v^{\hat{\alpha}-}_{A}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}A} + \eta^{-}_{\dot{A}}D^{-}_{A}) \approx 0, \\
\hat{M}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(\sigma) &= -\tfrac{1}{2}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{AB}(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}T^{\hat{\alpha}-}_{B} + v^{\hat{\alpha}-}_{A}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}B} + \mu^{\hat{\alpha}+}_{A}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}B} + \eta^{+}_{A}D^{-}_{B}) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\dot{A}\dot{B}}(v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}T^{\hat{\alpha}+}_{\dot{B}} + v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} + \mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} + \eta^{-}_{\dot{A}}D^{+}_{\dot{B}}) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

В'язі (3.104) доповнюють в'язі на компоненти імпульсів для лоренцевих гармонік, які були використані для побудови дужок Дірака. Використовуючи в'язі (3.78) та (3.79), їх можна представити у вигляді

$$
\begin{aligned}
M^{[+2][-2]}(\sigma) &= v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}p^{\hat{\alpha}-}_{(v)A} - v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}p^{\hat{\alpha}+}_{(v)\dot{A}} - v^{\hat{\alpha}-}_{A}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A} + v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} \\
&\quad + \mu^{\hat{\alpha}+}_{A}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A} - \mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \eta^{+}_{A}\pi^{-}_{A} - \eta^{-}_{\dot{A}}\pi^{+}_{\dot{A}} \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

$$
M^{[+2](\mathbf{I})}(\sigma) = -\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}p^{\hat{\alpha}+}_{(v)\dot{A}} - v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}A} + \mu^{\hat{\alpha}+}_{A}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \eta^{+}_{A}\pi^{+}_{\dot{A}}) \approx 0, \tag{3.106}
$$

$$
M^{[-2](\mathbf{I})}(\sigma) = -\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}p^{\hat{\alpha}-}_{(v)A} - v^{\hat{\alpha}-}_{A}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} - \mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A} + \eta^{-}_{\dot{A}}\pi^{-}_{A}) \approx 0, \tag{3.107}
$$

$$M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(\sigma) = -\tfrac{1}{2}\gamma^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{AB}(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}p^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{(v)B} + v^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{A}p^{+}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}B} + \mu^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{A}p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}B} + \eta^{+}_{A}\pi^{-}_{B})$$
$$-\tfrac{1}{2}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\dot{A}\dot{B}}(v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}p^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{(v)\dot{B}} + v^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{\dot{A}}p^{-}_{(v)\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} + \mu^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{\dot{A}}p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} + \eta^{-}_{\dot{A}}\pi^{+}_{\dot{B}}) \approx 0. \tag{3.108}$$

У роботі [74] аналогічні в'язі було названо коваріантними густинами імпульсів. У супертвісторному формулюванні коваріантні густини імпульсів генерують інфінітезимальні $SO(1,9)_R$ перетворення компонентів супертвісторів. Зазначимо, що їх $SO(1,1)\times SO(8) \subset SO(1,9)_R$ підгрупа є калібрувальною симетрією дії (3.93), так що в'язь (3.105) після доповнення внесками компонентів листкової векторної густини та спряжених імпульсів і в'язі (3.108) належать до першого роду, тоді як (3.106) і (3.107) є в'язями другого роду.

Аналогічно в'язі на компоненти супертвісторів (3.78) та (3.79) також можна розглядати як рівності у сильному смислі після введення дужок Дірака. Для цього означимо проєкції в'язей (3.96)

$$\Phi^{+2}_{\dot{A}\dot{B}}(\sigma) = v^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{\dot{A}}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} - v^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{\dot{B}}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} \approx 0,$$
$$\Phi^{-2}_{AB}(\sigma) = v^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{A}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}B} - v^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{B}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}A} \approx 0,$$
$$\Phi_{A\dot{B}}(\sigma) = v^{\underline{\hat{\alpha}}-}_{A}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{B}} - v^{\underline{\hat{\alpha}}+}_{\dot{B}}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}A} \approx 0,$$
$$\Phi^{\underline{\hat{m}}[5]}(\sigma) = v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{m}}[5]\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\Phi^{-}_{\underline{\hat{\beta}}A} + v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{m}}[5]\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\Phi^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} \approx 0,$$

які утворюють спряжені пари в'язей другого роду з в'язями (3.78) та (3.79)

$$\{\Phi^{+2}_{\dot{A}\dot{B}}(\sigma), N^{-2}_{\dot{C}\dot{D}}(\sigma')\} = 2(\delta_{\dot{A}\dot{D}}\delta_{\dot{B}\dot{C}} - \delta_{\dot{A}\dot{C}}\delta_{\dot{B}\dot{D}})\delta(\sigma-\sigma'),$$
$$\{\Phi^{-2}_{AB}(\sigma), N^{+2}_{CD}(\sigma')\} = 2(\delta_{AD}\delta_{BC} - \delta_{AC}\delta_{BD})\delta(\sigma-\sigma'),$$
$$\{\Phi_{A\dot{B}}(\sigma), N_{C\dot{D}}(\sigma')\} = -2\delta_{AC}\delta_{\dot{B}\dot{D}}\delta(\sigma-\sigma'),$$
$$\{\Phi^{\underline{\hat{m}}[5]}(\sigma), N^{\underline{\hat{n}}[5]}(\sigma')\} = 2(\tilde{\sigma}^{\underline{\hat{m}}[5]}\sigma^{\underline{\hat{n}}[5]})\delta(\sigma-\sigma').$$

Усі інші співвідношення на дужках Пуассона між цими в'язями обертаються на нуль у сильному смислі. Для підпростору фазового простору, який визначається рештою в'язей (3.96)

$$\begin{aligned}\Phi^{[+2]}(\sigma) &= 2v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + \tfrac{1}{\alpha'}\left(\rho^{\tau[+2]} - is\varphi^{[+2]}_{\sigma}\right) \approx 0,\\ \Phi^{[-2]}(\sigma) &= 2v^{\hat{\alpha}-}_{A} p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A} + \tfrac{1}{\alpha'}\left(\rho^{\tau[-2]} - is\varphi^{[-2]}_{\sigma}\right) \approx 0,\\ \Phi^{(\mathbf{I})}(\sigma) &= -\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(v^{\hat{\alpha}-}_{A} p^{+}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} + v^{\hat{\alpha}+}_{\dot{A}} p^{-}_{(\mu)\underline{\hat{\alpha}}A}) - \tfrac{is}{\alpha'}\varphi^{(\mathbf{I})}_{\sigma} \approx 0,\end{aligned} \tag{3.109}$$

разом із $so(1,9)$ генераторами (3.105)-(3.108) та первинними в'язями (3.97), (3.101), (3.102), ці дужки Дірака співпадають з дужками Пуассона.

У результаті густина повного гамільтоніана

$$\begin{gathered} H_T(\tau,\sigma) = \tfrac{1}{2\alpha'}\rho^{\sigma[+2]}\left(\omega^{[-2]}_{\sigma} + \rho^{\tau[-2]}\right) + \tfrac{1}{2\alpha'}\rho^{\sigma[-2]}\left(\omega^{[+2]}_{\sigma} - \rho^{\tau[+2]}\right)\\ +a^{[+2]}\Phi^{[-2]} + a^{[-2]}\Phi^{[+2]} + a^{(\mathbf{I})}\Phi^{(\mathbf{I})} + b^{\mu[+2]}P^{[-2]}_{\mu} + b^{\mu[-2]}P^{[+2]}_{\mu}\\ +l^{[+2][-2]}M^{[+2][-2]} + l^{[+2](\mathbf{I})}M^{[-2](\mathbf{I})} + l^{[-2](\mathbf{I})}M^{[+2](\mathbf{I})} + l^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\\ +\lambda^{+}_{A}D^{-}_{A} + \lambda^{-}_{\dot{A}}D^{+}_{\dot{A}}\end{gathered}$$

дається лінійною комбінацією первинних в'язей (3.109), (3.101), (3.102), (3.105)-(3.108) та (3.97) з бозонними $a(\tau,\sigma)$, $b(\tau,\sigma)$, $l(\tau,\sigma)$ і ферміонними $\lambda(\tau,\sigma)$ множниками Лагранжа. На первинні в'язі накладється вимога сумісності, відповідно до якої їх співвідношення на дужках Пуассона з густиною повного гамільтоніана мають обертатись на нуль. Ця вимога може приводити до вторинних в'язей або до рівнянь, які визначають множники Лагранжа. Обчислення дужок Пуассона первинних в'язей з повним гамільтоніаном приводить до 10 бозонних вторинних в'язей

$$\begin{gathered}\omega^{[\pm 2]}_{\sigma} \mp \rho^{\tau[\pm 2]} \approx 0,\\ \omega^{(\mathbf{I})}_{\sigma} \approx 0,\end{gathered}$$

а також визначає частину множників Лагранжа.

Здобутий за результатами аналізу сумісності первинних та вторинних в'язей вираз для повного гамільтоніана включає в'язі першого роду з множниками Лагранжа, які залишились довільними

$$\begin{gathered} H_{T,\,s=1}(\tau,\sigma) = \rho^{\sigma[+2]}\Delta^{[-2]}_{(-)} + \rho^{\sigma[-2]}\widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)} + b^{\sigma[+2]}P^{[-2]}_{\sigma} + b^{\sigma[-2]}P^{[+2]}_{\sigma}\\ +l^{[+2][-2]}\widetilde{M}^{[+2][-2]} + l^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} + \xi^{-}_{\dot{A}}\widetilde{D}^{+}_{\dot{A}} \approx 0.\end{gathered}$$

Повний гамільтоніан обертається на нуль що, як відзначалось вище, є характерною рисою моделей, інваріантних відносно репараметризацій. Наведений вище вираз для повного гамільтоніана відповідає значенню знакового параметра $s = 1$ у лагранжіані (3.94). У цьому випадку генератори листкових репараметризацій мають такий вигляд

$$\begin{gathered}\Delta^{[-2]}_{(-)}(\sigma) = \tfrac{1}{2\alpha'}\big(\omega^{[-2]}_{\sigma} + \rho^{\tau[-2]}\big) - \tfrac{1}{2}\Phi^{[-2]} + \partial_\sigma P^{[-2]}_{\tau} \\ -\tfrac{1}{2}\Omega^{[+2][-2]}_{\sigma}P^{[-2]}_{\tau} + \tfrac{1}{2\rho^{\tau[+2]}}\Omega^{[-2](\mathbf{I})}_{\sigma}M^{[+2](\mathbf{I})} \approx 0, \\ \widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)}(\sigma) = \Delta^{[+2]}_{(+)} - \tfrac{1}{\rho^{\tau[-2]}}\mathcal{D}_\sigma\eta^{+}_{A}\widetilde{D}^{-}_{A} \approx 0,\end{gathered} \tag{3.110}$$

де

$$\begin{gathered}\Delta^{[+2]}_{(+)}(\sigma) = \tfrac{1}{2\alpha'}\big(\omega^{[+2]}_{\sigma} - \rho^{\tau[+2]}\big) + \tfrac{1}{2}\Phi^{[+2]} + \partial_\sigma P^{[+2]}_{\tau} \\ +\tfrac{1}{2}\Omega^{[+2][-2]}_{\sigma}P^{[+2]}_{\tau} + \tfrac{1}{2\rho^{\tau[-2]}}\Omega^{[+2](\mathbf{I})}_{\sigma}M^{[-2](\mathbf{I})} \approx 0\end{gathered}$$

та

$$\widetilde{D}^{-}_{A}(\sigma) = D^{-}_{A} + \tfrac{i}{16}\eta^{+}_{A}\Phi^{[-2]} - \tfrac{i}{16}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}\eta^{-}_{\dot{A}}\Phi^{(\mathbf{I})} - \tfrac{i}{8\rho^{\tau[-2]}}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}\mathcal{D}_\sigma\eta^{-}_{\dot{A}}M^{[-2](\mathbf{I})} \approx 0. \tag{3.111}$$

Нижні індекси в дужках у $\Delta^{[+2]}_{(+)} \approx 0$ та $\Delta^{[-2]}_{(-)} \approx 0$ вказують на те, з яким знаком дають внесок в'язі $\Phi^{[\pm 2]} \approx 0$, й не повинні змішуватись з їх вагами відносно групи $SO(1,1)$, які наведено у верхніх індексах. Для подальшого розгляду зручно ввести лінійні комбінації в'язей більш загального вигляду

$$\begin{gathered}\Delta^{[+2]}_{k}(\sigma) = \tfrac{1}{2\alpha'}\big(\omega^{[+2]}_{\sigma} - \rho^{\tau[+2]}\big) + \tfrac{k}{2}\Phi^{[+2]} + \partial_\sigma P^{[+2]}_{\tau} \\ +\tfrac{1}{2}\Omega^{[+2][-2]}_{\sigma}P^{[+2]}_{\tau} + \tfrac{1}{2\rho^{\tau[-2]}}\Omega^{[+2](\mathbf{I})}_{\sigma}M^{[-2](\mathbf{I})} \approx 0,\end{gathered} \tag{3.112}$$

$$\begin{gathered}\Delta^{[-2]}_{k}(\sigma) = \tfrac{1}{2\alpha'}\big(\omega^{[-2]}_{\sigma} + \rho^{\tau[-2]}\big) + \tfrac{k}{2}\Phi^{[-2]} + \partial_\sigma P^{[-2]}_{\tau} \\ -\tfrac{1}{2}\Omega^{[+2][-2]}_{\sigma}P^{[-2]}_{\tau} + \tfrac{1}{2\rho^{\tau[+2]}}\Omega^{[-2](\mathbf{I})}_{\sigma}M^{[+2](\mathbf{I})} \approx 0.\end{gathered} \tag{3.113}$$

В'язі

$$\widetilde{M}^{[+2][-2]}(\sigma) = M^{[+2][-2]} + 2\rho^{\tau[+2]}P^{[-2]}_{\tau} - 2\rho^{\tau[-2]}P^{[+2]}_{\tau} \approx 0 \tag{3.114}$$

та (3.108) генерують $SO(1,1) \times SO(8)$ калібрувальну симетрію дії суперструни (3.93), а 8 в'язей

$$\begin{gathered}\widetilde{D}^{+}_{\dot{A}}(\sigma) = D^{+}_{\dot{A}} + \tfrac{i}{16}\eta^{-}_{\dot{A}}\Phi^{[+2]} - \tfrac{i}{16}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\eta^{+}_{A}\Phi^{(\mathbf{I})} \\ -\tfrac{i}{8\rho^{\tau[-2]}}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\mathcal{D}_\sigma\eta^{+}_{A}M^{[-2](\mathbf{I})} - \tfrac{i}{4}\mathcal{D}_\sigma\eta^{-}_{\dot{A}}P^{[+2]}_{\tau} \approx 0\end{gathered} \tag{3.115}$$

є генераторами $\kappa-$симетрії.

При $s=-1$ вираз для густини повного гамільтоніана має вигляд

$$H_{T,\,s=-1}(\tau,\sigma)=\rho^{\sigma[+2]}\widetilde{\Delta}^{[-2]}_{(-)}+\rho^{\sigma[-2]}\Delta^{[+2]}_{(+)}+b^{\sigma[+2]}P^{[-2]}_{\sigma}+b^{\sigma[-2]}P^{[+2]}_{\sigma}$$
$$+l^{[+2][-2]}\widetilde{M}^{[+2][-2]}+l^{\mathbf{(I)(J)}}M^{\mathbf{(I)(J)}}+\xi^{+}_{A}\widetilde{D}'^{-}_{A}\approx 0,$$

де

$$\widetilde{\Delta}^{[-2]}_{(-)}(\sigma)=\Delta^{[-2]}_{(-)}-\tfrac{1}{\rho^{\tau[+2]}}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{-}_{\dot{A}}\widetilde{D}'^{+}_{\dot{A}}\approx 0$$

та

$$\widetilde{D}'^{+}_{\dot{A}}(\sigma)=D^{+}_{\dot{A}}+\tfrac{i}{16}\eta^{-}_{\dot{A}}\Phi^{[+2]}-\tfrac{i}{16}\tilde{\gamma}^{\mathbf{(I)}}_{\dot{A}A}\eta^{+}_{A}\Phi^{\mathbf{(I)}}+\tfrac{i}{8\rho^{\tau[+2]}}\tilde{\gamma}^{\mathbf{(I)}}_{\dot{A}A}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}_{A}M^{[+2]\mathbf{(I)}}\approx 0,$$

а генератори $\kappa-$симетрії дорівнюють

$$\widetilde{D}'^{-}_{A}(\sigma)=D^{-}_{A}+\tfrac{i}{16}\eta^{+}_{A}\Phi^{[-2]}-\tfrac{i}{16}\gamma^{\mathbf{(I)}}_{A\dot{A}}\eta^{-}_{\dot{A}}\Phi^{\mathbf{(I)}}$$
$$+\tfrac{i}{8\rho^{\tau[+2]}}\gamma^{\mathbf{(I)}}_{A\dot{A}}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{-}_{\dot{A}}M^{[+2]\mathbf{(I)}}+\tfrac{i}{4}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}_{A}P^{[-2]}_{\tau}\approx 0.$$

3.4.2 Алгебра в'язей першого роду на дужках Дірака

У попередньому пункті було здобуто вирази для 33 бозонних та 8 ферміонних в'язей першого роду моделі $D=10$ $\mathcal{N}=1$ суперструни у супертвісторному формулюванні. Решта первинних та вторинних в'язей є в'язями другого роду. Їх можна класифікувати за грассмановою парністю та $SO(8)$ представленнями. $SO(8)$ векторними в'язями є (3.106), (3.107) та

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathbf{(I)}}_{k}(\sigma)&=\tfrac{1}{\alpha'}\omega^{\mathbf{(I)}}_{\sigma}+k\Phi^{\mathbf{(I)}}-\Omega^{[+2]\mathbf{(I)}}_{\sigma}P^{[-2]}_{\tau}-\Omega^{[-2]\mathbf{(I)}}_{\sigma}P^{[+2]}_{\tau}\\&-\tfrac{1}{2}\mathscr{D}^{\mathbf{(I)(J)}}_{\sigma}\left(\tfrac{M^{[+2]\mathbf{(J)}}}{\rho^{\tau[+2]}}\right)-\tfrac{1}{2}\mathscr{D}^{\mathbf{(I)(J)}}_{\sigma}\left(\tfrac{M^{[-2]\mathbf{(J)}}}{\rho^{\tau[-2]}}\right)\approx 0\end{aligned}\qquad(3.116)$$

з $k=\pm 1$. У (3.116) $\mathscr{D}^{\mathbf{(I)(J)}}_{\sigma}=\delta^{\mathbf{(I)(J)}}\partial_{\sigma}-\Omega^{\mathbf{(I)(J)}}_{\sigma}$ є листковою проєкцією $SO(8)$-коваріантного диференціала. В якості чотирьох скалярних в'язей можна вибрати (3.101) та $\Delta^{[\pm 2]}_{(\mp)}\approx 0$, означені у (3.112) і (3.113). Нарешті базисними елементами у просторі ферміонних в'язей другого роду виберемо 8 в'язей (3.111).

Для того аби врахувати ці в'язі другого роду, визначимо дужки Дірака

$$\{f(\sigma), g(\sigma')\}_{D.B.} = \{f(\sigma), g(\sigma')\} - \{f(\sigma), \chi_{\mathfrak{m}}\}\mathbf{C}^{-1\mathfrak{mn}}\{\chi_{\mathfrak{n}}, g(\sigma')\}, \qquad (3.117)$$

де $\chi_{\mathfrak{m}}$ позначає набір в'язей другого роду, а $\mathbf{C}^{-1\mathfrak{mn}}$ є оберненою суперматрицею Дірака

$$\mathbf{C}_{\mathfrak{mn}}(\sigma, \sigma') = \{\chi_{\mathfrak{m}}(\sigma), \chi_{\mathfrak{n}}(\sigma')\}.$$

Для базису в'язей другого роду, описаного у попередньому абзаці, суперматрицю Дірака можна представити у формі суми

$$\mathbf{C}_{\mathfrak{mn}} = J_{\mathfrak{mn}} + \Lambda_{\mathfrak{mn}}, \qquad (3.118)$$

де $J_{\mathfrak{mn}}$ є блочно-діагональною градуйовано-антисиметричною суперматрицею

$$\alpha' J =$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & M^{[+2](\mathbf{J})} & \Delta^{(\mathbf{J})}_{(-)} & M^{[-2](\mathbf{J})} & \Delta^{(\mathbf{J})}_{(+)} & \Delta^{[+2]}_{(-)} & P^{[-2]}_{\tau} & \Delta^{[-2]}_{(+)} & P^{[+2]}_{\tau} & \widetilde{D}^{-}_{B} \\
\hline
M^{[+2](\mathbf{I})} & 0 & -2\rho^{\tau[+2]}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} & & & & & & & \\
\Delta^{(\mathbf{I})}_{(-)} & 2\rho^{\tau[+2]}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} & 0 & & & & & & & \\
M^{[-2](\mathbf{I})} & & & 0 & 2\rho^{\tau[-2]}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} & & & & & \\
\Delta^{(\mathbf{I})}_{(+)} & & & -2\rho^{\tau[-2]}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} & 0 & & & & \mathbf{0} & \\
\Delta^{[+2]}_{(-)} & & & & & 0 & 1 & & & \\
P^{[-2]}_{\tau} & & & & & -1 & 0 & & & \\
\Delta^{[-2]}_{(+)} & & & \mathbf{0} & & & & 0 & -1 & \\
P^{[+2]}_{\tau} & & & & & & & 1 & 0 & \\
\widetilde{D}^{-}_{A} & & & & & & & & & \frac{i\rho^{\tau[-2]}}{4}\delta_{AB} \\
\hline
\end{array}$$

$$\times\delta(\sigma - \sigma'),$$

а $\Lambda_{\mathfrak{mn}}$ лінійно залежить від в'язей. Вирази для дужок Пуассона в'язей другого роду, які визначають форму суперматриці $\Lambda_{\mathfrak{mn}}$ наведено у додатку Б нашої роботи [230]. З урахуванням (3.118) обернену суперматрицю Дірака можна представити як

$$\mathbf{C}^{-1} = (I + J^{-1}\Lambda)^{-1}J^{-1}$$

або у вигляді розкладу в ряд

$$\mathbf{C}^{-1} = J^{-1} - J^{-1}\Lambda\, J^{-1} + J^{-1}\Lambda\, J^{-1}\Lambda\, J^{-1} - J^{-1}\Lambda\, J^{-1}\Lambda\, J^{-1}\Lambda J^{-1} + \dots \quad (3.119)$$

Оскільки суперматриця J пропорційна $(\alpha')^{-1}$, а обернена до неї суперматриця пропорційна α', то обернену суперматрицю Дірака можна представити у вигляді ряду за α'. При цьому зазначимо, що деякі елементи Λ мають неявну залежність від $(\alpha')^{-1}$ через в'язі (3.112), (3.113) та (3.116). Підставляючи розклад (3.119) до означення дужок Дірака (3.117), можна обчислити їх порядок за порядком за J^{-1}. Провідний за α' внесок має вигляд

$$\begin{gathered}
\{f(\sigma), g(\sigma')\}_{D.B.} = \{f(\sigma), g(\sigma')\} - 4i\alpha' \int \tfrac{d\sigma''}{\rho^{\tau[-2]}(\sigma'')} \{f(\sigma), \widetilde{D}^{-}_{A}(\sigma'')\} \\
\times \{\widetilde{D}^{-}_{A}(\sigma''), g(\sigma')\} - \tfrac{\alpha'}{2} \int \tfrac{d\sigma''}{\rho^{\tau[+2]}(\sigma'')} (\{f(\sigma), M^{[+2](\mathbf{I})}(\sigma'')\}\{\Delta^{(\mathbf{I})}_{(-)}(\sigma''), g(\sigma')\} \\
-\big(M^{[+2](\mathbf{I})} \leftrightarrow \Delta^{(\mathbf{I})}_{(-)})\big) + \tfrac{\alpha'}{2} \int \tfrac{d\sigma''}{\rho^{\tau[-2]}(\sigma'')} (\{f(\sigma), M^{[-2](\mathbf{I})}(\sigma'')\}\{\Delta^{(\mathbf{I})}_{(+)}(\sigma''), g(\sigma')\} \\
-\big(M^{[-2](\mathbf{I})} \leftrightarrow \Delta^{(\mathbf{I})}_{(+)})\big) + \alpha' \int d\sigma'' (\{f(\sigma), \Delta^{[+2]}_{(-)}(\sigma'')\}\{P^{[-2]}_{\tau}(\sigma''), g(\sigma')\} \\
-\big(\Delta^{[+2]}_{(-)} \leftrightarrow P^{[-2]}_{\tau})\big) - \alpha' \int d\sigma'' (\{f(\sigma), \Delta^{[-2]}_{(+)}(\sigma'')\}\{P^{[+2]}_{\tau}(\sigma''), g(\sigma')\} \\
-\big(\Delta^{[-2]}_{(+)} \leftrightarrow P^{[+2]}_{\tau})\big) + O(J^{-2}).
\end{gathered} \quad (3.120)$$

За допомогою (3.120) можна обчислити дужки Дірака для змінних фазового простору суперструни. Наприклад, для октетів супертвісторів (3.76) дужки Дірака у провідному порядку за α' дорівнюють

$$\begin{gathered}
\{Z^{\Lambda+}_{A}(\sigma), Z^{\Sigma+}_{B}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{4i\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}} D^{\Lambda}_{AC} D^{\Sigma}_{BC} \delta(\sigma-\sigma') \\
+ \tfrac{\alpha'}{2\rho^{\tau[-2]}} \gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} \gamma^{(\mathbf{I})}_{B\dot{B}} (V^{\Lambda+}_{\dot{A}} Z^{\Sigma-}_{\dot{B}} - Z^{\Lambda-}_{\dot{A}} V^{\Sigma+}_{\dot{B}}) \delta(\sigma-\sigma') \\
+ \tfrac{\alpha'}{2\rho^{\tau[-2]}} \gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}} Z^{\Lambda-}_{\dot{A}}(\sigma) \gamma^{(\mathbf{J})}_{B\dot{B}} \mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\sigma} \left(\tfrac{1}{\rho^{\tau[-2]}} Z^{\Sigma-}_{\dot{B}}(\sigma) \delta(\sigma-\sigma') \right) + O(\alpha'^2),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\{Z^{\Lambda-}_{\dot{A}}(\sigma), Z^{\Sigma-}_{\dot{B}}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{4i\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}} D^{\Lambda[-2]}_{\dot{A}C} D^{\Sigma[-2]}_{\dot{B}C} \delta(\sigma-\sigma') \\
+ \tfrac{\alpha'}{2\rho^{\tau[+2]}} \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{B}B} (V^{\Lambda-}_{A} Z^{\Sigma+}_{B} - Z^{\Lambda+}_{A} V^{\Sigma-}_{B}) \delta(\sigma-\sigma') \\
- \tfrac{\alpha'}{2\rho^{\tau[+2]}} \tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A} Z^{\Lambda+}_{A}(\sigma) \tilde{\gamma}^{(\mathbf{J})}_{\dot{B}B} \mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\sigma} \left(\tfrac{1}{\rho^{\tau[+2]}} Z^{\Sigma+}_{B}(\sigma) \delta(\sigma-\sigma') \right) + O(\alpha'^2)
\end{gathered}$$

та

$$\{Z_A^{\Lambda+}(\sigma), Z_{\dot B}^{\Sigma-}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{4i\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}} D^{\Lambda}_{AC} D^{\Sigma[-2]}_{\dot BC}\delta(\sigma-\sigma')$$
$$+\tfrac{\alpha'}{2}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot A}\tilde\gamma^{(\mathbf{I})}_{\dot BB}\left(\tfrac{1}{\rho^{\tau[+2]}}V^{\Lambda+}_{\dot A}Z^{\Sigma+}_B - \tfrac{1}{\rho^{\tau[-2]}}Z^{\Lambda-}_{\dot A}V^{\Sigma-}_B\right)\delta(\sigma-\sigma') + O(\alpha'^2),$$

де 16×8 блоки матриці обернених спінорних гармонік було записано у супертвісторній формі як $V^{\Lambda-}_A = (v^{\hat\alpha-}_A,\ 0,\ 0)$, $V^{\Lambda+}_{\dot A} = (v^{\hat\alpha+}_{\dot A},\ 0,\ 0)$, а також введено такі величини

$$\{\tilde D^-_A(\sigma), Z^{\Lambda+}_B(\sigma')\} = D^{\Lambda}_{AB}\delta(\sigma-\sigma'),$$
$$D^{\Lambda}_{AB} = -D^{\Lambda}_{BA} = \tfrac{i}{8\rho^{\tau[-2]}}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot A}\mathcal{D}_\sigma\eta^-_{\dot A}\gamma^{(\mathbf{I})}_{B\dot B}Z^{\Lambda-}_{\dot B} + \tfrac{i}{2}\left(\delta_{AB}\eta^-_{\dot B} + \tfrac{1}{8}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot A}\eta^-_{\dot A}\gamma^{(\mathbf{I})}_{B\dot B}\right)V^{\Lambda+}_{\dot B}$$
$$+\tfrac{i}{2}\left(\delta_{AB}\eta^+_C - \delta_{AC}\eta^+_B + \tfrac{1}{8}\delta_{BC}\eta^+_A\right)V^{\Lambda-}_C + \delta_{AB}J^{\Lambda}, \quad J^{\Lambda} = (0,\ 0,\ 1),$$

$$\{\tilde D^-_A(\sigma), Z^{\Lambda-}_{\dot B}(\sigma')\} = D^{\Lambda-2}_{A\dot B}\delta(\sigma-\sigma'),$$
$$D^{\Lambda-2}_{A\dot B} = -D^{\Lambda-2}_{\dot BA} = -\tfrac{i}{2}\left(\delta_{AB}\eta^-_{\dot B} - \tfrac{1}{8}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot A}\eta^-_{\dot A}\tilde\gamma^{(\mathbf{I})}_{\dot BB}\right)V^{\Lambda-}_B.$$

Враховуючи співвідношення на дужках Дірака для змінних фазового простору, можна обчислити алгебру на дужках Дірака в'язей першого роду. Дужки Дірака генераторів $so(1,1)$ та $so(8)$ калібрувальних симетрій (3.114) і (3.108) з іншими в'язями першого роду співпадають з відповідними дужками Пуассона, оскільки дужки Пуассона $so(1,1)$ та $so(8)$ генераторів з в'язями другого роду визначаються $SO(1,1)\times SO(8)$ представленнями останніх. Дужки Дірака інших в'язей першого роду загалом відрізняються від їх дужок Пуассона. Тож для генераторів $\kappa-$симетрії (3.115) здобуваємо

$$\{\widetilde D^+_{\dot A}(\sigma), \widetilde D^+_{\dot B}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{i}{4}\delta_{\dot A\dot B}\widetilde\Delta^{[+2]}_{(+)}\delta(\sigma-\sigma')$$
$$-\tfrac{\alpha'}{16\rho^{\tau[+2]}(\rho^{\tau[-2]})^2}\tilde\gamma^{(\mathbf{I})}_{\dot AA}\mathcal{D}_\sigma\eta^+_A\tilde\gamma^{(\mathbf{J})}_{\dot BB}\mathcal{D}_\sigma\eta^+_B M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\Delta^{[-2]}_{(-)}\delta(\sigma-\sigma')$$
$$+\tfrac{\alpha'}{2}\Gamma^{+(\mathbf{I})}_{\dot A}(\sigma)\mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_\sigma\Gamma^{+(\mathbf{J})}_{\dot B}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}),$$

де $\Gamma^{+(\mathbf{I})}_{\dot A} = -\frac{1}{4\rho^{\tau[+2]}\rho^{\tau[-2]}}\tilde\gamma^{(\mathbf{J})}_{\dot AA}\mathcal{D}_\sigma\eta^+_A(\frac{1}{2}\delta^{(\mathbf{J})(\mathbf{I})}\widetilde{M}^{+2-2} + M^{(\mathbf{J})(\mathbf{I})})$. Перший член у правій частині є внеском дужок Пуассона, а інші члени, які включають добутки $so(1,1)$, $so(8)$ генераторів та генератора репараметризаційної симетрії

(3.110), відповідають деформації у провідному порядку. Дужки Дірака генераторів $\kappa-$симетрії та репараметризацій мають форму

$$\begin{gathered}\{\widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)}(\sigma), \widetilde{D}^{+}_{\dot{A}}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{i\alpha'}{4\rho^{\tau[-2]}}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}_{A}\left(A^{[+2](\mathbf{I})} - \tfrac{1}{2}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\widetilde{D}^{+}\right) \\ \times\Delta^{[-2]}_{(-)}\delta(\sigma-\sigma') + \tfrac{i\alpha'}{2}A^{[+2](\mathbf{I})}(\sigma)\mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\sigma}\Gamma^{+(\mathbf{J})}_{\dot{A}}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}),\end{gathered} \tag{3.121}$$

$$\{\Delta^{[-2]}_{(-)}(\sigma), \widetilde{D}^{+}_{\dot{A}}(\sigma')\}_{D.B.} = -\tfrac{i}{8}\tilde{\gamma}^{(\mathbf{I})}_{\dot{A}A}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}_{A}B^{[-2](\mathbf{I})}\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}), \tag{3.122}$$

де

$$\begin{gathered}\rho^{\tau[+2]}\rho^{\tau[-2]}A^{[+2](\mathbf{I})} = (\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\widetilde{D}^{+}) + \left(-\tfrac{1}{2}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\widetilde{M}^{[+2][-2]} + M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\right) \\ \times\left(\Omega^{[+2](\mathbf{J})}_{\sigma} + \tfrac{i}{4\rho^{\tau[-2]}}(\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{J})}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{-})\right), \\ \rho^{\tau[+2]}\rho^{\tau[-2]}B^{[-2](\mathbf{I})} = \left(\tfrac{1}{2}\delta^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\widetilde{M}^{[+2][-2]} + M^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}\right)\Omega^{[-2](\mathbf{J})}_{\sigma}.\end{gathered}$$

Відзначимо, що в (3.121) внесок дужок Пуассона обертається на нуль, а члени у провідному порядку за α' є квадратичними за в'язями першого роду. В той же час дужки Дірака (3.122) у найнижчому порядку за суперматрицею J^{-1} співпадають із дужками Пуассона. Нарешті всі дужки Дірака генераторів репараметризацій включають внески пропорційні добуткам в'язей першого роду

$$\begin{gathered}\{\widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)}(\sigma), \widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)}(\sigma')\}_{D.B.} = -\tfrac{\alpha'}{2}A^{[+2](\mathbf{I})}(\sigma)\mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\sigma}A^{[+2](\mathbf{J})}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}), \\ \{\Delta^{[-2]}_{(-)}(\sigma), \Delta^{[-2]}_{(-)}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{\alpha'}{2}B^{[-2](\mathbf{I})}(\sigma)\mathscr{D}^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}_{\sigma}B^{[-2](\mathbf{J})}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}), \\ \{\widetilde{\Delta}^{[+2]}_{(+)}(\sigma), \Delta^{[-2]}_{(-)}(\sigma')\}_{D.B.} = \tfrac{1}{2\rho^{\tau[+2]}\rho^{\tau[-2]}}(\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\widetilde{D}^{+})\Omega^{[-2](\mathbf{I})}_{\sigma}\left(1 + \tfrac{\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}\Delta^{[-2]}_{(-)}\right)\delta(\sigma-\sigma') \\ -\tfrac{1}{2}\left[\Omega^{[+2](\mathbf{I})}_{\sigma}\left(1 + \tfrac{\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}\Delta^{[-2]}_{(-)}\right) + \tfrac{i}{4\rho^{\tau[-2]}}(\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{+}\gamma^{(\mathbf{I})}\mathcal{D}_{\sigma}\eta^{-})\left(1 + \tfrac{2\alpha'}{\rho^{\tau[-2]}}\Delta^{[-2]}_{(-)}\right)\right] \\ \times B^{[-2](\mathbf{I})}\delta(\sigma-\sigma') + O(J^{-2}).\end{gathered}$$

Результати аналізу, проведеного у цьому підрозділі, виносяться на захист.

3.5 Нескінченновимірні розширення суперконформної симетрії в моделях твісторних струн

Як відомо поява перших моделей твісторних струн [180], [231] стимулювала активне вивчення спінорних та твісторних представлень для амплітуд розсіяння у калібрувальних теоріях та дозволила відкрити багату структуру їх симетрій (див., наприклад, монографію [264]). На відміну від суперструн Рамона-Нев'є-Шварца та Гріна-Шварца спектр моделей твісторних струн включає скінченну кількість станів. Зокрема, у моделі Берковіца [231] стани сектора відкритих струн (єдиного дослідженого на даний час) описуються мультиплетами $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричної теорії Янга-Міллса та конформної супергравітації, яка є неунітарною теорією [265]. В роботі [266] було доведено еквівалентність кореляційних функцій операторів, які відповідають частинкам супермультиплета Янга-Міллса, та деревних амплітуд у цій теорії. Однак у петльових діаграмах виявляється неможливим виокремити внески частинок мультиплета конформної супергравітації від внесків частинок із мультиплета супер-Янга-Міллса, що є недоліком моделі Берковіца. Відзначимо, що згодом були запропоновані й інші моделі твісторних струн, фізичні стани яких включають мультиплети ейнштейнівських теорій супергравітації [267],[90].

Для того аби глибше пізнати властивості твісторних струн, важливо встановити їх класичні та квантові симетрії. Оскільки в $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричній теорії Янга-Міллса у границі нульової константи взаємодії спостерігається розширення суперконформної симетрії до нескінченновимірної симетрії [268], [269], можна очікувати появу нескінченновимірних симетрій також у моделях твісторних струн. У роботі [270] було знайдено розширення очевидної глобальної $PSL(4|4,\mathbb{R})$ симетрії твісторної струни Берковіца до нелокальної нескінченновимірної янгівської симетрії. Це розширення подібне до відповідної симетрії у $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричній теорії Янга-Міллса, яка пов'язана з її інтеґровністю [143], [271].

У даному підрозділі буде проаналізовано класичні глобальні симетрії моделі твісторної струни Берковіца та її розширення на випадок супертвісторів, на які не накладено в'язі, і показано, що ці симетрії є нескінченновимірними узагальненнями суперконформної симетрії.[35] Спочатку буде досліджено глобальну симетрію лагранжіана для ліво(право)-біжних вільних супертвісторних змінних. Вона має простішу структуру, а її генератори даються набором усіх мономів, побудованих з добутків довільного числа $L \geq 0$ $PSL(4|4,\mathbb{R})$ супертвісторів із одним дуальним супертвістором. Її скінченновимірну підалгебру складають генератори $gl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебри та один дуальний супертвістор. Вони є $L=1$ і $L=0$ мономами відповідно. У моделі Берковіца лагранжіани для ліво(право)-біжних супертвісторних змінних включать генератори $gl(1,\mathbb{R}) \subset gl(4|4,\mathbb{R})$ симетрії з довільними множниками (див. (3.131)). Відтак ці симетрії є калібрувальними. Тому співвідношення алгебри глобальної симетрії кожного з цих лагранжіанів здобуваються зі співвідношень нескінченновимірної алгебри цих мономів, якщо покласти рівним нулю генератор відповідної $gl(1,\mathbb{R})$ симетрії. Скінченновимірну підалгебру цієї глобальної симетрії складають генератори $psl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебри та генератор «перекрученої» $gl_t(1,\mathbb{R})$ симетрії, а також дуальний супертвістор. Буде показано, що у квантовій теорії ці класичні нескінченновимірні симетрії порушуються до $(P)SL(4|4,\mathbb{R})$ симетрії.

[35] Відзначимо, що нескінченновимірні конформні симетрії в моделях безмасових $\mathcal{N}=1$ суперчастинок були виявлені в роботі [272].

3.5.1 Класичні високоспінові суперконформні симетрії твісторних струн

Розглянемо функціонал дії в моделі з двома парами необмежених супертвісторів на світовому листку лоренцевої сиґнатури

$$S = \int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L} \tag{3.123}$$

з лагранжіаном

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{tw}} + \mathscr{L}_{\text{matter}},$$

який є сумою лагранжіанів для полів супертвісторів

$$\mathscr{L}_{\text{tw}} = \tfrac{1}{2}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}\mu}V_{+}^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} + \tfrac{1}{2}\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'\mu}V_{-}^{\mu\nu}\partial_\nu\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'} \tag{3.124}$$

та інших полів матерії $\mathscr{L}_{\text{matter}}$. До лагранжіана (3.124) входять листкові проєктори $V_{\pm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu} \pm \varepsilon^{\mu\nu})$, які було введено у розділі 1. З використанням представлення для оберненої листкової метрики та тензорної густини Леві-Чивіти через компоненти оберненого цвайбайна у базисі світлового конуса $e^{\mu}_{f} = \left(e^{\mu}_{[+2]}, e^{\mu}_{[-2]}\right)$ (див., наприклад, [74]) ці проєктори факторизуються $V_{\pm}^{\mu\nu} = 2ee^{\mu}_{[\pm 2]}e^{\nu}_{[\mp 2]}$. Відтак лагранжіан (3.124) можна записати у вигляді

$$\mathscr{L}_{\text{tw}} = e\mathcal{Y}_{\mathcal{A}[+2]}e^{\mu}_{[-2]}\partial_\mu\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} + e\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'[-2]}e^{\mu}_{[+2]}\partial_\mu\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'},$$

де $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}[+2]} = \mathcal{Y}_{\mathcal{A}\nu}e^{\nu}_{[+2]}$, $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'[-2]} = \bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'\nu}e^{\nu}_{[-2]}$. Подібний вигляд мають лагранжіани для ферміонних полів та полів духів у моделі струни Рамона-Нев'є-Шварца. Тому для квантування твісторних струн та обчислення кореляційних функцій операторів їх фізичних станів можливо застосувати відомі методи двовимірної конформної теорії поля.

У конформному калібруванні для цвайбайна $e^{f}_{\mu} = e^{\frac{\varphi}{2}}\delta^{f}_{\mu}$ та листкової метрики $\gamma_{\mu\nu} = e^{\varphi}\eta_{\mu\nu}$ дія (3.123) переходить до

$$S_{\text{c.g.}} = \int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L}_{\text{c.g.}} \tag{3.125}$$

з лагранжіаном

$$\mathscr{L}_{\text{c.g.}} = \mathscr{L}_{\text{tw, c.g.}} + \mathscr{L}_{\text{matter, c.g.}},$$

який є сумою лагранжіанів для ліво- та право-біжних полів. Зокрема, лагранжіан для полів супертвісторів набуває вигляду

$$\mathscr{L}_{\text{tw, c.g.}} = \mathscr{L}_{L-\text{tw, c.g.}} + \mathscr{L}_{R-\text{tw, c.g.}} : \tag{3.126}$$

$$\mathscr{L}_{L-\text{tw, c.g.}} = -2\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\partial_{-}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}, \tag{3.127}$$

$$\mathscr{L}_{R-\text{tw, c.g.}} = -2\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}\partial_{+}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}, \tag{3.128}$$

де $\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma$ та $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma})$ є листковими координатами та похідними у базисі світлового конуса. Супертвістори $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}} = (Z^{\boldsymbol{\alpha}}, \eta^{A})$ та $\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'} = (\bar{Z}^{\boldsymbol{\alpha}'}, \bar{\eta}^{A'})$ параметризують добуток двох супертвісторних просторів $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ і перетворюються як скаляри відносно конформної симетрії світового листка. Дуальні супертвістори $\mathcal{Y}_{\mathcal{B}} = (Y_{\boldsymbol{\beta}}, \xi_{B})$ та $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{B}'} = (\bar{Y}_{\boldsymbol{\beta}'}, \bar{\xi}_{B'})$ перетворюються як (анти)самодуальні листкові вектори й у листковій конформній теорії поля їм відповідають первинні поля конформної ваги 1. Для стислості листкові індекси дуальних супертвісторів не наводяться. Ліво- та право-біжні нетвісторні поля матерії з лагранжіаном $\mathscr{L}_{\text{matter, c.g.}}$ мають давати внесок до аномалії листкової конформної симетрії, який дорівнює $\mathrm{c} = \bar{\mathrm{c}} = 26$, аби скоротити внески полів духів для цієї симетрії (b, c) та $(\bar{b}, \bar{c})$. Ці поля матерії можуть бути складовими листкових струмів, які реалізують генератори деякої алгебри Лі (див., наприклад, роботу [265]).

З умови дійсності дії (3.125) випливає, що ліво- та право-біжні супертвістори та дуальні супертвістори мають розглядатись як незалежні змінні з дійсними компонентами. Такі супертвістори відповідають простору-часу з сиґнатурою $(-,-,+,+)$ та відповідним суперпросторам.[36] Найбільший інтерес представляє випадок $\mathcal{N} = 4$ супертвісторів, які є динамічними

[36] Детальне обговорення умов дійсності лагранжіана твісторної струни Берковіца на лоренцевому та евклідовому світових листках, а також дійсних структур у комплексному твісторному просторі, які відповідають $D = 4$ просторам різної сиґнатури, можна знайти, наприклад, у роботі [273].

полями в моделях твісторних струн [180], [231]. Перетворення Пенроуза для однорідних функцій одного супертвістора дає $D=4$ $\mathcal{N}=4$ безмасові супермультиплети, які включають мультиплети суперсиметричної теорії Янга-Міллса та ейнштейнівської супергравітації. Конформною групою $D=4$ простору-часу такої сиґнатури є $SO(3,3)=SL(4,\mathbb{R})$, а її мінімальним $\mathcal{N}=4$ суперсиметричним розширенням є $PSL(4|4,\mathbb{R})$ з бозонною підгрупою $SL(4,\mathbb{R})\times SL(4,\mathbb{R})$. Це означає, що бозонні та ферміонні компоненти ліво-біжного супертвістора належать до фундаментальних представлень двох $SL(4,\mathbb{R})_L$ груп, тоді як бозонні та ферміонні компоненти дуального супертвістора – до їх антифундаментальних представлень. Відповідно компоненти супертвісторів $\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}$ та $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}$ перетворюються за (анти)фундаментальними представленнями двох $SL(4,\mathbb{R})_R$ груп.

Лагранжіан (3.126) інваріантний відносно глобальної $GL(4|4,\mathbb{R})_L\times GL(4|4,\mathbb{R})_R$ симетрії. Крім перетворень з чотирьох $SL(4,\mathbb{R})$ підгруп та перетворень суперсиметрії, вона включає незалежні $GL(1,\mathbb{R})$ масштабні перетворення ліво- та право-біжних супертвісторних полів

$$\delta_\Lambda\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}=\Lambda\mathcal{Z}^{\mathcal{A}},\ \delta_\Lambda\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}=-\Lambda\mathcal{Y}_{\mathcal{A}},\ \delta_{\bar\Lambda}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}=\bar\Lambda\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'},\ \delta_{\bar\Lambda}\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}=-\bar\Lambda\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}. \quad (3.129)$$

Відтак супертвістори насправді параметризують два проєктивні супертвісорні простори $\mathbb{RP}^{3|4}$. Дві інші масштабні симетрії нами було названо «перекрученими»

$$\begin{gathered}\delta_{\Lambda_t}Z^{\boldsymbol{\alpha}}=\Lambda_tZ^{\boldsymbol{\alpha}},\ \delta_{\Lambda_t}\eta^A=-\Lambda_t\eta^A,\ \delta_{\Lambda_t}Y_{\boldsymbol{\alpha}}=-\Lambda_tY_{\boldsymbol{\alpha}},\ \delta_{\Lambda_t}\xi_A=\Lambda_t\xi_A,\\ \delta_{\bar\Lambda_t}\bar Z^{\boldsymbol{\alpha}'}=\bar\Lambda_t\bar Z^{\boldsymbol{\alpha}'},\ \delta_{\bar\Lambda_t}\bar\eta^{A'}=-\bar\Lambda_t\bar\eta^{A'},\ \delta_{\bar\Lambda_t}\bar Y_{\boldsymbol{\alpha}}=-\bar\Lambda_t\bar Y_{\boldsymbol{\alpha}},\ \delta_{\bar\Lambda_t}\bar\xi_{A'}=\bar\Lambda_t\bar\xi_{A'}\end{gathered} \quad (3.130)$$

оскільки бозонні та ферміонні компоненти супертвісторів та дуальних супертвісторів перетворюються з різними знаками.

У моделі Берковіца $GL(1,\mathbb{R})_L\times GL(1,\mathbb{R})_R$ симетрія є калібрувальною завдяки додаванню до лагранжіана (3.126) в'язей $T=\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}\approx 0$ та $\bar T=\bar{\mathcal{Y}}_{A'}\bar{\mathcal{Z}}^{A'}\approx 0$ з множниками Лагранжа

$$\mathscr{L}_{GL(1,\mathbb{R})_L\times GL(1,\mathbb{R})_R}=\lambda T+\bar\lambda\bar T. \quad (3.131)$$

На квантовому рівні це вимагає додавання двох одиниць до центральних зарядів полів матерії аби компенсувати внески (b, c) духів та духів для цієї калібрувальної симетрії.

Зазначимо, що в секторі відкритих струн ліво- та право-біжні поля прирівнюються на межі світового листка $\partial\Sigma = \{\sigma = 0, \pi\}$: $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}|_{\partial\Sigma} = \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}|_{\partial\Sigma}$, $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}|_{\partial\Sigma} = \bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}|_{\partial\Sigma}$. Це приводить до ототожнення лівої та правої $GL(4|4, \mathbb{R})$ супергруп і в'язей у (3.126) та (3.131). Як наслідок введення локальної $GL(1, \mathbb{R})$ симетрії, вертексні оператори мають бути функціями супертвісторів степеня однорідності нуль. Це зводить набір фізичних станів до мультиплетів $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричної теорії Янга-Міллса та конформної супергравітації [265]. У розширеній моделі (3.125) можуть існувати стани, які відповідають усім супермультиплетам $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперсиметрії Пуанкаре та суперконформної симетрії.

Зосередимось на секторі ліво-біжних полів з лагранжіаном (3.127). Означення імпульсів спряжених супертвісторам приводить до в'язей другого роду. Тому вводячи дужки Дірака, здобуваємо наступні ненульові співвідношення між компонентами супертвістора та дуального супертвістора

$$\{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(\sigma), \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}(\sigma')\}_{D.B.} = \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \delta(\sigma - \sigma'), \tag{3.132}$$

які є градуйовано-антисиметричними

$$\{\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}(\sigma), \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(\sigma')\}_{D.B.} = -(-)^{a} \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \delta(\sigma - \sigma').$$

У компонентній формі вони мають вигляд

$$\{Z^{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma), Y_{\boldsymbol{\beta}}(\sigma')\}_{D.B.} = \delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}} \delta(\sigma - \sigma'), \ \{\eta^{A}(\sigma), \xi_{B}(\sigma')\}_{D.B.} = \delta^{A}_{B} \delta(\sigma - \sigma').$$

Аналогічні співвідношення справедливі й для право-біжних полів, які описуються лагранжіаном (3.128).

У нашій роботі [232] було показано, що глобальна симетрія лагранжіана (3.127) є нескінченновимірною. Варіації супертвісторів випливають з їх співвідношень на дужках Дірака (3.132) з генеруючим функціоналом

$$G=\int d\sigma\sum_{L\geq 0}G^{(L)}(\sigma),\ G^{(L)}(\sigma)=\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}(\sigma)\Lambda^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{A}_L\dots\mathcal{A}_1}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}_1}(\sigma)\cdots\mathcal{Z}^{\mathcal{A}_L}(\sigma),$$

де параметри $\Lambda^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{A}_L\dots\mathcal{A}_1}$ є градуйовано-симетричними за нижніми індексами. Грассманова парність їх компонентів визначається сумою парностей індексів за припущення, що індекси бозонних компонентів супертвісторів мають парність нуль, а індекси ферміонниих компонентів мають парність одиниця. Тож глобальна симетрія включає як бозонні високоспінові симетрії, так і високоспінові суперсиметрії. Для фіксованого значення L закони перетворення для супертвісторів є такими

$$\begin{aligned}\delta_{\Lambda_L}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(\sigma)&=\Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}(L)}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}(L)}(\sigma),\\ \delta_{\Lambda_L}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(\sigma)&=-L\mathcal{Y}_{\mathcal{C}}(\sigma)\Lambda^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{A}\mathcal{B}(L-1)}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}(L-1)}(\sigma).\end{aligned}\tag{3.133}$$

Відповдіні густини ньотерових струмів з точністю до числового фактора даються мономами

$$T^{(L)}{}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}(L)}(\sigma)=\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}(L)},\quad L\geq 0.\tag{3.134}$$

У виразах (3.133) та (3.134) було введено скорочене позначення для добутку супертвісторів $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}(L)}=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}_1}\cdots\mathcal{Z}^{\mathcal{A}_L}$, який є градуйовано-симетричним. Взагалі припускається градуйована симетрія наборів $PSL(4|4,\mathbb{R})$ індексів позначених однаковими літерами.[37] Подібні скорочені позначення використовуються й для добутків бозонних та ферміонних компонентів супертвісторів $Z^{\boldsymbol{\alpha}(L)}=Z^{\boldsymbol{\alpha}_1}\cdots Z^{\boldsymbol{\alpha}_L}$ та $\eta^{A[M]}=\eta^{A_1}\cdots\eta^{A_M}$ $(M\leq\mathcal{N}=4)$, які є (анти)симетричними. На дужках Дірака густини ньотерових струмів (3.134) генерують нескінченновимірну супералгебру, яку в роботі [232] було названо супералгеброю твісторної струни

$$\begin{aligned}&\{T^{(L)}{}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}(L)}(\sigma),T^{(M)}{}_{\mathcal{D}}{}^{\mathcal{C}(M)}(\sigma')\}_{D.B.}\\ &=(\delta^{\mathcal{A}(1)}_{\mathcal{D}}T^{(L+M-1)}{}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}(L-1)\mathcal{C}(M)}-\delta^{\mathcal{C}(1)}_{\mathcal{B}}T^{(L+M-1)}{}_{\mathcal{D}}{}^{\mathcal{A}(L)\mathcal{C}(M-1)})\delta(\sigma-\sigma').\end{aligned}\tag{3.135}$$

[37]Нижній індекс L у позначенні груп і алгебр симетрії далі буде опущено, оскільки обговорення стосується лише сектора ліво-біжних полів.

Скінченновимірна підалгебра алгебри твісторної струни складається, крім генератора нульового порядку $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(\sigma)$, який генерує зсуви компонентів супертвістора на сталі, з квадратичного монома

$$T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}. \tag{3.136}$$

Дужки Дірака мономів (3.136) генерують співвідношення $gl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебри

$$\{T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(\sigma), T_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{D}}(\sigma')\}_{D.B.}{=}(\delta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{D}}{-}(-)^{\varepsilon^b_a\varepsilon^d_c}\delta^{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}})(\sigma)\delta(\sigma{-}\sigma'),\ \varepsilon^b_a{=}a{+}b. \tag{3.137}$$

Густина $gl(4|4,\mathbb{R})$ струму (3.136) розкладається на такі незвідні компоненти

$$\begin{gathered}
T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \{\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}},\ \widetilde{T}_A{}^B;\ Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B,\ Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}};\ T,\ U\}:\\
\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}} = Y_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\beta}} - \tfrac{1}{4}\delta^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}}(YZ), \quad \widetilde{T}_A{}^B = \xi_A\eta^A - \tfrac{1}{4}\delta^B_A(\xi\eta);\\
Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B = Y_{\boldsymbol{\alpha}}\eta^B, \quad Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}} = \xi_A Z^{\boldsymbol{\beta}};\\
T = \operatorname{Tr} T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} = Y_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}} + \xi_A\eta^A, \quad U = \operatorname{sTr} T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} = Y_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}} - \xi_A\eta^A,
\end{gathered} \tag{3.138}$$

де тильда над густинами струмів позначає їх безслідовість. Густини двох $sl(4,\mathbb{R})$ струмів $\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)$ і $\widetilde{T}_A{}^B(\sigma)$ та густини струмів суперсиметрії $Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma)$ і $Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)$ складають $psl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебру. Разом із $T(\sigma)$ вони складають $sl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебру. На дужках Дірака густини струмів $\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)$ та $\widetilde{T}_A{}^B(\sigma)$ генерують інфітезимальні обертання компонентів супертвістора та дуального супертвістора з параметрами $\Xi^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ та $\Upsilon^A{}_B$

$$\begin{gathered}
\delta_\Xi Z^{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma) = \Xi^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}Z^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \quad \delta_\Xi Y_{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma) = -Y_{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)\Xi^{\boldsymbol{\beta}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \Xi^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} = 0;\\
\delta_\Upsilon\eta^A(\sigma) = \Upsilon^A{}_B\eta^B(\sigma), \quad \delta_\Upsilon\xi_A(\sigma) = -\xi_B(\sigma)\Upsilon^B{}_A, \quad \Upsilon^A{}_A = 0.
\end{gathered}$$

Густини струмів $Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma)$ і $Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)$ є генераторами перетворень суперсиметрії, реалізованих на компонентах супертвісторів

$$\begin{gathered}
\delta_\varepsilon Z^{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma) = \varepsilon^{\boldsymbol{\alpha}}{}_A\eta^A(\sigma), \quad \delta_\varepsilon\xi_A(\sigma) = -Y_{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma)\varepsilon^{\boldsymbol{\alpha}}{}_A;\\
\delta_\epsilon Y_{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma) = -\xi_A(\sigma)\epsilon^A{}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \delta_\epsilon\eta^A(\sigma) = \epsilon^A{}_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma),
\end{gathered}$$

де $\varepsilon^{\boldsymbol{\alpha}}{}_A$ та $\epsilon^A{}_{\boldsymbol{\alpha}}$ – незалежні грассманово-непарні параметри, кожен з яких має 16 дійсних компонентів. Густини струмів $T(\sigma)$ та $U(\sigma)$ генерують $GL(1,\mathbb{R})$ і $GL_t(1,\mathbb{R})$ перетворення компонентів супертвісторів наведені в (3.129) та (3.130).

Співвідношення $gl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебри (3.137) можуть бути представлені у компонентній формі

$$\begin{gathered}
\{\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}}(\sigma')\}_{D.B.} = (\delta^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\gamma}}\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}} - \delta^{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\alpha}}\widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\beta}})(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\widetilde{T}_A{}^B(\sigma), \widetilde{T}_C{}^D(\sigma')\}_{D.B.} = (\delta^B_C\widetilde{T}_A{}^D - \delta^D_A\widetilde{T}_C{}^B)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma), Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}}(\sigma')\}_{D.B.} = (\delta^B_C\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}} + \delta^{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\alpha}}\widetilde{T}_C{}^B + \tfrac{1}{4}\delta^{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\alpha}}\delta^B_C T)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), Q_{\boldsymbol{\gamma}}{}^D(\sigma')\}_{D.B.} = (\delta^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\gamma}}Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^D - \tfrac{1}{4}\delta^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}}Q_{\boldsymbol{\gamma}}{}^D)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'), \qquad (3.139)\\
\{\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}}(\sigma')\}_{D.B.} = -(\delta^{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\alpha}}Q_C{}^{\boldsymbol{\beta}} - \tfrac{1}{4}\delta^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}}Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}})(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\widetilde{T}_A{}^B(\sigma), Q_{\boldsymbol{\gamma}}{}^D(\sigma')\}_{D.B.} = -(\delta^D_A Q_{\boldsymbol{\gamma}}{}^B - \tfrac{1}{4}\delta^B_A Q_{\boldsymbol{\gamma}}{}^D)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\widetilde{T}_A{}^B(\sigma), Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}}(\sigma')\}_{D.B.} = (\delta^B_C Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}} - \tfrac{1}{4}\delta^B_A Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}})(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{U(\sigma), Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma')\}_{D.B.} = 2Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{U(\sigma), Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma')\}_{D.B.} = -2Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma').
\end{gathered}$$

Відзначимо, що $T(\sigma)$ комутує на дужках Дірака з усіма іншими густинами $gl(4|4,\mathbb{R})$ струмів й таким чином утворює абелів ідеал. Густина «перекрученого» $gl_t(1,\mathbb{R})$ струму $U(\sigma)$ не входить до правих частин співвідношень (3.139). Відтак $gl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебра має структуру напівпрямої суми $sl(4|4,\mathbb{R})$ й $gl_t(1,\mathbb{R})$.

Знайдену нескінченновимірну симетрію лагранжіана для ліво(право)-біжних супертвісторних полів включено до переліку результатів, які виносяться на захист.

3.5.2 Квантові високоспінові суперконформні симетрії твісторних струн

У роботі [270] було показано, що $SL(4|4,\mathbb{R})$ симетрія в моделі твісторної струни зберігається на квантовому рівні, в той час як генератор «перекрученої» $GL_t(1,\mathbb{R})$ симетрії U має аномальний розклад операторного добутку з листковим тензором енергії-імпульсу. Це свідчить про порушення цієї симетрії. Відтак нескінченновимірна симетрія, яка могла б існувати у квантовій теорії, має включати $sl(4|4,\mathbb{R})$ як скінченновимірну підалгебру.

3.5.2.1 Аналіз симетрій на рівні супералгебри

Встановлення можливого набору генераторів для такої супералгебри $sl-$типу зручно розпочати з розгляду тих генераторів супералгебри твісторної струни, які є незвідними $sl(4,\mathbb{R})$ тензорами, складеними з бозонних компонентів супертвісторів. Серед генераторів першого рівня (3.138) до них відносяться $\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}$. Відповідні генератори на рівні L $(L>1)$ мають вигляд

$$\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(L)} = Y_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\beta}(L)} - \tfrac{1}{L+3}(YZ)\delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}(1)} Z^{\boldsymbol{\beta}(L-1)}. \qquad (3.140)$$

Зі співвідношень (3.135) випливає, що дужки Дірака генераторів рівнів L і M супералгебри твісторної струни замикаються на генератори рівня $L+M-1$. Зокрема, дужки Дірака генераторів першого рівня (3.138) і рівня L дають генератори рівня L. Ці дужки Дірака визначають трансформаційні властивості генераторів вищих рівнів відносно двох $sl(4,\mathbb{R})$ симетрій та 32 суперсиметрій з $psl(4|4,\mathbb{R})$ супералгебри. Таку особливість генераторів першого рівня можна використати для знаходження виразів для незвідних генераторів рівня L послідовним обчисленням дужок Дірака бозонних генераторів (3.140) з генераторами суперсиметрії $Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}$ та $Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B$.

Застосування цієї процедури до бозонних генераторів другого рівня

$\widetilde{T}_{\gamma}{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}(\sigma)$

$$\{Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}(\sigma')\}_{D.B.} = \left(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}(2)} - \tfrac{1}{5}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{\delta}_1} Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}_2)\boldsymbol{\beta}}\right)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'), \quad (3.141)$$

$$\{Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma), \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}(\sigma')\}_{D.B.} = -\left(\delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\delta}_1} \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}_2)B} - \tfrac{1}{5}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{\delta}_1} \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}_2)B}\right)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \quad (3.142)$$

дозволяє визначити генератори суперсиметрії другого рівня

$$Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}(2)} = \xi_A Z^{\boldsymbol{\delta}(2)}, \quad \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}A} = \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}}\eta^A.$$

Із виразів для ненульових дужок Дірака цих генераторів з $Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B$ та $Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}$ можна визначити інші бозонні генератори другого рівня

$$\begin{aligned} &\{Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B(\sigma), Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}(\sigma')\}_{D.B.} = \delta_C^B \widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \\ &+\delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\boldsymbol{\delta}_1}\left(\widetilde{T}_C{}^{\boldsymbol{\delta}_2)B} + \delta_C^B\left(\tfrac{9}{40}T - \tfrac{1}{40}U\right)Z^{\boldsymbol{\delta}_2)}\right)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'), \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} &\{Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}D}(\sigma')\}_{D.B.} = \left(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} \widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\delta}D} - \tfrac{1}{4}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}} \widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\beta}D}\right)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \\ &+\delta_A^D\left[\widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\beta\delta}} + \left(\tfrac{9}{40}T - \tfrac{1}{40}U\right)\left(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{\boldsymbol{\delta}} - \tfrac{1}{4}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}} Z^{\boldsymbol{\beta}}\right)\right](\sigma)\delta(\sigma-\sigma'), \end{aligned} \quad (3.144)$$

де

$$\widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\beta}B} = \widetilde{T}_A{}^B Z^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Продовжуючи далі можна знайти повний набір незвідних генераторів другого рівня

$$\begin{aligned} &\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(2)}, \quad \widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\alpha}B}, \quad T_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{B[2]} = Y_{\boldsymbol{\alpha}}\eta^{B[2]}; \\ &Q_A{}^{\boldsymbol{\alpha}(2)}, \quad \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}B}, \quad \widetilde{Q}_A{}^{B[2]} = \xi_A\eta^{B[2]} - \tfrac{1}{3}(\xi\eta)\delta_A^{[B_1}\eta^{B_2]} \end{aligned} \quad (3.145)$$

та

$$TZ^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad UZ^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad T\eta^A, \quad U\eta^A. \quad (3.146)$$

Як буде показано нижче, оператори, які зіставляються генераторам (3.146), не є первинними полями у конформній теорії поля на світовому листку, а отже відповідні симетрії є порушеними на квантовому рівні. Оскільки ці генератори входять до правої частини співвідношень (3.143) та (3.144), це означає порушення суперсиметрій другого рівня, які генеруються $Q_A{}^{\boldsymbol{\alpha}(2)}$

і $\widetilde{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}B}$. Відповідно зі співвідношень (3.141) та (3.142) випливає, що бозонна симетрія, генераторами якої є $\widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(2)}$, також порушується. Тому класичні симетрії другого рівня є порушеними у квантовій теорії.

Аналогічне обчислення співвідношень на дужках Дірака бозонних генераторів рівня L ($L > 2$) (3.140) та генераторів суперсиметрії першого рівня

$$\begin{gathered}\{Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L)}(\sigma')\}_{D.B.}\\ = \Big(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}(L)} - \tfrac{1}{L+3}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}(1)} Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)\boldsymbol{\beta}}\Big)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\end{gathered} \tag{3.147}$$

$$\begin{gathered}\{Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{B}(\sigma), \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L)}(\sigma')\}_{D.B.}\\ = -\Big(\delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\delta}(1)} \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)B} - \tfrac{1}{L+3}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}(1)} \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)B}\Big)(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\end{gathered} \tag{3.148}$$

дає генератори суперсиметрії рівня L

$$Q_A{}^{\boldsymbol{\delta}(L)} = \xi_A Z^{\boldsymbol{\delta}(L)}, \quad \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)B} = \widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)}\eta^B. \tag{3.149}$$

У свою чергу вирази для інших бозонних генераторів визначаються зі співвідношень на дужках Дірака генераторів (3.149) з генераторами суперсиметрії першого рівня

$$\begin{gathered}\{Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{B}(\sigma), Q_C{}^{\boldsymbol{\delta}(L)}(\sigma')\}_{D.B.} = \delta_C^B \widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L)}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\\ +\delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\delta}(1)}\Big[\widetilde{T}_C{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)B} + \delta_C^B\Big(\tfrac{L+7}{8(L+3)}T - \tfrac{L-1}{8(L+3)}U\Big) Z^{\boldsymbol{\delta}(L-1)}\Big](\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\end{gathered} \tag{3.150}$$

та

$$\begin{gathered}\{Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}(\sigma), \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)D}(\sigma')\}_{D.B.}\\ = \Big(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} \widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)l} - \tfrac{1}{L+2}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}(1)} \widetilde{T}_A{}^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\delta}(L-2)D}\Big)(\sigma)\,\delta(\sigma-\sigma')\\ +\delta_A^D\Big[\widetilde{T}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\delta}(L-1)} + \Big(\tfrac{L+7}{8(L+3)}T - \tfrac{L-1}{8(L+3)}U\Big)\\ \times\Big(\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{\boldsymbol{\delta}(L-1)} - \tfrac{1}{L+2}\delta_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\delta}(1)} Z^{\boldsymbol{\beta}} Z^{\boldsymbol{\delta}(L-2)}\Big)\Big](\sigma)\,\delta(\sigma-\sigma'),\end{gathered} \tag{3.151}$$

де

$$\widetilde{T}_C{}^{\boldsymbol{\delta}(L-1)B} = \widetilde{T}_C{}^{B} Z^{\boldsymbol{\delta}(L-1)}$$

і так далі. У результаті повний набір незвідних генераторів рівня L включає наступні бозонні

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)B[q]} &= \widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)}\eta^{B[q]},\ q=0,2,4,\ p+q=L; \\ \widetilde{T}_{A}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)B[q]} &= \widetilde{T}_{A}{}^{B[q]}Z^{\boldsymbol{\beta}(p)},\ q=1,3,\ p+q=L \end{aligned} \tag{3.152}$$

та ферміонні генератори

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)B[q]} &= \widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)}\eta^{B[q]},\ q=1,3,\ p+q=L; \\ \widetilde{Q}_{A}{}^{\boldsymbol{\beta}(p)B[q]} &= \widetilde{Q}_{A}{}^{B[q]}Z^{\boldsymbol{\beta}(p)},\ q=0,2,4,\ p+q=L. \end{aligned} \tag{3.153}$$

Відповідні (безслідові) добутки бозонних компонентів супертвісторів означено в (3.140), а (безслідові) добутки ферміонних компонентів означено в (3.138), (3.145) та виразами

$$\widetilde{T}_{A}{}^{B[3]} = \xi_A\eta^{B[3]} - \tfrac{1}{2}(\xi\eta)\delta_A^{[B_1}\eta^{B_2}\eta^{B_3]},$$

$$Q_A = \xi_A, \quad \widetilde{Q}_{A}{}^{B[4]} = \xi_A\eta^{B[4]} - (\xi\eta)\delta_A^{[B_1}\eta^{B_2}\eta^{B_3}\eta^{B_4]}.$$

У цьому наборі також наявні генератори

$$TZ^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]}, \quad UZ^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]},\ 0\le q\le 4,\ p+q=L-1, \tag{3.154}$$

яким не відповідають первинні поля у конформній теорії поля на світовому листку як буде продемонстровано у наступному підпункті. Вони входять до правих частин співвідношень (3.150) та (3.151) й зумовлюють порушення симетрій рівня L подібно до симетрій другого рівня.

У моделі твісторної струни Берковіца $GL(1,\mathbb{R})$ симетрія є калібрувальною, тому генератори, які мають фактор T, необхідно покласти рівними нулю. Для виключення інших генераторів, яким не відповідають первинні поля, потрібно було б розглядати ще й «перекручену» $GL_t(1,\mathbb{R})$ симетрію як калібрувальну. Однак, генератору цієї симетрії U також не відповідає первинне поле, тому генератори, які мають фактор U, не можна покласти рівними нулю. Відтак ми приходимо до висновку, що на кожному рівні $L>1$ неможливо знайти набір генераторів із замкненими співвідношеннями на дужках Дірака, яким би відповідали первинні поля у конформній теорії поля на світовому листку. В результаті на квантовому рівні послідовною глобальною симетрією лагранжіана (3.126) для ліво- та право-біжних супертвісторів є $SL(4|4,\mathbb{R})\times SL(4|4,\mathbb{R})$ супергрупа у секторі замкнених струн та $SL(4|4,\mathbb{R})$ у секторі відкритих струн. Відповідно квантовою глобальною симетрією моделі Берковіца є $PSL(4|4,\mathbb{R})\times PSL(4|4,\mathbb{R})$ або $PSL(4|4,\mathbb{R})$.

3.5.2.2 Властивості генераторов високоспінових симетрій як операторів у листковій конформній теорії поля

Цей підпункт присвячено вивченню операторів у листковій конформно-інваріантній теорії поля з лагранжіаном (3.126), які відповідають класичним генераторам алгебри твісторної струни. Його метою є доведення тверджень, які були використано у попередньому підпункті.

Для застосування методів двовимірної конформної теорії поля лагранжіан (3.126) має бути означено на світовому листку з евклідовою сиґнатурою. Для цього потрібно провести обертання Віка

$$\tau\to i\sigma^2,\ \sigma\to\sigma^1\ \Rightarrow\ \sigma^+\to z=\sigma^1+i\sigma^2,\ \sigma^-\to-\bar z=-(\sigma^1-i\sigma^2).$$

Це приводить до таких змін листкових похідних

$$\partial_+\to\partial_z=\tfrac{1}{2}(\partial_1-i\partial_2)\equiv\partial,\quad \partial_-\to-\partial_{\bar z}=-\tfrac{1}{2}(\partial_1+i\partial_2)\equiv-\bar\partial,$$

елемента площі світового листка

$$d\tau d\sigma\to id\sigma^1d\sigma^2=\tfrac{i}{2}d^2z$$

та супертвісторів

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(\tau,\sigma)\to\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(z,\bar z),\quad \bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}}(\tau,\sigma)\to-\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}}(z,\bar z).$$

Відтак евклідова дія для супертвісторних полів набуває вигляду

$$S_E=\int\limits_{\Sigma_E}d^2z(\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\bar\partial\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}+\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}}\partial\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}).\tag{3.155}$$

Двовимірна конформна теорія поля означена дією на евклідовому світовому листку (3.155) складається з конформної теорії для бозонних компонентів супертвісторів, яка належить до сімейства $\beta\gamma$ конформних теорій поля, та конформної теорії для ферміонних компонентів супертвісторів із сімейства bc конформних теорій поля (див., наприклад, [274]). Із виразу для дії (3.155) можна визначити форму сингулярних членів у розкладі операторного добутку супертвісторів. У ліво-біжному (голоморфному) секторі, дослідженню якого буде приділено основну увагу, вони дорівнюють

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(z)\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}(w) \sim \frac{\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}}{z-w}, \quad \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}(z)\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(w) \sim -\frac{(-)^{a}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}}{z-w}.$$

Для добутку компонентів супертвісторів сингулярні члени мають вигляд

$$Z^{\boldsymbol{\alpha}}(z)Y_{\boldsymbol{\beta}}(w) \sim \frac{\delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}}}{z-w}, \quad \eta^{A}(z)\xi_{B}(w) \sim \frac{\delta^{A}_{B}}{z-w}.$$

За означенням (див., наприклад, [274]) первинне поле $\mathcal{O}(z)$ характеризується такою загальною формою розкладу операторного добутку з лістковим тензором енергії-імпульсу $L(z)$

$$L(z)\mathcal{O}(w) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\mathcal{O}(w) + \frac{1}{z-w}\,\partial\mathcal{O}(w), \tag{3.156}$$

де h – його конформна вага.[38] Голоморфний тензор енергії-імпульсу в теорії для вільних супертвісторів (3.155) має вигляд

$$L_{\rm tw}(z) = -\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\partial\mathcal{Z}^{\mathcal{A}},$$

де $\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}$ та $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$ є первинними полями конформної ваги одиниця та нуль відповідно.

З точки зору листкової конформної теорії поля вимогою сумісності на квантовому рівні для розглянутих у попередніх підпунктах глобальних симетрій є відповідність їх генераторам первинних полів, тобто розклади їх

[38] Припускається, що локальні складені оператори є нормально впорядкованими, але позначки нормального впорядкування : : буде опущено.

операторних добутків з тензором енергії-імпульсу не мають включати аномальні члени (див., наприклад, [274]). Іншими словами у правій частині добутків типу (3.156) не мають з'являтись члени з полюсами вище другого порядку. Як буде показано, генератори, які містять фактори T чи U, не задовольняють цю вимогу.

Обчислюючи сингулярні члени у розкладі операторного добутку тензора енергії-імпульсу з густинами $gl(4,\mathbb{R})$ струмів

$$Y_{\boldsymbol{\gamma}}\partial Z^{\boldsymbol{\gamma}}(z)Y_{\boldsymbol{\beta}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}(w) \sim \frac{\delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}}}{(z-w)^3} - \frac{1}{(z-w)^2}Y_{\boldsymbol{\beta}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}(w) - \frac{1}{(z-w)}\,\partial(Y_{\boldsymbol{\beta}}Z^{\boldsymbol{\alpha}})(w)$$

та

$$\xi_C\partial\eta^C(z)\xi_B\eta^A(w) \sim -\frac{\delta^A_B}{(z-w)^3} - \frac{1}{(z-w)^2}\xi_B\eta^A(w) - \frac{1}{z-w}\,\partial(\xi_B\eta^A)(w),$$

можна дістати висновку, що квантові $sl(4|4,\mathbb{R})$ генератори $\widetilde{T}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}$, $\widetilde{T}_A{}^B$, $Q_{\boldsymbol{\alpha}}{}^B$, $Q_A{}^{\boldsymbol{\beta}}$ і T дійсно є первинними полями з одиничною вагою, а оператор U не є первинним полем [270]

$$L_{\mathrm{tw}}(z)U(w) \sim \frac{-8}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}U(w) + \frac{1}{z-w}\,\partial U(w).$$

Генераторам вищих рівнів (3.152) та (3.153) також відповідають первинні поля одиничної ваги. В той же час операторні добутки генераторів (3.154) з тензором енергії-імпульсу включають аномальні внески

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{tw}}(z)TZ^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]}(w) &\sim -\tfrac{p+q}{(z-w)^3}Z^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]}(w) + \mathcal{O}((z-w)^{-2}),\\
L_{\mathrm{tw}}(z)UZ^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]}(w) &\sim -\tfrac{8+p-q}{(z-w)^3}Z^{\boldsymbol{\alpha}(p)}\eta^{A[q]}(w) + \mathcal{O}((z-w)^{-2}).
\end{aligned}$$

При $p=q=0$ ці розклади операторних добутків співпадають з розкладами операторних добутків генераторів $gl(1,\mathbb{R})$ та $gl_t(1,\mathbb{R})$ симетрій із тензором енергії-імпульсу. Для $p\neq 0$, $q\neq 0$ обидва аномальні члени не обертаються на нуль, тож відповідні симетрії є порушеними. Оскільки генератори (3.152) та (3.153) зв'язані з іншими генераторами рівня L суперсиметріями першого рівня (див. рівняння (3.147)-(3.151)), високоспінові симетрії є порушеними для всіх значень $L > 1$. Для $L = 1$ узгоджена на квантовому рівні глобальна симетрія є ізоморфною $SL(4|4, \mathbb{R})$.

Виявлене порушення на квантовому рівні нескінченновимірних симетрій у моделях твісторних струн є результатом, який виноситься на захист.

3.6 Основні результати розділу

У даному розділі представлено наступні результати, які було здобуто вперше та які виносяться на захист:

- побудовано (супер)твісторні формулювання лагранжіанів бозонної струни та $\mathcal{N} = 1$ суперструни у розмірності $D = 4$. На відміну від супертвісторних формулювань моделей безмасової суперчастинки та безнатягової суперструни, лагранжіани суперструн з натягом у супертвісторному формулюванні є нелінійними та включають суто калібрувальні ферміонні ступені свободи;

- запропоновані редуковані супертвісторні моделі, які відповідають $\mathcal{N} = 1$ та $\mathcal{N} = 2$ суперструнам та узагальнюють супертвісторні формулювання безмасової суперчастинки та безнатягової суперструни. Їх лагранжіани за побудовою квадратичні за компонентами (супер)твісторів. При цьому редукована супертвісторна модель, яка відповідає $\mathcal{N} = 2$ суперструні, включає як окремі випадки редуковану модель для $\mathcal{N} = 1$ суперструни та модель бозонної струни у твісторному формулюванні. Встановлено зв'язок редукованих моделей з супертвісторними формулюваннями суперструн;

- проведено аналіз редукованої супертвісторної моделі для $\mathcal{N} = 2$ суперструни як гамільтонової системи з в'язями. Здобуто вирази для лоренцковаріантних та незвідних в'язей першого та другого роду і встановлено калібрувальні симетрії, які генеруються в'язями першого роду;

- побудовано формулювання $D = 6$ та $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструн у термінах супертвісторів, які реалізують фундаментальні представлення мінімальних суперконформних груп $OSp(8^*|2)$ та $OSp(32|1)$. Означено в'язі на компоненти супертвісторів, які забезпечують їх відповідність координатам $D = 6$ та $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперпросторів Мінковського. Здобуті лагранжіани суперструн у розмірностях $D = 6$ та $D = 10$ є нелінійними за компонентами супертвісторів подібно до лагранжіанів у суперпросторовому формулюванні, й інваріантні відносно перетворень $\kappa-$симетрії. Як і у випадку суперструн у розмірності $D = 4$ запропоновано редуковані супертвісторні моделі з лагранжіанами квадратичними за компонентами супертвісторів;

- модель $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні проаналізовано як гамільтонову систему з в'язями. Знайдено вирази для первинних та вторинних в'язей у термінах компонентів супертвісторів та проведено їх поділ на незвідні та лоренц-коваріантні набори в'язей першого та другого роду. Для врахування в'язей другого роду введено дужки Дірака. Показано, що співвідношення на дужках Дірака в'язей першого роду у провідному порядку за оберненим натягом суперструни включають доданки квадратичні за цими в'язями. Це свідчить про нелінійність алгебри в'язей першого роду;

- у моделі твісторної струни Берковіца та її розширенні на випадок супертвісторів, на які не накладено в'язей, виявлені нескінченновимірні глобальні симетрії класичних лагранжіанів для ліво- та право-біжних супертвісторних полів. Їх скінченновимірною складовою є група $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперконформної симетрії;

- показано, що розклади операторних добутків генераторів знайдених високоспінових симетрій з компонентами тензора енергії-імпульсу, який відповідає листковій конформній симетрії супертвісторних лагранжіанів включають аномальні члени. Тому на квантовому рівні непорушеною є лише зазначена скінченновимірна симетрія.

Розділ 4
Класичні та квантові симетрії просторово-часових і твісторних формулювань моделей релятивістських частинок та струн у (супер)просторах анти-де Сіттера

4.1 Вступ

У підрозділі 4.2 буде здобуто представлення для симетричних спінорних полів у п'ятивимірному просторі Мінковського у вигляді інтеґрала за фактор-багатовидом $SO(1,4)/(SO(1,1) \times ISO(3)) = S^3$ від однорідних функцій лоренц-гармонічних змінних. За побудовою ці поля задовольняють вільні безмасові рівняння типу Дірака. Дане представлення було запропоноване в нашій роботі [275]. Його можна розглядати як узагальнення на випадок п'ятивимірного простору представлення Пенроуза для вільних безмасових симетричних спінорних полів у чотиривимірному просторі-часі у вигляді контурних інтеґралів [170]. Буде показано, що рівняння для симетричних спінорних полів з $2s$ індексами ($s = 1, 3/2, 2$) відповідають невзаємодійній границі динамічних рівнянь та тотожностей Б'янкі для напруженостей полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного. Для цього буде розглянуто спінорну форму тензорів напруженості та динамічних рівнянь для кожного зі згаданих полів. Також буде дано детальний опис лоренц-гармонічних змінних для простору розмірності $D = 1 + 4$.[39] Ці результати будуть використані в підрозділі 4.4 для виведення супертві-

[39] Нагадаємо, як і у попередніх розділах запис розмірності простору-часу у вигляді $D = T + S$ підкреслює, що такий простір має T часових та S просторових розмірностей.

сторних представлень лагранжіана безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді та вивчення її квантових станів.

У підрозділі 4.3 буде побудовано реалізацію в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ алгебри з додатною енергією. Дану реалізацію було запропоновано в нашій роботі [276] на основі відомого осциляторного опису цих представлень [277], [278], а також співвідношення між бозонними $su(2)$ осциляторами і компонентами твісторів Пенроуза [279], [280]. Оскільки безмасові представлення відповідають симетричним полям та полям змішаної симетрії у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, здобуту реалізацію буде використано в наступному підрозділі для опису фізичних станів у супертвісторному формулюванні моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді.

На початку підрозділу 4.4 буде побудовано нове твісторне формулювання моделі масивної частинки в просторі AdS_5. Воно ґрунтується на представленні першого порядку для лагранжіана частинки у просторово-часовому формулюванні, в якому компоненти її вектора імпульсу виражено через $D = 1 + 4$ спінорні лоренцеві гармонікі. Це представлення буде використане як проміжне для переходу до нового 4-твісторного формулювання лагранжіана. Буде показано, що розв'язання частини в'язей для лоренцевих гармонік приводить до лагранжіана у 2-твісторному формулюванні [281], який характеризується лише в'язями першого роду. У 2-твісторному формулюванні буде проведено квантування моделі за Діраком в термінах амбітвісторів, а не $su(2)$ осциляторів, як в роботі [282], та здобуто вираз для хвильової функції частинки в амбітвісторному просторі.

У пункті 4.4.2 буде розглянуто модель безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді. Для компонент її імпульсу у дотичних просторах до AdS_5 та S^5 буде запропоновано вирази в термінах спінорних змінних, на які накладено в'язі. Це дозволяє перейти від суперпросторового до 8-супертвісторного формулювання лагранжіана суперчастинки [283].

Частину в'язей на спінорні змінні буде розв'язано та здобуто простіше 4-супертвісторне формулювання [284]. Обидва супертвісторні формулювання лагранжіана суперчастинки співпадають зі здобутими з інших міркувань в роботах [285], [286]. У пункті 4.4.3 буде проведено квантування за Діраком моделі суперчастинки в 4-супертвіторному формулюванні в термінах бозонних та ферміонних $su(2)$ осцилляторів [287]. Буде показано, що спектр її фізичних станів співпадає з набором представлень $psu(2,2|4)$ супералгебри, які описують збудження полів IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом [277], [288]. Також буде дано амбітвісторний опис супермультиплета $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації, який містить безмасові представлення із цього набору.

У підрозділі 4.5 буде розглянуто нове формулювання моделі безмасової спінової частинки [289] та запропоновано модель безнатягової спінової струни в D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як підбагатовид $(D+1)$-вимірного плаского простору з двома часовими розмірностями [290], [291]. Такий підхід до опису простору анти-де Сіттера бере свій початок у роботах П. Дірака [292]. У даному підході координати простору анти-де Сіттера реалізують векторне представлення $SO(2, D-1)$ групи його ізометрії на відміну від теорії твісторів, у якій твістори реалізують (анти)фундаментальне представлення спінової накривної цієї групи та пов'язані з координатами співвідношеннями инцидентності. [40]

Для побудови лагранжіанів цих моделей буде застосовано метод квадратного кореня із в'язей, який було розвинено для формулювання теорій супергравітації як гамільтонових систем з в'язями [294]. Зазначимо, що цей метод також використовувався для побудови [294], [295] (див. також [197]) лагранжіанів спінової частинки [296], [297], [298] та спінової струни з ненульовим натягом [225], [226] у просторі-часі Мінковського. Виходячи з

[40] Цікаво, що обидва підходи було використано в роботі [293] для введення твісторів, які відповідають простору AdS_5. До запропонованих співвідношень між компонентами твісторів входять згортки координат обхопного шестивимірного простору з γ-матрицями.

виразів для генераторів суперсиметрії світової лінії (світового листка), які даються класичними аналогами рівняння Дірака, вирази для решти в'язей буде встановлено із вимоги замкненості класичної алгебри в'язей першого роду. Лінійна комбінація здобутих в'язей першого роду з множниками Лагранжа визначає гамільтоніан, який обертається на нуль в смислі слабкої рівності. Він, у свою чергу, визначає лагранжіан у змінних фазового простору.

Цей метод буде застосовано як до вільної безмасової спінової частинки, так і до частинки у фоновому електромагнітному полі, а також абелевих антисиметричних тензорних калібрувальних полях. Здобуті формулювання узагальнюють на простір анти-де Сіттера модель спінової частинки у просторі Мінковського, яка взаємодіє із зовнішніми електромагнітним [296], [299], [300], [301] та абелевими антисиметричними тензорними калібрувальними полями [302]. В результаті квантування за Діраком запропонованих формулювань буде знайдено вирази для ермітових операторів, які відповідають класичним в'язям першого роду, та виведено рівняння для хвильової функції спінової частинки. Далі буде введено модель безнатягової спінової струни у просторі анти-де Сіттера. Після означення в'язей та побудови її лагранжіана буде розв'язано рівняння руху, здобуто БРСТ генератор та досліджено квантові аномалії калібувальних симетрій.

4.2 Спінорний опис $D = 5$ безмасових калібрувальних полів та $D = 5$ лоренцеві гармоніки

Добре відомий спінорний підхід до опису гравітаційного поля у чотиривимірному просторі, започаткований Р. Пенроузом [303], може бути застосований до інших калібрувальних полів й відіграє важливу роль у формулюваннях калібрувальних теорій полів вищих спінів [304], [305], [306], які розширюють теорії гравітації Ейнштейна та Вейля. Ці формулювання включають узагальнення тензора Вейля для полів спіну s [307], [308], які мають еквівалентне представлення симетричними спінорами з $2s$ індексами (див., наприклад, огляд [309]). З іншого боку, одним із досягнень теорії твісторів є розробка методу побудови розв'язків рівнянь типу Дірака для вільних симетричних спінорних полів у вигляді інтеґралів за двовимірною сферою $S^2 = \mathbb{CP}^1$ від однорідних функцій у (дуальному) твісторному просторі [170]. Для $s = 1, 3/2, 2$ ці рівняння співпадають з лінеаризованими в околі плаского бекграунда рівняннями Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та Ейнштейна за відсутності джерел і відповідними тотожностями Б'янкі. Для $s > 2$ вони представляють тотожності Б'янкі для узагальнених спінорів Вейля вільних безмасових калібрувальних полів на масовій поверхні.

Узагальнення такої конструкції на вищі розмірності з використанням твісторів, які лінійно перетворюються відносно відповідних конформних симетрій, стикається з труднощами (див., наприклад, роботи [310], [311]). Їх причинами є складніша структура алгебри багатокомпонентних спінорів порівняно з алгеброю двокомпонентних спінорів, а також те, що у просторах розмірності більшої за 4 вимога конформної інваріантності в теорії поля виявляється надто обмежувальною.

Існує, однак, узагальнення, в якому явною є лише лоренцева симетрія. В роботі [67] було побудовано інтеґральне представлення для симетричних тензорних та спінорних полів у просторах Мінковського розмірностей $D = 3, 4, 6, 10$, які задовольняють динамічні рівняння для вільних безмасових полів. У цьому представленні ключову роль відіграють векторні та спінорні лоренцеві гармоніки, відтак лоренцева симетрія наявна за побудовою.[41] Підінтеґральний вираз є функцією однієї з прямокутних підматриць матриці спінорних гармонік та проєкції просторово-часових координат на світлоподібний вектор, побудований із компонентів цієї підматриці. Форма

[41] У просторі-часі розмірності $D = 4$ аналогічне інтеґральне представлення для розв'язків рівнянь для вільних безмасових полів з довільним спіном було незалежно запропоноване в роботі [107].

міри інтеґрування у просторі гармонік гарантує інваріантність інтеґрала відносно локальної $SO(1,1) \times ISO(D-2)$ симетрії, так що інтеґрування здійснюється за $(D-2)$-вимірною сферою S^{D-2}.

У нашій роботі [275] зазначене інтеґральне представлення було узагальнено на випадок симетричних спінорних полів у просторі-часі розмірності $D = 1+4$. Нами було показано, що для $s = 1, 3/2, 2$ ці поля можуть бути ототожнені з кривизнами вільних безмасових полів. Для цього нами було детально розроблено властивості $D = 1+4$ лоренцевих гармонік[42] й розвинено спінорний опис для $D = 1+4$ полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного. Для кожного з цих полів тензори(-спінори) кривизни було представлено в спінорній формі й розкладено на незвідні спінори. Також динамічні рівняння та тотожності Б'янкі було записано в термінах цих незвідних спінорів кривизни. За відсутності джерел відмінними від нуля залишаються тільки симетричні спінори кривизни з $2s$ індексами, які задовольняють диференційні рівняння першого порядку. Рівняння, які виникають у границі вільних полів, можна легко розширити на поля з довільним спіном. Ці рівняння узагальнюють на випадок розмірності $D = 1+4$ рівняння першого порядку для симетричних спінорних полів у $D = 4$ просторі, які розв'язуються за допомогою контурних інтеґралів Пенроуза [170].

Відзначимо, що раніше спінорна форма тензора Вейля у п'ятивимірному просторі-часі розглядалась в роботі [313][43], а розклад тензора Рімана на незвідні спінори було здобуто в роботі [315]. В роботі [316] спінорна форма лінеаризованого тензора Вейля та його високоспінових узагальнень використовувалась у розгорнутому формулюванні рівнянь для набору вільних безмасових полів у просторі AdS_5, які складають унітарне незвідне представлення певного високоспінового узагальнення $su(2,2)$ алгебри та його суперсиметричного розширення, пов'язаного з AdS_5/CFT_4 дуальністю. Не-

[42] Спінорні лоренцеві гармоніки для простору розмірності $D = 1+4$ вперше було введено в роботі [312], однак вони параметризували інший фактор-простір.

[43] У [314] також розглядалась спінорна форма напруженості електромагнітного поля.

лінійні рівняння для симетричних безмасових полів довільного спіну у D-вимірному просторі $(A)dS_D$ було побудовано в [317].

4.2.1 Спінорна форма динамічних рівнянь та тотожностей Б'янкі для $D = 5$ безмасових калібрувальних полів

В даному пункті наведено спінорну форму кривизни для полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного у п'ятивимірному просторі-часі з координатами $x^{m'}$. Досліджено їх розклади на незвідні спінори, а також обмеження, які на них накладють польові рівняння та тотожності Б'янкі. Також розглянуто границю вільних полів для цих спінорних рівнянь.

4.2.1.1 Поле Янга-Міллса

Тензор кривизни Янга-Міллса[44] $F_{m'n'}(x)$ записується у спінорній формі за допомогою згортки індексів з векторними індексами антисиметричних $\gamma-$матриць $\gamma^{m'}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\alpha}[2]\boldsymbol{\beta}[2]}(x) = C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1}F_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}(x) - C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2}F_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}(x) \\ -C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}F_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2}(x) + C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}F_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1}(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

де матриця зарядового спряження $C_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ також є антисиметричною. Для дійсного поля Янга-Міллса симетричне спінорне поле $F_{\boldsymbol{\alpha\beta}}(x) = F_{\boldsymbol{\beta\alpha}}(x)$ задовольняє умову ермітовості

$$(F_{\boldsymbol{\alpha\beta}}(x))^\dagger = \gamma^{0\boldsymbol{\beta\gamma}}F_{\boldsymbol{\gamma\delta}}(x)\gamma^{0\boldsymbol{\delta\alpha}}$$

і відтак має 10 дійсних компонентів.

Вакуумні рівняння Янга-Міллса та тотожності Б'янкі

$$\nabla^{m'}F_{m'n'}(x) = 0, \quad \nabla \wedge F(x) = 0$$

у спінорному представлення мають вигляд

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\gamma}F_{\boldsymbol{\gamma\beta}}(x) = 0.$$

[44] Для стислості індекси приєднаного представлення алгебри калібрувальної симетрії не наводяться.

У лінеаризованій (абелевій) границі здобуваємо рівняння для вільного поля зі спіном одиниця

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\gamma} F_{\boldsymbol{\gamma\beta}}(x) = 0. \tag{4.2}$$

4.2.1.2 Поле Раріти-Швінгера

Для врахування випадку кількох полів гравітіні в $\mathcal{N}-$розширених мультиплетах супергравітації поле Раріти-Швінгера $\Psi_{m'\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x)$ має індекс $a = 1, \ldots, \mathcal{N}$. Подібно до тензора кривизни Янга-Міллса його тензор-спінор кривизни

$$\Phi_{m'n'\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) = \partial_{m'} \Psi_{n'\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) - \partial_{n'} \Psi_{m'\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) \tag{4.3}$$

може бути представлено у спінорній формі

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}[2]\boldsymbol{\beta}[2]\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) = C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1} \Phi_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) - C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2} \Phi_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x)$$
$$-C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1} \Phi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x) + C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2} \Phi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x).$$

Спінор кривизни

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = \tfrac{1}{2}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\delta}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) + \partial_{\boldsymbol{\alpha}_2}{}^{\boldsymbol{\delta}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x)),$$

$$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}[2]|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = \gamma^{m'}{}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \Psi_{m'\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x)$$

є симетричним за двома першими індексами (які відділено від останнього індекса вертикальною рискою) та задовольняє умову ермітовості

$$(\Phi_{\boldsymbol{\alpha\beta}|\boldsymbol{\gamma}}{}^{a}(x))^{\dagger} = \Omega_{ab} \gamma^{0\boldsymbol{\alpha\lambda}} \gamma^{0\boldsymbol{\beta\mu}} \Phi_{\boldsymbol{\lambda\mu}|\boldsymbol{\rho}}{}^{b}(x) \gamma^{0\boldsymbol{\rho\gamma}},$$

де $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$ є симплектичним метричним тензором.[45] Він має $40\mathcal{N}$ дійсних компонентів й може бути представлений у вигляді суми двох доданків, кожен з яких має $20\mathcal{N}$ компонентів

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = \Phi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) + \widehat{\Phi}_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x). \tag{4.4}$$

[45] Нагадаймо, що дозволеними групами $R-$симетрії в $D = 5$ теоріях супергравітації є $USp(\mathcal{N})$ з $\mathcal{N} = 2, 4, 6, 8$.

Перший член $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}(3)}{}^{a}(x)$ є повністю симетричним за спінорними індексами, тоді як другий має ту ж симетрію, як і $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x)$, але його повністю симетризована частина обертається на нуль.

Рівняння Раріти-Швінгера

$$\gamma^{k'l'm'}{}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}}\Phi_{l'm'\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = 0,$$

виражене в термінах спінорів кривизни, еквівалентне наступному рівнянню

$$\widehat{\Phi}_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = 0. \tag{4.5}$$

Тотожності Б'янкі для тензора-спінора кривизни (4.3) мають таку форму

$$\varrho_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = \partial_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\delta}}\Phi_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) + \partial_{\boldsymbol{\alpha}_2}{}^{\boldsymbol{\delta}}\Phi_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x) = 0.$$

Оскільки їх симетрія є такою ж, як і спінорного поля $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x)$, розклад подібний до (4.4) справедливий й для $\varrho_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}}{}^{a}(x)$. Враховуючи рівняння Раріти-Швінгера (4.5) та наступне представлення для похідної повіністю симетричної частини спінора кривизни

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}}\Phi_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2}{}^{a}(x) = \tfrac{1}{2}\varrho_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2}{}^{a}(x) - \widehat{\varrho}_{\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}}{}^{a}(x),$$

приходимо до висновку, що тотожності Б'янкі набувають вигляду

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\delta}}\Phi_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\beta}(2)}{}^{a}(x) = 0. \tag{4.6}$$

4.2.1.3 Ейнштейнівська гравітація

У цьому підпункті розглядається спінорна форма тензора Рімана, польових рівнянь та тотожностей Б'янкі у $D = 5$ теорії гравітації Ейнштейна. Спінорну форму тензора Рімана

$$R_{\boldsymbol{\alpha}[2]\boldsymbol{\beta}[2]\boldsymbol{\gamma}[2]\boldsymbol{\delta}[2]}(x) =$$

$$+C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1}\big(C_{\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\delta}_1}R_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\delta}_2} - C_{\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\delta}_2}R_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\delta}_1} - C_{\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\delta}_1}R_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\delta}_2} + C_{\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\delta}_2}R_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\delta}_1}\big)$$

$$-C_{\alpha_1\beta_2}\big(C_{\gamma_1\delta_1}R_{\alpha_2\beta_1|\gamma_2\delta_2}-C_{\gamma_1\delta_2}R_{\alpha_2\beta_1|\gamma_2\delta_1}-C_{\gamma_2\delta_1}R_{\alpha_2\beta_1|\gamma_1\delta_2}+C_{\gamma_2\delta_2}R_{\alpha_2\beta_1|\gamma_1\delta_1}\big)$$

$$-C_{\alpha_2\beta_1}\big(C_{\gamma_1\delta_1}R_{\alpha_1\beta_2|\gamma_2\delta_2}-C_{\gamma_1\delta_2}R_{\alpha_1\beta_2|\gamma_2\delta_1}-C_{\gamma_2\delta_1}R_{\alpha_1\beta_2|\gamma_1\delta_2}+C_{\gamma_2\delta_2}R_{\alpha_1\beta_2|\gamma_1\delta_1}\big)$$

$$+C_{\alpha_2\beta_2}\big(C_{\gamma_1\delta_1}R_{\alpha_1\beta_1|\gamma_2\delta_2}-C_{\gamma_1\delta_2}R_{\alpha_1\beta_1|\gamma_2\delta_1}-C_{\gamma_2\delta_1}R_{\alpha_1\beta_1|\gamma_1\delta_2}+C_{\gamma_2\delta_2}R_{\alpha_1\beta_1|\gamma_1\delta_1}\big)$$

можна розглядати як квадрат спінорної форми кривизни Янга-Міллса (4.1). Спінор кривизни Рімана $R_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$ є симетричним як за першою, так і за другою парами індексів та відносно їх перестановки $R_{\alpha(2)|\beta(2)}(x) = R_{\beta(2)|\alpha(2)}(x)$. Аналогічно можна визначити спінорну форму тензора Річчі

$$\begin{gathered}R_{\alpha[2]\beta[2]}(x) = R_{\alpha_1\beta_2|\alpha_2\beta_1}(x) - R_{\alpha_1\beta_1|\alpha_2\beta_2}(x) - \tfrac{1}{2}\big(C_{\alpha_1\beta_1}R_{\alpha_2\gamma|}{}^{\gamma}{}_{\beta_2}(x)\\ -C_{\alpha_1\beta_2}R_{\alpha_2\gamma|}{}^{\gamma}{}_{\beta_1}(x) - C_{\alpha_2\beta_1}R_{\alpha_1\gamma|}{}^{\gamma}{}_{\beta_2}(x) + C_{\alpha_2\beta_2}R_{\alpha_1\gamma|}{}^{\gamma}{}_{\beta_1}(x)\big)\end{gathered} \tag{4.7}$$

й виразити скалярну кривизну через спінор кривизни Рімана

$$R(x) = \tfrac{1}{2}R_{\alpha\beta|}{}^{\alpha\beta}(x).$$

Спінор кривизни Рімана $R_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$ має 55 компонентів, як і тензор Рімана, та є звідним. Його можна представити у вигляді суми

$$R_{\alpha(2)|\beta(2)}(x) = W_{\alpha(2)\beta(2)}(x) + \widehat{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x) \tag{4.8}$$

повністю симетричного спінора кривизни Вейля $W_{\alpha(4)}(x)$, який має 35 компонентів, та спінорного поля $\widehat{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$, яке має таку ж симетрію, як і спінор кривизни Рімана, але його симетризована частина обертається на нуль, що залишає 20 незалежних компонентів. У свою чергу $\widehat{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$ розкладається на три незвідні складові

$$\begin{gathered}\widehat{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x) = \bar{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x) - \tfrac{1}{6}\Big(C_{\alpha_1\beta_1}\widetilde{R}_{\alpha_2\beta_2}(x) + C_{\alpha_1\beta_2}\widetilde{R}_{\alpha_2\beta_1}(x)\\ +C_{\alpha_2\beta_1}\widetilde{R}_{\alpha_1\beta_2}(x)+C_{\alpha_2\beta_2}\widetilde{R}_{\alpha_1\beta_1}(x)\Big)+\tfrac{1}{20}\widehat{R}(x)\big(C_{\alpha_1\beta_1}C_{\alpha_2\beta_2}+C_{\alpha_1\beta_2}C_{\alpha_2\beta_1}\big).\end{gathered} \tag{4.9}$$

Незвідний спінор кривизни з чотирма індексами $\bar{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$ має ту ж симетрію, як і спінор $\widehat{R}_{\alpha(2)|\beta(2)}(x)$, але додатково всі сліди, які можна утворити з використанням матриці зарядового спряження $C_{\gamma\delta}$, обертаються на нуль, що залишає 14 незалежних компонентів. Відзначимо, що означений в роботі [315] спінор кривизни $\Omega_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}(x)$ є антисиметричним за кожною парою індексів та виражається через $\bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$ наступним чином

$$\Omega_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}(x) = \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}(x) - \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2}(x).$$

Антисиметричний та безслідовий спінор кривизни $\widetilde{R}_{\boldsymbol{\alpha}[2]}(x)$ обертається на нуль при врахуванні алгебраїчної тотожності Б'янкі $R_{[k'l'm'n']}(x) = 0$. Скалярне поле $\hat{R}(x)$ є пропорційним скалярній кривизні $\widehat{R}(x) = 2R(x)$.

Підстановка розкладу (4.9) в (4.7) дає змогу виразити спінорну форму тензора Річчі через незвідні спінори кривизни

$$\begin{gathered} R_{\boldsymbol{\alpha}[2]\boldsymbol{\beta}[2]}(x) = \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}(x) - \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}(x) \\ -\tfrac{1}{10}\widehat{R}(x)\left(C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}C_{\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2} - 2C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1}C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2} + 2C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2}C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}\right). \end{gathered}$$

Це дає можливість виразити тензор Ейнштейна

$$\mathcal{E}_{m'n'}(x) = R_{m'n'}(x) - \tfrac{1}{2}\eta_{m'n'}R(x)$$

в термінах незвідних спінорів кривизни

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\alpha}[2]\boldsymbol{\beta}[2]}(x) = \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}(x) - \bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2}(x) \\ +\tfrac{3}{20}\widehat{R}(x)\left(C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}C_{\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2} - 2C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1}C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2} + 2C_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2}C_{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1}\right). \end{gathered}$$

Відтак вакуумні рівняння Ейнштейна мають спінорну форму $\bar{R}_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) = \hat{R}(x) = 0$. Тож спінор кривизни Вейля залишається єдиною ненульовою величиною після накладення польових рівнянь.

Завершимо обговорення $D = 5$ ейнштейнівської гравітації аналізом спінорної форми другої тотожності Б'янкі

$$\mathscr{D}_{[k'}R_{l'm']p'r'}(x) = 0.$$

У спінорному представленні вона має вигляд

$$B_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) = \mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}}R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) + \mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_2}{}^{\boldsymbol{\lambda}}R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) = 0,$$

де введене спінорне поле з чотирма індексами $B_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$ симетричне за першою та другою парами індексів. Його можна розкласти на симетричне та антисиметричне відносно перестановки пар індексів спінорні поля

$$B_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) = S_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) + A_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) :$$

$$S_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)} = \frac{1}{2}\big(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}(2)} + (\boldsymbol{\alpha}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_2) + \mathscr{D}_{\boldsymbol{\beta}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}(2)} + (\boldsymbol{\beta}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2)\big),$$

$$A_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)} = \frac{1}{2}\big(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}(2)} + (\boldsymbol{\alpha}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_2) - \mathscr{D}_{\boldsymbol{\beta}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} R_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}(2)} - (\boldsymbol{\beta}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2)\big) \qquad (4.10)$$

Спінорне поле $S_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$ має ту ж симетрію, як і спінор кривизни Рімана $R_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$. Тому його розклад на незвідні складові є таким же (див. (4.8)-(4.9)). Зокрема, до його повністю симетричної частини дає внесок лише спінор кривизни Вейля

$$S_{\boldsymbol{\alpha}(4)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\lambda} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\alpha}_4}(x) + \mathrm{cycle}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\right).$$

Наведемо також розклад коваріантної похідної спінора кривизни Вейля на незвідні складові

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}(3)}(x) = \tfrac{1}{2} S_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}(3)}(x) + \mathcal{W}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}(3)}(x), \qquad (4.11)$$

де спінорне поле

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}(3)}(x) = \tfrac{3}{4}\left(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3}(x) - \tfrac{1}{3}\left(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\beta}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3\boldsymbol{\alpha}}(x) + \mathrm{cycle}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\right)\right)$$

симетричне за трьома останніми індексами, а його симетризація за всіма чотирма індексами дає нуль. Інші незвідні складові спінорного поля $S_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$ обертаються на нуль для вакуумних просторів. Вирази для них через незвідні спінори кривизни Рімана наведено в нашій роботі [275].

Із спінорного поля з чотирма індексами $A_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x)$, означеного в (4.10), можна виділити безслідову частину

$$\bar{A}_{\boldsymbol{\alpha}(2)|\boldsymbol{\beta}(2)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2} + \mathcal{W}_{\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2} - \mathcal{W}_{\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} - \mathcal{W}_{\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} \bar{R}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\beta}(2)} + \mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}_2}{}^{\boldsymbol{\lambda}} \bar{R}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\beta}(2)} - \mathscr{D}_{\boldsymbol{\beta}_1}{}^{\boldsymbol{\lambda}} \bar{R}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\alpha}(2)} - \mathscr{D}_{\boldsymbol{\beta}_2}{}^{\boldsymbol{\lambda}} \bar{R}_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\alpha}(2)}\right) = 0.$$

Для вакуумних просторів ця рівність означає обертання на нуль спінорного поля $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}(3)}(x)$. Відтак з урахуванням розкладу (4.11) приходимо до наступного рівняння для спінора кривизни Вейля

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}(3)}(x) = 0.$$

Його лінеаризація в околі плаского бекграунда приводить до рівняння

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}(3)}(x) = 0. \tag{4.12}$$

Рівняння (4.12) є аналогом рівнянь (4.2) і (4.6) для полів спінів одиниця та 3/2. Вони є низькоспіновими членами послідовності рівнянь для симетричних спінорних полів

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}(2s-1)}(x) = 0. \tag{4.13}$$

Її члени з $s > 2$ можуть бути ототожнені з рівняннями, які задовольняють узагальнені спінори Вейля для вільних безмасових полів вищих спінів. У розгорнутому підході до опису динаміки високоспінових полів показується, що узагальнений тензор Вейля є єдиною ненульовою складовою узагальненого тензора кривизни після накладення польових рівнянь [308].

4.2.2 Інтеґральне представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у $D = 5$ просторі Мінковського

У цьому пункті буде побудовано інтеґральне представлення для симетричних спінорних полів у п'ятивимірному просторі Мінковського, які за побудовою задовольняють вільні безмасові рівняння (4.13). Воно включає $D = 1 + 4$ спінорні лоренцеві гармоніки. Тому спочатку представимо детальне означення цих лоренц-гармонічних змінних.

Векторні лоренцеві грамоніки описуються 5×5 матрицею $n_{m'}^{(n')}$, на яку накладено набір в'язей

$$n_{m'}^{(k')} \eta^{m'n'} n_{n'}^{(l')} = \eta^{(k')(l')}, \quad \eta = \mathrm{diag}(-,+,+,+,+).$$

Тому вона набуває значення в групі Лоренца $SO(1,4)$. Індекси в круглих дужках відповідають представленню правої $SO(1,4)_R$ групи симетрії, а індекси без дужок – лівої $SO(1,4)_L$ групи симетрії. В інтеґральному представленні (4.21)підгрупу $SO(1,1)\times ISO(3)\in SO(1,4)_R$ реалізовано як локальну симетрією.

Введемо два світлоподібні вектори, які визначаються лінійними комбінаціями першого та, наприклад, останнього стовпців матриці гармонік

$$n^{[\pm 2]}_{m'} = n^{(0)}_{m'} \pm n^{(4)}_{m'}: \quad n^{[\pm 2]}_{m'} n^{m'[\pm 2]} = 0, \quad n^{[\pm 2]}_{m'} n^{m'[\mp 2]} = -2. \tag{4.14}$$

Це приводить до розкладення матриці $n^{(n')}_{m'}$ на три блоки

$$n^{(m')}_{m'} = (n^{[\pm 2]}_{m'}, n^{(\mathbf{I})}_{m'}), \quad \mathbf{I} = 1,2,3 \tag{4.15}$$

та зводить явну $SO(1,4)_R$-коваріантність до $SO(1,1)\times SO(3)$. Ці блоки наступним чином перетворюються відносно інфінетезімальних $SO(1,4)_R$ обертань з параметрами $L^{(m')(n')} = (L^{[+2][-2]}, L^{[\pm 2](\mathbf{I})}, L^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})})$

$$\begin{aligned} \delta n^{[\pm 2]}_{m'} &= \pm L^{[+2][-2]} n^{[\pm 2]}_{m'} + L^{[\pm 2](\mathbf{I})} n^{(\mathbf{I})}_{m'}, \\ \delta n^{(\mathbf{I})}_{m'} &= -\tfrac{1}{2}\left(L^{[+2](\mathbf{I})} n^{[-2]}_{m'} + L^{[-2](\mathbf{I})} n^{[+2]}_{m'} \right) + L^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})} n^{(\mathbf{J})}_{m'}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Завдяки нульовій нормі будь-який з векторів (4.14) може бути покладений пропорційним вектору імпульсу $D=5$ безмасової частинки. Наприклад, вектор $n^{[+2]}_{m'}$ є інваріантним відносно перетворень з параметрами $L^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}$ і $L^{[-2](\mathbf{I})}$ та коваріантним чином змінюється при перетвореннях з параметрами $L^{[+2][-2]}$ та $L^{[+2](\mathbf{I})}$. Відтак $L^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}$, $L^{[-2](\mathbf{I})}$ та $L^{[+2][-2]}$ параметризують $SO(1,1)\times ISO(3)$ підгрупу групи $SO(1,4)_R$. Коли ця підгрупа розглядається як локальна симетрія, матриця векторних лоренцевих гармонік набуває значення у фактор-просторі $SO(1,4)/(SO(1,1)\times ISO(3))$ ізоморфному тривимірній сфері. В явному вигляді можна записати $n^{[+2]}_{m'} \sim (1, k_{\hat{m}})$, де евклідів 4-вектор $k_{\hat{m}}$ має одиничну норму $k^2=1$ та параметризує S^3.

Подібно до співвідношення між матрицями лоренцевих перетворень у векторному та спінорному представленнях матрицю $n^{(k')}_{m'}$ з групи $SO(1,4)$

можна реалізувати як добуток спінорних лоренцевих гармонік $v_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\alpha}} \in Spin(1,4)$

$$n_{m'}^{(k')} = -\tfrac{1}{4} v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\beta}} \gamma^{(k')\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\mu}}, \quad v_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\nu}} = C_{\boldsymbol{\beta\gamma}} C^{\boldsymbol{\nu\lambda}} v_{\boldsymbol{\lambda}}^{\gamma}, \tag{4.17}$$

де верхній індекс T позначає транспонування. Вираз (4.17) є частинним випадком загального співвідношення між векторними та спінорними гармоніками, яке справедливе, як обговорювалось у вступі, у просторі довільної розмірності D. Визначальні співвідношення для векторних гармонік виконуються завдяки умовам гармонічності, накладеним на спінорні гармоніки. Їх явний вигляд залежить від розмірності простору-часу та спінорного представлення [67], [68], [66], [79], [74]. У розмірності $D = 1 + 4$ необхідно накласти 6 умов гармонічності

$$v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\nu}} v_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\nu}}, \tag{4.18}$$

які зводять кількість незалежних компонентів матриці $v_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ до розмірності групи $Spin(1,4)$. Розклад (4.15) матриці векторних гармонік на $SO(1,1)$ та $SO(3)$ блоки відповідає розкладу спінорних гармонік на 4×2 прямокутні блоки

$$v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\mu}} = (v_{\boldsymbol{\alpha}}^{+\mathfrak{i}}, v_{\boldsymbol{\alpha}}^{-\mathfrak{i}}),$$

де індекс $\mathfrak{i}$ позначає фундаментальне представлення $SU(2) \cong SO(3)$. Умови гармонічності (4.18) в термінах цих прямокутних матриць набувають вигляду

$$v^{\boldsymbol{\alpha}\,\pm\mathfrak{i}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\pm\mathfrak{j}} = 0, \quad v^{\boldsymbol{\alpha}\,\pm\mathfrak{i}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mp\mathfrak{j}} - i\varepsilon^{\mathfrak{ij}} = 0,$$

а світлоподібні вектори-стовпці ${n_m}^{\pm 2}$ матриці векторних гармонік дорівнюють

$$n_{m'}^{[\pm 2]} = -\tfrac{1}{2} v^{\mathrm{T}\pm\mathfrak{i}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}\pm}{}_{\mathfrak{i}}.$$

З лоренцевих гармонік та їх диференціалів можна побудувати $SO(1,4)_L$−інваріантні 1-форми Картана

$$\Omega^{(k')(l')}(d) = \tfrac{1}{2}\big(n_{m'}^{(l')} dn^{m'(k')} - n_{m'}^{(k')} dn^{m'(l')}\big) = \tfrac{1}{2} v_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\alpha}} \gamma^{(k')(l')\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} dv_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\nu}}, \tag{4.19}$$

які зіставляються генераторам $so(1,4)_R$ алгебри. Відносно підалгебри $so(1,1)\oplus so(3)\subset so(1,4)_R$ вони розкладаються на такі незвідні складові

$$\begin{aligned}\Omega^{[+2][-2]}(d) &= i(v^{\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}}dv^{-}_{\boldsymbol{\alpha}\mathrm{i}} - v^{\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}}dv^{+}_{\boldsymbol{\alpha}\mathrm{i}}),\\ \Omega^{[\pm2](\mathbf{I})}(d) &= -v^{\boldsymbol{\alpha}\pm\mathrm{i}}\tau^{(\mathbf{I})}{}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}}dv^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha}\mathrm{j}},\\ \Omega^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}(d) &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})(\mathbf{K})}(v^{\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}}\tau^{(\mathbf{K})}{}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}}dv^{-}_{\boldsymbol{\alpha}\mathrm{j}} + v^{\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}}\tau^{(\mathbf{K})}{}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}}dv^{+}_{\boldsymbol{\alpha}\mathrm{j}}).\end{aligned} \tag{4.20}$$

У диференційній геометрії векторні та спінорні лоренцеві гармоніки реалізують векторний та спінорний ортонормовані репери, а форми Картана (4.19) представляють їх дериваційні коефіцієнти. У геометричному підході до опису динаміки струн, розробленому в роботах [30], [33], [34] на основі методу ортонормованого репера, листкові відображення 1-форм (4.20) інтерпретуються як $so(1,1)\times so(D-2)$ поля Янга-Міллса та заряджені поля матерії. Вони пов'язані зі спіновою зв'язністю та другою фундаментальною формою світового листка струни, вкладеного в простір-час Мінковського.

У нашій роботі [275] було запропоновано інтеґральне представлення для симетричних спінорних полів у $D=5$ просторі Мінковського, які можуть бути ототожнені зі спінорами кривизни Вейля для безмасових калібрувальних полів

$$W_{\boldsymbol{\alpha}(2s)}(x^{m'}) = \int\limits_{S^3} \Omega^{[+6]} v^{+\mathrm{i}_1}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\cdots v^{+\mathrm{i}_{2s}}_{\boldsymbol{\alpha}_{2s}} \phi^{[-6-2s]}_{\mathrm{i}(2s)}(x^{[+2]}, v^{+}). \tag{4.21}$$

Воно включає 3-форму міри $SO(1,4)/(SO(1,1)\times ISO(3))$ фактор-простору

$$\Omega^{[+6]} = \varepsilon^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})(\mathbf{K})}\Omega^{[+2](\mathbf{I})}\wedge\Omega^{[+2](\mathbf{J})}\wedge\Omega^{[+2](\mathbf{K})}, \tag{4.22}$$

яка є інваріантною відносно локальної $ISO(3)$ симетрії (відповідними параметрами в (4.16) є $L^{[-2](\mathbf{I})}$ та $L^{(\mathbf{I})(\mathbf{J})}$) і $SO(1,1)$ коваріантною. При параметризації гармонік кутовими змінними 3-форма (4.22) зводиться до стандартної міри на тривимірній сфері S^3. Симетричний $SU(2)$ спінор

$$\phi^{[-6-2s]}_{\mathrm{i}(2s)}(x^{[+2]}, v^{+})$$

залежить від просторово-часових координат лише через проєкцію $x^{[+2]} = x^{m'} n^{[+2]}_{m'}$ та має вагу $-6 - 2s$ відносно $SO(1,1)$ симетрії аби компенсувати перетворення міри інтеґрування та спінорних гармонік. Відтак інтеґрал є $SO(1,1) \times ISO(3)$ інваріантним. Спінорне поле $W_{\boldsymbol{\alpha}(2s)}(x)$, означене інтеґралом (4.21), задовольняє рівняння (4.13) при $s > 0$ й $\Box W_{\boldsymbol{\alpha}(2s)}(x) = 0$ при $s \geq 0$. При $s = 2, 3, 4$ ці рівняння співпадають зі спінорною формою динамічних рівнянь та тотожностей Б'янкі для вільних полів Янга-Міллса (4.2), Раріти-Швінгера (4.6) та гравітаційного (4.12). Відзначимо, що інтеґральне представлення подібне до (4.21) може також бути побудоване за допомогою спінора $v^{-\mathrm{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}$. У такому випадку степінь однорідності підінтеґральної функції за $v^{-\mathrm{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}$ має доірнювати $6 + 2s$. Цей результат виноситься на захист.

4.3 Амбітвісторний та осциляторний описи безмасових полів у просторі AdS_5

Як відомо, вільним полям зі скінченним числом компонентів в просторі AdS_5, а також їх межовим значенням у $D = 4$ просторі Мінковського, відповідають нескінченновимірні унітарні незвідні представлення $su(2,2)$ з додатною енергією [318], [319]. Такі представлення в теорії поля традиційно помічаються набором із трьох невід'ємних (напів)цілих міток (E, s_1, s_2), які дорівнюють власним значенням генераторів підалгебри Картана, кожен з яких належить до одного з доданків максимальної компактної підалгебри $\mathcal{K} = u_E(1) \oplus su(2)_L \oplus su(2)_R \subset su(2,2)$. А саме, AdS_5 енергія (або конформна розмірність) E є власним значенням $u_E(1)$ генератора, а $s_{1,2}$ є спіновими власними значеннями скінченновимірних унітарних представлень $su(2)_{L,R}$ алгебр. Унітарні незвідні представлення з додатною енергією належать до голоморфної дискретної серії або її границь [320]. Значення AdS_5 енергії E обмежені знизу й пропорційні сумі спінів $s = s_1 + s_2$. Форма межі унітарності залежить від типу представлення [319]. Даблетонні представлення $(s+1, s, 0)$ та $(s+1, 0, s)$ мають найнижчу енергію для даного спіну й насичують межу

$$E \geq s+1, \quad s_1 s_2 = 0. \tag{4.23}$$

Поля, які відповідають даблетонним представленням, можуть бути означені лише в $D = 4$ межовому просторі Мінковського, а не в самому просторі AdS_5. Ці представлення є аналогами сінглетонів $so(2,3)$ алгебри ізометрії простору AdS_4, які були відкриті П. Діраком [321]. Розклади тензорних добутків даблетонних представлень включають всі інші унітарні незвідні представлення з додатною енергією. Ним відповідають поля, які можуть бути означені в просторі AdS_5. Енергії таких представлень задовольняють нерівність

$$E \geq s+2, \quad s_1, s_2 \geq 0. \tag{4.24}$$

Цю межу унітарності насичують так звані безмасові представлення.[46] Відзначимо, що межі (4.23), (4.24) є окремими випадками загальних співвідношень [322], [323] між енергіями та $so(D-1)$ мітками для унітарних незвідних представлень $so(2, D-1)$ з додатною енергією.

Унітарні незвідні представлення з додатною енергією можна описати за допомогою квантованих бозонних осциляторів. Такі реалізації знаходять важливі застосування в теоретичній фізиці. Перші роботи, в яких бозонні осцилятори використовувались для побудови генераторів $so(2,4) = su(2,2)$ алгебри та її представлень, які відповідають фізичним станам у теоретико-польових моделях з конформною симетрією, беруть свій початок у 1960-х роках (див., наприклад, [324], [325] й особливо [326], де квантовані твістори та осцилятори розглядались в одноманітний спосіб та застосовувались для опису «сходових» представлень). В середині 1980-х років із розвитком супергравітації та теорії струн виник інтерес до унітарних незвідних

[46] Нагадаємо, що означення маси в теорії поля в просторі анти-де Сіттера є неоднозначним.

представлень некомпактних суперконформних алгебр з додатною енергією. Зокрема, опис спектра мод Калуци-Клейна [277], [288], які відповідають збудженням полів $D = 10$ IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом [132], потребував класифікації таких представлень для $su(2,2|4)$ супералгебри [277], [327]. Наприкінці 1990-х інтерес до унітарних незвідних представлень суперконформних алгебр з додатною енергією виник знову у зв'язку з необхідністю перевірки гіпотези AdS/CFT дуальності [124] (див., наприклад, [328], [278], [329]).

Розвиток систематичного підходу на основі осциляторів до побудови унітарних незвідних представлень з додатною енергією для некомпактних алгебр Лі з йордановою структурою, які мають (пів)цілі мітки, було започатковано в роботі [330]. Відповідні бозонні осцилятори несуть фундаментальні представлення напівпростої частини максимальної компактної підалгебри алгебри Лі, яка розглядається. Для $su(2,2)$ ця конструкція вимагає введення двох типів осциляторів, які пов'язані з двома $su(2)$ алгебрами зі складу її максимальної компактної підалгебри. Генератори $su(2,2)$ алгебри реалізуються квадратичними мономами, побудованими з цих осциляторів. Для побудови різних представлень необхідно ввести декілька копій осциляторів кожного типу, які мають назву кольорів. Зокрема, даблетонні представлення будуються з використанням лише однієї копії осциляторів, а для побудови безмасових представлень необхідно ввести дві копії. Унітарні незвідні представлення конформних алгебр з додатною енергією належать до представлень побудованих з векторів найнижчої ваги. Їх базис складається з векторів, здобутих багатократною дією генераторів, побудованих з осциляторів народження, на вектори найнижчої ваги, які анігілюються осциляторами знищення.

У цьому підрозділі спочатку будуть розглянуті даблетонні представлення та буде проведено порівняння їх відомих осциляторної та твісторної реалізацій, а далі будуть розглянуті безмасові представлення. Осциляторний опис таких представлень також відомий [277], [278], [329]. Буде показано як вони можуть бути описані однорідними функціями в просторі амбітвісторів [176], [177] та здобуто вирази їх степеней однорідності через мітки $su(2)$ представлень. Далі буде розглянуто амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза для цих функцій, яке приводить до спінорних полів в $D = 4$ просторі Мінковського. Вони можуть бути межовими значеннями для вільних повністю симетричних безмасових полів та полів змішаної симетрії, які задовольняють динамічні рівняння в просторі AdS_5.

Осциляторна реалізація унітарних незвідних представлень некомпактних суперконформних алгебр з додатною енергією додатково потребує введення ферміонних осциляторів, які перетворюються відповідно до (анти)фундаментального представлення відповідної алгебри R-симетрії або її підалгебр [331]. Побудова в термінах бозонних та ферміонних осциляторів унітарних незвідних представлень $su(2,2|4)$ супералгебри з додатною енергією, які виникають в спектрі мод Калуци-Клейна IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом, вперше була проведена в роботі [277]. В наступному підрозділі буде показано як цей спектр мод Калуци-Клейна можна описати в термінах осциляторів, які є динамічними змінними в супертвісторному формулюванні моделі $D = 10$ безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді.

4.3.1 Осциляторна та твісторна реалізації даблетонних унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією

Будемо використовувати наступне означення [276] бозонних $su(2)$ осциляторів

$$\begin{pmatrix} a^{\alpha} \\ b^{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{\alpha} \\ \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mu^{\alpha} + \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}} \\ \mu^{\alpha} + \bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

та

$$(a_\alpha\ b_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar\mu^{\dot\alpha}\ \Lambda_\alpha) \begin{pmatrix} -I & I \\ I & I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar\mu^{\dot\alpha} + \Lambda_\alpha \quad \bar\mu^{\dot\alpha} + \Lambda_\alpha), \tag{4.26}$$

де I позначає одиничну 2×2 матрицю, в термінах $SL(2,\mathbb{C})$ спінорних частин твістора Пенроуза та дуального твістора

$$Z^{\boldsymbol\alpha} = \begin{pmatrix} \mu^\alpha \\ \bar\Lambda_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad \bar Z_{\boldsymbol\alpha} = (Z^{\boldsymbol\beta})^\dagger H^{\boldsymbol\beta}{}_{\boldsymbol\alpha} = (\Lambda_\alpha\ \bar\mu^{\dot\alpha}).$$

Унітарне перетворення (4.25)-(4.26) відповідає переходу від базису $D = 2+4$ γ-матриць, в якому генератор конформних дилатацій та $so(1,3)$ генератори є блочно-діагональними, до базису, в якому генератори максимальної компактної підалгебри $\mathcal{K}$ мають блочно-діагональну форму. Перший базис відповідає реалізації $su(2,2)$ алгебри як конформної алгебри $conf(1,3)$ чотиривимірного простору Мінковського й лежить в основі теорії твісторів, тоді як другий лежить в основі осциляторного підходу. Перетворення (4.25)-(4.26) діагоналізує матрицю $H^{\boldsymbol\alpha}{}_{\boldsymbol\beta}$, яка входить до означення дуальних твісторів

$$H^{\boldsymbol\alpha}{}_{\boldsymbol\beta} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Застосування перетворення (4.25)-(4.26) до комутаційних співвідношень квантованих твісторів [167]

$$[Z^{\boldsymbol\alpha}, \bar Z_{\boldsymbol\beta}] = \delta^{\boldsymbol\alpha}_{\boldsymbol\beta} \tag{4.27}$$

приводить до комутаторів a- і b-осциляторів

$$[a_\alpha, a^\beta] = \delta^\beta_\alpha, \quad [b^\alpha, b_\beta] = \delta^\alpha_\beta.$$

Відтак осцилятори a^α і b_α є підвищуючими операторами або операторами народження, натомість a_α і b^α є понижуючими операторами або операторами знищення, які анігілюють осциляторний вакуум $|0\rangle$.

Оператор спіральності $\mathbf{s}$ в твісторній реалізації [170] переходить у різницю між операторами числа частинок для b- та a-осциляторів

$$2\,\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\bar{Z}Z + Z\bar{Z}) \to -N_{(a)} + N_{(b)}, \quad N_{(a)} = a^{\alpha}a_{\alpha}, \quad N_{(b)} = b_{\alpha}b^{\alpha}. \quad (4.28)$$

Вектори найнижчої ваги даблетонних представлень [277], [278] будуються з добутків осциляторів народження

$$|\,\mathrm{lwv}\rangle = a^{\alpha(2s)}|\,0\rangle \quad \text{or} \quad b_{\alpha(2s)}|\,0\rangle, \quad (4.29)$$

які діють на вакуум. Базисні вектори даблетонних представлень в осциляторному підході будуються за допомогою підвищуючих генераторів $L_{+}{}^{\alpha}{}_{\beta} = a^{\alpha}b_{\beta} \in su(2,2)$, які комутують з $-N_{(a)} + N_{(b)}$. Тому для кожного представлення фіксованою є різниця між кількістю b і a осциляторів, які діють на вакуум. Для даблетонів $su(2)_{L(R)}$ мітки $s_{1,2}$ дорівнюють половині кількості a і b осциляторів, які визначають вектори найнижчої ваги, а їх енергія дорівнює $E = s_1 + s_2 + 1$.

У теорії твісторів даблетонним представленням віповідають однорідні функції у проєктивному твісторному просторі $\mathbb{PT}^{\bullet}$ або проєктивному дуальному твісторному просторі $\mathbb{PT}_{\bullet}$. Вибір певної реалізації даблетонних представлень визначається вибором реалізації квантованих твісторів як операторів множення та диференціювання, сумісної з комутаційними співвідношеннями (4.27). Тож даблетонні представлення, побудовані з векторів найнижчої ваги (4.29), описуються в $\mathbb{PT}^{\bullet}$ функціями зі степенями однорідності $2s-2$ чи $-2s-2$. Як описано у вступі функції $f_{(2s-2)}(Z)$ зі степенем однорідності $2s-2 > -2$ перетворенням Пенроуза відображаються у поля $\Gamma_{\alpha\dot{\alpha}(2s-1)}(x)$ від'ємної спіральності $-s < 0$, які описують лівополяризовні безмасові частинки згідно з угодою, прийнятою в монографії [77]. В той же час функції $f_{(-2s-2)}(Z)$ зі степенем однорідності $-2s-2 \leq -2$ за допомогою контурних інтеґралів Пенроуза визначають поля $\bar{W}_{\dot{\alpha}(2s)}(x)$ невід'ємної спіральності $s \geq 0$, які описують правополяризовані частинки.

Ці поля при $s \geq 2$ можна інтерпретувати як (узагальнені) спінори кривизни Вейля вільних безмасових полів спіну s [307], [308]. Вони за побудовою задовольняють безмасові рівняння типу Дірака. Інтеґрування за Пенроузом функцій $f_{(-2s-2)}(\bar{Z})$ степеня однорідності $-2s-2 \leq -2$ у проєктивному дуальному твісторному просторі $\mathbb{PT}_\bullet$ приводить до (узагальнених) спінорів кривизни Вейля протилежної спіральності $W_{\alpha(2s)}(x)$, які також задовольняють безмасові рівняння типу Дірака. Натомість однорідним функціям $f_{(2s-2)}(\bar{Z})$ степеня $2s-2 > -2$ відповідають зв'язності типу Кристоффеля $\Gamma_{\dot{\alpha}\alpha(2s-1)}(x)$ (див. таблицю 1 у нашій роботі [276]).

4.3.2 Осциляторна та амбітвісторна реалізації безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією

Осциляторний опис представлень (E, s_1, s_2), які насичують межу унітарності $E \geq s_1 + s_2 + 2$ й відповідають вільним безмасовим полям в просторі AdS_5, вимагає введення двох копій a- і b-осциляторів [277], [278]

$$[a^i_\alpha, a^\beta_j] = \delta^i_j \delta^\beta_\alpha, \quad [b^\alpha_i, b^j_\beta] = \delta^j_i \delta^\alpha_\beta. \tag{4.30}$$

При цьому також з'являється $su(2)$ симетрія, яка діє на індекси $i, j = 1, 2$ осциляторів. Вона є прикладом кольорової симетрії. Така симетрія виникає у випадку, коли для побудови представлення необхідно більше однієї копії осциляторів [332], [330], [331].

Згідно з (4.25)-(4.26) поставимо у відповідність першій копії осциляторів твістор $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ та дуальний йому твістор $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$ й аналогічно другій копії осциляторів – іншу пару твісторів $W^{\boldsymbol{\alpha}} = (\nu^\alpha, \bar{v}_{\dot{\alpha}})$ та $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} = (v_\alpha, \bar{\nu}^{\dot{\alpha}})$. У будь-якому представленні подібно до випадку даблетонів фіксованою є різниця між власними значеннями операторів числа частинок для b- і a-осциляторів першої та другої копій

$$\begin{aligned} (-N_{(a)}(1) + N_{(b)}(1))|\,\mathrm{lwv}\rangle &= -2s_1|\,\mathrm{lwv}\rangle, \\ (-N_{(a)}(2) + N_{(b)}(2))|\,\mathrm{lwv}\rangle &= 2s_2|\,\mathrm{lwv}\rangle, \end{aligned} \tag{4.31}$$

де $s_{1,2}$ є додатними (пів)цілими числами. Використання співвідношення (4.28) для кожної копії осциляторів та зіставлення ним твісторів у різних реалізаціях як операторів множення та диференціювання приводить до функції в амбітвісторному просторі $\mathbb{A}$ однорідної за кожним з аргументів

$$Z\frac{\partial}{\partial Z}F_{(2s_1-2|2s_2-2)}(Z,\bar{W}) = (2s_1-2)F_{(2s_1-2|2s_2-2)}(Z,\bar{W}),$$
$$\bar{W}\frac{\partial}{\partial \bar{W}}F_{(2s_1-2|2s_2-2)}(Z,\bar{W}) = (2s_2-2)F_{(2s_1-2|2s_2-2)}(Z,\bar{W}).$$

В обраній реалізації твістори $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ та $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$ параметризують простір $\mathbb{A}$, а операторам $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$ та $W^{\boldsymbol{\alpha}}$ відповідають оператори диференціювання за $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ і $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Умова ортогональності $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ накладається на координати амбітвісторного простору за допомогою δ-функції

$$F_{(2s_1-2|2s_2-2)}(Z,\bar{W}) = \delta(\bar{W}Z)f_{(2s_1-1|2s_2-1)}(Z,\bar{W}). \tag{4.32}$$

В осциляторному підході вона переходить в умову

$$(b^2_\alpha b^\alpha_1 - a^2_\alpha a^\alpha_1)|\,\mathrm{lwv}\rangle = 0. \tag{4.33}$$

Для однорідних функцій $f_{(s-1|s-1)}(Z,\bar{W}) \equiv f_{(s-1)}(Z,\bar{W})$ з $s \geq 0$ в просторі $\mathbb{A}$ амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза [177], [90] дає симетричні спінорні поля $\widetilde{b}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}(x)$ означені з точністю до калібрувального перетворення

$$\delta\widetilde{b}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}(x) = \partial_{\alpha(1)\dot{\alpha}(1)}\widetilde{\xi}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}(x)$$

із симетричними спінорними параметрами $\widetilde{\xi}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}(x)$. В термінах $D = 4$ тензорів цим полям відповідають симетричні безслідові (для $s > 1$) тензорні поля рангу s $\widetilde{b}_{a(s)}(x)$,[47] а калібрувальні параметри даються симетричними безслідовими (для $s > 2$) тензорними полями рангу $(s-1)$ $\widetilde{\xi}_{a(s-1)}(x)$, тож

$$\delta\widetilde{b}_{a(s)}(x) = \partial_{a(1)}\widetilde{\xi}_{a(s-1)}(x) - \frac{1}{s}\eta_{a(2)}\partial^c\widetilde{\xi}_{ca(s-2)}(x), \tag{4.34}$$

[47] Тильда у цьому пункті використовується для позначення безслідовості тензора по відношенню до метрики Мінковського.

де $\eta_{a(2)}$ – метрика Мінковського. В осциляторному підході вектори найнижчої ваги для цих представлень задовольняють умови (4.31) з $2s_1 = 2s_2 = s$ та (4.33). Їх розв'язок має вигляд

$$|\,\mathrm{lwv}\rangle = a_1^{\alpha(s)} b^2_{\beta(s)} |\,0\rangle,$$

а мітки представлень дорівнюють $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$ та $E = s+2$ (див. також [278]).

Перейдемо до розгляду функцій $f_{(s-3/2|s-1/2)}(Z,\bar{W})$ та $f_{(s-1/2|s-3/2)}(Z,\bar{W})$ в просторі $\mathbb{A}$. Їм відповідають спінорні поля $\widetilde{\psi}_{\alpha(s+1/2)\dot{\alpha}(s-1/2)}(x)$ та $\widetilde{\chi}_{\alpha(s-1/2)\dot{\alpha}(s+1/2)}(x)$ також означені з точністю до калібрувальних перетворень

$$\delta\widetilde{\psi}_{\alpha(s+1/2)\dot{\alpha}(s-1/2)}(x) = \partial_{\alpha(1)\dot{\alpha}(1)}\widetilde{\varepsilon}_{\alpha(s-1/2)\dot{\alpha}(s-3/2)}(x)$$

та

$$\delta\widetilde{\chi}_{\alpha(s-1/2)\dot{\alpha}(s+1/2)}(x) = \partial_{\alpha(1)\dot{\alpha}(1)}\widetilde{\epsilon}_{\alpha(s-3/2)\dot{\alpha}(s-1/2)}(x).$$

У тензорній формі цим полям відповідають повністю симетричні σ-безслідові тензори-спінори $\widetilde{\psi}_{a(s-1/2)\alpha}(x)$ та $\widetilde{\chi}_{a(s-1/2)\dot{\alpha}}(x)$, які описують ферміонні поля. Калібрувальні перетворення в тензорній форми мають вигляд

$$\begin{gathered}\delta\widetilde{\psi}_{a(s-1/2)}(x) = \partial_{a(1)}\widetilde{\varepsilon}_{a(s-3/2)}(x)\\ +\tfrac{1}{2(s+1/2)}\,\sigma_{a(1)}\tilde{\sigma}^b\partial_b\,\widetilde{\varepsilon}_{a(s-3/2)}(x) - \tfrac{1}{s+1/2}\,\eta_{a(2)}\partial^b\widetilde{\varepsilon}_{ba(s-5/2)}(x)\end{gathered} \tag{4.35}$$

та

$$\begin{gathered}\delta\widetilde{\chi}_{a(s-1/2)}(x) = \partial_{a(1)}\widetilde{\epsilon}_{a(s-3/2)}(x)\\ +\tfrac{1}{2(s+1/2)}\,\tilde{\sigma}_{a(1)}\sigma^b\partial_b\widetilde{\epsilon}_{a(s-3/2)}(x) - \tfrac{1}{s+1/2}\,\eta_{a(2)}\partial^b\widetilde{\epsilon}_{ba(s-5/2)}(x).\end{gathered} \tag{4.36}$$

Відповідні $su(2,2)$ представлення характеризуються векторами найнижчої ваги

$$a_1^{\alpha(s-1/2)} b^2_{\beta(s+1/2)}|\,0\rangle, \quad a_1^{\alpha(s+1/2)} b^2_{\beta(s-1/2)}|\,0\rangle.$$

Їх $su(2)$ мітки дорівнюють $s_1 = \frac{1}{2}\big(s-\frac{1}{2}\big)$, $s_2 = \frac{1}{2}\big(s+\frac{1}{2}\big)$ та $s_1 = \frac{1}{2}\big(s+\frac{1}{2}\big)$, $s_2 = \frac{1}{2}\big(s-\frac{1}{2}\big)$. Для обох представлень AdS_5 енергія дорівнює $E = s+2$.

Однорідні функції загального вигляду в амбітвісторному просторі $f_{(2s_1-1|2s_2-1)}(Z,\bar{W})$ з $s_1, s_2 > 0$ та $|s_1 - s_2| > 1/2$ відповідають бозонним полям $\widetilde{b}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x)$, якщо $s_1 + s_2$ ціле, або, якщо $s_1 + s_2$ півціле, ферміонним полям $\widetilde{\psi}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x)$ $(s_2 > s_1)$ та $\widetilde{\chi}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x)$ $(s_1 > s_2)$. Вони означені з точністю до калібрувальних перетворень

$$\delta\widetilde{b}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x) = \partial_{\alpha(1)\dot{\alpha}(1)}\widetilde{\xi}_{\alpha(2s_2-1)\dot{\alpha}(2s_1-1)}(x).$$

Так само з точністю до калібрувальних перетворень означені поля $\widetilde{\psi}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x)$ та $\widetilde{\chi}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}(x)$. Відповідні вектори найнижчої ваги мають вигляд

$$a_1^{\alpha(2s_1)} b^2_{\beta(2s_2)} |\, 0\rangle, \tag{4.37}$$

а мітки представлень дорівнюють $(s+2, s_1, s_2)$, де $s = s_1 + s_2$. Разом із спряженими представленнями $(s+2, s_2, s_1)$ вони відповідають безслідовим тензорним полям $\widetilde{b}_{a(s_1+s_2)b(|s_1-s_2|)}(x)$ та тензор-спінорним полям $\widetilde{\Psi}_{a(s_1+s_2-1/2)b(|s_1-s_2|-1/2)}(x)$. Це поля змішаної симетрії, яким зіставляються схеми Юнга з двома рядками.

Розглянуті вище $su(2,2)$ представлення вичерпують перелік безмасових представлень. Представлення з $s_1 = 0$ чи $s_2 = 0$ в (4.37) відповідають масивним самодуальним полям [333]. Решта унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією, які можна побудувати за допомогою двох копій $a-$ і $b-$осциляторів, є масивними представленнями [278], [329].

Симетричні безслідові бозонні поля (4.34) та $\sigma-$безслідові ферміонні поля (4.35) і (4.36) можуть бути ототожені з $D = 4$ бозонними та ферміонними тіньовими полями. Їх можна розглядати як межові значення повністю симетричних безмасових калібрувальних полів у просторі AdS_5 [334], [335], які відповідають ненормовним розв'язкам задачі Діріхле для рівнянь Фронсдала [336], [337]. Аналогічний опис безмасових полів змішаної симетрії є значно складнішим (див., наприклад, [333], [338], [339]). Результати, які виносяться на захист, підсумовано в таблиці 4.1, де векторні індекси

<table>
<tr><th>irrep (E, s_1, s_2)</th><th>f on $\mathbb{A}$</th><th>$SL(2,\mathbb{C})$ spinor field</th><th>AdS_5 field</th></tr>
<tr><td>$(s+2, \frac{s}{2}, \frac{s}{2})$</td><td>$f_{(s-1)}$</td><td>$\widetilde{b}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}$</td><td>$\widetilde{B}_{a'(s)}$</td></tr>
<tr><td>$(s+2, \frac{1}{2}(s-\frac{1}{2}), \frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}))$
$\oplus$
$(s+2, \frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}), \frac{1}{2}(s-\frac{1}{2}))$</td><td>$f_{(s-3/2\vert s-1/2)}$
$\oplus$
$f_{(s-1/2\vert s-3/2)}$</td><td>$\widetilde{\psi}_{\alpha(s+1/2)\dot{\alpha}(s-1/2)}$
$\oplus$
$\widetilde{\chi}_{\alpha(s-1/2)\dot{\alpha}(s+1/2)}$</td><td>$\widetilde{\Psi}_{a'(s-1/2)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(s_1+s_2+2, s_1, s_2)
$\oplus$
(s_1+s_2+2, s_2, s_1)
$s_{1,2} > 0$, $\vert s_1 - s_2\vert > 1/2$</td><td rowspan="2">$f_{(2s_1-1\vert 2s_2-1)}$
$\oplus$
$f_{(2s_2-1\vert 2s_1-1)}$</td><td>s_1+s_2 integer:
$\widetilde{b}_{\alpha(2s_2)\dot{\alpha}(2s_1)}$
$\oplus \widetilde{b}_{\alpha(2s_1)\dot{\alpha}(2s_2)}$</td><td>$\widetilde{B}_{a'(s_1+s_2)b'(\vert s_1-s_2\vert)}$</td></tr>
<tr><td>s_1+s_2 half-integer:
$\widetilde{\psi}_{\alpha(2\max\{s_1,s_2\})\dot{\alpha}(2\min\{s_1,s_2\})}$
$\oplus\widetilde{\chi}_{\alpha(2\min\{s_1,s_2\})\dot{\alpha}(2\max\{s_1,s_2\})}$</td><td>$\widetilde{\Psi}_{a'(s_1+s_2-1/2)b'(\vert s_1-s_2\vert-1/2)}$</td></tr>
</table>

Таблиця 4.1. Безмасові представлення $su(2,2)$ та відповідні амбітвісторні функції і поля у просторі-часі.

$a', b' = 0, ..., 4$ відповідають $D = 5$ простору, дотичному до AdS_5.

4.4 Класичні та квантові симетрії моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі

Оскільки суперконформні симетрії лежать в основі високосуперсиметричних прикладів AdS/CFT відповідності [124], представляє інтерес розгляд твісторних формулювань теорій, які ними пов'язуються, та застосування методів теорії твісторів для їх перевірки. У випадку AdS_5/CFT_4 відповідності з максимальною суперсиметрією як $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперсиметрична теорія Янга-Міллса, так і теорія IIB суперструн в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді є інваріантними відносно унітарної симетрії, генератори якої задовольняють співвідношення $psu(2,2|4)$ супералгебри. Вона містить $su(2,2)$ підалгебру, що обумовлює використання відомих супертвісторів Фербера [76] для формулювання цих теорій. В літературі були запропоновані різні супертвісторні та суперамбітвісторні формулювання $\mathcal{N} = 4$ теорії супер-Янга-Міллса на рівні супермультиплета [169], польових рівнянь [174], а також відносно недавно були побудовані лагранжеві формулювання [180], [340], [341], [342].

Узагальнення твісторів Пенроуза на випадок п'ятивимірного простору анти-де Сіттера розглядались в роботах [281], [343], [293], [344]. До того ж в роботі [293] були побудовані твісторні функціонали дії для вільних полів зі спінами 0 і 1/2 в просторі AdS_5 та було показано, що на розв'язках рівнянь руху з відповідними межовими умовами ці функціонали зводяться до двоточкових кореляторів скалярного та спінорного полів на межі цього простору. Для IIB суперструни в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді в даний час відоме лише суперпросторове формулювання як σ-моделі у $PSU(2,2|4)/(SO(1,4) \times SO(5))$ суперсиметричному фактор-просторі [136], [137], [138]. Лагранжіан суперструни в такому формулюванні залишається однак високонелінійним навіть після закріплення калібрувань локальних симетрій дії.

У границі нескінченого натягу $AdS_5 \times S^5$ суперструна переходить у простішу модель безмасової суперчастинки, тому в даному підрозділі основну увагу приділено розгляду її супертвісторних формулювань, слідуючи нашим роботам [284], [283]. Лагранжіан суперчастинки у суперпросторовому формулюванні [201], [345], [346], [347], [348] є нелінійним за координатами суперпростору, оскільки визначається відображеннями на світову лінію нелінійних бозонних компонентів $D = 10$ суперфільбайна. Для того аби виразити лагранжіан суперчастинки в термінах супертвісторів, буде використано класично еквівалентне формулювання першого порядку та реалізацію компонентів її імпульсу у дотичних просторах до AdS_5 та S^5 через спінорні змінні, групові властивості яких подібні до властивостей (лоренц-)гармонічних змінних. Лагранжіан суперчастинки, який буде здобуто в результаті, є квадратичним за супертвісторами, на які накладено в'язі. Він співпадає з лагранжіаном, знайденим І. Барсом за допомогою часткового закріплення калібрувань локальних симетрій у запропонованих ним моделях суперчастинки та безнатягової суперструни [285], [286]. Перевагою нашого підходу є не лише те, що він дозволяє встановити взаємозв'язок між суперпросторовим та супертвісторним формулюваннями, але й здобути співвідношення між компонентами супертвісторів та суперпросторовими координатами. Розгляд моделі суперчастинки як системи з в'язями дозволить нам визначити набори в'язей першого та другого роду на компоненти супертвісторів. Після розв'язання частини в'язей другого роду буде здобуто 4-супертвісторне формулювання, яке характеризується квадратичними в'язями першого роду та лінійними в'язями другого роду, для яких дужки Дірака мають простий вигляд. Спрощення рівнянь руху та в'язей у 4-супертвісторному формулюванні робить можливим проведення квантування за Діраком. У пункті 4.4.3, слідуючи нашій роботі [287], буде проведено квантування як в термінах супертвісторних, так і тісно пов'язаних з ними осциляторних змінних, і встановлено, що фізичні стани суперчастинки співпадають з набором представлень $psu(2,2|4)$ супералгебри, які описують збудження полів IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом. Також у підпункті 4.4.3.2 буде представлено розроблений в нашій роботі [284] супертвісторний опис супермультиплета $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації.

4.4.1 Твісторний опис моделі масивної бозонної частинки у просторі AdS_5

4.4.1.1 4-твісторне формулювання

Дію масивної бозонної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера можна записати у вигляді

$$S = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}^{AdS_5}_{\text{space-time}}, \quad \mathscr{L}^{AdS_5}_{\text{space-time}} = p_{m'} E^{m'}_{\tau} - \tfrac{g}{2}(p_{m'} p^{m'} + \mathrm{m}^2),$$

де $E_{\tau}^{m'}$ – проєкція на світову лінію L 1-форми фільбайна цього простору. Вектор 5-імпульсу частинки

$$p_{m'}(\tau) = \mathrm{m} n_{m'}^{(0)}(\tau)$$

можна вибрати пропорційним часоподібному вектору $n_{m'}^{(0)}$ який представляє перший стовпець матриці $D=5$ векторних лоренцевих гармонік

$$n_{m'}^{(k')}(\tau) = (n_{m'}^{(0)}, n_{m'}^{(\hat{I})}) \in SO(1,4) \quad \Leftrightarrow \quad n_{m'}^{(k')} \eta^{m'n'} n_{n'}^{(l')} = \eta^{(k')(l')}.$$

Цю матрицю можна інтерпретувати як локальний ортонормований репер у просторі дотичному до світової лінії частинки. З ортономованості репера випливає, що $n_{m'}^{(0)} n^{m'(0)} = -1$, відтак імпульс частинки задовольняє умову масової поверхні $p^2 = -\mathrm{m}^2$. Матриця векторних лоренцевих гармонік лінійно перетворюється при лівих глобальних та правих локальних лоренцевих обертаннях

$$n_{m'}^{(k')} \quad \rightarrow \quad L_{m'}{}^{n'} n_{n'}^{(l')} R_{(l')}{}^{(k')}, \quad L \in SO(1,4)_L, \quad R \in SO(1,4)_R.$$

Оскільки вектор $n_{m'}^{(0)}$ є інваріантним тільки відносно перетворень з підгрупи $SO(4)_R \subset SO(1,4)_R$, яка належить до групи калібрувальної симетрії дії масивної частинки, векторні лоренцеві гармоніки параметризують фактор-простір $SO(1,4)/SO(4)$.

Для переходу до твісторного формулювання до лагранжіана частинки необхідно ввести $Spin(1,4)$ спінорні лоренцеві гармоніки

$$v_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\alpha}} = (-v_k^{\boldsymbol{\alpha}}, v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}), \tag{4.38}$$

через добутки яких виражаються векторні лоренцеві гармоніки [48]

$$n_{m'}^{(k')} = -\tfrac{1}{4} v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\beta}} \gamma^{(k')\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

[48] Літери з початку грецької абетки позначають $Spin(1,4)_L$ спінорні індекси, а з середини – $Spin(1,4)_R$ спінорні індекси. Літери з крапками над ними та без крапок із другої чверті латинської абетки використовуються для позначення індексів фундаментальних представлень двох $SU(2)$ підгруп групи $Spin(1,4)_R$.

Зокрема, вектор $n^{(0)}_{m'}$ виражається через спінорні гармоніки наступним чином

$$n^{(0)}_{m'} = -\tfrac{1}{4} v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}} \gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} = -\tfrac{1}{4}(v^{k}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{k} - v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\dot{k}}), \tag{4.39}$$

при чому

$$\gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} -\delta^{l}_{k} & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{k}}_{\dot{l}} \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Спінорні лоренцеві гармоніки задовольняють умови дійсності

$$\gamma^{0\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}} (v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}})^{\dagger} \gamma^{(0)\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\beta}}, \tag{4.41}$$

які випливають з дійсності матриці векторних лоренцевих гармонік. Для 4×2 прямокутних блоків матриці спінорних лоренцевих гармонік (4.38) умова (4.41) переходить в $SU(2)$-майоранівські умови для $Spin(1,4)_L$ спінорів

$$(v^{\boldsymbol{\alpha}}_{k})^{\dagger} \gamma^{0\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = v^{\mathrm{T}\,k}{}_{\boldsymbol{\beta}}, \quad (v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}})^{\dagger} \gamma^{0\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = v^{\mathrm{T}}{}_{\boldsymbol{\beta}\dot{k}}. \tag{4.42}$$

Спінорні лоренцеві гармоніки також задовольняють умови гармонічності

$$v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\mu}} v^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \delta^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\mu}}: \quad v^{\boldsymbol{\alpha}}_{k} v^{l}_{\boldsymbol{\alpha}} = -\delta^{l}_{k},\ v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} v_{\boldsymbol{\alpha}\dot{l}} = \delta^{\dot{k}}_{\dot{l}},\ v^{\boldsymbol{\alpha}}_{k} v_{\boldsymbol{\alpha}\dot{l}} = 0, \tag{4.43}$$

які випливають з інваріантності матриць зарядового спряження відносно лівих та правих $Spin(1,4)$ перетворень, враховуючи що $v^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\alpha}} = C_{\boldsymbol{\alpha\beta}} C^{\boldsymbol{\nu\lambda}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\lambda}}$. У результаті матриця спінорних лоренцевих гармонік набуває значення у спіновій накривній групи Лоренца $v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\mu}} \in Spin(1,4)$. Як зазначалось, вектор (4.39) є інваріантним відносно локальної $SU(2)_R \times \widetilde{SU(2)}_R \subset Spin(1,4)_R$ симетрії, відтак у моделі масивної бозонної частинки спінорні гармоніки параметризують фактор-простір $Spin(1,4)/(SU(2) \times \widetilde{SU(2)})$. Ця $SU(2)_R \times \widetilde{SU(2)}_R$ калібрувальна симетрія залишиться й у твісторному формулюванні.

Означимо ліві форми Картана

$$G^{-1\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\gamma}} dG^{\boldsymbol{\gamma}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \tfrac{i}{2}(E^{m'}(d)\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} + E^{m'n'}(d)\gamma_{m'n'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}) \in su(2,2)_L, \tag{4.44}$$

де $G \in SU(2,2)/Spin(1,4)$. Тоді скалярний добуток імпульсу частинки з 1-формою фільбайна простору AdS_5 може бути записано в термінах $SU(2,2)$ твісторів[49]

$$
\begin{aligned}
p_{m'}E^{m'}(d) &= -\tfrac{1}{2}v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\gamma}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\gamma}}{}_{\boldsymbol{\delta}}v^{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\nu}}\gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}}E^{m'}(d)\\
&= \tfrac{i}{2}(\bar{Z}^k_{\boldsymbol{\alpha}}dZ^{\boldsymbol{\alpha}}_k - d\bar{Z}^k_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}_k) + \tfrac{i}{2}(\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}dZ^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} - d\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}).
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Для того, аби здобути вираз у другому рядку було враховано симетрійні властивості $D=5$ γ-матриць у правій частині (4.44): $C_{\boldsymbol{\alpha\gamma}}\gamma^{m'\boldsymbol{\gamma}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \gamma^{m'}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = -\gamma^{m'}_{\boldsymbol{\beta\alpha}}$ та $C_{\boldsymbol{\alpha\gamma}}\gamma^{m'n'\boldsymbol{\gamma}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \gamma^{m'n'}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \gamma^{m'n'}_{\boldsymbol{\beta\alpha}}$. Наведемо співвідношення інцидентності для введених твісторів

$$
Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} = (-Z^{\boldsymbol{\alpha}}_k,\ Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}) = G^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}}, \quad \bar{Z}^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{Z}^k_{\boldsymbol{\alpha}} \\ \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} \end{pmatrix} = v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\beta}}G^{-1\boldsymbol{\beta}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}
\tag{4.46}
$$

та означення матричного представлення дуального твістора

$$
H^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}}(Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}})^{\dagger}H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \bar{Z}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\beta}}.
\tag{4.47}
$$

У роботі [284] було розглянуто реалізацію $D=2+4$ γ-матриць, в якій $H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \gamma^{0\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ та $H^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}} = \gamma^{(0)\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}}$, де $\gamma^{0\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ і $\gamma^{(0)\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}}$ є γ-матрицями відповідно у просторі $Spin(1,4)_L$ та $Spin(1,4)_R$ спінорів, причому $\gamma^{0\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ обрано недіагональною, як прийнято в теорії твісторів, а для $\gamma^{(0)\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}}$ використано діагональну реалізацію (4.40). В обраній реалізації умови спряження (4.47) для 4×2 блоків твісторної матриці мають вигляд

$$
(Z^{\boldsymbol{\alpha}}_k)^{\dagger}H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \bar{Z}^k_{\boldsymbol{\beta}}, \quad (Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}})^{\dagger}H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} = \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}\dot{k}}.
$$

Зі співвідношень інцидентності (4.46) та умов гармонічності (4.43) знаходимо в'язі для твісторів

$$
\bar{Z}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} = v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} = \tfrac{\mathrm{m}}{2}\delta^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\nu}},
\tag{4.48}
$$

[49]В першому рядку було проведено переозначення спінорних лоренцевих гармонік $v \to \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{2}}v$, аби привести кінетичний член для твісторів до канонічної вигляду (див., наприклад, [169]).

з яких випливає, що $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}}Z_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\alpha}} \in U(2,2)$ з точністю до калібрувальних симетрій дії частинки у твісторному формулюванні

$$S_{4-\mathrm{twistor}}^{AdS_5} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}_{4-\mathrm{twistor}}^{AdS_5},$$
$$\mathscr{L}_{4-\mathrm{twistor}}^{AdS_5} = \tfrac{i}{2}(\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\lambda}}\dot{Z}_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\bar{Z}}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\lambda}}Z_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\alpha}})\gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} + \Lambda^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}}\left(\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\lambda}}Z_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\alpha}} - \tfrac{\mathrm{m}}{2}\delta_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}}\right). \tag{4.49}$$

Кінетичний член в (4.49) явно інваріантний відносно глобальної $SU(2,2)_L$ симетрії, в той час як локальна $SU(2,2)_R$ симетрія, наявна в означенні матриці дуального твістора (4.47), порушується через присутність матриці $\gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}}$.

Для аналізу алгебри твісторних в'язей (4.48) розкладемо їх на $SU(2)_R \times \widetilde{SU(2)}_R$ незвідні складові

$$\mathfrak{l}^k{}_l = \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z_l^{\boldsymbol{\alpha}} - \tfrac{1}{2}\delta_l^k \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^m Z_m^{\boldsymbol{\alpha}} \approx 0, \quad \mathfrak{m}_{\dot{k}}{}^{\dot{l}} = \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{l}} - \tfrac{1}{2}\delta_{\dot{k}}^{\dot{l}} \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{m}} Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{m}} \approx 0,$$
$$\mathfrak{e} = \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z_k^{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} \approx 0, \quad \mathfrak{c} = \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z_k^{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} + 2\mathrm{m} \approx 0, \tag{4.50}$$
$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{l}} \approx 0, \quad \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} Z_l^{\boldsymbol{\alpha}} \approx 0.$$

Використовуючи дужки Дірака для компонентів твісторів, які випливають з (4.49)

$$\{Z_k^{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}}^l\}_{D.B.} = i\delta_k^l \delta_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \{Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}\dot{l}}\}_{D.B.} = i\delta_{\dot{l}}^{\dot{k}} \delta_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{4.51}$$

можна показати [283], що в'язі (4.50) генерують співвідношення алгебри $U(4)_R$ симетрії при $\mathrm{m} = 0$. Ця симетрія однак є порушеною при $\mathrm{m} \neq 0$, як можна побачити зі співвідношень на дужках Дірака

$$\{\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}\dot{l}} Z_l^{\boldsymbol{\beta}}\}_{D.B.} = i\delta_{\dot{l}}^{\dot{k}} \mathfrak{l}^k{}_l - i\delta_l^k \mathfrak{m}_{\dot{l}}{}^{\dot{k}} + \frac{i}{2}\delta_l^k \delta_{\dot{l}}^{\dot{k}}(\mathfrak{c} - 2\mathrm{m}).$$

Тож в'язі $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^k Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} \approx 0$ і $\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} Z_k^{\boldsymbol{\alpha}} \approx 0$ належать до другого роду, тоді як вісім інших в'язей – до першого. Вони є генераторами $u(2)_R \oplus \widetilde{u(2)}_R$ калібрувальної симетрії дії масивної частинки (4.49). Відтак кількість фізичних ступенів свободи у 4-твісторному формулюванні дорівнює восьми, що узгоджується з прострово-часовим формулюванням моделі $D = 5$ масивної бозонної частинки.

Результати, наведені у двох попередніх абзацах, виносяться на захист.

4.4.1.2 Редукція 4-твісторного формулювання до 2-твісторного та квантування за Діраком у термінах амбітвісторів

Та обставина, що в 4-твісторному формулюванні моделі масивної частинки наявні вісім в'язей другого роду істотно ускладнює дослідження її гамільтонової механіки й вимагає введення дужок Дірака для урахування цих в'язей. Можливо, однак, без порушення $SU(2,2)_L$ інваріанності виключити деякі з надлишкових ступенів свободи, що приведе до спрощення алгебри в'язей, які залишаться. З вигляду співвідношень інцидентності (4.46) випливає, що редукція $Spin(1,4)$ лоренцевих гармонік приводить до редукції твісторів. Тому в подальшому буде описано редукцію надлишкових ступенів свободи саме для гармонік.

Розкладемо спінорні лоренцеві гармоніки на складові, які реалізують спінорні представлення $SL(2,\mathbb{C})_L$

$$v^k_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} v^k_\alpha \\ \bar{v}^{\dot{\alpha}k} \end{pmatrix}, \quad v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} v^{\dot{k}}_\alpha \\ \bar{v}^{\dot{\alpha}\dot{k}} \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$-майоранівські умови, які задовольняють ці гармоніки

$$(v^k_{\boldsymbol{\alpha}})^\dagger \gamma^0{}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}} = -v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\beta}}_{\ k}, \quad (v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}})^\dagger \gamma^0{}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\beta}} = v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\beta}}_{\ \dot{k}},$$

для введених $SL(2,\mathbb{C})_L$ спінорів набувають вигляду

$$(v^k_\alpha)^\dagger = \bar{v}_{\dot{\alpha}k}, \quad (v^{\dot{k}}_\alpha)^\dagger = -\bar{v}_{\dot{\alpha}\dot{k}}.$$

Далі означимо

$$v^\alpha_k v^k_\alpha = \Upsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad v^\alpha_{\dot{k}} v^{\dot{k}}_\alpha = \widetilde{\Upsilon} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

В такому випадку з умов гармонічності випливають співвідношення

$$\Upsilon + \bar{\Upsilon} = \widetilde{\Upsilon} + \bar{\widetilde{\Upsilon}} = \mathrm{m} \tag{4.52}$$

та

$$v^\alpha_k v_{\alpha l} + \bar{v}^{\dot{\alpha}}_k \bar{v}_{\dot{\alpha} l} = 0. \tag{4.53}$$

З їх допомогою можна показати, що $\Upsilon = \bar{\bar{\widetilde{\Upsilon}}}$ й у представленні для 5-імпульсу частинки через спінорні гармоніки

$$p_{m'} = -\tfrac{1}{2}v^k_{\boldsymbol{\alpha}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v^{\boldsymbol{\beta}}_k + \tfrac{1}{2}v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v^{\boldsymbol{\beta}}_{\dot{k}} = \begin{cases} p_{\hat{m}} = v^{\alpha k}\sigma_{\hat{m}\alpha\dot{\alpha}}\bar{v}^{\dot{\alpha}}_k + v^{\alpha}_{\dot{k}}\sigma_{\hat{m}\alpha\dot{\alpha}}\bar{v}^{\dot{\alpha}\dot{k}} \\ p_5 = \Upsilon_I - \widetilde{\Upsilon}_I \end{cases}$$

перший і другий доданки дорівнюють один одному. Відтак можна виключити спінорні лоренцеві гармоніки з $\widetilde{SU(2)}_R$ індексами з крапками

$$p_{m'} = -\tfrac{1}{2}v^k_{\boldsymbol{\alpha}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v^{\boldsymbol{\beta}}_k, \tag{4.54}$$

а коефіцієнт 2 включити в означення спінорних лоренцевих гармонік з $SU(2)_R$ індексами без крапок. Тому вони задовольняють співвідношення $v^{\boldsymbol{\alpha}}_k v^k_{\boldsymbol{\alpha}} = -2\mathrm{m}$. Також можливо, використовуючи (4.52) і (4.53), виключити спінорні лоренцеві гармонніки з $SU(2)_R$ індексами без крапок й залишити гармоніки з $\widetilde{SU(2)}_R$ індексами з крапками. Підставляючи редукований вираз для 5-імпульсу частинки (4.54), здобуваємо 2-твісторне формулювання лагранжіана масивної частинки тим же способом, який використовувався аби вивести вираз (4.45)

$$\mathscr{L}^{AdS_5}_{2-\mathrm{twistor}} = \tfrac{i}{2}(\bar{Z}^i_{\boldsymbol{\alpha}}\dot{Z}^{\boldsymbol{\alpha}}_i - \dot{\bar{Z}}^i_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}_i) + \Lambda^j{}_i\mathfrak{l}^i{}_j + \Lambda(\bar{Z}^i_{\boldsymbol{\alpha}}Z^{\boldsymbol{\alpha}}_i + 2\mathrm{m}). \tag{4.55}$$

Встановлений зв'язок між твісторними формулюваннями моделі масивної частинки в просторі AdS_5 включено до результатів, які виносяться на захист.

Наведений вище аналіз пояснює походження 2-твісторного лагранжіана масивної частинки у просторі AdS_5, який було запропоновано в роботі [281]. У супутній роботі [282], користуючись ізоморфізмом алгебр квантованих твісторів та двох бозонних $su(2)$ осциляторів, було показано, що ця модель описує унітарне незвідне представлення $su(2,2)$ з AdS_5 енергією $E = 2 + |\mathrm{m}|$ та нульовим спіном. Для побудови цього представлення необхідно не менше двох копій бозонних $su(2)$ осциляторів кожного типу. Його вектор найнижчої ваги визначається дією антисиметризованих добутків осциляторів народження одного типу на вакуум [278], [329].

На завершення цього підпункту проведемо квантування за Діраком моделі масивної частинки у 2-твісторному формулюванні й здобудемо її хвильову функцію в амбітвісторному просторі, яка відповідає даному унітарному незвідному представленню. Введемо окремі позначення для кожного з твісторів

$$Z_1^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv Z^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad Z_2^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv W^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \bar{Z}^1_{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \bar{Z}^2_{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}},$$

що робить неявною $SU(2)_R$ симетрію. Легко показати, що з (4.55) випливають традиційні комутаційні співвідношення квантованих твісторів

$$[Z^{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}}] = \delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}}, \quad [W^{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{W}_{\boldsymbol{\beta}}] = \delta^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}}.$$

В термінах введених твісторів ермітові оператори, які відповідають в'язям першого роду, можна привести до вигляду

$$Z\bar{Z} + m - 2 \approx 0, \quad \bar{W}W + m + 2 \approx 0, \quad \bar{Z}W \approx 0, \quad \bar{W}Z \approx 0. \tag{4.56}$$

Нехай $Z^{\boldsymbol{\alpha}}$ та $\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$ будуть координатами в просторі амбітвісторів, тоді інші квантовані твістори реалізуються диференційними операторами першого порядку

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial Z^{\boldsymbol{\alpha}}}, \quad W^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Слідуючи методу Гупти-Блейлера, накладемо на хвильову функцію частинки три з чотирьох в'язей (4.56), які включають не більше однієї похідної

$$\begin{gathered}
Z\tfrac{\partial}{\partial Z}F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W}) = (\mathrm{m}-2)F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W}),\\
\bar{W}\tfrac{\partial}{\partial \bar{W}}F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W}) = -(\mathrm{m}+2)F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W}),\\
(\bar{W}Z)F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W}) = 0.
\end{gathered} \tag{4.57}$$

З цих рівнянь випливає, що хвильова функція частинки $F_{(\mathrm{m}-2|-\mathrm{m}-2)}(Z,\bar{W})$ є однорідною за кожним з аргументів, а її маса має бути цілою $\mathrm{m}\in\mathbb{Z}$.[50] Третю в'язь в (4.57) врахуємо, ввівши як фактор δ-функцію подібно до (4.32). При $\mathrm{m}=0$ амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза [177], [90] для $f_{(-1|-1)}(Z,\bar{W})$ як функції твісторів Пенроуза, які відповідають межовій границі AdS_5 твісторів, дає скалярне поле в $D=4$ просторі-часі Мінковського. Як пояснено в [276], [284], відповідний $su(2,2)$ вектор найнижчої ваги є осциляторним вакуумом $|\,0\rangle$. При $\mathrm{m}\neq 0$ вектори найнижчої ваги відповідних $su(2,2)$ представлень дорівнюють

$$a_1^{[\alpha_1}a_2^{\alpha_2]}\cdots a_1^{[\alpha_{2\mathrm{m}-1}}a_2^{\alpha_{2\mathrm{m}}]}|0\rangle\ \ \mathrm{m}>0,\quad b^1_{[\alpha_1}b^2_{\alpha_2]}\cdots b^1_{[\alpha_{-2\mathrm{m}-1}}b^2_{\alpha_{-2\mathrm{m}}]}|0\rangle\ \ \mathrm{m}<0.$$

В амбітвісторному описі, як було показано в [284], кожен з антисиметризованих добутків осциляторів народження переходить у диференційний оператор першого порядку

$$a_1^{[\alpha_1}a_2^{\alpha_2]}\to Z^{\boldsymbol{\alpha}}I_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{W}_{\boldsymbol{\beta}}},\qquad b^1_{[\alpha_1}b^2_{\alpha_2]}\to\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}I^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial Z^{\boldsymbol{\beta}}},$$

тому хвильова функція масивної частинки в амбітвісторному просторі має вигляд

$$f_{(\mathrm{m}-1|-\mathrm{m}-1)}(Z,\bar{W})=\left(ZI\tfrac{\partial}{\partial\bar{W}}\right)^{\mathrm{m}}f_{(-1|-1)}(Z,\bar{W})\quad\mathrm{m}>0,$$
$$f_{(\mathrm{m}-1|-\mathrm{m}-1)}(Z,\bar{W})=\left(\bar{W}I\tfrac{\partial}{\partial Z}\right)^{-\mathrm{m}}f_{(-1|-1)}(Z,\bar{W})\quad\mathrm{m}<0.$$

Ці представлення для хвильової функції виносяться на захист. Зазначимо, що диференційні оператори $\left(ZI\frac{\partial}{\partial\bar{W}}\right)$ і $\left(\bar{W}I\frac{\partial}{\partial Z}\right)$ в теорії твісторів застосовуються для опису масивних полів у чотиривимірному просторі Мінковського [167].

[50] Різні підходи до виведення умов квантування маси частинки у просторі анти-де Сіттера описано в роботах [282] та [344].

4.4.2 Супертвісторні формулювання моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі

4.4.2.1 8-супертвісторне формулювання

Для того, аби здобути 8-супертвісторне формулювання безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі, введемо діагональну суперматрицю, яка містить спінорні змінні з комутуючими компонентами

$$\mathrm{V}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} & 0 \\ 0 & \ell^A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^{\boldsymbol{\alpha}}_k & v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^A_p & \ell^{A\dot{p}} \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

В її верхньому діагональному блоці знаходиться 4×4 матриця зі $Spin(1,4)$ індексами

$$v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\mu}} = (-v^{\boldsymbol{\alpha}}_k, v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}),$$

а в нижньому діагональному блоці – 4×4 матриця зі $Spin(5) \sim USp(4)$ індексами

$$\ell^A_N = (\ell^A_p,\ \ell^{A\dot{p}}). \tag{4.59}$$

Умови дійсності для $Spin(1,4)$ змінних співпадають з наведеними в (4.41), а для $Spin(5)$ змінних мають вигляд

$$(\ell^A_L)^\dagger = \ell^{\mathrm{T}\,L}{}_A: \quad (\ell^A_q)^\dagger = \ell^{\mathrm{T}\,q}{}_A, \quad (\ell^{A\dot{q}})^\dagger = \ell^{\mathrm{T}}_{A\dot{q}}.$$

Їх можна записати у суперматричній формі

$$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{N}}(\mathrm{V}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}})^\dagger\mathcal{H}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \mathrm{V}^{\mathrm{T}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\beta}} & 0 \\ 0 & \ell^{\mathrm{T}L}{}_B \end{pmatrix}$$

із суперматрицями

$$\mathcal{H}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} & 0 \\ 0 & \delta^A_B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} H^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}} & 0 \\ 0 & \delta^L_N \end{pmatrix},$$

де $H^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ – недіагональна матриця, а $H^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\nu}}$ – діагональна, як обговорювалось після формули (4.47). Нижче буде показано, що на введені спінорні змінні мають бути накладені в'язі, які є слабшими за ті, що накладуються на $D = 1+4$ спінорні лоренцеві гармоніки й на $D=5$ гармоніки. В'язі для останніх було знайдено в роботі [349].

Введемо представника $PSU(2,2|4)/(SO(1,4)\times SO(5))$ суперсиметричного фактор-простору

$$\mathcal{G}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} G^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} & G^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{B} \\ G^{A}{}_{\boldsymbol{\beta}} & G^{A}{}_{B} \end{pmatrix} \in PSU(2,2|4)/(SO(1,4)\times SO(5)),$$

який задовольняє умову $(\mathcal{G}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}})^{\dagger} = \mathcal{H}^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{C}}\mathcal{G}^{-1\mathcal{C}}{}_{\mathcal{D}}\mathcal{H}^{\mathcal{D}}{}_{\mathcal{A}}$, та означимо твісторну суперматрицю

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} = G^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}\mathrm{V}^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{N}} = \left(-\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k}\ \mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}}\ \Psi^{\mathcal{A}}_{p}\ \Psi^{\mathcal{A}\dot{p}}\right) = \begin{pmatrix} -Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{k} & Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} & \xi^{\boldsymbol{\alpha}}_{p} & \xi^{\boldsymbol{\alpha}\dot{p}} \\ -\eta^{A}_{k} & \eta^{A\dot{k}} & L^{A}_{p} & L^{A\dot{p}} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Означення твісторної суперматриці (4.60) передбачає, що вона перетворюється під дією лівих та правих $SU(2,2|4)$ перетворень як

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} \quad\to\quad \mathcal{L}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{M}}\mathcal{R}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}},$$

де суперматричні параметри $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}$ і $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}$ мають $SU(2,2)$ верхньо-діагональні й $SU(4)$ нижньо-діагональні блоки. Дуальна до твісторної суперматриці за означенням дорівнює

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{B}} = \mathcal{H}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}})^{\dagger}\mathcal{H}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \mathrm{V}^{\mathrm{T}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{C}}\mathcal{G}^{-1\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \bar{Z}^{k}_{\mathcal{B}} \\ \bar{Z}_{\mathcal{B}\dot{k}} \\ \bar{\Psi}^{q}_{\mathcal{B}} \\ \bar{\Psi}_{\mathcal{B}\dot{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}^{k}_{\boldsymbol{\beta}} & \bar{\eta}^{k}_{B} \\ \bar{Z}_{\boldsymbol{\beta}\dot{k}} & \bar{\eta}_{B\dot{k}} \\ \bar{\xi}^{q}_{\boldsymbol{\beta}} & \bar{L}^{q}_{B} \\ \bar{\xi}_{\boldsymbol{\beta}\dot{q}} & \bar{L}_{B\dot{q}} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Супертвістори $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k}$, $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}}$ та дуальні до них мають звичайні для супертвісторів властивості. В нашій роботі [284] для них була введена назва супертвісторів c-типу. Їх $SU(2,2)_{L}$ компоненти $Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{k}$, $Z^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}$ грассманово-парні, а $SU(4)_{L}$ компоненти η^{A}_{k}, $\eta^{A\dot{k}}$ грассманово-непарні. Натомість для супертвісторів $\Psi^{\mathcal{A}}_{p}$, $\Psi^{\mathcal{A}\dot{p}}$ та дуальних до них була введена назва супертвісторів

a-типу, оскільки їх $SU(2,2)_L$ компоненти $\xi_p^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\xi^{\boldsymbol{\alpha}\dot{p}}$ грассманово-непарні, тоді як $SU(4)_L$ компоненти L_p^A, $L^{A\dot{p}}$ грассманово-парні. Поява таких супертвісторів з незвичними властивостями в моделі безмасової суперчастинки у $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді відзначалась в роботах [285] і [286].

Явний вигляд співвідношень інцидентності, які випливають з (4.60) і (4.61) та зв'язують компоненти супертвісторів з координатами $AdS_5 \times S^5$ суперпростору, був здобутий у нашій роботі [284] для $PSU(2,2|4)/(SO(1,4) \times SO(5))$ представника, який розглядався в [200], [201], [202] при вивченні різних калібрувальних умов для локальних симетрій в моделі $AdS_5 \times S^5$ суперструни [136], [137]. Цей елемент параметризовано координатами Пуанкаре для AdS_5 та 32 грассмановими координатами для генераторів суперсиметрії Пуанкаре та спеціальної конформної суперсиметрії відповідно до ізоморфної реалізації $psu(2,2|4)$ супералгебри як $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ суперконформної алгебри. В [284] також було показано, що супертвістори c-типу в бозонній границі зводяться до AdS_5 твісторів, введених у роботі [281], з точністю до загального фактора. На межі простору анти-де Сіттера ці супертвістори переходять у супертвістори Фербера, тому для позначення останніх ми будемо також вживати термін «межові супертвістори».

Дія безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді, яка відповідає представленню першого порядку для лагранжіана у суперпросторовому формулюванні, має вигляд

$$\begin{gathered} S^{AdS_5\times S^5}_{\text{superspace}} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\text{superspace}}, \\ \mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\text{superspace}} = p_{m'}E_\tau^{m'} + p_{I'}E_\tau^{I'} - \tfrac{g}{2}(p_{m'}p^{m'} + p_{I'}p_{I'}), \end{gathered} \tag{4.62}$$

де $E_\tau^{m'}$ та $E_\tau^{I'}$ – відображення на світову лінію бозонних компонентів $D = 10$ суперфільбайна у дотичних просторах до AdS_5 і S^5. Подібно до імпульсу бозонної частинки в моделі, яка розглядалась у підпункті 4.4.1.1, компоненти імпульсу суперчастинки у просторі дотичному до AdS_5 можна виразити

$$p_{m'} = -\tfrac{1}{2}v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}{}_{\boldsymbol{\alpha}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\beta}}\gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} = -\tfrac{1}{2}(v_{\boldsymbol{\alpha}}^{k}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v_k^{\boldsymbol{\beta}} - v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\dot{k}}\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}v_{\dot{k}}^{\boldsymbol{\beta}}) \tag{4.63}$$

через $Spin(1,4)$ спінорні змінні $v_k^{\boldsymbol{\alpha}}$ і $v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}}$, які задовольняють $SU(2)$-майоранівські умови (4.42), а також співвідношення

$$v_k^{\boldsymbol{\alpha}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\dot{k}} = 0. \tag{4.64}$$

Квадрат цих компонентів імпульсу у представленні (4.63) дорівнює

$$p_{m'} p^{m'} = -\tfrac{1}{4}(v_k^{\boldsymbol{\alpha}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{k} + v_{\dot{k}}^{\boldsymbol{\alpha}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\dot{k}})^2.$$

Відповідно компоненти імпульсу в просторі дотичному до S^5 можна виразити через $Spin(5)$ спінорні змінні (4.59)

$$p_{I'} = \tfrac{1}{2}\ell^{\mathrm{T}L}{}_{A} \gamma_{I'}{}^{A}{}_{B} \ell^{B}_{N} \gamma^{(5)N}{}_{L} = -\tfrac{1}{2}(\ell^{q}_{A} \gamma_{I'}{}^{A}{}_{B} \ell^{B}_{q} + \ell^{\dot{q}}_{A} \gamma_{I'}{}^{A}{}_{B} \ell^{B}_{\dot{q}}). \tag{4.65}$$

Вони задовольняють співвідношення

$$\ell^{A}_{q} \ell^{\dot{q}}_{A} = 0, \tag{4.66}$$

тому квадрат вектора (4.65) можна представити у вигляді

$$p_{I'} p_{I'} = \tfrac{1}{4}(\ell^{A}_{q} \ell^{q}_{A} - \ell^{A}_{\dot{q}} \ell^{\dot{q}}_{A})^2.$$

У результаті умова обернення на нуль квадрата 10-імпульсу суперчастинки перетворюється на в'язь для спінорних змінних

$$(v_k^{\boldsymbol{\alpha}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{k} + v_{\dot{k}}^{\boldsymbol{\alpha}} v_{\boldsymbol{\alpha}}^{\dot{k}})^2 = (\ell^{A}_{q} \ell^{q}_{A} - \ell^{A}_{\dot{q}} \ell^{\dot{q}}_{A})^2. \tag{4.67}$$

Зазначимо, що світлоподібний 10-імпульс $(p_{m'}, p_{I'})$ має 9 незалежних компонентів, тоді як спінори $(v_k^{\boldsymbol{\alpha}}, v_{\dot{k}}^{\boldsymbol{\alpha}})$ та $(\ell^{A}_{q}, \ell^{A}_{\dot{q}})$ з урахуванням накладених умов textbf(4.64), (4.66) і локальних $SU(2)$ симетрій представлень (4.63), (4.65) мають $6+6-1=11$ незалежних компонентів. Вигляд двох додаткових в'язей на спінорні змінні буде встановлено нижче.

З використанням представлень (4.63) і (4.65) 1-форму, яка визначає кінетичний член у лагранжіані суперчастинки (4.62), можна виразити через введені вище супертвістори

$$
\begin{aligned}
p_{m'}E^{m'}(d) + p_{I'}E^{I'}(d) &= \tfrac{i}{2}\left(\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{A}} d\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} - d\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}}\right)\Gamma^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{L}} \\
&= \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}^{k}_{\mathcal{A}} d\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k} - d\bar{\mathcal{Z}}^{k}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k}) + \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{k}} d\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}} - d\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}}) \\
&+ \tfrac{i}{2}(\bar{\Psi}^{q}_{\mathcal{A}} d\Psi^{\mathcal{A}}_{q} - d\bar{\Psi}^{q}_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_{q}) - \tfrac{i}{2}(\bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{q}} d\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}} - d\bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{q}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}})
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

з діагональною суперматрицею

$$
\Gamma^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & -\gamma^{(5)N}{}_{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta^{l}_{k} & 0 & & \\ 0 & \delta^{\dot{k}}_{\dot{l}} & & \mathbf{0} \\ & & \delta^{p}_{q} & 0 \\ & \mathbf{0} & 0 & -\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}} \end{pmatrix}.
$$

Для подальшого розгляду найбльше підходить форма запису кінетичного члена лагранжіана суперчастинки з явною $(SU(2)_R)^4$ інваріантністю, яка дається відображенням на світову лінію 1-форми, наведеної у двох останніх рядках в (4.68)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\text{kin, 8-stwistor}} &= \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}^{k}_{\mathcal{A}}\dot{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}_{k} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^{k}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k}) + \tfrac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\dot{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}\dot{k}} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}}) \\
&+ \tfrac{i}{2}(\bar{\Psi}^{q}_{\mathcal{A}}\dot{\Psi}^{\mathcal{A}}_{q} - \dot{\bar{\Psi}}^{q}_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_{q}) - \tfrac{i}{2}(\bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{q}}\dot{\Psi}^{\mathcal{A}\dot{q}} - \dot{\bar{\Psi}}_{\mathcal{A}\dot{q}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}}).
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

З (4.69) знаходимо співвідношення на дужках Дірака для супертвісторів

$$
\{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{k}, \bar{\mathcal{Z}}^{l}_{\mathcal{B}}\}_{D.B.} = i\delta^{l}_{k}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}, \quad \{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\,\dot{k}}, \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}\,\dot{l}}\}_{D.B.} = i\delta^{\dot{k}}_{\dot{l}}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}},
$$

$$
\{\Psi^{\mathcal{A}}_{q}, \bar{\Psi}^{p}_{\mathcal{B}}\}_{D.B.} = i\delta^{p}_{q}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}, \quad \{\Psi^{\mathcal{A}\,\dot{q}}, \bar{\Psi}_{\mathcal{B}\,\dot{p}}\}_{D.B.} = -i\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}},
$$

які узагальнюють відповідні співвідношення (4.51) для бозонних твісторів.

Для того, аби записати повний лагранжіан суперчастинки, необхідно додати в'язі на супертвістори з множниками Лагранжа. Для їх означення розглянемо суперматрицю $SU(2,2|4)_L$-інваріантних добутків супертвісторів

$$
\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Z}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\nu}} & \bar{\mathcal{Z}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_{N} \\ \bar{\Psi}^{L}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\nu}} & \bar{\Psi}^{L}_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_{N} \end{pmatrix}. \tag{4.70}
$$

Використання співвідношень інцидентності (4.60), (4.61) та визначальних співвідношень для спінорних змінних (4.64), (4.66) дозволяє встановити 28 бозонних

$$\mathrm{L}^k{}_l = \bar{\mathcal{Z}}^k_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_l - \tfrac{1}{2}\delta^k_l\bar{\mathcal{Z}}^m_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_m \approx 0, \quad \mathrm{M}_{\dot{k}}{}^{\dot{l}} = \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{l}} - \tfrac{1}{2}\delta^{\dot{l}}_{\dot{k}}\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{m}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{m}} \approx 0,$$

$$\bar{\mathcal{Z}}^k_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{l}} \approx 0, \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{l}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_k \approx 0,$$

$$\mathrm{R}^q{}_p = \bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_p - \tfrac{1}{2}\delta^q_p\bar{\Psi}^r_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_r \approx 0, \quad \mathrm{S}_{\dot{q}}{}^{\dot{p}} = \bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{q}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{p}} - \tfrac{1}{2}\delta^{\dot{p}}_{\dot{q}}\bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{r}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{r}} \approx 0,$$

$$\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{p}} \approx 0, \quad \bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{p}}\Psi^{\mathcal{A}}_q \approx 0$$

та 32 ферміонні в'язі

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_N = \bar{\Psi}^L_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\nu}} \approx 0.$$

Аби знайти інші бозонні в'язі, необхідно обчислити співвідношення на дужках Дірака ферміонних в'язей

$$\begin{aligned}\{\bar{\mathcal{Z}}^l_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q, \bar{\Psi}^p_{\mathcal{B}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_k\}_{D.B.} &= i\delta^p_q\mathrm{L}^l{}_k + i\delta^l_k\mathrm{R}^p{}_q + \tfrac{i}{2}\delta^p_q\delta^l_k(\bar{\mathcal{Z}}^m\mathcal{Z}_m + \bar{\Psi}^r\Psi_r),\\ \{\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{l}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}}, \bar{\Psi}_{\mathcal{B}\dot{p}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}\dot{k}}\}_{D.B.} &= -i\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}}\mathrm{M}_{\dot{l}}{}^{\dot{k}} + i\delta^{\dot{k}}_{\dot{l}}\mathrm{S}_{\dot{p}}{}^{\dot{q}} + \tfrac{i}{2}\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}}\delta^{\dot{k}}_{\dot{l}}(-\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{m}}\mathcal{Z}^{\dot{m}} + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}})\end{aligned} \tag{4.71}$$

та

$$\begin{aligned}\{\bar{\mathcal{Z}}^l_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}}, \bar{\Psi}_{\mathcal{B}\dot{p}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_m\}_{D.B.} &= -i\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}}\mathrm{L}^l{}_k + i\delta^l_k\mathrm{S}_{\dot{p}}{}^{\dot{q}} + \tfrac{i}{2}\delta^{\dot{q}}_{\dot{p}}\delta^l_k(-\bar{\mathcal{Z}}^m\mathcal{Z}_m + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}}),\\ \{\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{l}}\Psi^{\mathcal{A}}_q, \bar{\Psi}^p_{\mathcal{B}}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}\dot{k}}\}_{D.B.} &= i\delta^p_q\mathrm{M}_{\dot{l}}{}^{\dot{k}} + i\delta^{\dot{k}}_{\dot{l}}\mathrm{R}^p{}_q + \tfrac{i}{2}\delta^p_q\delta^{\dot{k}}_{\dot{l}}(\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{m}}\mathcal{Z}^{\dot{m}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r).\end{aligned} \tag{4.72}$$

Оскільки дужки Дірака в'язей першого роду мають обертатись на нуль в смислі слабких рівностей, можна вибрати в якості в'язей першого роду $\bar{\mathcal{Z}}^l_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q \approx 0$ та $\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{l}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}} \approx 0$ або $\bar{\mathcal{Z}}^l_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}} \approx 0$ та $\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{l}}\Psi^{\mathcal{A}}_q \approx 0$. Розглянемо в подальшому першу з цих еквівалентних можливостей. Висновком із такого вибору є те, що

$$\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\Psi}^r\Psi_r \approx 0, \quad -\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} \approx 0, \tag{4.73}$$

тоді як $-\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}}$ і $\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r$ відмінні від нуля. Підсумовуючи в'язі (4.73) та використовуючи співвідношення інцидентності (4.60) і (4.61), здобуваємо

$$\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k - \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} = v^{\boldsymbol{\alpha}}_k v^k_{\boldsymbol{\alpha}} + v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\dot{k}} v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}} + \ell^A_r\ell^r_A - \ell^A_{\dot{r}}\ell^{\dot{r}}_A \approx 0. \tag{4.74}$$

В'язь у правій частині є квадратним коренем із в'язі (4.67), що дає змогу усунути неоднозначність знака в її означенні. Різниця в'язей (4.73) також є в'яззю

$$(\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r) - (-\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}}) \approx 0, \tag{4.75}$$

тому можна покласти

$$\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r = -\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} = Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тоді іншою лінійною комбінацією $SU(2,2|4)_L$-інваріантних добутків супертвісторів, яка не залежить від Q, є

$$\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} - \bar{\Psi}^r\Psi_r + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} \approx 0. \tag{4.76}$$

Вона означає додаткову бозонну в'язь. Відтак загальна кількість бозонних в'язей дорівнює 31. В'язі (4.75) та (4.76) становлять дві додаткові в'язі на $Spin(1,4)$ та $Spin(5)$ змінні необхідні для того, аби число їх незалежних компонентів дорівнювало числу незалежних компонентів світлоподібного 10-імпульсу, як зазначалось після рівняння (4.67).

Здобуті вище в'язі допускають й іншу інтерпретацію, якщо елементи суперматриці (4.70) розглядати як генератори $u(2,2|4)_R$ супералгебри. Для цього $SU(2,2|4)_L$-інваріантні добутки супертвісторів в правій частині співвідношень на дужках Дірака (4.71) та (4.72) параметризуймо наступним чином

$$\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k + \bar{\Psi}^r\Psi_r = \tfrac{1}{2}(\mathrm{C} + \mathrm{E} + T) \approx 0,$$

$$\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} - \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{C} + \mathrm{E} - T) \approx 0,$$

$$\bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k - \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{C} - \mathrm{E} + T),$$

$$\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{C} - \mathrm{E} - T).$$

В'язь

$$\mathrm{C} + \mathrm{E} = \bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k - \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r\Psi_r + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}} \approx 0$$

є в'яззю (4.74) та дорівнює сумі генератора $\mathrm{E} = \bar{\Psi}^r\Psi_r + \bar{\Psi}_{\dot{r}}\Psi^{\dot{r}}$, який визначає 3-градуйовану структуру $su(2,2)_R$ алгебри, та $\mathrm{C} = \bar{\mathcal{Z}}^k\mathcal{Z}_k - \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}}\mathcal{Z}^{\dot{k}}$, який визначає аналогічну структуру для $su(4)_R$ алгебри. Генератор $T \in su(2,2|4)_R$ дорівнює в'язі (4.75)

$$T = \bar{\mathcal{Z}}^k \mathcal{Z}_k + \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}} \mathcal{Z}^{\dot{k}} + \bar{\Psi}^r \Psi_r - \bar{\Psi}_{\dot{r}} \Psi^{\dot{r}} \approx 0,$$

а генератор $\mathrm{U} \in u(2,2|4)_R$ – в'язі (4.76)

$$\mathrm{U} = \bar{\mathcal{Z}}^k \mathcal{Z}_k + \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}} \mathcal{Z}^{\dot{k}} - \bar{\Psi}^r \Psi_r + \bar{\Psi}_{\dot{r}} \Psi^{\dot{r}} \approx 0.$$

Відтак на поверхні в'язей суперматриця (4.70) виявляється пропорційною одиничній суперматриці

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} \approx \tfrac{Q}{4} \delta^{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}}.$$

Тому $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}}$ є елементом $U(2,2|4) \times \mathbb{R}$ с точністю до калібрувальних симетрій дії суперчастинки, які генеруються в'язями першого роду.

Тепер запишемо повний лагранжіан моделі безмасової суперчастинки у 8-супертвісторному формулюванні

$$\mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{8-\mathrm{stwistor}} = \mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{\mathrm{kin},\, 8-\mathrm{stwistor}} + \mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{\mathrm{constr},\, 8-\mathrm{stwistor}},$$

де $\mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{\mathrm{kin},\, 8-\mathrm{stwistor}}$ наведено в (4.69), а $\mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{\mathrm{constr},\, 8-\mathrm{stwistor}}$ є лінійною комбінацією здобутих в'язей з множниками Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{AdS_5 \times S^5}_{\mathrm{constr},\, 8-\mathrm{stwistor}} = {} & \Lambda^l{}_k \mathrm{L}^k{}_l + \Lambda_{\dot{l}}{}^{\dot{k}} \mathrm{M}_{\dot{k}}{}^{\dot{l}} + \Lambda^p{}_q \mathrm{R}^q{}_p + \Lambda_{\dot{p}}{}^{\dot{q}} \mathrm{S}_{\dot{q}}{}^{\dot{p}} \\ & + \Lambda_{\mathrm{E+C}}(\mathrm{E} + \mathrm{C}) + \Lambda_T T + \Lambda_{\mathrm{U}} \mathrm{U} \\ & + i\bar{\Lambda}^k_p \bar{\Psi}^p \mathcal{Z}_k + i\Lambda^p_k \bar{\mathcal{Z}}^k \Psi_p + i\bar{\Lambda}^{\dot{p}}_{\dot{k}} \bar{\Psi}_{\dot{p}} \mathcal{Z}^{\dot{k}} + i\Lambda^{\dot{k}}_{\dot{p}} \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}} \Psi^{\dot{p}} \\ & + \Lambda_{\dot{l}k} \bar{\mathcal{Z}}^k \mathcal{Z}^{\dot{l}} + \bar{\Lambda}^{k\dot{l}} \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{l}} \mathcal{Z}_k + \Lambda_{\dot{p}q} \bar{\Psi}^q \Psi^{\dot{p}} + \bar{\Lambda}^{q\dot{p}} \bar{\Psi}_{\dot{p}} \Psi_q \\ & + i\bar{\Lambda}_{\dot{k}p} \bar{\Psi}^p \mathcal{Z}^{\dot{k}} + i\Lambda^{p\dot{k}} \bar{\mathcal{Z}}_{\dot{k}} \Psi_p + i\bar{\Lambda}^{k\dot{p}} \bar{\Psi}_{\dot{p}} \mathcal{Z}_k + i\Lambda_{\dot{p}k} \bar{\mathcal{Z}}^k \Psi^{\dot{p}}. \end{aligned} \qquad (4.77)$$

Проведене в нашій роботі [283] дослідження умов збереження в'язей показує, що 15 бозонних в'язей та 16 ферміонних в'язей у перших трьох рядках (4.77) є в'язями першого роду й відповідні множники Лагранжа залишаються довільними. Ці в'язі є генераторами $su(2|2)_R \oplus su(2|2)_R \oplus u(1)_R$ калібрувальної симетрії в моделі суперчастинки у 8-супертвісторному формулюванні і як наслідок

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} \in U(2,2|4) \times \mathrm{R}/(SU(2|2) \times SU(2|2) \times U(1)).$$

16 бозонних та 16 ферміонних в'язей у двох останніх рядках в (4.77) є в'язями другого роду і умови їх збережння приводять до обернення на нуль множників Лагранжа, які їм відповідають. У результаті у 8-супертвісторному формулюванні наяві 18 бозонних та 16 ферміонних калібрувально-інваріантних фізичних ступеней свободи, що дорівнює відповідній кількості у суперпросторовому формулюванні моделі суперчастинки.

Співвідношення (4.60) та (4.61) між компонентами супертвісторів та елементами $PSU(2,2|4)/(SO(1,4) \times SO(5))$ суперматриці, а також встановлене з його допомогою співвідношення між суперпросторовим та 8-супертвісторним формулюваннями суперчастинки виносяться на захист.

4.4.2.2 4-супертвісторне формулювання

Редукція $Spin(1,4)$ лоренц-гармонічних змінних розглядалась у підпункті 4.4.1.2 й здобуті там результати застосовні також до моделі $D=10$ безмасової суперчастинки. Компоненти її 10-імпульсу в просторі дотичному до AdS_5 можуть бути представлені у вигляді

$$p_{m'} = -\tfrac{1}{2} v^k_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_k, \quad v^{\boldsymbol{\alpha}}_k v^k_{\boldsymbol{\alpha}} = -Q. \tag{4.78}$$

Редукція $Spin(5)$ змінних проводиться аналогічно. У результаті приходимо до такого виразу для компонентів імпульсу в просторі дотичному до S^5

$$p_{I'} = -\tfrac{1}{2} \ell^q_B \gamma_{I'}{}^B{}_A \ell^A_q, \quad \ell^A_q \ell^q_A = Q. \tag{4.79}$$

Підставляючи вирази для компонентів імпульсу (4.78) та (4.79) до лагранжіана суперчастинки у суперпросторовому формулюванні (4.62) і повторюючи ті ж кроки, які привели до (4.68), здобуваємо лагранжіан у 4-супертвісторному формулюванні

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{4-\mathrm{stwistor}} &= \tfrac{i}{2}\big(\bar{\mathcal{Z}}^i_{\mathcal{A}}\dot{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}_i - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^i_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i\big) + \tfrac{i}{2}(\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\dot{\Psi}^{\mathcal{A}}_q - \dot{\bar{\Psi}}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q)\\ &+\Lambda^j{}_i\mathrm{L}^i{}_j + \Lambda^p{}_q\mathrm{R}^q{}_p + \Lambda\widetilde{T} + i\bar{\Lambda}^i_q\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i + i\Lambda^q_i\bar{\mathcal{Z}}^i_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q.\end{aligned} \tag{4.80}$$

Супертвістори $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i$, $\Psi^{\mathcal{A}}_q$ та дуальні до них визначаються тими ж співвідношеннями (4.60) та (4.61), де у суперматриці (4.58) залишаються ненульовими лише елементи першого та третього стовпців. На означені таким чином супертвістори накладено сім бозонних

$$\mathrm{L}^i{}_j = \bar{\mathcal{Z}}^i_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j\bar{\mathcal{Z}}^k_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_k \approx 0, \tag{4.81}$$

$$\mathrm{R}^q{}_p = \bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_p - \tfrac{1}{2}\delta^q_p\bar{\Psi}^r_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_r \approx 0, \tag{4.82}$$

$$\widetilde{T} = \bar{\mathcal{Z}}^i_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i + \bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q \approx 0 \tag{4.83}$$

та вісім ферміонних

$$\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i \approx 0, \quad \bar{\mathcal{Z}}^i_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q \approx 0 \tag{4.84}$$

в'язей, які належать до першого роду. Тому 4-супертвісторне формулювання є простішим за 8-супертвісторне, в якому на супертвістори накладено також квадратичні в'язі другого роду. Наведені вище 15 в'язей є генераторами $su(2|2)$ супералгебри,[51] яку в роботі [285] було названо кольоровою супералгеброю. Тож кольорова симетрія є калібрувальною в супертвісторному формулюванні суперчастинки. Як було показано в нашій роботі [284], калібрувальні перетворення супертвісторів, які генеруються цими в'язями на дужках Дірака

$$\{\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_i, \bar{\mathcal{Z}}^j_{\mathcal{B}}\}_{D.B.} = i\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta^j_i, \tag{4.85}$$

$$\{\Psi^{\mathcal{A}}_q, \bar{\Psi}^p_{\mathcal{B}}\}_{D.B.} = i\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta^p_q, \tag{4.86}$$

[51] У подальшому нижні індекси L та R у позначеннях груп і алгебр симетрії буде опущено, оскільки у 4-супертвісторному формулюванні $u(2,2|4)$ залишається глобальною (лівою) симетрією лагранжіана суперчастинки, тоді як калібрувальна (права) симетрія зводиться до $su(2|2)$. Представлення саме цієї $(s)u(2,2|4)$ симетрії будуть розглядатись у наступному пункті.

залишають інваріантною дію суперчастинки з лагранжіаном (4.80). Зазначимо, що лагранжіан (4.80) співпадає зі здобутим у роботі [286] за допомогою часткового закріплення калібрування в моделі суперчастинки у розмірності $D = 2 + 10$.

Здобуте співвідношення між 8-супертвісторним та 4-супертвісторним формулюваннями моделі безмасової суперчастинки виноситься на захист.

4.4.3 Квантування за Діраком моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі у 4-супертвісторному формулюванні

Розглянемо спочатку окремий випадок, коли суперчастинка рухається лише у AdS_5 підпросторі $AdS_5 \times S^5$ суперпростору, тобто компоненти її імпульсу у дотичному просторі до S^5 обертаються на нуль. Це приводить до того, що у супертвісторному формулюванні дорівнюють нулю супертвістори $\Psi_q^{\mathcal{A}}$ і $\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}$, тож як динамічні змінні залишаються лише супертвістори c-типу $\mathcal{Z}_a^{\mathcal{A}}$ та $\bar{\mathcal{Z}}^a_{\mathcal{A}}$. У такому випадку набір фізичних станів суперчастинки співпадає з мультиплетом $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації [277], який буде реалізовано як у термінах осциляторів, так і супертвісторів. В останньому підпункті буде розглянуто загальний випадок, коли компоненти імпульсу суперчастинки як у просторі дотичному до AdS_5, так і до S^5 відмінні від нуля. Квантування за Діраком буде проведено в термінах осциляторів та буде показано, що набір фізичних станів суперчастинки відтворює спектр збуджень полів IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом.

4.4.3.1 Осциляторний опис фізичних станів суперчастинки в AdS_5 підпросторі $AdS_5 \times S^5$ суперпростору

Бозонні $su(2)$ осцилятори a_i^α, a^i_α та b_i^α, b^i_α визначаються тими ж лінійними комбінаціями бозонних компонентів двох супертвісторів c-типу як і у випадку одного твістора (див. (4.25) та (4.26)). Вони задовольняють комутаційні співвідношення (4.30), які випливають з квантового аналога дужок Дірака для супертвісторів c-типу (4.85). Як пояснено в підрозділі 4.3 a_i^α і b_α^i представляють оператори народження, натомість a_α^i і b_i^α є операторами знищення, які дають нуль при дії на осциляторний вакуум $|0\rangle$.

Оскільки квантовий аналог дужок Дірака (4.85) для грассманово-непарних компонентів супертвісторів c-типу має таку ж форму як і антикомутаційні співвідношення ферміонних $su(4)$ осциляторів, вони можуть бути безпосредньо використані для побудови унітарних незвідних представлень $(p)su(2,2|4)$ супералгебри [350], [351]. В нашому розгляді ми слідуємо роботам [277], [278], [329] й вводимо два типи ферміонних $su(2)$ осциляторів з використанням розкладу (анти)фундаментального представлення $su(4)$ $\mathbf{4}=\mathbf{2}\oplus\tilde{\mathbf{2}}$ $(\bar{\mathbf{4}}=\bar{\mathbf{2}}\oplus\bar{\tilde{\mathbf{2}}})$

$$\eta_i^A = \begin{pmatrix} \alpha_i^a \\ \beta_i^{\dot a} \end{pmatrix}, \qquad \bar\eta_A^i = \left(\alpha_a^i \; \beta_{\dot a}^i\right). \tag{4.87}$$

Введені ферміонні осцилятори задовольняють антикомутаційні співвідношення

$$\{\alpha_i^a, \alpha_b^j\} = \delta_i^j \delta_b^a, \quad \{\beta_i^{\dot a}, \beta_{\dot b}^j\} = \delta_i^j \delta_{\dot b}^{\dot a}.$$

Допустимим вибором є розгляд α_i^a та $\beta_{\dot a}^i$ як осциляторів народження, тоді α_a^i та $\beta_i^{\dot a}$ є осциляторами знищення, дія яких на осциляторний вакуум $|0\rangle$ дає нуль.

У даному окремому випадку залишаються нетривіальними тільки чотири бозонні в'язі (4.81) та (4.83). У термінах введених осциляторів вони набувають вигляду

$$\begin{gathered}
-N_{(a)}(1) + N_{(b)}(1) - N_{(\alpha)}(1) + N_{(\beta)}(1) + \tfrac{1}{2}Q \approx 0, \\
-N_{(a)}(2) + N_{(b)}(2) - N_{(\alpha)}(2) + N_{(\beta)}(2) + \tfrac{1}{2}Q \approx 0, \\
-a_\alpha^2 a_1^\alpha + b_\alpha^2 b_1^\alpha + \alpha_a^2 \alpha_1^a + \beta_{\dot a}^2 \beta_1^{\dot a} \approx 0, \\
-a_\alpha^1 a_2^\alpha + b_\alpha^1 b_2^\alpha + \alpha_a^1 \alpha_2^a + \beta_{\dot a}^1 \beta_2^{\dot a} \approx 0.
\end{gathered} \tag{4.88}$$

$N_{(a)}(1) = a_1^{\alpha} a_{\alpha}^1$, $N_{(b)}(1) = b_{\alpha}^1 b_1^{\alpha}$, $N_{(\alpha)}(1) = \alpha_1^a \alpha_a^1$ та $N_{(\beta)}(1) = \beta_{\dot a}^1 \beta_1^{\dot a}$ є операторами числа частинок для першої копії осциляторів кожного типу. Аналогічні означення справеделиві й для другої копії осциляторів. Важливою властивістю в'язей (4.88) є те, що вони комутують з підвищуючими генераторами суперсиметрії $a_i^{\alpha}\beta_{\dot a}^i$ і $b_{\alpha}^i \alpha_i^a$, за допомогою яких будуються вектори найнижчої ваги для різних $su(2,2) \oplus su(4)$ представлень із $su(2,2|4)$ супермультиплета фізичних станів суперчастинки, а також з бозонними підвищуючими операторами $a_i^{\beta} b_{\alpha}^i$ і $\alpha_i^b \beta_{\dot a}^i$, які генерують повний набір базисних векторів для $su(2,2)\oplus su(4)$ представлення з даним вектором найнижчої ваги [277], [278]. Тому в'язі (4.88) діють на $su(2,2)\oplus su(4)$ вектори найнижчої ваги. Коли $Q = 0$, тобто компоненти імпульсу суперчастинки у дотичному просорі до S^5 обертаються на нуль, єдиним вектором найнижчої ваги, який анігілюється цими в'язями, є осциляторний вакуум. Із нього за допомогою двох копій осциляторів будується мультиплет $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації [277]. При $Q \neq 0$ в'язями анігілюються $su(2)$-інваріантні вектори найнижчої ваги, які визначають супермультиплети розглянуті в [329] (див. також [282]).

4.4.3.2 Амбітвісторний опис фізичних станів суперчастинки в AdS_5 підпросторі $AdS_5 \times S^5$ суперпростору

Для квантування за Діраком безмасової суперчастинки з використанням амбітвісторів у випадку, який розглядається, введемо окремі позначення для кожного з супертвісторів c-типу

$$\mathcal{Z}_1^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} Z_1^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \eta_1^A \end{pmatrix} \equiv \mathcal{Z}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} Z^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \eta^A \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}^1 = (\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^1,\, \bar\eta_A^1) \equiv \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}} = (\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}},\, \bar\eta_A)$$

та

$$\mathcal{Z}_2^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} Z_2^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \eta_2^A \end{pmatrix} \equiv \mathcal{W}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} W^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \zeta^A \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}^2 = (\bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}^2,\, \bar\eta_A^2) \equiv \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}} = (\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}},\, \bar\zeta_A).$$

Беручи до уваги квантові (анти)комутаційні співвідношення

$$\{\mathcal{Z}_i^{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}}^j] = \delta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\delta_i^j,$$

які випливають із (4.85), розглянемо таку реалізацію компонентів квантованих супертвісторів операторами множення та диференціювання

$$Z^{\boldsymbol{\alpha}} \to Z^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \bar{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} \to -\frac{\partial}{\partial Z^{\boldsymbol{\alpha}}}, \quad \eta^A \to \eta^A, \quad \bar{\eta}_A \to \frac{\vec{\partial}}{\partial \eta^A}$$
$$W^{\boldsymbol{\alpha}} \to \frac{\partial}{\partial \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}}, \quad \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}} \to \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \zeta^A \to \frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{\zeta}_A}, \quad \bar{\zeta}_A \to \bar{\zeta}_A,$$

де грассманово-непарні похідні за означенням діють зліва. Тоді в'язі (4.81) і (4.83) приводять до таких рівнянь для хвильової функції суперчастинки

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}}F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) &= \left(Z^{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial Z^{\boldsymbol{\alpha}}} + \eta^A\frac{\partial}{\partial \eta^A}\right)F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) = 0,\\ \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}\frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}}F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) &= \left(\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}} + \bar{\zeta}_A\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_A}\right)F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) = 0\end{aligned} \tag{4.89}$$

та

$$\bar{\mathcal{W}}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) = 0. \tag{4.90}$$

З рівнянь (4.89) випливає, що $F_{(0,0)}$ має нульові степені однорідності за її аргументами $\mathcal{Z}$ і $\bar{\mathcal{W}}$, які вказані у нижньому індексі. Умову (4.90) можна врахувати, вводячи δ-функцію як фактор

$$F_{(0,0)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) = \delta(\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z})f_{(1,1)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}). \tag{4.91}$$

Функція $f_{(1,1)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}})$ допускає розклад за непарними компонентами супертвісторів

$$\begin{gathered}f_{(1,1)}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{W}}) = h_{(1,1)}(Z,\bar{W}) + \psi_{(0,1)A}(Z,\bar{W})\eta^A + \psi_{(1,0)}{}^A(Z,\bar{W})\bar{\zeta}_A\\ +b_{(-1,1)[AB]}(Z,\bar{W})\eta^{AB} + a_{(0,0)}{}_A^B(Z,\bar{W})\eta^A\bar{\zeta}_B + b_{(1,-1)}{}^{[AB]}(Z,\bar{W})\bar{\zeta}_{AB}\\ +\lambda_{(-2,1)[ABC]}(Z,\bar{W})\eta^{ABC} + \lambda_{(-1,0)}{}_{[AB]}^C(Z,\bar{W})\eta^{AB}\bar{\zeta}_C\\ +\lambda_{(0,-1)}{}_A^{[BC]}(Z,\bar{W})\eta^A\bar{\zeta}_{BC} + \lambda_{(1,-2)}{}^{[ABC]}(Z,\bar{W})\bar{\zeta}_{ABC}\\ +\varphi_{(-3,1)[ABCD]}(Z,\bar{W})\eta^{ABCD} + \varphi_{(-2,0)}{}_{[ABC]}^D(Z,\bar{W})\eta^{ABC}\bar{\zeta}_D\\ +\varphi_{(-1,-1)}{}_{[AB]}^{[CD]}(Z,\bar{W})\eta^{AB}\bar{\zeta}_{CD}\\ +\varphi_{(0,-2)}{}_A^{[BCD]}(Z,\bar{W})\eta^A\bar{\zeta}_{BCD} + +\varphi_{(1,-3)}{}^{[ABCD]}(Z,\bar{W})\bar{\zeta}_{ABCD} + \ldots,\end{gathered} \tag{4.92}$$

де введені позначення $\eta^{AB} \equiv \eta^A \eta^B$, $\bar{\zeta}_{AB} \equiv \bar{\zeta}_A \bar{\zeta}_B$ і т.д. Крапками позначено вищі члени в розкладі, які не відповідають фізичним станам, оскільки сума їх степеней однорідності менша за -2, що є нижньою границею, яка відповідає реалізації скалярного поля в амбітвісторному просторі.

Амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза, яке зв'язувало б однорідні функції введених супертвісторів та поля в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі, ще не розроблено,[52] тому розглянемо відповідне перетворення для функцій межових амбітвісторів.[53] Його результатом є супермультиплет полів $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ конформної супергравітації [352]. Відповідно до гіпотези AdS_5/CFT_4 дуальності поля цього супермультиплета є межовими значеннями ненормовних розв'язків динамічних рівнянь для полів $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації лінеаризованих в околі простору AdS_5 [353], [354].[54]

Амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза [177], [90] для коефіцієнтних функцій в розкладі (4.92) було розглянуто в нашій роботі [276]. Функція $h_{(1,1)}(Z, \bar{W})$ відповідає гравітону $h_{\alpha(2)\dot{\alpha}(2)}(x)$, а функції ${\psi_{(1,0)}}^A(Z, \bar{W})$ та $\psi_{(0,1)A}(Z, \bar{W})$ переходять у вісім полів гравітіно ${\psi_{\alpha\dot{\alpha}(2)}}^A(x)$ and $\psi_{\alpha(2)\dot{\alpha}A}(x)$.

Для того, аби здобути інші поля з мультиплета конформної супергравітації, зазначимо, що $SU(4)$ представлення, які реалізують мономи, складені з непарних компонентів супертвісторів, є в загальному випадку звідними

[52] Зазначимо, що амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза для полів зі спінами 0 і 1/2 у просторі AdS_5, реалізованому як проєктивний багатовид, було розглянуто в роботі [293].

[53] Тут і далі в цьому підпункті введені вище позначення для амбітвісторів інцидентних координатам $AdS_5 \times S^5$ суперпростору використовуються також і для амбітвісторів інцидентних координатам межового плаского $D = 1 + 3$ $\mathcal{N} = 4$ суперпростору. Зазначимо, що для супертвісторів граничний перехід, який відповідає переходу до межового простору в координатах Пуанкаре для AdS_5, супроводжується зміною їх масштаба. Однак оскільки хвильова функція суперчастинки є масштабно-інваріантною за обома аргументами, співвідношення (4.91) та (4.92) мають однаковий вигляд як в термінах супертвісторів для $AdS_5 \times S^5$ суперпростору, так і для межових супертвісторів.

[54] Співвідношення між калібрувальними полями довільного спіну в просторі анти-де Сіттера та межовими конформними (тіньовими) полями досліджувалось в [334], [335].

й розкладаються на незвідні представлення. Для прикладу,

$$\eta^A\bar{\zeta}_B = \widetilde{\eta^A\bar{\zeta}_B} + \tfrac{1}{4}\delta^A_B\eta^C\bar{\zeta}_C, \quad \widetilde{\eta^A\bar{\zeta}_B} = \eta^A\bar{\zeta}_B - \tfrac{1}{4}\delta^A_B\eta^C\bar{\zeta}_C \tag{4.93}$$

ілюструє розклад $\mathbf{4} \times \bar{\mathbf{4}} = \mathbf{15} + \mathbf{1}$. Тильда над мономом вказує взяття його $SU(4)$ безслідової частини. Множення виразу (4.93) на функцію $a_{(0,0)}{}^B_A(Z,\bar{W})$ дає змогу представити відповідний член в (4.92) у вигляді суми двох $SU(4)$-незвідних доданків

$$a_{(0,0)}{}^B_A(Z,\bar{W})\eta^A\bar{\zeta}_B = \tilde{a}_{(0,0)}{}^B_A(Z,\bar{W})\widetilde{\eta^A\bar{\zeta}_B} + \tfrac{1}{4}a_{(0,0)}{}^B_B(Z,\bar{W})\eta^A\bar{\zeta}_A.$$

У першому доданку тильда над функцією $a_{(0,0)}{}^B_A(Z,\bar{W})$ позначає її $SU(4)$-безслідову частину, а у другому доданку з використанням в'язі (4.90) можна замінити $\eta^A\bar{\zeta}_A$ на $-Z^{\boldsymbol{\alpha}}\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Тоді амбітвісторне узагальнення перетворення Пенроуза для $\tilde{a}_{(0,0)}{}^B_A(Z,\bar{W})$ дає 15 векторних полів $\tilde{a}_{\alpha\dot{\alpha}}{}^B_A(x)$ мультиплета $\mathcal{N}=4$ конформної супергравітації, а перетворення функції $Z^{\boldsymbol{\alpha}}\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}\, a_{(0,0)}{}^B_B(Z,\bar{W})$ дає нуль. Це можна пояснити наступним чином. В осциляторному описі добутку бозонних компонентів супертвісторів $Z^{\boldsymbol{\alpha}}\bar{W}_{\boldsymbol{\alpha}}$ відповідає оператор $-a^2_\alpha a^\alpha_1 + b^2_\alpha b^\alpha_1$, а $su(2,2)$ частина вектора найнижчої ваги $su(2,2)\oplus su(4)$ представлення, яке відповідає функції $a_{(0,0)}{}^B_B(Z,\bar{W})$, дорівнює $a^\alpha_1 b^2_\beta|0\rangle$ й анігілюється цим оператором. Детальний опис амбітвісторного узагальнення перетворення Пенроуза для інших компонентних функцій в розкладі (4.92) представлено в нашій роботі [284]. Поля мультиплета $\mathcal{N}=4$ конформної супергравітації зібрано в третьому стовпці таблиці 4.2. Вона підсумовує результати, які виносяться на захист.

4.4.3.3 Осциляторний опис фізичних станів суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі

Осцилятори для супертвісторів a-типу. Оскільки у загальному випадку всі супертвістори, які входять до лагранжіана суперчастинки (4.80), є відмінними від нуля, необхідно ввести осцилятори для супертвісторів a-типу на додаток до осциляторів для супертвісторів c-типу, означених у

	function on $\mathbb{A}$	$SL(2,\mathbb{C})$ spinor field	$SU(4)$ irrep
graviton	$h_{(1,1)}(Z,\bar{W})$	$h_{\alpha(2)\dot{\alpha}(2)}(x)$	$\mathbf{1}$
gravitini	${\psi_{(1,0)}}^A(Z,\bar{W})$	${\psi_{\alpha\dot{\alpha}(2)}}^A(x)$	$\mathbf{4}$
	$\psi_{(0,1)A}(Z,\bar{W})$	$\psi_{\alpha(2)\dot{\alpha}A}(x)$	$\bar{\mathbf{4}}$
vector fields	$\tilde{a}_{(0,0)}{}_A^B(Z,\bar{W})$	$\tilde{a}_{\alpha\dot{\alpha}}{}_A^B(x)$	$\mathbf{15}$
	${b_{(1,-1)}}^{[AB]}(Z,\bar{W})$	${b_{\dot{\alpha}(2)}}^{[AB]}(x)$	$\mathbf{6}$
	$b_{(-1,1)[AB]}(Z,\bar{W})$	$b_{\alpha(2)[AB]}(x)$	$\mathbf{6}$
spinor fields	$\tilde{\lambda}_{(-1,0)}{}_{[AB]}^C(Z,\bar{W})$	$\tilde{\lambda}_{\alpha}{}_{[AB]}^C(x)$	$\bar{\mathbf{20}}$
	$\tilde{\lambda}_{(0,-1)}{}_A^{[BC]}(Z,\bar{W})$	$\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}{}_A^{[BC]}(x)$	$\mathbf{20}$
	$\varepsilon^{DABC}\lambda_{(-2,1)[ABC]}(Z,\bar{W})$	${\lambda_\alpha}^D(x)$	$\mathbf{4}$
	$\varepsilon_{DABC}{\lambda_{(1,-2)}}^{[ABC]}(Z,\bar{W})$	$\lambda_{\dot{\alpha}D}(x)$	$\bar{\mathbf{4}}$
scalar fields	$\tilde{\varphi}_{(-1,-1)}{}_{[AB]}^{[CD]}(Z,\bar{W})$	$\tilde{\varphi}_{[AB]}^{[CD]}(x)$	$\mathbf{20}'$
	$\varepsilon^{EABC}\tilde{\varphi}_{(-2,0)}{}_{[ABC]}^D(Z,\bar{W})$	$\varphi^{(DE)}(x)$	$\mathbf{10}$
	$\varepsilon_{EBCD}\tilde{\varphi}_{(0,-2)}{}_A^{[BCD]}(Z,\bar{W})$	$\bar{\varphi}_{(AE)}(x)$	$\bar{\mathbf{10}}$
	$\varepsilon_{ABCD}{\varphi_{(1,-3)}}^{[ABCD]}(Z,\bar{W})$	$\varphi(x)$	$\mathbf{1}$
	$\varepsilon^{ABCD}\varphi_{(-3,1)[ABCD]}(Z,\bar{W})$	$\bar{\varphi}(x)$	$\mathbf{1}$

Таблиця 4.2. Поля супермультиплетів $D=5$ $\mathcal{N}=8$ каліброваної супергравітації і $D=4$ $\mathcal{N}=4$ конформної супергравітації та відповідні функції компонентів амбітвісторів.

(4.25), (4.26) та (4.87). Тож беручи лінійні комбінації $sl(2,\mathbb{C})$ компонентів супертвісторів a-типу

$$\xi_q^{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} m_q^\alpha \\ \bar{n}_{\dot{\alpha}q} \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}}^q = (n_\alpha^q \ \bar{m}^{\dot{\alpha}q}),$$

введемо ще два види ферміонних $su(2)$ осциляторів

$$\begin{aligned} \omega_q^\alpha &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-m_q^\alpha + \bar{n}_{\dot{\alpha}q}), \quad \omega_\alpha^q = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{m}^{\dot{\alpha}q} + n_\alpha^q), \\ \varphi_q^\alpha &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(m_q^\alpha + \bar{n}_{\dot{\alpha}q}), \quad \varphi_\alpha^q = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{m}^{\dot{\alpha}q} + n_\alpha^q). \end{aligned} \tag{4.94}$$

Як випливає з (4.86), $\xi_q^{\boldsymbol{\alpha}}$ і $\bar{\xi}_{\boldsymbol{\beta}}^p$ задовольняють антикомутаційні співвідношення

$$\{\xi_q^{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\xi}_{\boldsymbol{\beta}}^p\} = \delta_q^p \delta_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

які переходять у відповідні співвідношення для осциляторів

$$\{\omega_q^\alpha, \omega_\beta^p\} = -\delta_q^p \delta_\beta^\alpha, \quad \{\varphi_q^\alpha, \varphi_\beta^p\} = \delta_q^p \delta_\beta^\alpha. \tag{4.95}$$

Як видно ω-осцилятори задовольняють антикомутаційні співвідношення з неправильним знаком. Відтак стани побудовані за допомогою цих осциляторів мають від'ємну норму.

Грассманово-парні компоненти супертвісторів a-типу в квантовій теорії задовольняють комутаційні співвідношення

$$[L_q^A, \bar{L}_B^p] = \delta_q^p \delta_B^A$$

й розкладаються на $su(2) \oplus su(2) = su(4)$ складові подібно до (4.87)

$$L_q^A = \begin{pmatrix} c_q^a \\ d_q^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_A^q = (c_a^q \ d_{\dot{a}}^q). \tag{4.96}$$

Тож у (4.96) введено два додаткові види бозонних $su(2)$ осциляторів. Їх комутаційні співвідношення мають вигляд

$$[c_q^a, c_b^p] = \delta_q^p \delta_b^a, \quad [d_q^{\dot{a}}, d_{\dot{b}}^p] = \delta_q^p \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}}. \tag{4.97}$$

Як буде показано нижче для одного з введених видів бозонних $su(2)$ осциляторів комутаційні співвідношення мають неправильний знак.

Осциляторна реалізація глобальної $U(2,2|4)$ симетрії. У підпункті 4.4.2.2 було показано, що дія суперчастинки у 4-супертвісторному формулюванні (4.80) інваріантна відносно $su(2|2)$ калібрувальної симетрії, яку генерують в'язі (4.81)-(4.84). Дія суперчастинки також інваріантна відносно глобальної $U(2,2|4)$ симетрії з генераторами

$$\mathcal{Z}_i^{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}}^i - \Psi_q^{\mathcal{A}}\bar{\Psi}_{\mathcal{B}}^q = u(2,2|4). \tag{4.98}$$

Оскільки ці генератори є інваріантами кольорової симетрії, яка діє в просторі копій супертвісторів (осциляторів), вони (анти)комутують з генераторами $su(2|2)$ калібрувальної симетрії. В осциляторному підході генератори, які входять до супералгебри глобальної симетрії, використовуються для побудови простору станів квантованої суперчастиники як простору певного представлення $u(2,2|4)$.

Представимо генератори (4.98) в осциляторному базисі за допомогою наведених вище співвідношень між компонентами супертвісторів та осциляторами (4.25), (4.26), (4.87), (4.94) і (4.96). У цьому базисі відповідно до 3-градуйованої структури $(s)u(2,2|4)$ супералгебри [329] генератори можуть бути розділені на квадратичні за осциляторами народження, квадратичні за осциляторами знищення й складені з добутків осциляторів народження та знищення. Завдяки цій 3-градуйованій структурі вибір операторів народження та знищення серед осциляторів, які відповідають супертвісторам c- та a-типу, є взаємопов'язаним. Відтак певний вибір для осциляторів, пов'язаних із супертвісторами c-типу, знімає неоднозначність у виборі для осциляторів, пов'язаних із супертвісторами a-типу.

Розглянемо осциляторну реалізацію бозонних генераторів, починаючи з генераторів $su(2,2) \subset u(2,2|4)$ підалгебри. Відповідно до 3-градуйованої структури ці генератори розподіляються на три піднабори

$$g_{(0)} = \{E, L^{\alpha}{}_{\beta}, R^{\alpha}{}_{\beta}\}, \quad g_{(-1)} = \{T^{(-)\,\alpha}{}_{\beta}\}, \quad g_{(+1)} = \{T^{(+)\,\alpha}{}_{\beta}\} : \tag{4.99}$$

$$2E = a_i^{\alpha}a_{\alpha}^i + b_{\alpha}^i b_i^{\alpha} - \omega_q^{\alpha}\omega_{\alpha}^q + \varphi_{\alpha}^q\varphi_q^{\alpha}, \tag{4.100}$$

$$L^{\alpha}{}_{\beta} = a_i^{\alpha} a_{\beta}^i - \omega_q^{\alpha} \omega_{\beta}^q - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} (a_i^{\gamma} a_{\gamma}^i - \omega_q^{\gamma} \omega_{\gamma}^q),$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta} = b_i^{\alpha} b_{\beta}^i - \varphi_q^{\alpha} \varphi_{\beta}^q - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} (b_i^{\gamma} b_{\gamma}^i - \varphi_q^{\gamma} \varphi_{\gamma}^q),$$

$$T^{(-)\,\alpha}{}_{\beta} = b_i^{\alpha} a_{\beta}^i - \varphi_q^{\alpha} \omega_{\beta}^q, \tag{4.101}$$

$$T^{(+)\,\alpha}{}_{\beta} = a_i^{\alpha} b_{\beta}^i - \omega_q^{\alpha} \varphi_{\beta}^q. \tag{4.102}$$

Наведені вирази заслуговують декількох коментарів. З (4.101) та (4.102) випливає, що ω_{β}^q та φ_q^{α} є операторами знищення, натомість ω_q^{α} і φ_{β}^q є операторами народження. В (4.99) $g_{(0)}$ складається з генераторів максимальної компактної підалгебри $\mathcal{K} = u(1)_E \oplus su(2) \oplus su(2) \subset su(2,2)$. $u(1)_E$ генератор E, який відповідає AdS_5 енергії (конформній розмірності), визначає градуювання $su(2,2)$ генераторів

$$[E, g_{(\sigma)}] = \sigma g_{(\sigma)} \quad \sigma = 0, \pm 1.$$

Завдяки цим співвідношенням комутатори $su(2,2)$ алгебри можна записати у градуйованому вигляді

$$[g_{(\sigma)}, g_{(\sigma')}] = g_{(\sigma+\sigma')}.$$

Вираз для оператора E (4.100) у впорядкуванні народження-знищення було здобуто з явно ермітового виразу перестановкою осциляторів народження ліворуч. Вводячи оператори числа частинок для різних типів осциляторів $N_{(a)} = a_i^{\alpha} a_{\alpha}^i$, $N_{(b)} = b_{\alpha}^i b_i^{\alpha}$, $N_{(\omega)} = -\omega_q^{\alpha} \omega_{\alpha}^q$ та $N_{(\varphi)} = \varphi_{\alpha}^q \varphi_q^{\alpha}$, його можна записати у формі

$$E = \tfrac{1}{2}(N_{(a)} + N_{(b)} + N_{(\omega)} + N_{(\varphi)}). \tag{4.103}$$

$N_{(\omega)}$ включає додатковий знак мінус, який узгоджується з неправильним знаком в антикомутаторі ω-осциляторів у (4.95). Хоча оператор E є за означенням невід'ємним, у (4.103) не має додатного c-числового члена на відміну від реалізації $su(2,2)$ генераторів лише за допомогою бозонних осциляторів [277], [329]. Такий додатний c-числовий внесок гарантує, що енергія представлень, які можна побудувати за домопогою бозонних осциляторів, лежить на відповідній границі унітарності (4.23) або (4.24) чи вище неї. В осциляторному підході $su(2,2)$ представлення з додатною енергією будуються за допомогою багатократної дії генераторів $T^{(+)\,\alpha}{}_{\beta}$ на вектори найнижчої ваги, які анігілюються генераторами $T^{(-)\,\alpha}{}_{\beta}$. Вектор найнижчої ваги, який відповідає основному стану суперчастинки, має також анігілюватись генераторами $su(2|2)$ калібрувальної симетрії (4.81)-(4.84).

Генератори $su(4) \subset u(2,2|4)$ алгебри також можна розділити на три піднабори

$$h_{(0)} = \{C, A^{a}{}_{b}, B^{\dot a}{}_{\dot b}\}, \quad h_{(-1)} = \{V^{(-)\,\dot a}{}_{b}\}, \quad h_{(+1)} = \{V^{(+)\,a}{}_{\dot b}\} :$$

$$2C = -\alpha^a_i \alpha^i_a - \beta^i_{\dot a}\beta^{\dot a}_i + c^a_q c^q_a - d^q_{\dot a} d^{\dot a}_q,$$
$$A^a{}_b = \alpha^a_i \alpha^i_b - c^a_q c^q_b - \frac{1}{2}\delta^a_b(\alpha^d_i \alpha^i_d - c^d_q c^q_d),$$
$$B^{\dot a}{}_{\dot b} = \beta^{\dot a}_i \beta^i_{\dot b} - d^{\dot a}_q d^q_{\dot b} - \frac{1}{2}\delta^{\dot a}_{\dot b}(\beta^{\dot c}_i \beta^i_{\dot c} - d^{\dot c}_q d^q_{\dot c}),$$
$$V^{(-)\,\dot a}{}_{b} = \beta^{\dot a}_i \alpha^i_b - d^{\dot a}_q c^q_b, \tag{4.104}$$

$$V^{(+)\,a}{}_{\dot b} = \alpha^a_i \beta^i_{\dot b} - c^a_q d^q_{\dot b}. \tag{4.105}$$

Комутаційні співвідношення $su(4)$ алгебри можна представити у формі сумісній з цією 3-градуйованою структурою

$$[h_{(\tau)}, h_{(\tau')}] = h_{(\tau+\tau')},$$

де градуювання генераторів визначається їх комутатором з C

$$[C, h_{(\tau)}] = -\tau h_{(\tau)} \quad \tau = 0, \pm 1.$$

З вигляду операторів (4.104) та (4.105), побудованих лише з осциляторів народження або знищення, випливає, що бозонні осцилятори c^q_b і $d^{\dot a}_q$ є операторами знищення, а c^a_q і $d^q_{\dot b}$ є операторами народження. Тоді з комутаційних співвідношень (4.97) випливає, що для c-осциляторів вони мають неправильний знак. Оператор C можна записати у формі подібній до наведеної в (4.103) для оператора AdS_5 енергії

$$C = -\tfrac{1}{2}(N_{(\alpha)} + N_{(\beta)} + N_{(c)} + N_{(d)}),$$

де $N_{(\alpha)} = \alpha_i^a \alpha_a^i$, $N_{(\beta)} = \beta_{\dot{a}}^i \beta_i^{\dot{a}}$, $N_{(c)} = -c_q^a c_a^q$ та $N_{(d)} = d_{\dot{a}}^q d_q^{\dot{a}}$ є операторами числа частинок, а загальний знак мінус було введено для узгодження із означенням цього оператора в роботі [329]. Легко бачити, що він є недодатно означеним, тоді як для унітарних незвідних представлень $su(4)$, побудованих у [277] із ферміонних осциляторів, його власні значення є невід'ємними через додатний c-числовий внесок, який дорівнює кількості копій (кольорів) осциляторів P. Незвідні представлення $su(4)$ будуються багатократною дією генераторів $V^{(+)\,a}{}_{\dot{b}}$ на вектори найнижчої ваги, які анігілюються генераторами $V^{(-)\,\dot{a}}{}_{b}$. У моделі суперчастинки ці вектори також анігілюються генераторами $su(2|2)$ кольорової симетрії.

Два інші бозонні генератори $u(2,2|4)$ супералгебри є в'яззю (4.83), яка в осциляторному представленні дорівнює

$$\widetilde{T} = -N_{(a)} + N_{(b)} - N_{(\alpha)} + N_{(\beta)} - N_{(\omega)} + N_{(\varphi)} - N_{(c)} + N_{(d)} \approx 0,$$

та

$$U = -N_{(a)} + N_{(b)} + N_{(\alpha)} - N_{(\beta)} - N_{(\omega)} + N_{(\varphi)} + N_{(c)} - N_{(d)}.$$

Оскільки генератор $\widetilde{T}$ є в'яззю, для всіх фізичних станів квантованої суперчастинки його власні значення дорівнюють нулю. Однак власні значення оператора $Y = -N_{(a)} + N_{(b)} - N_{(\omega)} + N_{(\varphi)}$ можуть бути використані як додаткові мітки представлень разом із $su(2,2)$ та $su(4)$ мітками.

Серед непарних $u(2,2|4)$ генераторів є вісім побудованих з осциляторів народження

$$Q^{(+)\,\alpha}{}_{\dot{a}} = a_i^\alpha \beta_{\dot{a}}^i - \omega_q^\alpha d_{\dot{a}}^q, \quad Q^{(+)\,a}{}_{\alpha} = \alpha_i^a b_\alpha^i - c_q^a \varphi_\alpha^q. \tag{4.106}$$

$su(2,2)$ labels (E, s_1, s_2)	$su(4)$ labels (C, j_1, j_2)	Y	fields on $AdS_5 \times S^5$
$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	0	$\varphi^{(1)}(z,w)$
$(1/2,1/2,0)$	$(-1/2,0,1/2)$	-1	$\lambda^{(1)}_{\alpha\dot{a}}(z,w)$
$(1,1,0)$	$(-1,0,0)$	-2	$A^{(1)}_{\alpha(2)}(z,w)$
$(1,0,0)$	$(-1,0,1)$	-2	$\varphi^{(2)}_{\dot{a}(2)}(z,w)$
$(3/2,1/2,0)$	$(-3/2,0,1/2)$	-3	$\lambda^{(2)}_{\alpha\dot{a}}(z,w)$
$(2,0,0)$	$(-2,0,0)$	-4	$\varphi^{(3)}(z,w)$

Таблиця 4.3. $su(2,2)$ та $su(4)$ мітки векторів найнижчої ваги, здобутих послідовною дією генераторів $Q^{(+)\,\alpha}{}_{\dot{a}}$ на вакуум, та відповідні поля у просторі $AdS_5 \times S^5$.

Вони належать до підпростору з власним значенням $+1$ відносно градуювання, яке визначає оператор $E - C$. Їх багатократна дія на $su(2,2) \oplus su(4)$ вектор найнижчої ваги, який відповідає основному стану суперчастинки та буде встановлений нижче, дає всі інші вектори найнижчої ваги її супермультиплета фізичних станів.

Фізичні стани суперчастинки. Як зазначалось вище, генератори глобальної $U(2,2|4)$ симетрії (4.98) (анти)комутують з генераторами калібрувальної $SU(2|2)$ симетрії (4.81)-(4.84), відтак останні діють на вектор основного стану квантованої суперчастинки. Проведений у нашій роботі [283] аналіз показує, що єдиним вектором найнижчої ваги, який анігілюється усіма в'язями, є осциляторний вакуум $|0\rangle$.

Перейдемо тепер до побудови усіх векторів найнижчої ваги супермультиплета фізичних станів суперчастинки. Вони здобуваються багатократною дією на основний стан генераторів суперсиметрії (4.106). Послідовна дія генераторів $Q^{(+)\,\alpha}{}_{\dot{a}}$ на вакуум з наступним розкладанням добутків осциляторів на незвідні представлення $su(2)$ підалгебр $u(2,2|4)$ супералгебри приводить до шести незалежних векторів найнижчої ваги, наведених у таблиці 4.3. Їх спіновий склад є таким же як і векторів найнижчої ва-

$su(2,2)$ labels (E, s_1, s_2)	$su(4)$ labels (C, j_1, j_2)	Y	fields on $AdS_5 \times S^5$
$(1/2, 0, 1/2)$	$(-1/2, 1/2, 0)$	1	$\lambda^{(1)}_{\dot{\alpha}a}(z,w)$
$(1, 0, 1)$	$(-1, 0, 0)$	2	$\bar{A}^{(1)}_{\dot{\alpha}(2)}(z,w)$
$(1, 0, 0)$	$(-1, 1, 0)$	2	$\varphi^{(2)}_{a(2)}(z,w)$
$(3/2, 0, 1/2)$	$(-3/2, 1/2, 0)$	3	$\lambda^{(2)}_{\dot{\alpha}a}(z,w)$
$(2, 0, 0)$	$(-2, 0, 0)$	4	$\bar{\varphi}^{(3)}(z,w)$

Таблиця 4.4. $su(2,2)$ та $su(4)$ мітки векторів найнижчої ваги, здобутих послідовною дією генераторів $Q^{(+)\,a}{}_{\alpha}$ на вакуум, та відповідні поля у просторі $AdS_5 \times S^5$.

ги у першому стовпці таблиці 1 із роботи [277] з одиницями в другому та третьому розрядах. Відзначимо, що наше нормування генераторів E та Y відрізняється від прийнятого в цій роботі. Подібним чином послідовна дія генераторів $Q^{(+)\,a}{}_{\alpha}$ дає інші п'ять векторів найнижчої ваги, представлених у таблиці 4.4. Їх спіновий склад є таким же, як і векторів найнижчої ваги у першому стовпці таблиці 1 роботи [277] з одиницями у першому та четвертому розрядах. Решта векторів найнижчої ваги відповідає одночасній дії генераторів $Q^{(+)\,\alpha}{}_{\dot{a}}$ та $Q^{(+)\,a}{}_{\alpha}$. Для того аби знайти незалежні вектори найнижчої ваги, необхідно розкласти добутки осциляторів на незвідні представлення чотирьох $su(2)$ підалгебр $u(2,2|4)$ супералгебри й залишити відповідно до критерію, сформульованому в роботі [350], лише безслідові тензорні представлення двох $su(2)$ підалгебр кольорової $su(2|2)$ супералгебри. В результаті здобуваємо ще 25 векторів найнижчої ваги. Як можна побачити з наведених в таблиці 4.5 даних мітки цих векторів можна здобути підсумовуванням міток усіх пар векторів найнижчої ваги, представлених у таблицях 4.3 та 4.4 за винятком вакууму.

Дія генераторів (4.102) та (4.105) на ці вектори найнижчої ваги приводить до нескінченновимірних представлень $su(2,2) \oplus su(4)$, які відповідають полям у просторі $AdS_5 \times S^5$. Вони наведені у крайньому правому стовпці таблиць 4.3-4.5. Для того аби встановити зв'язок із розглядом, про-

$su(2,2)$ labels (E, s_1, s_2)	$su(4)$ labels (C, j_1, j_2)	Y	fields on $AdS_5 \times S^5$
$(1, 1/2, 1/2)$	$(-1, 1/2, 1/2)$	0	$A^{(1)}_{\alpha\dot{\alpha}a\dot{a}}(z, w)$
$(3/2, 1, 1/2)$	$(-3/2, 1/2, 0)$	-1	$\Psi^{(1)}_{\alpha(2)\dot{\alpha}a}(z, w)$
$(3/2, 0, 1/2)$	$(-3/2, 1/2, 1)$	-1	$\lambda^{(3)}_{\dot{\alpha}a\dot{a}(2)}(z, w)$
$(3/2, 1/2, 1)$	$(-3/2, 0, 1/2)$	1	$\Psi^{(1)}_{\alpha\dot{\alpha}(2)\dot{a}}(z, w)$
$(3/2, 1/2, 0)$	$(-3/2, 1, 1/2)$	1	$\lambda^{(3)}_{\alpha a(2)\dot{a}}(z, w)$
$(2, 1, 0)$	$(-2, 1, 0)$	0	$A^{(2)}_{\alpha(2)a(2)}(z, w)$
$(2, 0, 1)$	$(-2, 0, 1)$	0	$A^{(2)}_{\dot{\alpha}(2)\dot{a}(2)}(z, w)$
$(2, 1, 1)$	$(-2, 0, 0)$	0	$h_{\alpha(2)\dot{\alpha}(2)}(z, w)$
$(2, 0, 0)$	$(-2, 1, 1)$	0	$\varphi^{(4)}_{a(2)\dot{a}(2)}(z, w)$
$(2, 1/2, 1/2)$	$(-2, 1/2, 1/2)$	-2	$A^{(2)}_{\alpha\dot{\alpha}a\dot{a}}(z, w)$
$(2, 1/2, 1/2)$	$(-2, 1/2, 1/2)$	2	$\bar{A}^{(2)}_{\alpha\dot{\alpha}a\dot{a}}(z, w)$
$(5/2, 1/2, 1)$	$(-5/2, 0, 1/2)$	-1	$\Psi^{(2)}_{\alpha\dot{\alpha}(2)\dot{a}}(z, w)$
$(5/2, 1/2, 0)$	$(-5/2, 1, 1/2)$	-1	$\lambda^{(5)}_{\alpha a(2)\dot{a}}(z, w)$
$(5/2, 1, 1/2)$	$(-5/2, 1/2, 0)$	1	$\Psi^{(2)}_{\alpha(2)\dot{\alpha}a}(z, w)$
$(5/2, 0, 1/2)$	$(-5/2, 1/2, 1)$	1	$\lambda^{(5)}_{\dot{\alpha}a\dot{a}(2)}(z, w)$
$(5/2, 0, 1/2)$	$(-5/2, 1/2, 0)$	-3	$\lambda^{(4)}_{\dot{\alpha}a}(z, w)$
$(5/2, 1/2, 0)$	$(-5/2, 0, 1/2)$	3	$\lambda^{(4)}_{\alpha\dot{a}}(z, w)$
$(3, 1/2, 1/2)$	$(-3, 1/2, 1/2)$	0	$A^{(3)}_{\alpha\dot{\alpha}a\dot{a}}(z, w)$
$(3, 0, 1)$	$(-3, 0, 0)$	-2	$\bar{A}^{(3)}_{\dot{\alpha}(2)}(z, w)$
$(3, 0, 0)$	$(-3, 1, 0)$	-2	$\varphi^{(5)}_{a(2)}(z, w)$
$(3, 1, 0)$	$(-3, 0, 0)$	2	$A^{(3)}_{\alpha(2)}(z, w)$
$(3, 0, 0)$	$(-3, 0, 1)$	2	$\varphi^{(5)}_{\dot{a}(2)}(z, w)$
$(7/2, 0, 1/2)$	$(-7/2, 1/2, 0)$	-1	$\lambda^{(6)}_{\dot{\alpha}a}(z, w)$
$(7/2, 1/2, 0)$	$(-7/2, 0, 1/2)$	1	$\lambda^{(6)}_{\alpha\dot{a}}(z, w)$
$(4, 0, 0)$	$(-4, 0, 0)$	0	$\varphi^{(6)}(z, w)$

Таблиця 4.5. $su(2,2)$ та $su(4)$ мітки векторів найнижчої ваги, здобутих одночасною дією генераторів $Q^{(+)\alpha}{}_{\dot{a}}$ та $Q^{(+)a}{}_{\alpha}$ на вакуум, та відповідні поля у просторі $AdS_5 \times S^5$.

веденим у роботі [277], для цих полів використано аналогічні позначення. Зокрема, поля з однаковими $su(2) \oplus su(2) \subset su(2,2)$ спінами позначено однаковими літерами, а верхні індекси з числами у круглих дужках використано для їх нумерації в порядку зростання AdS_5 енергії. Разом вони описують збудження полів IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом.

Порівняємо два підходи до опису спектра цих збуджень – один у рамках моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді у 4-супертвісторному формулюванні [284], [287] та інший, запропонований у роботі [277]. У ньому використовуються лише осцилятори, які відповідають супертвісторам c-типу. Основною відмінністю цих підходів є те, що в моделі суперчастинки у супертвісторному формулюванні є скінченна кількість фізичних станів. Це пояснюється тим, що в роботі [277] спектр описується в термінах мод Фур'є на S^5 для $D = 10$ полів на масовій оболонці, тобто кожному полю в просторі $AdS_5 \times S^5$ відповідає нескінченний набір полів у просторі AdS_5, які реалізують скінченновимірні унітарні незвідні представлення $su(4) = so(6)$. Відповідні $su(2,2) \oplus su(4)$ представлення у кожному рядку таблиці 1 із роботи [277] мають однакові $su(2) \oplus su(2) \subset su(2,2)$ спіни та параметризовані цілим числом p, так що їх AdS_5 енергії та $su(4)$ мітки є пропорційними p. У моделі ж суперчастинки стани, зібрані в таблицях 4.3-4.5, (крім $su(2,2)$ представлення для провідної моди $\varphi^{(1)}$, яка відповідає скалярному полю) відповідають полям у просторі $AdS_5 \times S^5$, здобутим підсумовуванням цих мод Фур'є в кожному рядку таблиці 1 в [277]. Відмітимо, що моди Фур'є в різних рядках таблиці 1 з роботи [277], але з однаковим p, складають супермультиплети $psu(2,2|4)$ суперсиметрії. Так провідні моди Фур'є в розкладі полів $\lambda^{(1)}_{\alpha\dot{a}}$, $\lambda^{(1)}_{\dot{\alpha}a}$, $A^{(1)}_{\alpha(2)}$, $\bar{A}^{(1)}_{\dot{\alpha}(2)}$ та наступна за провідною мода поля $\varphi^{(1)}$ у таблицях 4.3 та 4.4 складають $\mathcal{N} = 4$ мультиплет супер-Янга-Міллса, який відповідає модам з $p = 1$ у таблиці 1 із роботи [277]. Як відомо, цей мультиплет відщеплюється від інших мод, представлених мультиплетом $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації ($p = 2$) та масивними $psu(2,2|4)$ супермультиплетами, які включають поля зі спінами від 0 до 2 ($p > 2$).

Квантування та аналіз спектра фізичних станів безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді у 4-супертвісторному формулюванні виносяться на захист.

4.5 Класичні та квантові симетрії моделей безмасової спінової частинки та безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера

У даному підрозділі розглядається нове формулювання моделі безмасової спінової частинки та буде запропоновано модель безнатягової спінової струни у просторі анти-де Сіттера AdS_D, реалізованому як підбагатовид $(D+1)$-вимірного плаского простору з двома часовими розмірностями. Такий опис простору AdS_D передбачає, що на координати обхопного простору $x^{\underline{m}}$ накладено в'язь $x^2 + 1 \approx 0$, де $SO(2, D-1)$-інваріантний скалярний добуток $x^2 = (x \cdot x) = x^{\underline{m}} \eta_{\underline{mn}} x^{\underline{n}}$ береться з використанням метрики $\eta_{\underline{mn}} = \mathrm{diag}(-,+,\ldots,+,-)$, а радіус AdS_D для зручності вибрано рівним одиниці. У канонічному підході на імпульс безмасової частинки накладено в'язь масової поверхні, яка в найпростішому випадку має вигляд $p^2 \approx 0$. Ця в'язь першого роду є генератором репараметризаційної симетрії світової лінії частинки та класичним аналогом рівняння Клейна-Гордона. Її дужки Пуассона з в'яззю $x^2 + 1 \approx 0$ мають обертатись на нуль у слабкому смислі. Це приводить до додаткової в'язі $(x \cdot p) \approx 0$, яка з $x^2 + 1 \approx 0$ утворює пару в'язей другого роду. Присутність в'язей другого роду в моделі вимагає введення дужок Дірака, що ускладнює подальший аналіз. Тому зручно розглядати в'язь $x^2 + 1 \approx 0$ як калібрувальну умову для дилатаційної симетрії, яка діє на координати обхопного простору та генерується в'яззю першого роду $(x \cdot p) \approx 0$ [355], [356]. Розгляд дилатацій як локальної симетрії як раз відповідає реалізації простору AdS_D як дійсного проєктивного багатовиду RP^D, параметризованого $(D+1)$ однорідними координатами $x^{\underline{m}}$. Відтак у такому описі набір з двох в'язей першого роду $(x \cdot p) \approx 0$ та $p^2 \approx 0$ може бути використано для означення гамільтоніана в моделі безмасової частинки у просторі AdS_D. В моделі безнатягової струни густину гамільтоніана означають узагальнення цих в'язей та в'язь, яка є другим генератором листкових репараметризацій.

Зазначимо, що дослідження класичної динаміки полів у просторах (анти)-де Сіттера та Мінковського, реалізованих як багатовиди, вкладені у пласкиий простір з додатковими розмірностями, було започатковано у відомих роботах П. Дірака [292]. Класичну механіку точкової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як підбагатовид плаского $(D+1)$-вимірного простору з двома часовими розмірностями й параметризованого однорідними координатами, було розглянуто в роботі [355]. В такому описі $SO(2, D-1)$ групу ізометрії простору анти-де Сіттера реалізовано лінійно. Можливо також розглянути моделі частинки та струни [357], [358] у $(D+2)$-вимірному пласкому просторі інваріантному відносно лінійно реалізованої $SO(2, D)$ симетрії, які описують їх рух у D-вимірному просторі Мінковського або анти-де Сіттера в залежності від умов, накладених для часткового закріплення розширених калібрувальних симетрій. Опис простору анти-де Сіттера як вкладеного багатовиду використовується при формулюванні рівнянь для калібувальних полів вищих спінів [336], [337], [323], [359]. Реалізація простору AdS_5 як проєктивного багатовиду також використовувалась у роботі [293]. В ній було здійснено спробу вивчити можливість сформулювання AdS_5/CFT_4 дуальності у твісторному просторі, оскільки у ньому можливо поєднати лінійну реалізацію $SO(2,4)$ ізометрії простору AdS_5 з описом його чотиривимірної конформної межі як проєктивного світлового конуса.

4.5.1 Модель безмасової спінової частинки в AdS_D

У подальшому будемо розглядати параметризацію D-вимірного простору-часу AdS_D за допомогою $D+1$ однорідних координат $x^{\underline{m}}$ ($\underline{m} = 0, \ldots, D$), для яких $p_{\underline{m}}$ є канонічним імпульсом. Спінові ступені свободи частинки будемо описувати $SO(2, D-1)$ вектором $\xi^{\underline{m}}$ з грассманово-непарними компонентами.

4.5.1.1 Класичне формулювання

В якості класичного аналога рівняння Дірака для безмасового спінорного поля розглянемо ферміонну в'язь

$$\Phi = |x|(\xi \cdot p) \approx 0, \tag{4.107}$$

де $|x| = \sqrt{-x^2}$ і $(\xi \cdot p) = \xi^{\underline{m}} \eta_{\underline{mn}} p^{\underline{n}}$ є $SO(2, D-1)$-інваріантною нормою та скалярним добутком в обхопному просторі. Вводячи стандартні співвідношення на дужках Пуассона та Дірака

$$\{p_{\underline{m}}, x^{\underline{n}}\}_{P.B.} = \delta^{\underline{n}}_{\underline{m}}, \quad \{\xi^{\underline{m}}, \xi^{\underline{n}}\}_{D.B.} = i\eta^{\underline{mn}}, \tag{4.108}$$

можливо здобути замкнену алгебру трьох в'язей: ферміонної $\Phi \approx 0$ та двох бозонних

$$T = |x|^2 p^2 + 2i(\xi \cdot x)(\xi \cdot p) \approx 0, \tag{4.109}$$

$$\mathfrak{D} = (x \cdot p) \approx 0. \tag{4.110}$$

Ця алгебра представляє пряму суму алгебри суперсиметрії на світовій лінії частинки та абелевої алгебри, яку утворює генератор дилатацій $\mathfrak{D} \approx 0$ координат $x^{\underline{m}}$. Алгебра суперсиметрії на світовій лінії має єдине нетривіальне співвідношення

$$\{\Phi, \Phi\}_{D.B.} = iT, \tag{4.111}$$

при чому в'язь $\Phi \approx 0$ є генератором суперсиметрії, а $T \approx 0$ – генератором репараметризацій. Відзначимо, що привести алгебру в'язей до такої форми стало можливим завдяки їх реалізації (4.107) та (4.109), яку було запропоновано у нашій роботі [290] і яка відрізняється від реалізації [355].

Дію спінової частинки можна записати через змінні фазового простору

$$S = \int_L d\tau \mathscr{L}_{\rm ph}, \quad \mathscr{L}_{\rm ph} = (p \cdot \dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \tfrac{\tilde{e}}{2} T + a\mathfrak{D} + i\chi\Phi, \qquad (4.112)$$

де в'язі (4.107), (4.109) та (4.110) введено з множниками Лагранжа $\tilde{e}(\tau)$ та $a(\tau)$, які є парними, і $\chi(\tau)$, який є непарним. Імпульс $p_{\underline{m}}$ можна виключити з використанням рівняння для нього, яке випливає із дії (4.112). Це приводить до лагранжіана частинки у конфігураційному просторі

$$\mathscr{L}_{\rm conf} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x} + ax)^2 + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x}) + \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\xi \cdot (\dot{x} + ax), \qquad (4.113)$$

в якому множник Лагранжа a відіграє роль одновимірного калібрувального поля для локальних масштабних перетворень x та p. Відповідний несуперсиметричний лагранжіан співпадає з лагранжіаном моделі конформної частинки з роботи [355]. Оскільки рівняння для a є алгебраїчним, підстановка його розв'язку назад у (4.113) приводить до лагранжіана

$$\mathscr{L}_{RP^D} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}\theta\dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x}) + \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}(\xi\theta\dot{x}), \qquad (4.114)$$

який відповідає реалізації простору AdS_D як дійсного проєктивного багатовиду RP^D, параметризованого однорідними координатами, а $\theta^{\underline{mn}} = \eta^{\underline{mn}} + \frac{1}{|x|^2}x^{\underline{m}}x^{\underline{n}}$ відіграє роль його виродженого метричного тензора.

У калібруванні для репараметризаційної симетрії світового листка $\tilde{e} = 1$ та локальної суперсиметрії $\chi = 0$ рівняння руху частинки

$$\begin{gathered}
\tfrac{d}{d\tau}\left(\tfrac{1}{|x|}(\theta\dot{x})^{\underline{m}} - \tfrac{i}{|x|}(\xi \cdot x)\xi^{\underline{m}}\right) \\
-\tfrac{1}{|x|^3}(\dot{x}\theta\dot{x})x^{\underline{m}} - \tfrac{i}{|x|}(\xi\theta\dot{x})\xi^{\underline{m}} - \tfrac{2i}{|x|^3}(\xi \cdot \dot{x})(\xi \cdot x)x^{\underline{m}} = 0, \\
\dot{\xi}^{\underline{m}} + \tfrac{1}{|x|^2}(\xi \cdot x)\dot{x}^{\underline{m}} - \tfrac{1}{|x|^2}(\xi \cdot \dot{x})x^{\underline{m}} = 0
\end{gathered}$$

можна записати у формі рівняння Лакса

$$\dot{L}_\tau - M_\tau L_\tau = \dot{\xi} - M_\tau \xi = 0 \qquad (4.115)$$

з

$$
\begin{aligned}
L_\tau^{\underline{m}} &= \tfrac{1}{|x|}(\theta\dot{x})^{\underline{m}} - \tfrac{i}{|x|}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}},\\
M_\tau^{\underline{mn}} &= \tfrac{1}{|x|^2}(x^{\underline{m}}\dot{x}^{\underline{n}} - \dot{x}^{\underline{m}}x^{\underline{n}}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)(x^{\underline{m}}\xi^{\underline{n}} - \xi^{\underline{m}}x^{\underline{n}}) - i\xi^{\underline{m}}\xi^{\underline{n}},
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

що означає їх класичну інтеґровність. Відмітимо, що у калібруванні, яке розглядається, $M_\tau^{\underline{mn}}$ співпадає з точністю до знака з генераторами глобальної $SO(2, D-1)$ симетрії дії частинки. У цьому калібруванні імпульс частинки, який випливає із лагранжіана (4.114), дорівнює

$$
p^{\underline{m}} = \tfrac{1}{|x|^2}\theta^{\underline{mn}}\dot{x}_{\underline{n}} - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}}.
$$

Тому перші два доданки можна представити у формі орбітальної частині генераторів $SO(2, D-1)$ симетрії $x^{\underline{m}}p^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}p^{\underline{m}}$. Останній доданок представляє спінову частину.

4.5.1.2 Квантування за Діраком

У квантовій теорії класичні спостережувані переходять в ермітові оператори. Оператори, асоційовані з координатами фазового простору, задовольняють (анти)комутаційні співвідношення

$$
[p_{\underline{m}}, x^{\underline{n}}] = -i\delta_{\underline{m}}^{\underline{n}}, \quad \{\xi^{\underline{m}}, \xi^{\underline{n}}\} = \eta^{\underline{mn}}.
$$

Оператори $\xi^{\underline{m}}$ зазвичай реалізуються $\gamma-$матрицями у розмірності $(D+1)$ як $\xi^{\underline{m}} = 2^{-1/2}\gamma^{\underline{m}}$. $\gamma-$матриці задовольняють умови ермітовості $(\gamma^{\underline{m}})^\dagger = (-)^t A\gamma^{\underline{m}}A^{-1}$, де $A = \gamma^{0_1}\gamma^{0_2}\cdots\gamma^{0_t}$, а t дорівнює числу часових вимірів ($t = 2$ для реалізації простору AdS_D як багатовиду, вкладеного в обхопний простір).

Ермітів оператор, який відповідає класичній в'язі (4.107)

$$
\Phi \;\to\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{\mathrm{H}}
$$

визначаєтсья виразом

$$
\Phi_{\mathrm{H}} = |x|(\gamma\cdot p) + \tfrac{i}{2|x|}(\gamma\cdot x) \approx 0, \tag{4.117}
$$

в якому останій доданок виникає через переміщення оператора імпульсу праворуч в явно ермітовому виразі $\frac{1}{2}(|x|p_{\underline{m}} + p_{\underline{m}}|x|)$, а загальний фактор $2^{-1/2}$ було виведено із означення Φ_{H} аби спростити форму квантового аналога класичних дужок Пуассона алгебри суперсиметрії на світовій лінії (4.111)

$$\Phi_{\mathrm{H}}^2 = T_{\mathrm{H}}. \tag{4.118}$$

Виконання співвідношення (4.118) однозначно[55] визначає форму ермітового оператора, якій відповідає генератору репараметризацій світової лінії (4.109)

$$T_{\mathrm{H}} = |x|^2 p^2 + i(\gamma \cdot x)(\gamma \cdot p) + i(x \cdot p) + \tfrac{2D+1}{4} \approx 0. \tag{4.119}$$

Ермітів оператор для іншої бозонної в'язі вибиремо у вигляді

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{H}} = (x \cdot p) - \tfrac{i(D+1)}{2} \approx 0. \tag{4.120}$$

Хвильова функція спінової частинки у конфігураційному просторі $\Psi(x)$ є $2^{[\frac{D+1}{2}]}$-компонентним спінорним полем. Вона задовольняє динамічні рівняння, які є висновками з накладення квантових в'язей першого роду (4.117), (4.119) і (4.120). Для їх виведення оператор імпульсу реалізується як диференційний оператор. У випадку викривленого конфігураційного простору ермітів оператор імпульсу дається відомим виразом

$$p_{\underline{m}} = -i(-g)^{-\frac{1}{4}} \partial_{\underline{m}} (-g)^{\frac{1}{4}},$$

де g – детермінант метричного тензора цього простору. Такий вигляд оператора імпульсу узгоджується з означенням інваріантного скалярного добутку полів у викривленому просторі, яке узагальнює відоме означення для простору Мінковського (див., наприклад, [362]). У реалізації простору анти-де Сіттера як проєктивного багатовиду елемент об'єму в однорідних

[55]Обговорення неоднозначностей в означенні ермітових операторів у моделях з *локальною* суперсиметрією можна знайти, наприклад, у роботах [360], [361].

координатах дорівнює $|x|^{-D-1}\varepsilon_{\underline{m}_1\underline{m}_2\cdots\underline{m}_{D+1}}x^{\underline{m}_1}dx^{\underline{m}_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\underline{m}_{D+1}}$. Тому ермітів оператор імпульсу набуває вигляду

$$p_{\underline{m}} = -i|x|^{\frac{D+1}{2}}\partial_{\underline{m}}|x|^{-\frac{D+1}{2}} = -i\big(\partial_{\underline{m}} + \tfrac{(D+1)}{2|x|^2}x_{\underline{m}}\big).$$

У результаті оператору (4.117) відповідає рівняння типу Дірака для хвильової функції частинки

$$\mathscr{D}_x\Psi(x) = \big(|x|(\gamma\cdot\partial) + \tfrac{D}{2|x|}(\gamma\cdot x)\big)\Psi(x) = 0. \tag{4.121}$$

Квантові оператори, асоційовані з бозонними в'язями (4.119) та (4.120), можна привести до форми

$$T_{\mathrm{H}} = -|x|\partial_{\underline{m}}(|x|\partial^{\underline{m}}) + (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\partial) - (D+1)(x\cdot\partial) - \tfrac{D^2}{4} \approx 0,$$
$$\mathfrak{D}_{\mathrm{H}} = -i(x\cdot\partial) \approx 0.$$

Застосування цих операторів до хвильової функції $\Psi(x)$ показує, що вона має степінь однорідності нуль за координатами $x^{\underline{m}}$ та задовольняє рівняння другого порядку

$$\mathscr{D}_x^2\Psi(x) = \big(|x|\partial_{\underline{m}}(|x|\partial^{\underline{m}}) - (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\partial) + \tfrac{D^2}{4}\big)\Psi(x) = 0. \tag{4.122}$$

Рівняння (4.121) та (4.122) можна переписати в термінах неоднорідних координат обхопного простору $y^{\underline{m}} = \frac{x^{\underline{m}}}{|x|}$

$$\begin{aligned}\big((\gamma\cdot\nabla) + \tfrac{D}{2}(\gamma\cdot y)\big)\,\Psi(y) = 0,\\ \left((\gamma\cdot\nabla)^2 + \tfrac{D^2}{4}\right)\Psi(y) = 0,\end{aligned} \tag{4.123}$$

де $\nabla = \partial_y + y(y\cdot\partial_y)$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$. У цих координатах оператор $\mathfrak{D}_{\mathrm{H}}$ тривіалізується. Можна також перейти до внутрішніх координат простору AdS_D, в яких рівняння (4.123) перетворюються на звичайні рівняння Дірака та Клейна-Гордона у викривленому бекграунді. Їх явний вигляд буде виведено в наступному підпункті при вивченні взаємодії спінової частинки з фоновим електромагнітним полем.

Наведене у цьому та попередньому підпунктах нове формулювання моделі безмасової спінової частинки у просторі AdS_D виноситься на захист.

4.5.1.3 Взаємодія з фоновим електромагнітним полем

У цьому підпункті буде розглянуто узагальнення моделі безмасової спінової частинки у просторі AdS_D на випадок взаємодії із зовнішнім електромагнітним полем сумісне з її калібрувальними симетріями.

Спочатку розглянемо узагальнення в'язі (4.107)

$$\Phi_{(e)} = |x|\,\xi \cdot (p - eA(x)) \approx 0. \tag{4.124}$$

В'язь (4.124) є класичним аналогом рівняння Дірака для безмасового спінорного поля за присутності взаємодії та генератором мінімальної суперсиметрії на світовій лінії. Відмітимо, що принцип мінімальності фіксує степінь однорідності електромагнітного потенціалу $A_{\underline{m}}(x)$ в обхопному просторі: $(x \cdot \partial)A_{\underline{m}}(x) = -1$. Тоді поперечний тензор напруженості електромагнітного поля визначається як

$$\begin{gathered} F_{\underline{mn}}(x) = \theta_{\underline{m}}{}^{\underline{k}}\theta_{\underline{n}}{}^{\underline{l}}(\partial_{\underline{k}}A_{\underline{l}} - \partial_{\underline{l}}A_{\underline{k}}) = \partial_{\underline{m}}A_{\underline{n}} - \partial_{\underline{n}}A_{\underline{m}}, \\ \theta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}(x) = \delta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} + \frac{x_{\underline{m}}x^{\underline{n}}}{|x|^2}. \end{gathered} \tag{4.125}$$

Останню рівність здобуто після урахування умов поперечності $(x{\cdot}A(x)) = 0$ та однорідності фонового електромагнітного потенціалу.

Співвідношення на дужках Дірака для ферміонної в'язі (4.124)

$$\{\Phi_{(e)}, \Phi_{(e)}\}_{\text{D.B.}} = iT_{(e)} \tag{4.126}$$

визначають генератор репараметризацій світової лінії

$$T_{(e)} = |x|(p - eA)^2 + 2i(\xi \cdot x)\xi \cdot (p - eA) + ie|x|^2(\xi \cdot F \cdot \xi) \approx 0. \tag{4.127}$$

Ці в'язі мають нульові дужки Пуассона з в'яззю (4.110), яка є генератором дилатацій координат обхопного простору. Тож ми здобули вирази для класичних в'язей за присутності фонового електромагнітного поля та показали, що вони задовольняють ті ж співвідношення алгебри мінімальної суперсиметрії на світовій лінії розширеної генератором дилатацій координат обхопного простору як і у випадку вільної спінової частинки.

Гамільтоніан спінової частинки

$$\mathscr{H}_{(e)} = \tfrac{\tilde{e}}{2} T_{(e)} - a\mathfrak{D} - i\chi\Phi_{(e)} \approx 0$$

дається лінійною комбінацією здобутих в'язей з парними $\tilde{e}(\tau)$, $a(\tau)$ та непарним $\chi(\tau)$ множниками Лагранжа. Функціонал дії

$$S_{(e)} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}_{(e)\,\mathrm{ph}}$$

визначається інтеґралом лагранжіана, вираженого через змінні фазового простору

$$\mathscr{L}_{(e)\,\mathrm{ph}} = (p \cdot \dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \mathscr{H}_{(e)}. \tag{4.128}$$

Виключаючи імпульс частинки за допомогою рівняння для нього, яке випливає із (4.128), здобуваємо лагранжіан у конфігураційному просторі за присутності взаємодії

$$\mathscr{L}_{(e)\,\mathrm{conf}} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x} + ax)^2 + e(\dot{x} \cdot A) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x})$$
$$+ \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\xi \cdot (\dot{x} + ax) - \tfrac{ie}{2}\tilde{e}|x|^2(\xi \cdot F \cdot \xi).$$

Далі виключення множника Лагранжа a приводить до лагранжіана

$$\mathscr{L}_{(e)\,RP^D} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}\theta\dot{x}) + e(\dot{x} \cdot A) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x})$$
$$+ \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}(\xi\theta\dot{x}) - \tfrac{ie}{2}\tilde{e}|x|^2(\xi \cdot F \cdot \xi),$$

який відповідає реалізації простору AdS_D як проєктивного багатовиду RP^D, параметризованого однорідними координатами $x^{\underline{m}}$.

Розглянемо квантування за Діраком моделі спінової частинки у фоновому електромагнітному полі. Зіставимо класичній в'язі (4.124) наступний ермітів оператор

$$\Phi_{(e)\mathrm{H}} = |x|\gamma \cdot (p - eA) + \tfrac{i}{2|x|}(\gamma \cdot x) \approx 0,$$

який за відсутності взаємодії зводиться до оператора (4.117). Його квадрат

$$\Phi^2_{(e)\mathrm{H}} = T_{(e)\mathrm{H}}$$

визначає ермітів оператор, який відповідає класичній в'язі (4.127)

$$T_{(e)\mathrm{H}} = [|x|\,\gamma\cdot(p-eA)]^2 + i\mathfrak{D}_{\mathrm{H}} - \tfrac{1}{4} \approx 0,$$

де $\mathfrak{D}_{\mathrm{H}}$ – ермітів оператор (4.120). Тож нам вдалось знайти квантову реалізацію ермітовими операторами алгебри суперсиметрії на світовій лінії розширеної генератором дилатацій координат обхопного простору.

Оператори, які відповідають в'язям першого роду, визначають рівняння для хвильової функції спінової частинки. Тож хвильова функція у конфігураційному просторі $\Psi(x)$ задовольняє рівняння першого

$$i\Phi_{(e)\mathrm{H}}\Psi(x) = \big(|x|\gamma\cdot(\partial - ieA) + \tfrac{D}{2|x|}(\gamma\cdot x)\big)\Psi(x) = 0 \tag{4.129}$$

та другого порядку

$$-T_{(e)\mathrm{H}}\Psi(x) = \big([|x|\gamma\cdot(\partial - ieA)]^2 + \tfrac{D^2}{4}\big)\Psi(x) = 0, \tag{4.130}$$

які зводяться до рівнянь (4.121) та (4.122), коли фоновий електромагнітний потенціал обертається на нуль.

Виведемо тепер зі здобутих вище рівнянь в обхопному просторі хвильові рівняння традиційного вигляду для частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ у просторі AdS_D. В якості проміжного кроку запишемо рівняння (4.129) та (4.130) у неоднорідних координатах

$$i\Phi_{(e)\mathrm{H}}\Psi(y) = \big(\gamma\cdot(\nabla - ieA) + \tfrac{D}{2}(\gamma\cdot y)\big)\Psi(y) = 0, \tag{4.131}$$

$$-T_{(e)\mathrm{H}}\Psi(y) = \left([\gamma\cdot(\nabla - ieA)]^2 + \tfrac{D^2}{4}\right)\Psi(y) = 0, \tag{4.132}$$

де $\nabla_{\underline{m}} = \theta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}(y)\frac{\partial}{\partial y^{\underline{n}}}$, $\theta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}(y) = \delta^{\underline{n}}_{\underline{m}} + y_{\underline{m}}y^{\underline{n}}$. Зазначимо, що за відсутності взаємодії рівняння (4.131) та (4.132) зводяться до рівнянь (4.123). Потенціал та напруженість електромагнітного поля в однорідних та неоднорідних координатах зв'язані співвідношеннями

$$|x|A_{\underline{m}}(x) = A_{\underline{m}}(y), \quad |x|^2F_{\underline{mn}}(x) = F_{\underline{mn}}(y). \tag{4.133}$$

Поперечна напруженість поля в неоднорідних координатах визначається як

$$F_{\underline{mn}}(y) = \theta_{\underline{m}}{}^{\underline{k}}\theta_{\underline{n}}{}^{\underline{l}}(\partial_{\underline{k}}A_{\underline{l}} - \partial_{\underline{l}}A_{\underline{k}}) = (\partial_{\underline{m}} + y_{\underline{m}})A_{\underline{n}} - (\partial_{\underline{n}} + y_{\underline{n}})A_{\underline{m}}. \qquad (4.134)$$

Для переходу до другої рівності використано поперечність потенціалу $(y \cdot A(y)) = 0$.

Рівняння (4.131) та (4.132) можна перетворити на рівняння у внутрішніх координатах з використанням формул переходу [336], [337], [359]. Зокрема, співвідношення між похідними координатних функцій

$$\nabla^{\underline{m}} z^{m'} = g^{m'n'}\partial_{n'} y^{\underline{m}}, \qquad (4.135)$$

де $g_{m'n'}(z) = \partial_{m'} y^{\underline{m}} \partial_{n'} y_{\underline{m}}$ і $g^{m'n'}(z) = \nabla^{\underline{m}} z^{m'} \nabla_{\underline{m}} z^{n'}$ – метрика простору AdS_D та обернена до неї у внутрішніх координатах $z^{m'}$. Також хвильові функції спінової частинки у неоднорідних та внутрішніх координатах пов'язані $2^{[\frac{D+1}{2}]} \times 2^{[\frac{D+1}{2}]}$ матрицею $M(z)$

$$\Psi(y) = M\psi(z):$$

$$M^{-1}\partial_{m'} M = \tfrac{1}{2}\omega_{m'}{}^{a'b'}\sigma_{a'b'} + \tfrac{1}{2}e^{a'}_{m'}\rho_{a'}, \qquad (4.136)$$

$$M^{-1}(\gamma \cdot y)(\gamma \cdot \partial_{m'} y)M = e^{a'}_{m'}\rho_{a'}, \qquad (4.137)$$

де $e^{a'}_{m'}(z)$ і $\omega_{m'}{}^{a'b'}(z)$ – фільбайн та спінова зв'язність простору AdS_D. Із (4.136) випливає, що $M \in SO(2, D-1)/SO(1, D-1)$. В (4.136) генератори $so(2, D-1)$ алгебри реалізовано матрицями Дірака $\rho_{a'}$ у розмірності D

$$\rho_{a'}\rho_{b'} + \rho_{b'}\rho_{a'} = 2\eta_{a'b'}, \quad \eta_{a'b'} = \mathrm{diag}(-, \underbrace{+, \cdots, +}_{D-1})$$

та $\sigma_{a'b'} = \frac{1}{4}(\rho_{a'}\rho_{b'} - \rho_{b'}\rho_{a'})$, які є генераторами $so(1, D-1) \subset so(2, D-1)$ алгебри. Застосування формул переходу (4.135)-(4.137) дозволяє здобути безмасові рівняння Дірака та Клейна-Гордона для хвильової функції $\psi(z)$

$$iM^{-1}(\gamma \cdot y)\Phi_{(e)\mathrm{H}}(y)M\psi(z) = \rho^{m'}D_{m'}(A)\psi(z) = 0, \qquad (4.138)$$

$$-M^{-1}T_{(e)\mathrm{H}}M\psi(z)=\left(D^{m'}(A)D_{m'}(A)-ie\sigma^{m'n'}F_{m'n'}+\tfrac{D(D-1)}{4}\right)\psi(z)=0, \quad (4.139)$$

де

$$D_{m'}(A) = \partial_{m'} + \tfrac{1}{2}\omega_{m'}{}^{a'b'}\sigma_{a'b'} - ieA_{m'}. \quad (4.140)$$

Відзачимо присутність у другому рівнянні члена типу квадрата маси $-D(D-1)/4$. Для моделі спінової частинки у просторі AdS_D з $\mathcal{N}$-розширеною суперсиметрією на світовій лінії, яка описує поле зі спіном $\mathcal{N}/2$, цей член дорівнює $-D(D-2+\mathcal{N})/4$ [363]. Для випадку $\mathcal{N}=0$, який відповідає частинці без спіну, значення $-D(D-2)/4$ для цього члена було здобуто в теорії поля [364]. Також відзначимо, що (4.138) є польовим рівнянням, яке випливає з лагранжіана Дірака для безмасового спінорного поля у D-вимірному просторі анти-де Сіттера та фоновому електромагнітному полі. Рівняння (4.139) є його висновком.

Представлена в цьому підпункті модель безмасової спінової частинки у просторі AdS_D, яка взаємодіє із зовнішнім електромагнітним полем, виноситься на захист.

4.5.1.4 Взаємодія з фоновими абелевими антисиметричними калібрувальними полями

У даному підпункті буде побудовано калібрувально-інваріантну взаємодію спінової частинки у просторі AdS_D із зовнішнім абелевим калібрувальним полем, яке описується антисиметричним тензором рангу $(r-1)$.

Подібно до випадку електромагнітного поля будемо вважати, що потенціал $A_{\underline{m}[r-1]}(x)$ фонового калібрувального поля в обхопному просторі є поперечним $x^{\underline{n}}A_{\underline{n}\underline{m}[r-2]}(x)=0$ та однорідним степеня $-(r-1)$. Означення поперечної напруженості

$$F_{\underline{m}[r]}(x) = \theta_{\underline{m}_1}{}^{\underline{n}_1}\theta_{\underline{m}_2}{}^{\underline{n}_2}\dots\theta_{\underline{m}_r}{}^{\underline{n}_r}\partial_{[\underline{n}_1}A_{\underline{n}_2\dots\underline{n}_r]} = \partial_{[\underline{m}_1}A_{\underline{m}_2\dots\underline{m}_r]}$$

узагальнює відповідне означення для електромагнітного поля (4.125). Оскільки вигляд членів взаємодії залежить від парності r, представимо окремо результати для парного та непарного r.

Ферміонна в'язь

$$\Phi_{(q,\, r\ \text{odd})} = |x|(\xi \cdot p) + i^n q |x|^r \xi^{\underline{m}[r]} F_{\underline{m}[r]} \approx 0, \tag{4.141}$$

$$\Phi_{(q,\, r\ \text{even})} = |x|(\xi \cdot p) + i^n q |x|^{r-1} (\xi \cdot x) \xi^{\underline{m}[r]} F_{\underline{m}[r]} \approx 0 \tag{4.142}$$

є природним узагальненням ферміонної в'язі для вільної спінової частинки (4.107). q позначає заряд частинки; $\xi^{\underline{m}[r]} = \xi^{\underline{m}_1} \ldots \xi^{\underline{m}_r}$ є скороченим позначенням добутку r грассманово-непарних спінових змінних; фактори $|x|^r$ та $|x|^{r-1}$ введено для того, аби зробити другий член однорідним степеня нуль подібно до першого члена, а фактор i^n, де $n = \frac{r-1}{2} - 2[\frac{r-1}{4}]$ для непарного r та $n = \frac{r}{2} - 2[\frac{r}{4}]$ для парного r, введено аби зробити його дійсним при комплексному спряженні. Подібно до розглянутих вище випадків вільної частинки та частинки у зовнішньому електромагнітному полі (див. вирази (4.111) та (4.126) відповідно) дужки Дірака для ферміонної в'язі генерують класичну алгебру суперсиметрії на світовій лінії та визначають генератор репараметризацій світової лінії за присутності взаємодії

$$\begin{gathered} T_{(q,\, r\ \text{odd})} = |x|^2 p^2 + 2i(\xi \cdot x)(\xi \cdot p) \\ +2ri^n q |x|^{r+1} \xi^{\underline{n}[r-1]} F_{\underline{n}[r-1]\underline{m}} p^{\underline{m}} - 2ri^{n-1} q |x|^{r-1} (\xi \cdot x) \xi^{\underline{m}[r]} F_{\underline{m}[r]} \\ +(-)^{\frac{r-1}{2}} r^2 q^2 |x|^{2r} \xi^{\underline{m}[r-1]} F_{\underline{m}[r-1]}{}^{\underline{k}} F_{\underline{kn}[r-1]} \xi^{\underline{n}[r-1]} \approx 0, \end{gathered} \tag{4.143}$$

$$\begin{gathered} T_{(q,\, r\ \text{even})} = |x|^2 p^2 + 2i(\xi \cdot x)(\xi \cdot p) \\ +2ri^n q |x|^r (\xi \cdot x) \xi^{\underline{n}[r-1]} F_{\underline{n}[r-1]\underline{m}} p^{\underline{m}} + 2i^n q |x|^r \xi^{\underline{m}[r]} F_{\underline{m}[r]} (x \cdot p) \\ -(-)^n q^2 |x|^{2r} (\xi^{\underline{m}[r]} F_{\underline{m}[r]})^2 \approx 0. \end{gathered} \tag{4.144}$$

Класичний гамільтоніан спінової частинки визначається сумою в'язей з множникам Лагранжа: (4.141), (4.143) та (4.110) для непарного r

$$\mathscr{H}_{(q,\, r\ \text{odd})} = \frac{\tilde{e}}{2} T_{(q,\, r\ \text{odd})} - a\mathfrak{D} - i\chi \Phi_{(q,\, r\ \text{odd})} \approx 0$$

й (4.142), (4.144) та (4.110) для парного r

$$\mathscr{H}_{(q,\, r\ \text{even})} = \frac{\tilde{e}}{2} T_{(q,\, r\ \text{even})} - a\mathfrak{D} - i\chi \Phi_{(q,\, r\ \text{even})} \approx 0.$$

Далі представимо лагранжіан у термінах змінних фазового простору

$$\mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{odd/even})\,\mathrm{ph}} = (p \cdot \dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \mathscr{H}_{(q,\, r\ \mathrm{odd/even})}. \tag{4.145}$$

Відповідний функціонал дії спінової частинки дорівнює

$$S_{(q,\, r\ \mathrm{odd/even})} = \int\limits_L d\tau \mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{odd/even})\,\mathrm{ph}}.$$

Послідовно виключаючи із лагранжіана (4.145) імпульс частинки $p^{\underline{m}}$ та множник Лагранжа a, приходимо до двох його представлень у конфігураційному просторі

$$\mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{odd})\,\mathrm{conf}} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}+ax)^2 + \tfrac{i}{2}(\xi\cdot\dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)(\xi\cdot\dot{x})$$
$$-ri^n q|x|^{r-1}\xi^{\underline{m}[r-1]}F_{\underline{m}[r-1]\underline{n}}\dot{x}^{\underline{n}} + \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\big(\xi\cdot(\dot{x}+ax) + (1-r)i^n q\tilde{e}|x|^{r+1}\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\big),$$

$$\mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{even})\,\mathrm{conf}} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}+ax)^2 + \tfrac{i}{2}(\xi\cdot\dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)(\xi\cdot\dot{x})$$
$$-ri^n q|x|^{r-2}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}[r-1]}F_{\underline{m}[r-1]\underline{n}}\dot{x}^{\underline{n}} + \tfrac{(-)^n q^2}{2}\tilde{e}|x|^{2r}(\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2$$
$$+\tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\left(\xi\cdot(\dot{x}+ax) + (1-r)i^n q\tilde{e}|x|^{r}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\right)$$

та

$$\mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{odd})\,RP^D} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}\theta\dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi\cdot\dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)(\xi\cdot\dot{x})$$
$$-ri^n q|x|^{r-1}\xi^{\underline{m}[r-1]}F_{\underline{m}[r-1]\underline{n}}\dot{x}^{\underline{n}} + \tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\big((\xi\theta\dot{x}) + (1-r)i^n q\tilde{e}|x|^{r+1}\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\big),$$

$$\mathscr{L}_{(q,\, r\ \mathrm{even})\,RP^D} = \tfrac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}\theta\dot{x}) + \tfrac{i}{2}(\xi\cdot\dot{\xi}) - \tfrac{i}{|x|^2}(\xi\cdot x)(\xi\cdot\dot{x})$$
$$-ri^n q|x|^{r-2}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}[r-1]}F_{\underline{m}[r-1]\underline{n}}\dot{x}^{\underline{n}} + \tfrac{(-)^n q^2}{2}\tilde{e}|x|^{2r}(\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2$$
$$+\tfrac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\left((\xi\theta\dot{x}) + (1-r)i^n q\tilde{e}|x|^{r}(\xi\cdot x)\xi^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\right),$$

які в границі нульового заряду q зводяться до відповідних представлень лагранжіана вільної спінової частинки (4.113) та (4.114).

У квантовій теорії зіставимо ферміонним в'язям (4.141) та (4.142) такі ермітові оператори

$$\Phi_{(q,\, r\ \mathrm{odd})\mathrm{H}} = |x|(\gamma\cdot p) + \frac{i}{2|x|}(\gamma\cdot x) + \frac{i^n q}{2^{\frac{r-1}{2}}}|x|^r\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]} \approx 0, \tag{4.146}$$

$$\Phi_{(q,\,r\ \text{even})\text{H}} = |x|(\gamma\cdot p) + \frac{i}{2|x|}(\gamma\cdot x) + \frac{i^n q}{2^{\frac{r}{2}}}|x|^{r-1}(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]} \approx 0, \quad (4.147)$$

де антисиметризований добуток r γ-матриць визначається як

$$\gamma^{\underline{m}[r]} = \frac{1}{r!}\gamma^{[\underline{m}_1}\gamma^{\underline{m}_2}\dots\gamma^{\underline{m}_r]}.$$

Тоді з вимоги, аби квантова алгебра суперсиметрії на світовій лінії мала ту ж форму як і для вільної спінової частинки (4.118) визначаються ермітові оператори, які відповідають класичним в'язям (4.143) та (4.144)

$$\begin{aligned} T_{(q,\,r\ \text{odd})\text{H}} = {} & [|x|(\gamma\cdot p)]^2 + \tfrac{ri^n q}{2^{\frac{r-3}{2}}}|x|^{r+1}\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}p_{\underline{m}} \\ & + \tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}|x|^{r-1}\left((\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]} - |x|^2\gamma^{\underline{n}[r-1]}\partial^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\right) \\ & + \tfrac{(-)^n q^2}{2^{r-1}}|x|^{2r}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2 + i\mathfrak{D}_H - \tfrac{1}{4} \approx 0, \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} T_{(q,\,r\ \text{even})\text{H}} = {} & [|x|(\gamma\cdot p)]^2 + \tfrac{ri^n q}{2^{\frac{r}{2}-1}}|x|^{r}(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}p_{\underline{m}} \\ & + \tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}|x|^{r}\left(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]} + (\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{n}[r-1]}\partial^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\right) \\ & - \tfrac{(-)^n q^2}{2^{r}}|x|^{2r}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2 + i\left(1 + \tfrac{i^{n-1}q}{2^{\frac{r}{2}-1}}|x|^r\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\right)\mathfrak{D}_\text{H} - \tfrac{1}{4} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Для того аби здобути узагальнення рівнянь Дірака (4.121) та Клейна-Гордона (4.122) для хвильової функції вільної спінової частинки у конфігураційному просторі, необхідно повторити виведення, наведене в підпункті 4.5.1.2. Виходячи з виразів для квантових в'язей (4.146), (4.147), (4.148) та (4.149), здобуваємо такі рівняння

$$\Phi_{(q,\,r\ \text{odd})\text{H}}\Psi(x) = -i\mathscr{D}_x\Psi + \tfrac{i^n q}{2^{\frac{r-1}{2}}}|x|^r\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi = 0, \quad (4.150)$$

$$\Phi_{(q,\,r\ \text{even})\text{H}}\Psi(x) = -i\mathscr{D}_x\Psi + \tfrac{i^n q}{2^{\frac{r}{2}}}|x|^{r-1}(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi = 0 \quad (4.151)$$

й

$$\begin{aligned} T_{(q,\,r\ \text{odd})\text{H}}\Psi(x) = {} & -[|x|(\gamma\cdot\partial)]^2\Psi - \tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-3}{2}}}|x|^{r+1}\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}\partial_{\underline{m}}\Psi \\ & + \tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}|x|^{r-1}(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi - \tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}|x|^{r+1}\gamma^{\underline{n}[r-1]}\partial^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\Psi \\ & + \tfrac{(-)^n q^2}{2^{r-1}}|x|^{2r}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2\Psi - \tfrac{D^2}{4}\Psi = 0, \end{aligned} \quad (4.152)$$

$$T_{(q,\,r\;\mathrm{even})\mathrm{H}}\Psi(x)=-[|x|(\gamma\cdot\partial)]^2\Psi-\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}-1}}|x|^r(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}\partial_{\underline{m}}\Psi$$
$$+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}|x|^r\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}|x|^r(\gamma\cdot x)\gamma^{\underline{n}[r-1]}\partial^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\Psi \qquad (4.153)$$
$$-\tfrac{(-)^n q^2}{2^r}|x|^{2r}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2\Psi-\tfrac{D^2}{4}\Psi=0.$$

Нагадаємо, що оператор Дірака за відсутності взаємодії $\mathscr{D}_x$ було введено в (4.121), а хвильова функція $\Psi(x)$ має степінь однорідності нуль за $x^{\underline{m}}$, оскільки $\mathfrak{D}_{\mathrm{H}}\Psi(x)=0$.

Здобуті рівняння можна переписати у неоднорідних координатах. Диференційна r-форма напруженості перетворюється наступним чином

$$|x|^r F_{\underline{m}[r]}(x)=F_{\underline{m}[r]}(y),\quad F_{\underline{m}[r]}(y)=(\partial_{[\underline{m}_1}+(r-1)y_{[\underline{m}_1})A_{\underline{m}_2\cdots\underline{m}_r]}. \qquad (4.154)$$

Співвідношення (4.154) узагальнюють (4.133) та (4.134) для електромагнітного поля. Відтак рівняння (4.150) та (4.151) у неоднорідних координатах набувають вигляду

$$\Phi_{(q,\,r\;\mathrm{odd})\mathrm{H}}\Psi(y)=-i\mathscr{D}_y\Psi+\tfrac{i^n q}{2^{\frac{r-1}{2}}}\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi=0,$$
$$\Phi_{(q,\,r\;\mathrm{even})\mathrm{H}}\Psi(y)=-i\mathscr{D}_y\Psi+\tfrac{i^n q}{2^{\frac{r}{2}}}(\gamma\cdot y)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi=0,$$

де $\mathscr{D}_y=(\gamma\cdot\nabla)+\frac{D}{2}(\gamma\cdot y)$ – оператор Дірака у неоднорідних координатах за відсутності взаємодії. Відповідно рівняння типу Клейна-Гордона (4.152) та (4.153) у неоднорідних координатах записуються як

$$T_{(q,\,r\;\mathrm{odd})\mathrm{H}}\Psi(y)=-\left[(\gamma\cdot\nabla)\right]^2\Psi-\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-3}{2}}}\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}\nabla_{\underline{m}}\Psi$$
$$+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}(\gamma\cdot y)\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}\Psi-\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}\gamma^{\underline{n}[r-1]}\nabla^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\Psi$$
$$+\tfrac{(-)^n q^2}{2^{r-1}}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2\Psi-\tfrac{D^2}{4}\Psi=0,$$

$$T_{(q,\,r\;\mathrm{even})\mathrm{H}}\Psi(y)=-[(\gamma\cdot\nabla)]^2\Psi-\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}-1}}(\gamma\cdot y)\gamma^{\underline{n}[r-1]}F_{\underline{n}[r-1]}{}^{\underline{m}}\nabla_{\underline{m}}\Psi$$
$$+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]}+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}(\gamma\cdot y)\gamma^{\underline{n}[r-1]}\partial^{\underline{m}}F_{\underline{mn}[r-1]}\Psi$$
$$-\tfrac{(-)^n q^2}{2^r}(\gamma^{\underline{m}[r]}F_{\underline{m}[r]})^2\Psi-\tfrac{D^2}{4}\Psi=0.$$

З використанням формул переходу (4.135)-(4.137) здобуті вище рівняння для хвильової функції спінової частинки можна виразити через внутрішні координати простору AdS_D

$$
\begin{aligned}
iM^{-1}(\gamma\cdot y)\Phi_{(q,\,r\ \mathrm{odd})\mathrm{H}}M\psi(z) &= \rho^{m'}D_{m'}\psi+\tfrac{i^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}\rho^{m'[r]}F_{m'[r]}\psi=0,\\
iM^{-1}(\gamma\cdot y)\Phi_{(q,\,r\ \mathrm{even})\mathrm{H}}M\psi(z) &= \rho^{m'}D_{m'}\psi+\tfrac{i^{n-1}q}{2^{\frac{r}{2}}}\rho^{m'[r]}F_{m'[r]}\psi=0
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
-M^{-1}T_{(q,\,r\ \mathrm{odd})\mathrm{H}}M\psi(z) &= D^{m'}D_{m'}\psi+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-3}{2}}}\rho^{m'[r-1]}F_{m'[r-1]}{}^{n'}D_{n'}\psi\\
+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r-1}{2}}}\rho^{m'[r-1]}D^{n'}F_{n'm'[r-1]}\psi &- \tfrac{(-)^n q^2}{2^{r-1}}(\rho^{m'[r]}F_{m'[r]})^2\psi+\tfrac{D(D-1)}{4}\psi=0,\\
-M^{-1}T_{(q,\,r\ \mathrm{even})\mathrm{H}}M\psi(z) &= D^{m'}D_{m'}\psi+\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}-1}}\rho^{m'[r-1]}F_{m'[r-1]}{}^{n'}D_{n'}\psi\\
-\tfrac{ri^{n+1}q}{2^{\frac{r}{2}}}\rho^{m'[r-1]}D^{n'}F_{n'm'[r-1]}\psi &+ \tfrac{(-)^n q^2}{2^{r}}(\rho^{m'[r]}F_{m'[r]})^2\psi+\tfrac{D(D-1)}{4}\psi=0.
\end{aligned}
$$

Відзначимо, що означення коваріантної похідної для спінорного поля співпадає з виразом (4.140), в який дає внесок лише спінова зв'язність, а співвідношення між $r-$формою напруженості у неоднорідних координатах обхопного простору та у внутрішніх координатах має вигляд

$$
F_{\underline{m}[r]}(y)=\partial^{m'_1}y_{\underline{m}_1}\ldots\partial^{m'_r}y_{\underline{m}_r}F_{m'[r]}(z),\quad F_{m'[r]}(z)=\partial_{[m'_1}A_{m'_2\ldots m'_r]}(z).
$$

Модель безмасової спінової частинки у просторі AdS_D, яка взаємодії із зовнішніми абелевими антисиметричними калібрувальними полями, виноситься на захист.

Відзначимо, що хоча ми розглядали окремо взаємодію спінової частинки з електромагнітним полем та з абелевими антисиметричними калібрувальними полями, аналогічним чином можна розглянути одночасну її взаємодію з електромагнітним полем та з набором антисиметричних тензорних полів. Можна також розглянути взаємодію з полями змішаної симетрії, які мають парну кількість індексів у кожному наборі антисиметризованих індексів.

При переході від хвильової функції частинки в обхопному просторі до хвильової функції, яка залежить від внутрішніх координат, за замовчуванням передбачалось, що спінорні представлення $Spin(2, D-1)$ та $Spin(1, D-1)$ мають однакову розмірність, що справедливо для парного D. Відтак одним з можливих узагальнень є розгляд випадку непарного D, що вимагає введення додаткових (грассманово-непарних) змінних та в'язей аби накласти умову кіральності на спінорну хвильову функцію у $D+1$ розмірностях.

4.5.2 Модель безнатягової спінової струни в AdS_D

У цьому пункті буде узагальнено модель безмасової спінової частинки у просторі AdS_D на випадок безнатягової спінової струни. Для визначеності розглядається замкнена струна, відтак просторово-подібна листкова координата σ змінюється у діапазоні від 0 до 2π, та спочатку буде побудовано реалізацію алгебри листкової суперсиметрії в'язями у фазовому просторі.

4.5.2.1 Класичне формулювання

Для побудови моделі безнатягової спінової струни будемо використовувати наступне узагальнення введених у моделі спінової частинки співвідношень на дужках Пуассона (4.108)

$$\begin{aligned} \{P_{\underline{m}}(\sigma), X^{\underline{n}}(\sigma')\}_{P.B.} &= \delta_{\underline{m}}^{\underline{n}} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\Xi^{\underline{m}}(\sigma), \Xi^{\underline{n}}(\sigma')\}_{D.B.} &= i\eta^{\underline{mn}} \delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \tag{4.155}$$

де $X^{\underline{m}}(\sigma)$ – координатні поля струни в обхопному просторі, а $P_{\underline{m}}(\sigma)$ – густина спряженого імпульсу. Вектор $\Xi^{\underline{m}}(\sigma)$ з грассманово-непарними компонентами описує локальні спінові ступені свободи. Оскільки безнатягова струна є протяжним об'єктом, на її допустимі листкові симетрії накладаються істотні обмеження. З урахуванням цього розглянемо наступний набір квадратичних в'язей

$$\Phi(\sigma) = (\Xi \cdot P) \approx 0 \tag{4.156}$$

та

$$-L(\sigma) = (P\cdot\partial_\sigma X) + \tfrac{i}{2}(\Xi\cdot\partial_\sigma\Xi) \approx 0, \quad T(\sigma) = P^2 \approx 0,$$
$$\mathfrak{D}(\sigma) = (X\cdot P) \approx 0, \tag{4.157}$$

який узагальнює в'язі (4.107), (4.109) та (4.110) моделі вільної безмасової спінової частинки та додатково включає генератор σ-репараметризацій $L(\sigma)$. Відмінні від нуля співвідношення класичної алгебри цих в'язей наведено нижче

$$\begin{aligned}
\{\Phi(\sigma),\Phi(\sigma')\}_{D.B.} &= iT(\sigma)\delta(\sigma-\sigma');\\
\{\Phi(\sigma),\mathfrak{D}(\sigma')\}_{P.B.} &= \Phi(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\Phi(\sigma),L(\sigma')\}_{P.B.} &= \tfrac{3}{2}\Phi(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') + \partial_\sigma\Phi(\sigma)\delta(\sigma-\sigma');\\
\{T(\sigma),\mathfrak{D}(\sigma')\}_{P.B.} &= 2T(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{T(\sigma),L(\sigma')\}_{P.B.} &= 2T(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') + \partial_\sigma T(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{\mathfrak{D}(\sigma),L(\sigma')\}_{P.B.} &= \mathfrak{D}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') + \partial_\sigma\mathfrak{D}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma'),\\
\{L(\sigma),L(\sigma')\}_{P.B.} &= 2L(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') + \partial_\sigma L(\sigma)\delta(\sigma-\sigma').
\end{aligned} \tag{4.158}$$

З цих співвідношень випливає, що в'язі $L(\sigma)\approx 0$, $T(\sigma)\approx 0$ та $\Phi(\sigma)\approx 0$ представляють густини генераторів Вірасоро та листкової суперсиметрії, а в'язь $\mathfrak{D}(\sigma)\approx 0$ є густиною генератора дилатацій координат обхопного простору.

Різні представлення лагранжіана безнатягової спінової струни. Після означення в'язей можемо записати лагранжіан та функціонал дії безнатягової спінової струни у змінних фазового простору

$$S = \int\limits_\Sigma d\tau d\sigma \mathcal{L}_{\mathrm{ph}}(\tau,\sigma),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{ph}}(\tau,\sigma) = (P\cdot\partial_\tau X) + \tfrac{i}{2}(\Xi\cdot\partial_\tau\Xi) - \tfrac{e}{2}T - vL + a\mathfrak{D} + i\chi\Phi, \tag{4.159}$$

де $a(\tau,\sigma)$, $e(\tau,\sigma)$ і $v(\tau,\sigma)$ є парними множниками Лагранжа для бозонних в'язей, а $\chi(\tau,\sigma)$ є непарним множником Лагранжа для ферміонної в'язі $\Phi(\sigma)\approx 0$. Рівняння для густини імпульсу $P^{\underline{m}}(\tau,\sigma)$ є алгебраїчним

$$eP^{\underline{m}} = \dot{X}^{\underline{m}} + v\acute{X}^{\underline{m}} + aX^{\underline{m}} + i\chi\Xi^{\underline{m}}.$$

Підстановка його розв'язку до (4.159) приводить до лагранжіана у конфігураційному просторі

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm conf} = {} & \tfrac{1}{2e}(\partial_\tau X^{\underline{m}} + v\partial_\sigma X^{\underline{m}} + aX^{\underline{m}})^2 + \tfrac{i}{2}(\Xi\cdot\partial_\tau\Xi) + \tfrac{iv}{2}(\Xi\cdot\partial_\sigma\Xi)\\ & + \tfrac{i\chi}{e}\,\Xi_{\underline{m}}(\partial_\tau X^{\underline{m}} + v\partial_\sigma X^{\underline{m}} + aX^{\underline{m}}).\end{aligned}$$

Його можна записати у формі з явною $D=1+1$ коваріантністю

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2d\,\rm cov} = {} & \tfrac{1}{2}\left(\rho^\mu\partial_\mu X^{\underline{m}} + \tfrac{a}{e^{1/2}}X^{\underline{m}}\right)^2 + \tfrac{ie^{1/2}}{2}(\Xi\cdot\rho^\mu\partial_\mu\Xi)\\ & + \tfrac{i\chi}{e^{1/2}}\Xi_{\underline{m}}\left(\rho^\mu\partial_\mu X^{\underline{m}} + \tfrac{a}{e^{1/2}}X^{\underline{m}}\right),\end{aligned}\tag{4.160}$$

якщо ввести векторну густину $\rho^\mu = e^{-1/2}(1,v)$, $\mu=(\tau,\sigma)$. Множник Лагранжа $e(\tau,\sigma)$ можна повністю виключити з (4.160) переозначенням вектора $\Xi^{\underline{m}}$ та множників Лагранжа a і χ

$$\Xi^{\underline{m}} \to \widetilde{\Xi}^{\underline{m}} = e^{1/4}\Xi^{\underline{m}}, \quad a\to\tilde{a} = e^{-1/2}a, \quad \chi\to\tilde{\chi} = e^{-3/4}\chi.$$

Оскільки рівняння для множника Лагранжа a є алгебраїчним, підстановка його розв'язку назад у (4.160) приводить до іншого представлення лагранжіана

$$\mathcal{L}_{RP^D} = \tfrac{1}{2}\rho^\mu\rho^\nu(\partial_\mu X\theta\partial_\nu X) + \tfrac{i}{2}(\Xi\cdot\rho^\mu\partial_\mu\Xi) + i\chi(\Xi\,\theta\rho^\mu\partial_\mu X),\tag{4.161}$$

яке відповідає реалізації AdS_D простору як проєктивного багатовиду. З представлення (4.161) випливає, що запропонована у нашій роботі [290] модель безнатягової спінової струни узагальнює моделі безнатягових конформних спінових струн з роботи [365] (див. також [366]). Наведемо ще два представлення для лагранжіана (4.161)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{RP^D} &= \tfrac{1}{2}(\theta^{\underline{mn}}\rho^\mu\partial_\mu X_{\underline{n}} + i\chi\Xi^{\underline{m}})^2 + \tfrac{i}{2}(\Xi\cdot\rho^\mu\partial_\mu\Xi)\\ &= \tfrac{1}{2}\rho^\mu\rho^\nu g_{\mu\nu} + \rho^\mu\zeta_\mu,\end{aligned}\tag{4.162}$$

де $g_{\mu\nu} = (\partial_\mu X\theta\partial_\nu X)$ – індукована листкова метрика та $\zeta_\mu = \frac{i}{2}(\Xi \cdot \partial_\mu \Xi) + i\chi(\Xi\,\theta\partial_\mu X)$. Із рівнянь для ρ^μ

$$g_{\mu\nu}\rho^\nu + \zeta_\nu = 0 \qquad (4.163)$$

випливає, що листкова індукована метрика є невиродженою подібно до моделі безнатягової спінової струни у просторі Мінковського [367]. Тому рівняння (4.163) має єдиний розв'язок $\rho^\mu = -g^{-1\,\mu\nu}\zeta_\nu$, підстановка якого у (4.162) приводить до неполіноміальної форми лагранжіана безнатягової спінової струни

$$\mathcal{L}'_{RP^D} = \frac{1}{2g}\zeta_\mu\varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}\varepsilon^{\lambda\rho}\zeta_\rho, \quad g = \det g_{\mu\nu}.$$

Відзначимо, що невиродженість індукованої метрики відрізняє безнатягову спінову струну від моделі безнатягової (супер)струни [368] з лагранжіаном

$$\mathcal{L}_{\rm bosnull} = \rho^\mu\rho^\nu g_{\mu\nu}, \qquad (4.164)$$

оскільки рівняння для ρ^μ

$$g_{\mu\nu}\rho^\nu = 0, \qquad (4.165)$$

яке з нього випливає, означає обернення на нуль детермінанта індукованої метрики $g = 0$. Розв'язування рівняння (4.165) за припущення, що $g_{\sigma\sigma} \neq 0$ та $\rho^\tau \neq 0$, й підстановка розв'язку до лагранжіана (4.164) приводять його до форми

$$\mathcal{L}'_{\rm bosnull} = \frac{g}{E}, \quad E = \frac{g_{\sigma\sigma}}{(\rho^\tau)^2},$$

яка є прямим узагальненням лагранжіана безмасової частинки. Таке представлення для лагранжіана бозонної нуль-струни в пласкому просторі-часі було запропоноване в роботах [96], [92]. В роботі [92] також було розглянуто його узагальнення на випадок безнатягової суперструни.

Представлена у цьому підпункті модель безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера виноситься на захист.

Рівняння руху та калібрувальні умови. Найпростішу форму мають рівняння руху безнатягової спінової струни виведені із лагранжіана (4.159), представленого у змінних фазового простору

$$\dot{X}^{\underline{m}} + v\acute{X}^{\underline{m}} + aX^{\underline{m}} + i\chi\Xi^{\underline{m}} = eP^{\underline{m}},$$

$$\dot{P}^{\underline{m}} + (vP^{\underline{m}})' = aP^{\underline{m}},$$

$$\dot{\Xi}^{\underline{m}} + v\acute{\Xi}^{\underline{m}} + \tfrac{1}{2}\acute{v}\Xi^{\underline{m}} = \chi P^{\underline{m}},$$

де штрих над змінною або збоку позначають похідну за σ.

Наведені вище рівняння можна ще спростити, враховуючи калібрувальні симетрії дії (4.159), які генеруються в'язями першого роду (4.156) та (4.157). Перелік калібрувальних симетрій включає локальну листкову суперсиметрію з грассманово-непарним параметром $\varepsilon(\tau, \sigma)$, генератором якої є ферміонна в'язь (4.156)

$$\delta_\varepsilon X^{\underline{m}} = -\varepsilon\Xi^{\underline{m}}, \quad \delta_\varepsilon\Xi^{\underline{m}} = -i\varepsilon P^{\underline{m}},$$

$$\delta_\varepsilon e = -2\varepsilon\chi, \quad \delta_\varepsilon\chi = -i\left(\dot{\varepsilon} + v\acute{\varepsilon} + a\varepsilon - \tfrac{1}{2}\acute{v}\varepsilon\right).$$

Також наявні три бозонні калібрувальні симетрії. В'язь $\mathfrak{D}(\sigma) \approx 0$ генерує локальні дилатації

$$\delta_\Delta X^{\underline{m}} = \Delta X^{\underline{m}}, \quad \delta_\Delta P^{\underline{m}} = -\Delta P^{\underline{m}},$$

$$\delta_\Delta a = -\dot{\Delta} - v\acute{\Delta}, \quad \delta_\Delta e = 2\Delta e, \quad \delta_\Delta\chi = \Delta\chi.$$

В'язі $T(\sigma) \approx 0$ та $L(\sigma) \approx 0$ є генераторами часоподібних та просторовоподібних листкових репараметризацій з параметрами $\mu(\tau, \sigma)$ і $\lambda(\tau, \sigma)$

$$\delta_\mu X^{\underline{m}} = -2\mu P^{\underline{m}}, \quad \delta_\mu e = -2(\dot{\mu} + v\acute{\mu} + 2a\mu - \acute{v}\mu)$$

й

$$\delta_\lambda X^{\underline{m}} = \lambda\acute{X}^{\underline{m}}, \quad \delta_\lambda P^{\underline{m}} = (\lambda P^{\underline{m}})', \quad \delta_\lambda\Xi^{\underline{m}} = \lambda\acute{\Xi}^{\underline{m}} + \tfrac{1}{2}\acute{\lambda}\Xi^{\underline{m}},$$

$$\delta_\lambda a = \lambda\acute{a}, \quad \delta_\lambda e = \lambda\acute{e} - \acute{\lambda}e, \quad \delta_\lambda v = -\dot{\lambda} - \acute{\lambda}v + \lambda\acute{v}, \quad \delta_\lambda\chi = \lambda\acute{\chi} - \tfrac{1}{2}\acute{\lambda}\chi.$$

Аналіз рівнянь руху та калібрувальних умов для локальних симетрій, проведений у нашій роботі [290], показує, що змінні фазового простору можна вибрати таким чином, аби вони лінійно залежали від параметра еволюції τ, а в'язі (4.156), (4.157) можна виразити через початкові дані змінних фазового простору $X_0^{\underline{m}}(\sigma)$, $P_0^{\underline{m}}(\sigma)$ та $\Xi_0^{\underline{m}}(\sigma)$

$$-L_0(\sigma) = (P_0 \cdot X_0') + \tfrac{i}{2}(\Xi_0 \cdot \Xi_0') \approx 0; \tag{4.166}$$

$$\mathfrak{D}_0(\sigma) = (X_0 \cdot P_0) \approx 0, \tag{4.167}$$

$$T_0(\sigma) = P_0^2 \approx 0, \tag{4.168}$$

$$\Phi_0(\sigma) = (P_0 \cdot \Xi_0) \approx 0. \tag{4.169}$$

Це пояснюється тим, що еволюція динамічної системи з в'язями відбувається на поверхні, яка визначається їх початковими даними [369], [87].

Відзначимо, що рівняння руху безнатягової спінової струни, які випливають із дії з лагранжіаном другого порядку (4.161), можна записати у формі рівняння Лакса подібно до моделі спінової частинки (4.115), (4.116). У калібруванні $\rho^\tau = 1$, $\rho^\sigma = \chi = 0$ воно має вигляд

$$\frac{d}{d\tau}\mathbb{L}_\tau - \mathbb{M}_\tau \mathbb{L}_\tau = 0: \quad \mathbb{L}_\tau^{\underline{m}} = \frac{1}{|X|}(\theta \dot{X})^{\underline{m}}, \quad \mathbb{M}_\tau^{\underline{mn}} = \frac{1}{|X|^2}(X^{\underline{m}}\dot{X}^{\underline{n}} - \dot{X}^{\underline{m}}X^{\underline{n}}).$$

Розклад Фур'є змінних фазового простору та в'язей. Початкові дані для змінних фазового простору замкненої безнатягової спінової струни є $\sigma-$періодичними та допускають розклад Фур'є[56]

$$\begin{gathered} P_0^{\underline{m}}(\sigma) = \tfrac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \mathrm{e}^{im\sigma} p_m^{\underline{m}}, \quad X_0^{\underline{m}}(\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \mathrm{e}^{im\sigma} x_m^{\underline{m}}, \\ \Xi_0^{\underline{m}}(\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}+\nu} \mathrm{e}^{im\sigma} \xi_m^{\underline{m}}. \end{gathered} \tag{4.170}$$

Введення параметра ν в розклад Фур'є для грассманово-непарних компонентів вектора $\Xi_0^{\underline{m}}$ дозволяє одноманітно розглядати як періодичні межові

[56] Якщо не вказано явно, усі індекси підсумовування у розкладах Фур'є пробігають цілі значення від мінус до плюс нескінченності.

умови ($\nu = 0$, сектор Рамона), так і антиперіодичні ($\nu = 1/2$, сектор Нев'є-Шварца). З використанням розкладів (4.170) можна виразити моди Фур'є в'язей через моди змінних фазового простору. Для густини генератора Вірасоро (4.166) будемо використовувати таке означення розкладу Фур'є

$$L_0(\sigma) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_m \mathrm{e}^{im\sigma} L_m^{\mathrm{m}}, \quad L_m^{\mathrm{m}} = L_m^{\mathrm{bos}} + L_m^{\mathrm{ferm}}. \tag{4.171}$$

Верхній індекс m вказує, що L_m^{m} представляють моди Фур'є частини повного генератора Вірасоро, яка визначається бозонними та ферміонними полями матерії

$$L_m^{\mathrm{bos}} = \sum_n n(p_{m-n} \cdot x_n), \quad L_m^{\mathrm{ferm}} = \tfrac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}+\nu} (2n - m)(\xi_{m-n} \cdot \xi_n). \tag{4.172}$$

Інша частина залежить від полів духів та буде визначена нижче. Подібним чином для густин в'язей (4.167) та (4.168) розклади Фур'є можна записати у такому вигляді

$$\mathfrak{D}_0(\sigma) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_m \mathrm{e}^{im\sigma} \mathfrak{D}_m^{\mathrm{m}}, \quad \mathfrak{D}_m^{\mathrm{m}} = i \sum_n (p_{m-n} \cdot x_n) \tag{4.173}$$

і

$$T_0(\sigma) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_m \mathrm{e}^{im\sigma} T_m^{\mathrm{m}}, \quad T_m^{\mathrm{m}} = -\sum_n (p_{m-n} \cdot p_n).$$

Нарешті для густини листкового генератора суперсиметрії (4.169) маємо

$$\Phi_0(\sigma) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}+\nu} \mathrm{e}^{im\sigma} \Phi_m^{\mathrm{m}}, \quad \Phi_m^{\mathrm{m}} = i \sum_{n \in \mathbb{Z}+\nu} (p_{m-n} \cdot \xi_n).$$

4.5.2.2 Квантування

Класичні співвідношення на дужках Пуассона (4.155) у квантовій теорії переходять в (анти)комутатори операторів

$$[P_{0\,\underline{m}}(\sigma), X_0^{\underline{n}}(\sigma')] = -i\delta_{\underline{m}}^{\underline{n}} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{\Xi_0^{\underline{m}}(\sigma), \Xi_0^{\underline{n}}(\sigma')\} = \eta^{\underline{mn}} \delta(\sigma - \sigma').$$

Для мод Фур'є операторів (4.170) вони дорівнюють

$$[p_{\underline{m}m}, x_n^{\underline{n}}] = -\delta_{\underline{m}}^{\underline{n}} \delta_{m,-n}, \quad \{\xi_m^{\underline{m}}, \xi_n^{\underline{n}}\} = \eta^{\underline{mn}} \delta_{m,-n}.$$

Оскільки оператори $P_{0\underline{m}}(\sigma)$, $X_0^{\underline{m}}(\sigma)$ та $\Xi_0^{\underline{m}}(\sigma)$ вважаються ермітовими, їх моди задовольняють наступні умови спряження

$$(p_m^{\underline{m}})^\dagger = -p_{-m}^{\underline{m}}, \quad (x_m^{\underline{m}})^\dagger = x_{-m}^{\underline{m}}, \quad (\xi_m^{\underline{m}})^\dagger = \xi_{-m}^{\underline{m}}.$$

Як добре відомо, класичні симетрії моделей струн можуть ставати аномальними у квантовій теорії залежно від вибору вакуумного стану та впорядкування операторів. Відтак у правих частинах співвідношень на дужках Пуассона та Дірака класичних в'язей (4.158) на квантовому рівні можуть з'являтись аномальні члени. Розглянемо два вакуумні стани, які зазвичай використовуються при квантуванні безнатягових струн. Один із них анігілюється оператором імпульсу та відповідає координатно-імпульсному або xp-впорядкуванню [99], [102], [370], а інший анігілюється додатно-частотними модами операторів координат та компонентів імпульсу й відповідає розташуванню додатно-частотних мод праворуч від від'ємно-частотних тобто $(-+)$-впорядкуванню [371]. Кожному вакуумному стану для бозонних змінних відповідають певні вакуумні стани для ферміонів та духів. Аналіз, проведений у нашій роботі [290], показав, що аномальні члени можуть виникнути у трьох комутаторах мод Фур'є в'язей (4.172) та (4.173)

$$[L_m^{\mathrm{m}}, L_{-m}^{\mathrm{m}}], \quad [\mathfrak{D}_m^{\mathrm{m}}, \mathfrak{D}_{-m}^{\mathrm{m}}], \quad [\mathfrak{D}_{\pm m}^{\mathrm{m}}, L_{\mp m}^{\mathrm{m}}]. \tag{4.174}$$

Далі ці комутатори буде обчислено з використанням виразів для мод Фур'є в'язей, в яких явно виписані внески додатних та від'ємних мод операторів змінних фазового простору.

Квантова алгебра в'язей. Розглянемо спершу внески бозонних полів матерії до генератора Вірасоро. В термінах додатних та від'ємних мод цих полів моди Фур'є генератора Вірасоро (4.172) можна записати у формі

$$
\begin{aligned}
L^{\rm bos}_{m>0} &= \sum_{n=1}^{m} n(x_n \cdot p_{m-n}) + \sum_{n=1}^{\infty}(m+n)(x_{m+n}\cdot p_{-n}) \\
&\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} n(x_{-n}\cdot p_{m+n}), \\
L^{\rm bos}_{-m} &= -\sum_{n=1}^{m} n(x_{-n}\cdot p_{-(m-n)}) - \sum_{n=1}^{\infty}(m+n)(x_{-(m+n)}\cdot p_n) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} n(x_n \cdot p_{-(m+n)}).
\end{aligned}
\tag{4.175}
$$

Ці оператори є ермітово-спряженими $(L^{\rm bos}_m)^\dagger = L^{\rm bos}_{-m}$ та вільними від невизначеностей, пов'язаних з упорядкуванням, на відміну від оператора нульової моди $L^{\rm bos}_0$, ермітове представлення якого визначається з точністю до дійсної константи із першого комутатора в (4.174). Аномальний внесок у цей комутатор виникає лише для $(-+)$-упорядкування при комутуванні скінченних сум в (4.175)

$$
[L^{\rm bos}_m, L^{\rm bos}_{-m}]|_{(-+)\text{-ordering}} = \tfrac{(D+1)}{6}\, m^3 + 2mL^{\rm bos}_{0(-+)}.
$$

Ермітів оператор $L^{\rm bos}_{0(-+)}$ визначається наступним виразом

$$
L^{\rm bos}_{0(-+)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left((p_{-n}\cdot x_n) - (x_{-n}\cdot p_n)\right) - \tfrac{(D+1)}{12}, \tag{4.176}
$$

в якому константа $-\frac{(D+1)}{12}$ узгоджується з прийнятим в теорії струн значенням для $2(D+1)$ періодичних бозонів (див., наприклад, монографію [274]). Натомість для xp-упорядкування цей комутатор має ту ж форму, що й у класичній теорії

$$
[L^{\rm bos}_m, L^{\rm bos}_{-m}]|_{xp\text{-ordering}} = 2mL^{\rm bos}_{0\,xp},
$$

де

$$
L^{\rm bos}_{0\,xp} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left((x_n\cdot p_{-n}) - (x_{-n}\cdot p_n)\right). \tag{4.177}
$$

Аналогічно можуть бути обчислені два інші комутатори в (4.174). Явно записуючи внески додатних та від'ємних мод полів матерії в оператор $\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{m}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{m>0}&=i\Bigg(\sum_{n=0}^{m}(x_n\cdot p_{m-n})+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{m+n}\cdot p_{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{-n}\cdot p_{m+n})\Bigg),\\ \mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{-m}&=i\Bigg(\sum_{n=0}^{m}(x_{-n}\cdot p_{-(m-n)})+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{-(m+n)}\cdot p_{n})+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n}\cdot p_{-(m+n)})\Bigg),\end{aligned}\tag{4.178}$$

здобуваємо вираз для другого комутатора в (4.174) для $(-+)$-впорядкування

$$[\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{m},\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{-m}]|_{(-+)\text{-ordering}}=(D+1)m.$$

Для xp-впорядкування не виникає аномального члена й комутатор обертається на нуль.

Третій комутатор в (4.174) також набуває аномального внеску для $(-+)$-впорядкування

$$[\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{m},L^{\mathrm{bos}}_{-m}]|_{(-+)\text{-ordering}}=\tfrac{i(D+1)}{2}m^2+m\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{0\,(-+)},$$

а ермітів оператор, який відповідає нульовій моді генератора дилатацій, визначається з точністю до константи

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{0\,(-+)}=i\Bigg((x_0\cdot p_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left((x_{-n}\cdot p_n)+(p_{-n}\cdot x_n)\right)-\tfrac{(D+1)}{2}\Bigg).\tag{4.179}$$

Для xp-впорядкування не виникає аномалії

$$[\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{m},L^{\mathrm{bos}}_{-m}]|_{xp\text{-ordering}}=m\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{0\,xp}$$

і оператор нульової моди означений однозначно

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{m}}_{0\,xp}=i\Bigg((x_0\cdot p_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left((x_{-n}\cdot p_n)+(x_{n}\cdot p_{-n})\right)\Bigg).\tag{4.180}$$

Також необхідно обчислити внесок до аномалії у першому комутаторі в (4.174), який визначається модами ферміонних полів у (4.172). У секторі Рамона додатно- та від'ємно-частотні моди генератора Вірасоро мають наступні вирази в термінах цілочислових додатних та від'ємних ферміонних мод

$$\begin{aligned}L^{\mathrm{ferm\,R}}_{m>0}&=\tfrac14\sum_{n=0}^{m}(2n-m)(\xi_{m-n}\cdot\xi_n)-\tfrac12\sum_{n=1}^{\infty}(m+2n)(\xi_{m+n}\cdot\xi_{-n}),\\ L^{\mathrm{ferm\,R}}_{-m}&=\tfrac14\sum_{n=0}^{m}(m-2n)(\xi_{-(m-n)}\cdot\xi_{-n})+\tfrac12\sum_{n=1}^{\infty}(m+2n)(\xi_{-(m+n)}\cdot\xi_{n}).\end{aligned}\tag{4.181}$$

Їх комутатор є аномальним для $(-+)-$впорядкування

$$[L_m^{\text{ferm R}}, L_{-m}^{\text{ferm R}}]|_{(-+)\text{-ordering}} = \tfrac{(D+1)}{24} m^3 + 2m L_{0(-+)}^{\text{ferm R}}.$$

Ермітів оператор нульової моди

$$L_{0(-+)}^{\text{ferm R}} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\xi_{-n}\cdot\xi_n) + \tfrac{(D+1)}{24} \tag{4.182}$$

визначається із цього комутатора з точністю до числової константи, значення якої $\frac{(D+1)}{24}$ було вибрано у відповідності з прийнятим для $(D+1)$ періодичних ферміонів [274]. Якщо ж вибрано вейлівське впорядкування для ξ-мод в $L_0^{\text{ferm R}}$, то комутатор має те саме значення, що й у класичній теорії

$$[L_m^{\text{ferm R}}, L_{-m}^{\text{ferm R}}]|_{\text{Weyl-ordering}} = 2m L_{0\,W}^{\text{ferm R}},$$

$$L_{0\,W}^{\text{ferm R}} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left((\xi_{-n}\cdot\xi_n) - (\xi_n\cdot\xi_{-n})\right). \tag{4.183}$$

Ті ж значення для даного комутатора здобуваємо також і для антиперіодичних ферміонів із сектора Нев'є-Шварца. У цьому секторі ненульові моди Фур'є генератора Вірасоро виражаються через півцілі ξ-моди

$$\begin{aligned} L_{m>0}^{\text{ferm NS}} &= \tfrac{1}{4}\sum_{r=1/2}^{m-1/2}(2r-m)(\xi_{m-r}\cdot\xi_r) - \tfrac{1}{2}\sum_{r=1/2}^{\infty}(m+2r)(\xi_{m+r}\cdot\xi_{-r}), \\ L_{-m}^{\text{ferm NS}} &= \tfrac{1}{4}\sum_{r=1/2}^{m-1/2}(m-2r)(\xi_{-(m-r)}\cdot\xi_{-r}) + \tfrac{1}{2}\sum_{r=1/2}^{\infty}(m+2r)(\xi_{-(m+r)}\cdot\xi_r). \end{aligned} \tag{4.184}$$

Ермітів оператор нульової моди для $(-+)-$впорядкування визначається виразом

$$L_{0(-+)}^{\text{ferm NS}} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r(\xi_{-r}\cdot\xi_r) - \tfrac{(D+1)}{48} \tag{4.185}$$

з $c-$числовим членом, який враховує внесок $-\frac{1}{48}$ для кожного з антиперіодичних ферміонів. Для вейлівського впорядкування оператор нульової моди має вигляд

$$L_{0\,W}^{\text{ferm NS}} = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1/2}^{\infty} r\left((\xi_{-r}\cdot\xi_r) - (\xi_r\cdot\xi_{-r})\right). \tag{4.186}$$

Отже в секторі полів матерії квантової алгебри в'язей не виникає аномалій для $xp-$упорядкування для мод операторів координат та імпульсів, а також вейлівського упорядкування для ферміонів. Натомість для $(-+)-$упорядкування аномальні внески мають ті ж значення, як і у відповідних двовимірних конформних теоріях поля [274]. Обчислення повних значень аномалій та вивчення можливості їх скорочення потребують урахування внесків духів. Для цього необхідно провести процедуру БРСТ квантування, до опису якої ми переходимо.

БРСТ оператор. Зіставимо кожній із в'язей (4.166), (4.167), (4.168) та (4.169) канонічно-спряжену пару духового та антидухового полів, які разом утворюють тріади

$$(L_0(\sigma), c^L(\sigma), b^L(\sigma)), \quad (T_0(\sigma), c^T(\sigma), b^T(\sigma)), \quad (\mathfrak{D}_0(\sigma), c^{\mathfrak{D}}(\sigma), b^{\mathfrak{D}}(\sigma)),$$
$$(\Phi_0(\sigma), \gamma(\sigma), \beta(\sigma)).$$

За означенням співвідношення на дужках Пуассона для полів духів мають вигляд

$$\{c^L(\sigma), b^L(\sigma')\}_{P.B.} = \{c^T(\sigma), b^T(\sigma')\}_{P.B.} = \{c^{\mathfrak{D}}(\sigma), b^{\mathfrak{D}}(\sigma')\}_{P.B.} = i\delta(\sigma - \sigma');$$
$$\{\gamma(\sigma), \beta(\sigma')\}_{P.B.} = -\delta(\sigma - \sigma').$$

Духи $\gamma(\sigma)$ та $\beta(\sigma)$, які відповідають генератору листкової суперсиметрії $\Phi_0(\sigma) \approx 0$, є грассманово-парними, а духи для бозонних в'язей грассманово-непарні. Для запропонованої нами моделі замкненої безнатягової спінової струни класичний БРСТ заряд, який задовольняє визначальне співвідношення $\{\Omega, \Omega\}_{P.B.} = 0$, дорівнює

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\sigma\, \Omega(\sigma), \quad \Omega(\sigma) = c^L L^{\text{ext}} + c^T T_0 + c^{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}^{\text{ext}} + \gamma \Phi^{\text{ext}}. \tag{4.187}$$

Густину БРСТ заряду в (4.187) було представлено у зручній формі як суму в'язей (4.166), (4.167), (4.168) та (4.169), розширених внесками духів та помножених на відповідні духові поля. Нами було прийнято наступні означення розширених в'язей

$$
\begin{gathered}
L^{\mathrm{ext}}(\sigma) = L_0 + \tfrac{1}{2}L^{\mathrm{gh}\,L} + L^{\mathrm{gh}\,T} + L^{\mathrm{gh}\,\mathfrak{D}} + L^{\mathrm{gh}\,\Phi} : \\
L^{\mathrm{gh}\,L(T)}(\sigma) = 2i(c^{L(T)}b^{L(T)})' - ic^{L(T)}\acute{b}^{L(T)}, \quad L^{\mathrm{gh}\,\mathfrak{D}}(\sigma) = i\acute{c}^{\mathfrak{D}}b^{\mathfrak{D}}, \qquad (4.188) \\
L^{\mathrm{gh}\,\Phi}(\sigma) = \gamma\acute{\beta} - \tfrac{3}{2}(\gamma\beta)'
\end{gathered}
$$

і

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{ext}}(\sigma) = \mathfrak{D}_0 - 2ic^T b^T + \gamma\beta,$$

а також

$$\Phi^{\mathrm{ext}}(\sigma) = \Phi_0 - \tfrac{1}{2}\gamma b^T.$$

Відзначимо певну довільність у такому означенні.

Вибором підхожого калібрувального ферміона, співвідношення на дужках Пуассона якого з БРСТ зарядом дають БРСТ гамільтоніан, можна привести рівняння для полів духів до тієї ж форми, яку мають рівняння для полів матерії [290]. Крім того поля духів мають ту ж періодичність, як і в'язі, які їм відповідають, й допускають розклади Фур'є подібні до розкладів полів матерії (4.170)

$$
\begin{gathered}
c(\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_m \mathrm{e}^{im\sigma}c_m, \quad b(\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_m \mathrm{e}^{im\sigma}b_m, \\
\gamma(\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}+\nu} \mathrm{e}^{im\sigma}\gamma_m, \quad \beta(\sigma) = \tfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}+\nu} \mathrm{e}^{im\sigma}\beta_m,
\end{gathered}
$$

де c та b позначають будь-який з непарних духів, а для парних полів духів γ та β параметр ν враховує як умови періодичності Рамона, так і умови антиперіодичності Нев'є-Шварца. Це дозволяє записати БРСТ заряд в термінах мод Фур'є духів та розширених генераторів

$$
\begin{gathered}
\Omega = c_0^L L_0^{\mathrm{ext}} + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m^L L_{-m}^{\mathrm{ext}} + c_{-m}^L L_m^{\mathrm{ext}}) + c_0^T T_0^{\mathrm{m}} + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m^T T_{-m}^{\mathrm{m}} + c_{-m}^T T_m^{\mathrm{m}}) \\
+ c_0^{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}_0^{\mathrm{ext}} + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m^{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}_{-m}^{\mathrm{ext}} + c_{-m}^{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}_m^{\mathrm{ext}}) + \delta_{\nu,0}\gamma_0\Phi_0^{\mathrm{ext}} + \sum_{m=1-\nu}^{\infty}(\gamma_m\Phi_{-m}^{\mathrm{ext}} + \gamma_{-m}\Phi_m^{\mathrm{ext}}).
\end{gathered}
$$

Моди Фур'є розширених генераторів даються сумами внесків полів матерії та духів. Так моди розширеного генератора Вірасоро (4.188) можна представити у формі

$$L_m^{\mathrm{ext}} = L_m^{\mathrm{m}} + \tfrac{1}{2} L_m^{\mathrm{gh}\,L} + L_m^{\mathrm{gh}\,T} + L_m^{\mathrm{gh}\,\mathfrak{D}} + L_m^{\mathrm{gh}\,\Phi}.$$

Вирази для ненульових мод генератора Вірасоро для полів матерії L_m^{m} було представлено в (4.171), (4.175), (4.181) та (4.184). Для нульових мод відповідні ермітові оператори для $(-+)$-впорядкування було наведено в (4.176), (4.182) та (4.185), а для *xp*- та вейлівського впорядкувань – в (4.177), (4.183) і (4.186). Внески у ненульові моди генератора Вірасоро від (c^T, b^T) та $(c^{\mathfrak{D}}, b^{\mathfrak{D}})$ духів мають форму

$$\begin{aligned} L_m^{\mathrm{gh}\,T} &= -\sum_{n=0}^{m}(m+n)c_n^T b_{m-n}^T - \sum_{n=1}^{\infty}(2m+n)c_{m+n}^T b_{-n}^T \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}(m-n)c_{-n}^T b_{m+n}^T, \\ L_{-m}^{\mathrm{gh}\,T} &= \sum_{n=0}^{m}(m+n)c_{-n}^T b_{-(m-n)}^T + \sum_{n=1}^{\infty}(2m+n)c_{-(m+n)}^T b_n^T \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(m-n)c_n^T b_{-(m+n)}^T \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} L_m^{\mathrm{gh}\,\mathfrak{D}} &= -\sum_{n=1}^{m} n c_n^{\mathfrak{D}} b_{m-n}^{\mathfrak{D}} - \sum_{n=1}^{\infty}(m+n)c_{m+n}^{\mathfrak{D}} b_{-n}^{\mathfrak{D}} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_{-n}^{\mathfrak{D}} b_{m+n}^{\mathfrak{D}}, \\ L_{-m}^{\mathrm{gh}\,\mathfrak{D}} &= \sum_{n=1}^{m} n c_{-n}^{\mathfrak{D}} b_{-(m-n)}^{\mathfrak{D}} + \sum_{n=1}^{\infty}(m+n)c_{-(m+n)}^{\mathfrak{D}} b_n^{\mathfrak{D}} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^{\mathfrak{D}} b_{-(m+n)}^{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

Для духів (c^L, b^L) внесок до генератора Вірасоро $\frac{1}{2} L_m^{\mathrm{gh}\,L}$ є таким же, як і для $(c^{\mathfrak{D}}, b^{\mathfrak{D}})$ духів, оскільки L_m^{ext} множиться на c_{-m}^L у БРСТ заряді. Моди Фур'є внеска до генератора Вірасоро, який визначається бозонними духами, дорівнюють

$$\begin{aligned} L_m^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{R}} &= \sum_{n=0}^{m}(\tfrac{1}{2}m+n)\gamma_n\beta_{m-n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2}m+n)\gamma_{m+n}\beta_{-n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{1}{2}m-n)\gamma_{-n}\beta_{m+n}, \\ L_{-m}^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{R}} &= -\sum_{n=0}^{m}(\tfrac{1}{2}m+n)\gamma_{-n}\beta_{-(m-n)} - \sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2}m+n)\gamma_{-(m+n)}\beta_n \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{1}{2}m-n)\gamma_n\beta_{-(m+n)} \end{aligned}$$

та

$$L_m^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{NS}} = \sum_{r=1/2}^{m-1/2}(\tfrac{1}{2}m+r)\gamma_r\beta_{m-r} + \sum_{r=1/2}^{\infty}(\tfrac{3}{2}m+r)\gamma_{m+r}\beta_{-r} + \sum_{r=1/2}^{\infty}(\tfrac{1}{2}m-r)\gamma_{-r}\beta_{m+r},$$

$$L_{-m}^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{NS}} = -\sum_{r=1/2}^{m-1/2}(\tfrac{1}{2}m+r)\gamma_{-r}\beta_{-(m-r)} - \sum_{r=1/2}^{\infty}(\tfrac{3}{2}m+r)\gamma_{-(m+r)}\beta_{r} - \sum_{r=1/2}^{\infty}(\tfrac{1}{2}m-r)\gamma_{r}\beta_{-(m+r)}.$$

Аналогічно моди Фур'є розширеного генератора дилатацій даються сумою внесків полів матерії та духів

$$\mathfrak{D}_m^{\mathrm{ext}} = \mathfrak{D}_m^{\mathrm{m}} + \mathfrak{D}_m^{\mathrm{gh}\,T} + \mathfrak{D}_m^{\mathrm{gh}\,\Phi}.$$

Ненульові моди генератора дилатацій для полів матерії наведено в (4.178), а для нульової моди ермітові оператори для різних упорядкувань представлено в (4.179) та (4.180). Внески до ненульових мод генератора дилатацій від (c^T, b^T) духів дорівнюють

$$\mathfrak{D}_m^{\mathrm{gh}\,T} = -2i\left(\sum_{n=0}^{m} c_n^T b_{m-n}^T + \sum_{n=1}^{\infty} c_{m+n}^T b_{-n}^T + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^T b_{m+n}^T\right),$$

$$\mathfrak{D}_{-m}^{\mathrm{gh}\,T} = -2i\left(\sum_{n=0}^{m} c_{-n}^T b_{-(m-n)}^T + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-(m+n)}^T b_{n}^T + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n}^T b_{-(m+n)}^T\right),$$

а від (γ, β) духів секторів Рамона та Нев'є-Шварца мають вигляд

$$\mathfrak{D}_m^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{R}} = i\left(\sum_{n=0}^{m} \gamma_n\beta_{m-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{m+n}\beta_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-n}\beta_{m+n}\right),$$

$$\mathfrak{D}_{-m}^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{R}} = i\left(\sum_{n=0}^{m} \gamma_{-n}\beta_{-(m-n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-(m+n)}\beta_{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n}\beta_{-(m+n)}\right)$$

та

$$\mathfrak{D}_m^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{NS}} = i\left(\sum_{r=1/2}^{m-1/2} \gamma_r\beta_{m-r} + \sum_{r=1/2}^{\infty} \gamma_{m+r}\beta_{-r} + \sum_{r=1/2}^{\infty} \gamma_{-r}\beta_{m+r}\right),$$

$$\mathfrak{D}_{-m}^{\mathrm{gh}\,\Phi\,\mathrm{NS}} = i\left(\sum_{r=1/2}^{m-1/2} \gamma_{-r}\beta_{-(m-r)} + \sum_{r=1/2}^{\infty} \gamma_{-(m+r)}\beta_{r} + \sum_{r=1/2}^{\infty} \gamma_{r}\beta_{-(m+r)}\right)$$

відповідно.

З урахуванням наведених вище розкладів розширених генераторів на моди Фур'є, можливо перевірити нільпотентність квантового БРСТ заряду. У нашій роботі [290] прямим обчисленням було встановлено, що у випадку xp-впорядкування для операторів просторово-часових координат та компонентів імпульсу, вейлівського впорядкування для Фур'є мод вектора $\Xi^{\underline{m}}(\sigma)$, cb- та $\gamma\beta$-впорядкування для духів БРСТ заряд насправді виявляється нільпотентним

$$\Omega^2|_{xp,\,\text{Weyl},\,cb-\text{ordering}} = 0.$$

Відзначимо, що аналогічне впорядкування використовувалось раніше в роботах [99] і [102] для побудови нільпотентного БРСТ заряду квантованих нуль-(супер)струн та нуль-(супер)-p-бран у (супер)просторі Мінковського. Вибір упорядкування та умова нільпотентності БРСТ заряду визначають ермітові оператори, які відповідають нульовим модам розширених генераторів Вірасоро та дилатацій. Для полів матерії ці оператори наведено в (4.177), (4.183), (4.186) та (4.180), а для духів – в нашій роботі [290]. Цей результат виноситься на захист.

У випадку $(-+)-$впорядкування квантовий БРСТ заряд не є нільпотентним

$$\Omega^2|_{(-+)-\text{ordering}} = \left(\tfrac{5(D+1)}{24} - \tfrac{43}{12}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^3 c^L_{-n} c^L_n + (D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n c^{\mathfrak{D}}_{-n} c^{\mathfrak{D}}_n$$
$$+\tfrac{i}{2}(D-3)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (c^{\mathfrak{D}}_{-n} c^L_n - c^L_{-n} c^{\mathfrak{D}}_n)$$

через три аномальні члени у правій частині. Перша нескінченна сума є пропорційною аномалії Вірасоро, друга сума – дилатаційній аномалії, а остання – змішаній Вірасоро-дилатаційній аномалії.

4.6 Основні результати розділу

У цьому розділі представлено наступні результати, які було здобуто вперше та які виносяться на захист:

- для симетричних спінорних полів у п'ятивимірному просторі Мінковського запропоновано представлення у формі інтеґрала за лоренц-гармонічними змінними, які параметризують тривимірну сферу S^3, реалізовану у вигляді фактор-простору $SO(1,4)/(SO(1,1) \times ISO(3))$. За побудовою ці поля задовольняють вільні безмасові рівняння типу Дірака. Рівняння для полів з двома, трьома та чотирма індексами співпадають із невзаємодійною границею спінорної форми динамічних рівнянь та тотожностей Б'янкі для напруженостей полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного;

- знайдено реалізацію безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією однорідними функціями в просторі амбітвісторів та встановлено її зв'язок з відомою осциляторною реалізацією цих представлень. При перетворенні Пенроуза знайдені функції переходять у $sl(2,\mathbb{C})$ спінорні поля в $D=4$ просторі. Ці поля можуть бути вибрані як межові значення вільних безмасових повністю симетричних полів та полів змішаної симетрії, які задовольняють динамічні рівняння у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера;

- здобуто нове 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у просторі AdS_5. Показано, що його можна звести до раніше відомого 2-твісторного формулювання. У результаті квантування за Діраком моделі масивної частинки у 2-твісторному формулюванні здобуто нове представлення для її хвильової функції як однорідної функції в амбітвісторному просторі;

- запропоновано співвідношення між компонентами $psu(2,2|4)$ супертвісторів, які входять до супертвісторних формулювань безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі, та елементами суперматриці, яка набуває значення у $PSU(2,2|4)/(SO(1,4) \times SO(5))$ суперсиметричному фактор-просторі. Це дозволило встановити зв'язок між суперпросторовим формулюванням безмасової суперчастинки та її 8- та 4-супертвісторними формулюваннями. З використанням співвідношення між компонентами супертвісторів та $su(2)$ осциляторами проведено квантування за Діраком моделі суперчастинки у 4-супертвісторному формулюванні. Показано, що її фізичні стани описують спектр збуджень полів IIB супергравітації над $AdS_5 \times S^5$ супербекграундом. Також розроблено амбітвісторний опис супермультиплета $D = 5$ $\mathcal{N} = 8$ каліброваної супергравітації, який складає безмасову частину спектра;

- запропоновано нове формулювання моделі вільної безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як дійсний проєктивний багатовид, параметризований однорідними координатами. У запропонованому формулюванні групу $SO(2, D-1)$ ізометрії простору AdS_D реалізовано лінійно, а в'язі першого роду мають простий вигляд та утворюють алгебру мінімальної суперсиметрії на світовій лінії розширену генератором дилатацій просторово-часових координат. Зі збереженням усіх симетрій вільної частинки побудовано розширення моделі на випадок взаємодії з фоновими електромагнітним та абелевими антисиметричними тензорними калібрувальними полями. У результаті квантування за Діраком здобуто рівняння Дірака та Клейна-Гордона для хвильової функції частинки, які представлено в однорідних, неоднорідних та внутрішніх координатах простору AdS_D;

- запропоновано модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у даній реалізації. В рамках методу БРСТ квантування показано, що у моделі відсутні аномалії для будь-якої розмірності простору у випадку узагальненого координатно-імпульсного впорядкуванні операторів змінних фазового простору та духів.

Висновки

Дисертацію присвячено вивченню структури нелінійностей у суперсиметричних теоріях струн, пов'язаних як з кривизною зовнішнього бекграунда, так і обумовлених їх спіновими ступенями свободи. Детально проаналізовано граничні випадки нульового та нескінченного натягу струн. У цих граничних випадках доведено класичну інтеґровність нелінійних рівнянь суперструн у (супер)просторах анти-де Сіттера або ці рівняння були перетворені у лінійні після переходу до твісторних змінних, що дозволило застосувати відомі методи квантування.

Основні наукові результати дисертації сформульовано нижче.

1. Запропоновано формулювання двовимірної σ-моделі у $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі, яке ґрунтується на реалізації $osp(4|6)$ супералгебри його глобальної симетрії як $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри. Доведено лінійну залежність рівнянь для ферміонних полів σ-моделі.

2. Досліджено нелінійну реалізацію $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії у цій σ-моделі. Здобуто густини ньотерових струмів, пов'язаних з даною глобальною симетрією, в термінах форм Картана та параметрів суперконформної алгебри.

3. Запропоновано для κ-симетрії та листкових репараметризацій дії суперструни в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді калібрування світлового конуса, в якому він утворений нуль-геодезичними на межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 у конформно-пласкій параметризації. Побудовано лагранжіан та гамільтоніан суперструни у даному калібруванні.

4. Здобуто лагранжіан суперструни у частковому калібруванні κ-симетрії, в якому залишаються дві з восьми координат у секторі суперсиметрій, порушених $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Знайдено представлення

нульової кривизни для рівнянь суперструни у цьому калібруванні, що вказує на їх можливу класичну інтеґровність й у загальному випадку, коли не накладено калібрувальних умов.

5. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі та встановлено співвідношення між компонентами її пари Лакса та зв'язністю Лакса σ-моделі у цьому просторі.

6. Запропоновані нові супертвісторні формулювання моделей струн інваріантних відносно просторово-часової суперсиметрії і розроблені лагранжів та гамільтонів підходи до їх опису.

7. Введено редуковані супертвісторні моделі, які узагальнюють на випадок струн з натягом супертвісторні формулювання безмасових частинок та безнатягових струн. Проведено аналіз моделі, яка відповідає $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонової системи з в'язями.

8. Доведено інваріантність класичних лагранжіанів, які описують сектори ліво- та право-біжних полів у моделі твісторної струни Берковіца та її узагальненні для вільних супертвісторів, відносно нескінченновимірних розширень суперконформної симетрії. Показано, що ці симетрії порушуються у квантовій теорії.

9. Запропоновано лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у просторі Мінковського розмірності $D = 5$.

10. Розроблено опис в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ алгебри з додатною енергією. Встановлено співвідношення між амбітвісторним та відомим осциляторним описами цих представлень.

11. Введено 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, встановлено його зв'язок з ра-

ніше відомим 2-твісторним формулюванням та проведено квантування моделі в термінах амбітвісторів.

12. Встановлено зв'язок між змінними, які входять до суперпросторового та супертвісторних формулювань моделі безмасової суперчастинки у $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді, а також між цими формулюваннями. Проведено квантування за Діраком цієї моделі у 4-супертвісторному формулюванні.

13. Запропоновано формулювання моделі безмасової спінової частинки, в якому D-вимірний простір анти-де Сіттера реалізовано як дійсний проєктивний багатовид. Модель узагальнено на випадок взаємодії з фоновими електромагнітним і абелевими антисиметричними калібрувальними полями та проведено її квантування за Діраком.

14. Побудовано модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у зазначеній реалізації. Здобуто квантові генератори її калібрувальних симетрій, у (анти)комутаційних співвідношеннях яких відсутні аномалії.

Список використаних джерел

[1] J.C. Maxwell, A dynamical theory of the electromagnetic field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, V.155, P.459-512.

[2] A. Einstein, Zur elektrodynamik bewegter körper, Annalen der Physik, 1905, V.322, P.891-921.

[3] H. Minkowski, Das relativitätsprinzip, Annalen der Physik, 1915, V.352, P.927-938.
H. Minkowski, Die grundgleichungen für die elektromagnetischen forgänge in bewegten körpern, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1908, P.53-111.

[4] H. Minkowski, Raum und zeit, Physikalische Zeitschrift, 1909, V.10, P.104-111.

[5] H. Bateman, The transformations of the electrodynamical equations, Proceedings of the London Mathematical Society, 1910, V.8, P.223-264.

[6] E. Cunningham, The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof, Proceedings of the London Mathematical Society, 1910, V.8, P.77-98.

[7] C.N. Yang, R. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Physical Review, 1954, V.96, P.191-195.

[8] J. Schwinger, Quantum electrodynamics I. A covariant formulation, Physical Review, 1948, V.74, P.1439-1461.

J. Schwinger, Quantum electrodynamics II. Vacuum polarization and self-energy. Physical Review, 1949, V.75, P.651-679.

J. Schwinger, Quantum electrodynamics III. The electromagnetic properties of the electron – radiative corrections to scattering, Physical Review, 1949, V.76, P.790-817.

[9] J. Goldstone, Field theories with "superconductor"solutions, Il Nuovo Cimento, 1961, V.19, P.154-164.

[10] J. Goldstone, Abdus Salam, S. Weinberg, Broken symmetries, Physical Review, 1962, V.127, P.965-970.

[11] F. Englert, R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, Physical Review Letters, 1964, V.13, P.321-323.

[12] P.W. Higgs, Broken Symmetries and the masses of gauge bosons, Physical Review Letters, 1964, V.13, P.508-509.

[13] G.S. Guralnik, C.R. Hagen, T.W.B. Kibble, Global conservation laws and massless particles, Physical Review Letters, 1964, V.13, P.585-587.

[14] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, Physics Letters B, 2012, V.716, P.1-29, arXiv:1207.7214.

S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMSexperiment at the LHC, Physics Letters B, 2012, V.716, P.30-61, arXiv:1207.7235.

[15] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheori, Annalen der Physik, 1916, V.354, P.769-822.

[16] B.P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, Physical Review Letters, 2016, V.116, 061102. arXiv:1602.03837.

[17] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope Collaboration], First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole, Astrophysics Journal, 2019, V.875, L1. arXiv:1906.11238.

[18] M.H. Goroff, A. Sagnotti, The ultraviolet behavior of Einstein gravity, Nuclear Physics B, 1986, V.266, 709-736.

[19] G. Veneziano, Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories, Il Nuovo Cimento A, 1968, V.57, P.190-197.

[20] Y. Nambu, Quark model and the factorization of the Veneziano model, in Proceedings of Intern. Conference on Symmetries and Quark Models, ed. R. Chand. New York: Gordon and Breach, 1970. - pp.269-277.

[21] H.B. Nielsen, An almost physical interpretation of the N-point Veneziano model, submitted to Proc. of the XV Int. Conf. on High Energy Physics (Kiev, 1970), unpublished.
D.B. Fairlie, H.B. Nielsen, An analogue model for KSV theory, Nuclear Physics B, 1970, V.20, P.637-651.

[22] L. Susskind, Dual-symmetric theory of hadrons I, Il Nuovo Cimento A, 1970, V.69, P.457-496.

[23] Y. Nambu, Duality and Hadrodynamics, Notes prepared for the Copenhagen High Energy Symposium (Copenhagen, 1970).

[24] T. Goto, Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model, Progress of Theoretical Physics, 1971, V.46, P.1560-1569.

[25] O. Hara, On origin and physical meaning of Ward-like identity in dual-resonance model, Progress of Theoretical Physics, 1971, V.46, P.1549-1559.

[26] J. Scherk, J.H. Schwarz, Dual models for nonhadrons, Nuclear Physics B, 1974, V.81, P.118-144.

[27] F. Lund, T. Regge, Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, Physical Review D, 1976, V.14, P.1524-1535.

[28] R. Omnes, A new geometric approach to the relativistic string, Nuclear Physics B, 1979, V.149, P.269-284.

[29] Б.М. Барбашов, А.Л. Кошкаров, Геометрический подход к динамике релятивистской струны, Теоретическая и математическая физика, 1979, Т.39, №1, С.27-34.
B.M. Barbashov, V.V. Nesterenko, A.M. Chervjakov, Generalization of the relativistic string model in the geometrical approach, Letters in Mathematical Physics, 1979, V.3, P.359-365.

[30] А.А. Желтухин, О связи между релятивистской струной и двумерными полевыми моделями, Ядерная физика, 1981, Т.33, С.1723-1728.

[31] Л.П. Эйзенхарт, Риманова геометрия. М.: изд-во иностранной литературы, 1948. - 316с.

[32] Э.Ж. Картан, Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: изд-во МГУ, 1960. - 307с.

[33] А.А. Желтухин, Классическая релятивистская струна как двумерная $SO(1,1) \times SO(2)$-калибровочная модель, Теоретическая и математическая физика, 1982, Т.52, С.73-88.
A.A. Zheltukhin, Classical relativistic string as an exactly solvable sector of the $SO(1,1) \times SO(2)$ gauge model, Physics Letters B, 1982, V.116, P.147-150.

[34] А.А. Желтухин, О калибровочном описании и нелинейных уравнениях струны в D-мерном пространстве-времени, Теоретическая и математическая физика, 1983, Т.56, №2, С.230-245.

[35] A.A. Zheltukhin, Branes as solutions of gauge theories in gravitational field, European Physical Journal C, 2014, V.74, 3048. arXiv:1307.7165 [hep-th].

[36] A.A. Zheltukhin, Gauge theory approach to branes and spontaneous symmetry breaking, Reviews in Mathematical Physics, 2017, V.29, 1750009. arXiv:1509.00496 [hep-th].

[37] P. Ramond, Dual theory for free fermions, Physical Review D, 1971, V.3, P.2415-2418.

[38] A. Neveu, J.H. Schwarz, Factorizable dual model of pions, Nuclear Physics B, 1971, V.31, P.86-112.

[39] J.L. Gervais, B. Sakita, Field theory interpretation of supergauges in dual models, Nuclear Physics B, 1972, V.34, P.632-639.

[40] J.H. Schwarz, Physical states and pomeron poles in the dual pion model, Nuclear Physics B, 1972, V.46, P.61-74.

[41] P. Goddard, C.B. Thorn, Compatibility of the dual pomeron with uintarity and the absence of ghosts in the dual resonance model, Physics Letters B, 1972, V.40, P.235-238.

[42] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, Supergravity and spinor dual model, Physics Letters B, 1976, V.65, P.282-286.
F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model, Nuclear Physics B, 1977, V.122, P.253-290.

[43] Ю.А. Гольфанд, Е.П. Лихтман, Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1971, Т.13, С.452-455.

[44] Д.В. Волков, В.П. Акулов, О возможном универсальном взаимодействии нейтрино, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1972, Т.16, С.621-624.
D.V. Volkov, V.P. Akulov, Is the neutrino a Goldstone particle? Physics Letters B, 1973, V.46, P.109-110.

[45] J. Wess, B. Zumino, Supergauge transformations in four-dimensions, Nuclear Physics B, 1974, V.70, P.39-50.

[46] Д.В. Волков, В.А. Сорока, Эффект Хиггса для голдстоуновских частиц со спином половина, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1973, Т.18, С.529-532.
Д.В. Волков, В.А. Сорока, Калибровочные поля для группы симметрии со спинорными параметрами, Теоретическая и математическая физика, 1974, Т.20, С.291-298.

[47] D.V. Volkov, Supergravity before and after 1976, arXiv:hep-th9404153.
D.V. Volkov, Supergravity before 1976, In Intl. Conf. on History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics, Erice 1994, eds. H.B. Newman, T. Ypsilantis. New York: Plenum, 1996. - pp.663-675. arXiv:hep-th/9410024.

[48] V.A. Soroka, Starting-point of supergravity. arXiv:hep-th/0111271.
V.A. Soroka, The sources of supergravity, arXiv:hep-th/0203171.

[49] S.I. Volkova, A.A. Zheltukhin, Glimpses of Dmitry Volkov's life and work, Nuclear Physics B Proceedings Supplements, 2001, V.101, P.20-25.

[50] A.A. Zheltukhin, Dmitrij Volkov, super-Poincare group and Grassmann variables, Annalen der Physik, 2010, V.522(19), P.177-185. arXiv:0911.0550 [hep-th].

[51] М.Ф. Шульга, О.С. Бакай, С.В. Пелетминський, Ю.В. Слюсаренко, О.О. Желтухін, Д.В. Уваров, До 90-річчя від дня народження Дмитра Васильовича Волкова, Український фізичний журнал, 2015, Т.60, С.676-678.

[52] О.С. Бакай, В.Г. Бар'яхтар, В.П. Гусинін, О.О. Желтухін, А.Г. Загородній, В.М. Локтєв, С.В. Пелетмінський, Ю.О. Ситенко, Ю.В. Слюсаренко, В.Ю. Сторіжко, Д.В. Уваров, М.Ф. Шульга, До 95-річчя Дмитра Васильовича Волкова, Український фізичний журнал, 2020, Т.65, С.731-732.

[53] D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, Progress toward a theory of supergravity, Physical Review D, 1976, V.13, P.3214-3218.
S. Deser, B. Zumino, Consistent supergravity, Physics Letters B, 1976, V.62, P.335-337.

[54] M.B. Green, J.H. Schwarz, Supersymmetrical string theories, Physics Letters B, 1982, V.109, P.444-448.

[55] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, Heterotic string, Physical Review Letters, 1985, V.54, P.502-505.

[56] M.B. Green, J.H. Schwarz, Covariant description of superstrings, Physics Letters B, 1984, V.136, P.367-370.
M.B. Green, J.H. Schwarz, Properties of the covariant formulation of superstring theories, Nuclear Physics B, 1984, V.243, P.285-306.

[57] J. de Azcarraga, J. Lukierski, Supersymmetric particles with internal symmetries and central charges, Physics Letters B, 1982, V.113, P.170-174.

[58] W. Siegel, Hidden local supersymmmetry in the supersymmetric particle action, Physics Letters B, 1983, V.128, P.397-399.

[59] E. Witten, Twistor-like transform in ten dimensions, Nuclear Physics B, 1986, V.266, P.245-264.

[60] M.T. Grisaru, P.S. Howe, L. Mezincescu, B. Nilsson, P.K. Townsend, $N = 2$ superstrings in a supergravity background, Physics Letters B, 1985, V.162, P.116-120.

[61] J.A. Shapiro, C.C. Taylor, Superspace supergravity from the superstring, Physics Letters B, 1987, V.186, P.69-72.

[62] M.B. Green, J.H. Schwarz, Supersymmetrical dual string theory. 2. Vertices and trees, Nuclear Physics B, 1982, V.198, P.252-268.

[63] M.B. Green, J.H. Schwarz, L. Brink, Superfield theory of Type II superstrings, Nuclear Physics B, 1983, V.219, P.437-478.
M.B. Green, J.H. Schwarz, The structure of superstring field theories, Physics Letters B, 1984, V.140, P.33-38.
M.B. Green, J.H. Schwarz, Superstring field theory, Nuclear Physics B, 1984, V.243, P.475-536.

[64] R. Penrose, Any space-time has a plane wave as a limit, In Differential Geometry and Relativity. Mathematical Physics and Applied Mathematics, eds. M. Cahen, M. Flato. Dordrecht: Reidel, 1976. - pp.271-275.

[65] R.R. Metsaev, Type IIB Green-Schwarz superstring in plane wave Ramond-Ramond background, Nuclear Physics B, 2002, V.625, P.70-96. arXiv:hep-th/0112044.

R.R. Metsaev, A.A. Tseytlin, Exactly solvable model of superstring in Ramond-Ramond plane wave background, Physical Review D, 2002, V.65, 126004. arXiv:hep-th/0202109.

[66] И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Спинорный подвижной репер Картана, лоренц-гармонические формулировки суперструн и $\kappa-$симметрия, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1991, Т.54, С.421-424.
I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Green-Schwarz superstrings in spinor moving frame formalism, Physics Letters B, 1992, V.288, P.77-84.

[67] F. Delduc, A.S. Galperin, E. Sokatchev, Lorentz-harmonic (super)fields and (super)particles, Nuclear Physics B, 1992, V.368, P.143-171.

[68] A.S. Galperin, P.S. Howe, K.S. Stelle, The superparticle and the Lorentz group, Nuclear Physics B, 1992, V.368, P.248-280. arXiv:hep-th/9201020.

[69] E. Nissimov, S. Pacheva, S. Solomon, Quantization of $N = 1, 2$ superparticle with irreducible constraints, Physics Letters B, 1987, V.189, P.57-62.

[70] S. Solomon, New canonical covariant formalism for the $N = 2$ $D = 10$ superparticle, Physics Letters B, 1988, V.203, P.86-88.

[71] E. Sokatchev, Light-cone harmonic superspace and its applications, Physics Letters B, 1986, V.169, P.209-214.
E. Sokatchev, Harmonic superparticle, Classical and Quantum Gravity, 1987, V.4, P.237-246.

[72] E. Nissimov, S. Pacheva, S. Solomon, Covariant canonical quantization of the Green-Schwarz superstring, Nuclear Physics B, 1988, V.297, P.349-373.

[73] R.E. Kallosh, M.A. Rahmanov, Covariant quantization of the Green-Schwarz superstring, Physics Letters B, 1988, V.209, P.233-238.

[74] I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Twistor-like approach in the Green-Schwarz $D = 10$ superstring theory, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, Т.25, С.1065-1126.

[75] R. Penrose, Twistor algebra, Journal of Mathematical Physics, 1967, V.8, P.345-366.

[76] A. Ferber, Supertwistors and conformal supersymmetry, Nuclear Physics B, 1978, V.132, P.55-64.

[77] Р. Пенроуз, В. Риндлер, Спиноры и пространство-время. Т.2. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространста-времени. М.: Мир, 1988. - 572с.

[78] Д.В. Волков, А.А. Желтухин, Об описании струн в пространстве и суперпространстве, Украинский физический журнал, 1985, Т.30, С.809-813.

[79] И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Обобщение диад Ньюмена-Пенроуза и интеграл действия для супермембран в 11-мерном пространстве, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1992, Т.55, С.81-84.

И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Лоренцевы гармоники и новые формулировки суперструн в $D = 10$ и супермембран в $D = 11$, Ядерная физика, 1993, Т.56, С.198-213.

[80] I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, $N = 1$ super-p-branes in twistor-like Lorentz harmonic formulation, Classical and Quantum Gravity, 1995, V.12, P.609-626. arXiv:hep-th/9405113.

[81] A.S. Galperin, E.A. Ivanov, S. Kalitzin, V.I. Ogievetsky, E. Sokatchev, Unconstrained $N = 2$ matter, Yang-Mills and supergravity theories in harmonic superspace, Classical and Quantum Gravity, 1984, V.1, P.469-498.

A.S. Galperin, E.A. Ivanov, S. Kalitzin, V.I. Ogievetsky, E. Sokatchev, Unconstrained off-shell $N = 3$ supersymmetric Yang-Mills theory, Classical and Quantum Gravity, 1985, V.2, P.155-166.

[82] М.А. Семёнов-Тян-Шанский, Л.Д. Фаддеев, К теории нелинейных киральных полей, Вестник ЛГУ, 1977, Т.13, С.81-88.

[83] N. Berkovits, Super Poincare covariant quantization of the superstring, Journal of High Energy Physics, 2000, V.0004, 018. arXiv:hep-th/0001035.

[84] N. Berkovits, Cohomology in the pure spinor formalism for the superstring, Journal of High Energy Physics, 2000, V.0009, 046. arXiv:hep-th/0006003.

[85] N. Berkovits, C.R. Mafra, Equivalence of two loop superstring amplitudes in the pure spinor and RNS formalisms, Physical Review Letters, 2006, V.96, 011602, arXiv:hep-th/0509234.

[86] S. Chakrabarti, S.P. Kashyap, M. Verma, Amplitudes involving massive states using pure spinor formalism, Journal of High Energy Physics, 2018, V.1812, 071. arXiv:1808.08735 [hep-th].

[87] M. Henneaux, C. Teitelboim, Quantization of gauge systems. Princeton: Princeton University Press, 1992. - 520p.

[88] N. Berkovits, Relating the RNS and pure spinor formalisms for the superstring, Journal of High Energy Physics, 2001, V.0108, 026. arXiv:hep-th/0104247.

N. Berkovits, D.Z. Marchioro, Relating the Green-Schwarz and pure spinor formalisms for the superstring, Journal of High Energy Physics, 2005, V.0501, 018. arXiv:hep-th/0412198.

N. Berkovits, Explaining the pure spinor formalism for the superstring, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0801, 065. arXiv:0712.0324 [hep-th].

[89] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. Теория суперструн. Т.1. Ведение. М.: Мир, 1990. - 518с.

[90] L. Mason, D. Skinner, Ambitwistor strings and the scattering equations, Journal of High Energy Physics, 2014, V.1407, 048. arXiv:1311.2564 [hep-th].

[91] I. Bandos, Twistor/ambitwistor strings and null-superstrings in space-time of $D = 4, 10$ and 11 dimensions, Journal of High Energy Physics, 2014, V.1409, 086. arXiv:1404.1299 [hep-th].

[92] А.А. Желтухин, Гамильтонова структура антисимметричного действия струны, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1987, Т.46, С.208-210.

А.А. Желтухин, Гамильтонова формулировка для антисимметричного представления действия струн, Теоретическая и математическая физика, 1988, Т.77, С.377–388.

А.А. Желтухин, Гамильтониан нуль струн. Инвариантное действие нуль (супер)мембран, Ядерная физика, 1988, Т.48, С.587-595.

[93] J. Barcelos-Neto, M. Ruiz-Altaba, Superstrings with zero tension, Physics Letters B, 1989, V.228, 193-199.

[94] И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Твисторы, гармоники и нуль-супер-p-браны, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1990, Т.51, С.547-549.

[95] U. Lindstrom, B. Sundborg, G. Theodoridis, The zero tension limit of the superstring, Physics Letters B, 1991, V.253, P.319-323.

[96] A. Karlhede, U. Lindström, The classical bosonic string in the zero tension limit, Classical and Quantum Gravity, 1986, V.3, P.L73-L75.

[97] F. Lizzi, B. Rai, G. Sparano, A. Srivastava, Quantization of the null string and absence of critical dimensions, Physics Letters, 1986, V.182, P.326-330.

[98] J. Gamboa, C. Ramirez, M. Ruiz-Altaba, Quantum null (super)strings, Physics Letters, 1989, V.225, P.335-339.

[99] И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Гамильтонова механика и отсутствие критических размерностей для нуль мембран, Ядерная физика, 1989, Т.50, С.893-900.

[100] E. Casali, P. Tourkine, On the null origin of the ambitwistor string, Journal of High Energy Physics, 2016, V.1611, 036. arXiv:1606.05636 [hep-th].

[101] K. Lee, S.J. Rey, J.A. Rosabal, A string theory which isn't about strings, Journal of High Energy Physics, 2017, V.1711, 172. arXiv:1708.05707 [hep-th].

[102] I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Null super p-brane: Hamiltonian dynamics and quantization, Physics Letters B, 1991, V.261, P.245-250.
И.А. Бандос, А.А. Желтухин, Ковариантное квантование нуль-супермембран в 4-мерном пространстве-времени, Теоретическая и математическая физика, 1991, Т.88, №3, С.358-375.

[103] I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Null super p-branes quantum theory in 4-dimensional space-time, Fortschritte der Physik, 1993, V.41, P.619-676.

[104] А.А. Желтухин, Об отсутствии взаимодействий нуль-струн и нуль-мембран с антисимметричными полями, Ядерная физика, 1990, Т.51, С.1504-1513.

[105] I.A. Bandos, BPS preons and tensionless super-p-branes in generalized superspace, Physics Letters B, 2003, V.558, P.197-204. arXiv:hep-th/0208110.

[106] I.A. Bandos, J.A. de Azcarraga, C. Miquel-Espanya, Superspace formulations for the (super)twistor string, Journal of High Energy Physics, 2006, V.0607, 005. arXiv:hep-th/0604037.

[107] И.А. Бандос, Суперчастица в лоренц-гармоническом суперпространстве, Ядерная физика, 1990, Т.51, С.1429-1444.

[108] В.Г. Зима, С.А. Федорук, Ковариантное квантование $d = 4$ суперчастицы Бринка–Шварца с использованием лоренцевых гармоник, Теоретическая и математическая физика, 1995, Т.102, С.420–445. arXiv:hep-th/9409117.

[109] I.A. Bandos, Spinor moving frame, M0-brane covariant BRST quantization and intrinsic complexity of the pure spinor approach, Physics Letters B, 2008, V.659, P.388-398. arXiv:0707.2336 [hep-th].
I.A. Bandos, $D = 11$ massless superparticle covariant quantization, pure spinor BRST charge and hidden symmetries, Nuclear Physics B, 2008, V.796, P.360-401. arXiv:0710.4342 [hep-th].

[110] J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski, Supermembranes, Physics Letters B, 1986, V.180, P.370-374.

[111] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P.K. Townsend, Supermembranes and eleven-dimensional supergravity, Physics Letters B, 1987, V.189, P.75-78.

[112] A. Achucarro, J. Evans, P. Townsend, D. Wiltshire, Super p-branes, Physics Letters B, 1987, V.198, P.441-446.

[113] D. Fiorenza, H. Sati, U. Schreiber, Super Lie n-algebra extensions, higher WZW models, and super p-branes with tensor multiplet fields, International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, 2014, V.12, 1550018. arXiv:1308.5264 [hep-th].

[114] J. Dai, R.G. Leigh, J. Polchinski, New connections between string theories, Modern Physics Letters A, 1989, V.4, P.2073-2083.
P. Hořava, Background duality of open-string models, Physics Letters B, 1989, V.231, P.251-257.

[115] J. Polchinski, Combinatorics of boundaries in string theory, Physical Review D, 1994, V.50, P.R6041-R6045. arXiv:hep-th/9407031.

[116] J. Polchinski, Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges, Physical Review Letters, 1995, V.75, P.4724-4727. arXiv:hep-th/9510017.

[117] M. Born, L. Infeld, Foundations of the new field theory, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1934, V.144, N852, P.425-451.

[118] M.J. Duff, Thirty years of Erice on the brane. arXiv:1812.11658 [hep-th].

[119] K. Kikkawa, M. Yamasaki, Casimir effect in superstring theories, Physics Letters B, 1984, V.149, P.357-306.
N. Sakai, I. Senda, Vacuum energies of string compactified on torus, Progress of Theoretical Physics, 1986, V.75, P.692-705.

[120] A. Font, L.E. Ibanez, D. Lust, F. Quevedo, Strong-weak coupling duality and non-perturbative effects in string theory, Physics Letters B, 1990, V.249, P.35-43.

S.J. Rey, Confining phase of superstrings and axionic strings, Physical Review D, 1991, V.43, P.526-538.

[121] E. Witten, String theory dynamics in various dimensions, Nuclear Physics B, 1995, V.443, P.85-126. arXiv:hep-th/9503124.

[122] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, Supergravity theory in eleven dimensions, Physics Letters B, 1978, V.76, P.409-412.

[123] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker, L. Susskind, M theory as a matrix model: a conjecture, Physical Review D, 1997, V.55, P.5112-5128. arXiv:hep-th/9610043.

[124] J.M. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 1998, V.2, P.231-252. arXiv:hep-th/9711200.

[125] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov, Gauge theory correlators from noncritical string theory, Physics Letters B, 1998, V.428, P.105-114. arXiv:hep-th/9802109.

[126] E. Witten, Anti-de Sitter space and holography, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 1998, V.2, P.253-291. arXiv:hep-th/9802150.

[127] J.D. Bekenstein, Black holes and entropy, Physical Review D, 1973, V.7, P.2333-2346.

[128] S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Communications in Mathematical Physics, 1975, V.43, P.199-220. Erratum: Communications in Mathematical Physics, 1976, V.46, P.206.

[129] G. 't Hooft, Dimensional reduction in quantum gravity, in Proceedings of Salamfestschrift, eds. A. Ali, et.al. Singapore: World Scientific, 1994. - pp.284-296. arXiv:gr-qc/9310026.

[130] L. Susskind, The World as a hologram, Journal of Mathematical Physics, 1995, V.36, P.6377-6396. arXiv:hep-th/9409089.

[131] P.G.O. Freund, M.A. Rubin, Dynamics of dimensional reduction, Physics Letters B, 1980, V.97, P.233-235.

[132] J.H. Schwarz, Covariant field equations of chiral $N = 2$, $d = 10$ supergravity, Nuclear Physics B, 1983, V.226, P.269-288.

[133] P.S. Howe, P.C. West, The complete $N = 2$, $d = 10$ supergravity, Nuclear Physics B, 1984, V.238, P.181-220.

[134] J. Figueroa-O'Farrill, G. Papadopoulos, Maximally supersymmetric solutions of ten- and eleven-dimensional supergravities, Journal of High Energy Physics, 2003, V.0303, 048. arXiv:hep-th/0211089.

[135] L. Brink, J. Scherk, J.H. Schwarz, Supersymmetric Yang-Mills theories, Nuclear Physics B, 1977, V.121, P.77-92.

[136] R.R. Metsaev, A.A. Tseytlin, Type IIB superstring action in $AdS_5 \times S^5$ background, Nuclear Physics B, 1998, V.533, P.109-126. arXiv:hep-th/9805028.

[137] R. Kallosh, J. Rahmfeld, A. Rajaraman, Near horizon superspace, Journal of High Energy Physics, 1998, V.9809, 002. arXiv:hep-th/9805217.

[138] R. Roiban, W. Siegel, Superstring on $AdS_5 \times S^5$ supertwistor space, Journal of High Energy Physics, 2000, V.0012, 024. arXiv:hep-th/0010104.

[139] G. 't Hooft, A planar diagram theory for strong interactions, Nuclear Physics B, 1974, V.72, P.461-473.

[140] A.A. Zheltukhin, Tension as a perturbative parameter in non-linear string equations in curved space-time, Classical and Quantum Gravity, 1996, V.13, P.2357-2360. arXiv:hep-th/9606013.

[141] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, Large N field theories, string theory and gravity, Physics Reports, 2000, V.323, P.183-386. arXiv:hep-th/9905111.

[142] G. Policastro, D.T. Son, A.O. Starinets, Shear viscosity of strongly coupled $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma, Physical Review Letters, 2001, V.87, 081601. arXiv:hep-th/0104066.

[143] J.A. Minahan, K. Zarembo, The Bethe-Ansatz for $N = 4$ super Yang-Mills, Journal of High Energy Physics, 2003, V.0303, 013. arXiv:hep-th/0212208.

[144] I. Bena, J. Polchinski, R. Roiban, Hidden symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ superstring, Physical Review D, 2004, V.69, 046002. arXiv:hep-th/0305116.

[145] N. Beisert et al., Review of AdS/CFT integrability: an overview, Letters in Mathematical Physics, 2012, V.99, P.3-32. arXiv:1012.3982 [hep-th].

[146] O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis, J. Maldacena, $N = 6$ superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0810, 091, arXiv:0806.1218 [hep-th].

[147] A. Gustavsson, S.J. Rey, Enhanced $N = 8$ supersymmetry of ABJM theory on $\mathbb{R}^8$ and $\mathbb{R}^8/\mathbb{Z}_2$. arXiv:0906.3568 [hep-th].

[148] O.K. Kwon, P. Oh, J. Sohn, Notes on supersymmetry enhancement of ABJM theory, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0908, 093. arXiv:0906.4333 [hep-th].

[149] J. Bagger, N. Lambert, Modeling multiple M2's, Physical Review D, 2007, V.75, 045020. arXiv:hep-th/0611108.

J. Bagger, N. Lambert, Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes, Physical Review D, 2008, V.77, 065008. arXiv:0711.0955 [hep-th].

J. Bagger, N. Lambert, Comments on multiple M2-branes, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0802, 105. arXiv:0712.3738 [hep-th].

[150] A. Gustavsson, Algebraic structures on parallel M2-branes, Nuclear Physics B, 2009, V.811, P.66-76. arXiv:0709.1260 [hep-th].

[151] J. Bagger, N. Lambert, S. Mukhi, C. Papageorgakis, Multiple membranes in M-theory, Physics Reports, 2013, V.527, P.1-100. arXiv:1203.3546 [hep-th].

[152] B.E.W. Nilsson, C. Pope, Hopf fibration of eleven dimensional supergravity, Classical and Quantum Gravity, 1984, V.1, P.499-515.

[153] D.P. Sorokin, V.I. Tkach, D.V. Volkov, Kaluza-Klein theories and spontaneous compactification mechanisms of extra space dimensions, in Quantum Gravity, eds. M.A. Markov, V.A. Berezin, V.P. Frolov. Singapore: World Scientific, 1986. - pp.376-392.

D.P. Sorokin, V.I. Tkach, D.V. Volkov, On the relationship between compactified vacua of $D = 11$ and $D = 10$ supergravities, Physics Letters B, 1985, V.161, P.301-306.

[154] G. Arutyunov, S. Frolov, Superstrings on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ as a coset sigma-model, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0809, 129. arXiv:0806.4940 [hep-th].

[155] B.J. Stefański, Green-Schwarz action for Type IIA strings on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, Nuclear Physics B, 2009, V.808, P.80-88. arXiv:0806.4948 [hep-th].

[156] J. Gomis, D. Sorokin, L. Wulff, The complete $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace for type IIA superstring and D-branes, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0903, 015. arXiv:0811.1566 [hep-th].

[157] Y. Choquet-Bruhat, R. Geroch, Global aspects of the Cauchy problem in General relativity, Communications in Mathematical Physics, 1969, V.14, P.329-335.

[158] A. Carlotto, The general relativistic constraint equations, Living Reviews in Relativity, 2021, V.24, 2.

[159] T. Klose, Review of AdS/CFT integrability, Chapter IV.3: $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons and strings on $AdS_4 \times CP^3$, Letters in Mathematical Physics, 2012, V.99, P.401-423. arXiv:1012.3999 [hep-th].

[160] M.J. Duff, T. Inami, P.S. Howe, K.S. Stelle, Superstrings from supermembranes in $D = 11$, Physics Letters B, 1987, V.191, P.70-74.

[161] G. Dall'Agata, D. Fabbri, C. Fraser, P. Fre, P. Termonia, M. Trigiante, The $OSp(8|4)$ singleton action from the supermembrane, Nuclear Physics B, 1999, V.542, P.157-194. arXiv:hep-th/9807115.

[162] B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, A. Sevrin, The M-theory two-brane in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$, Physics Letters B, 1998, V.443, P.153-158. arXiv:hep-th/9808052.

[163] D. Sorokin, L. Wulff, Evidence for the classical integrability of the complete $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Journal of High Energy Physics, 2010, V.1011, 143. arXiv:1009.3498 [hep-th].

[164] A. Cagnazzo, D. Sorokin, L. Wulff, More on integrable structures of superstrings in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ and $AdS_2 \times S^2 \times T^6$ superbackgrounds, Journal of High Energy Physics, 2012, V.1201, 004. arXiv:1111.4197 [hep-th].

[165] M. Cicoli, J.P. Conlon, A. Maharana, S. Parameswaran, F. Quevedo, Y. Zavala, String cosmology: from the early Universe to today, arXiv:2303.04819 [hep-th].

[166] R. Penrose, The twistor programme, Reports on Mathematical Physics, 1977, V.12, P.65-76.

[167] R. Penrose, M.A.H. MacCallum, Twistor theory: an approach to the quantisation of fields and space-time, Physics Reports, 1972, V.6, P.241-316.

[168] E.T. Newman, J. Winicour, A curiosity concerning angular momentum, Journal of Mathematical Physics, 1974, V.15, P.1113-1115.

[169] T. Shirafuji, Lagrangian mechanics of massless particles with spin, Progress of Theoretical Physics, 1983, V.70, P.18-35.

[170] R. Penrose, Twistor quantisation and curved space-time, International Journal of Theoretical Physics, 1968, V.1, P.61-99.

[171] B. de Wit, D. Freedman, Systematics of higher-spin gauge fields, Physical Review D, 1980, V.21, P.358-367.

[172] R.S. Ward, On self-dual gauge fields, Physics Letters A, 1977, V.61, P.81-82.

[173] R. Penrose, Nonlinear gravitons and curved twistor theory, General Relativity and Gravitation, 1976, V.7, P.31-52.

[174] E. Witten, An interpretation of classical Yang-Mills theory, Physics Letters B, 1978, V.77, P.394-398.

[175] J. Isenberg, P. Yasskin, P. Green, Non self-dual gauge fields, Physics Letters B, 1978, V.78, P.462-464.

[176] M.G. Eastwood, Ambitwistors, Twistor Newsletter, 1979, N9, P.55-58.

[177] M. Eastwood, Supersymmetry, twistors, and the Yang-Mills equations, Transactions of the American Mathematical Society, 1987, V.301, P.615-635.

[178] R.J. Baston, L.J. Mason, Conformal gravity, the Einstein equations and spaces of complex null geodesics, Classical and Quantum Gravity, 1987, V.4, P.815-826.

[179] V.P. Nair, A current algebra for some gauge theory amplitudes, Physics Letters B, 1988, V.214, P.215-218.

[180] E. Witten, Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space, Communications in Mathematical Physics, 2004, V.252, P.189-258. arXiv:hep-th/0312171.

[181] M. Atiyah, M. Dunajski, L.J. Mason, Twistor theory at fifty: from contour integrals to twistor strings, Proceedings of the Royal Society of London A, 2017, V.473, 20170530. arXiv:1704.07464.

[182] D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, Physical Review D, 2009, V.79, 106007. arXiv:0811.2813 [hep-th].

[183] D.V. Uvarov, $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Classical and Quantum Gravity, 2011, V.28, 235010. arXiv:1011.5457 [hep-th].

[184] D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in the light-cone gauge, Nuclear Physics B, 2010, V.826, P.294-312. arXiv:0906.4699 [hep-th].

[185] T. Nishioka, T. Takayanagi, On Type IIA Penrose Limit and $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons Theories, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0808, 001. arXiv:0806.3391 [hep-th].

[186] D. Astolfi, V.G.M. Puletti, G. Grignani, T. Harmark, M. Orselli, Finite-size corrections in the $SU(2) \times SU(2)$ sector of type IIA string theory on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, Nuclear Physics, 2009, V.810, P.150-173. arXiv:0807.1527 [hep-th].

[187] P. Sundin, The $AdS(4) \times \mathbb{CP}^3$ string and its Bethe equations in the near plane wave limit, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0902, 046, arXiv:0811.2775 [hep-th].

[188] K. Zarembo, Worldsheet spectrum in AdS_4/CFT_3 correspondence, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0904, 135. arXiv:0903.1747 [hep-th].

[189] D. Bykov, Symmetry algebra of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Theoretical and Mathematical Physics, 2010, V.163, P.496-510. arXiv:0904.0208 [hep-th].

[190] C. Kalousios, C.Vergu, A. Volovich, Factorized tree-level scattering in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0909, 049. arXiv:0905.4702 [hep-th].

[191] M. Dukalski, S.J. van Tongeren, On fermionic reductions of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Physical Review D, 2009, V.80, 046005. arXiv:0906.0706 [hep-th].

[192] D.V. Uvarov, Light-cone gauge Hamiltonian for $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Modern Physics Letters A, 2010, V.25, P.1251-1265. arXiv:0912.1044 [hep-th].

[193] P. Fre, P.A. Grassi, Pure Spinor Formalism for $OSp(N|4)$ backgrounds, International Journal of Modern Physics A, 2012, V.27, 1250185. arXiv:0807.0044 [hep-th].

G. Bonelli, P.A. Grassi, H. Safaai, Exploring pure spinor string theory on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0810, 085. arXiv:0808.1051 [hep-th].

R. D'Auria, P. Fre, P.A. Grassi, M. Trigiante, Superstrings on $AdS_4 \times CP^3$ from Supergravity, Physical Review D, 2009, V.79, 086001. arXiv:0808.1282 [hep-th].

[194] M. Bandres, A. Lipstein, J.H. Schwarz, Studies of the ABJM Theory in a Formulation with Manifest $SU(4)$ $R-$Symmetry, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0809, 027. arXiv:0807.0880 [hep-th].

[195] N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov, B. Zweibach, Superstring theory on $AdS_2 \times S^2$ as a coset manifold, Nuclear Physics B, 2000, V.567, P.61-86. arXiv:hep-th/9907200.

[196] M. Hatsuda, M. Sakaguchi, Wess-Zumino term for AdS superstring, Physical Review D, V.66, 045020. arXiv:hep-th/0205092.

[197] Л. Бринк, М. Энно. Принципы теории струн. М.: Мир, 1991. - 296с.

[198] R. Kallosh, Superconformal actions in Killing gauge, arXiv:hep-th/9807206.

[199] P. Pasti, D.P. Sorokin, M. Tonin, On gauge-fixed superbrane actions in AdS superbackgrounds, Physics Letters B, 1999, V.447, P.251-256. arXiv:hep-th/9809213.

[200] R.R. Metsaev, A.A. Tseytlin, Superstring action in $AdS_5 \times S^5$: $\kappa-$symmetry light cone gauge, Physical Review D, 2001, V.63, 046002. arXiv:hep-th/0007036.

[201] R.R. Metsaev, C.B. Thorn, A.A. Tseytlin, Light cone superstring in AdS space-time, Nuclear Physics B, 2001, V.596, P.151-184. arXiv:hep-th/0009171.

[202] R.R. Metsaev, On manifest $SU(4)$ invariant superstring action in $AdS_5 \times S^5$, Classical and Quantum Gravity, 2001, V.18, P.1245-1260. arXiv:hep-th/0012026.

[203] R. Kallosh, A.A. Tseytlin, Simplifying superstring action on $AdS_5 \times S^5$, Journal of High Energy Physics, 1998, V.9810, 016. arXiv:hep-th/9808088.

[204] I. Pesando, A κ gauge-fixed Type IIB superstring action, Journal of High Energy Physics, 1998, V.9811, 002. arXiv:hep-th/9808020.

[205] R. Kallosh, J. Rahmfeld, The GS action on $AdS_5 \times S^5$, Physics Letters B, 1998, V.443, P.143-146. arXiv:hep-th/9808038.

[206] P. Claus, J. Rahmfeld, H. Robins, J. Tannenhauser, Y. Zunger, Isometries in anti-de Sitter and conformal superspaces, Journal of High Energy Physics, 2000, V.0007, 047. arXiv:hep-th/0007099.

[207] P.S. Howe, E. Sezgin, The supermembrane revisited, Classical and Quantum Gravity, 2005, V.22, P.2167-2200. arXiv:hep-th/0412245.

[208] P.A. Grassi, D. Sorokin and L. Wulff, Simplifying superstring and $D-$brane actions in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0908, 060. arXiv:0903.5407 [hep-th].

[209] G. Arutyunov, S. Frolov, Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ superstring. Part I, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, V.42, 254003. arXiv:0901.4937 [hep-th].

[210] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C.B. Thorn, Quantum dynamics of a massless relativistic string, Nuclear Physics B, 1973, V.56, P.109-135.

[211] G. Arutyunov, S. Frolov, Uniform light-cone gauge for strings in $AdS_5 \times S^5$: Solving $su(1|1)$ sector, Journal of High Energy Physics, 2006, V.0601,

055. arXiv:hep-th/0510208.

G. Arutyunov, S. Frolov, M. Zamaklar, Finite-size effects from giant magnons, Nuclear Physics B, 2007, V.778, P.1-35. arXiv:hep-th/0606126.

[212] K. Sugiyama, K. Yoshida, Type IIA string and matrix string on $pp-$wave, Nuclear Physics B, 2002, V.644, P.128-150. arXiv:hep-th/0208029.

S. Hyun, H. Shin, $N = (4,4)$ type IIA string theory on $pp-$wave background, Journal of High Energy Physics, 2002, V.0210, 070. arXiv:hep-th/0208074.

P. Sundin, On the worldsheet theory of the type IIA $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Journal of High Energy Physics, 2010, V.1004, 014. arXiv:0909.0697 [hep-th].

[213] M. Blau, J.M. Figueroa-O'Farrill, C. Hull, G. Papadopoulos, Penrose limits and maximal supersymmetry, Classical and Quantum Gravity, 2002, V.19, L87-L95. arXiv:hep-th/0201081.

M. Blau, J.M. Figueroa-O'Farrill, G. Papadopoulos, Penrose limits, supergravity and brane dynamics, Classical and Quantum Gravity, 2002, V.19, P.4753-4807. arXiv:hep-th/0202111.

[214] M. Blau, D. Frank, S. Weiss, Fermi coordinates and Penrose limits, Classical and Quantum Gravity, 2006, V.23, P.3993-4010. arXiv:hep-th/0603109.

M. Blau, S. Weiss, Penrose Limits vs String Expansions, Classical and Quantum Gravity, 2008, V.25, 125014. arXiv:0710.3480 [hep-th].

[215] D.V. Uvarov, Kaluza-Klein gauge and minimal integrable extension of $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model, International Journal of Modern Physics A, 2012, V.27, 1250118. arXiv:1203.3041 [hep-th].

[216] D.V. Uvarov, Lagrangian mechanics of massless superparticle on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Nuclear Physics B, 2013, V.B867, P.354-369.

arXiv:1205.5388 [hep-th].

[217] D.V. Uvarov, On integrability of massless $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superparticle equations, Modern Physics Letters A, 2014, V.29, 1350183. arXiv:1212.3157 [hep-th].

[218] D.V. Uvarov, On integrability of $D0$-brane equations on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of Physics: Conference Series, 2014, V.482, 012043. arXiv:1306.0732 [hep-th].

[219] I. Adam, A. Dekel, L. Mazzucato, Y. Oz, Integrability of Type II superstrings on Ramond-Ramond backgrounds in various dimensions, Journal of High Energy Physics, 2007, V.0706, 085. arXiv:hep-th/0702083.

[220] A. Babichenko, B. Stefanski, K. Zarembo, Integrability and the AdS_3/CFT_2 correspondence, Journal of High Energy Physics, 2010, V.1003, 058. arXiv:0912.1723 [hep-th].

[221] D. Sorokin, A. Tseytlin, L. Wulff, K. Zarembo, Superstrings in $AdS_2 \times S^2 \times T_6$, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, V.44, 275401. arXiv:1104.1793 [hep-th].

[222] D.V. Uvarov, A note about fermionic equations of $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring. arXiv:1210.0715 [hep-th].

[223] D.V. Uvarov, (Super)twistors and (super)strings, Classical and Quantum Gravity, 2006, V.23, P.2711-2726. arXiv:hep-th/0601149.

[224] D.V. Uvarov, Gauge symmetries of strings in supertwistor space, International Journal of Modern Physics A, 2007, V.22, P.1663-1683. arXiv:hep-th/0606222.

[225] S. Deser, B. Zumino, A complete action for the spinning string, Physics Letters B, 1976, V.65, P.369-373.

[226] L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string, Physics Letters B, 1976, V.65, P.471-474.

[227] A.M. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, Physics Letters B, 1981, B103, P.207-210.

[228] П.А.М. Дирак, Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968. - 84с.

[229] D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for higher dimensional superstrings, Classical Quantum Gravity, 2007, V.24, P.5383-5400. arXiv:hep-th/0703051.

[230] D.V. Uvarov, Canonical description of $D = 10$ superstring formulated in supertwistor space, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, V.42, 115204. arXiv:0804.0908 [hep-th].

[231] N. Berkovits, Alternative string theory in twistor space for $N = 4$ super-Yang-Mills theory, Physical Review Letters, 2004, V.93, 011601. arXiv:hep-th/0402045.

[232] D.V. Uvarov, Conformal higher-spin symmetries in twistor string theory, Nuclear Physics B, 2014, V.889, P.207-227. arXiv:1405.7829 [hep-th].

[233] A. Bengtsson, I. Bengtsson, M. Cederwall, N. Linden, Particles, superparticles and twistors, Physical Review D, 1987, V.36, P.1766-1772.

[234] Y. Eisenberg, S. Solomon, The twistor geometry of the covariantly quantized Brink-Schwarz superparticle, Nuclear Physics B, 1988, V.309, P.709-732.

[235] M. Plyushchay, Covariant quantization of massless superparticle in four-dimensional space-time: twistor approach, Modern Physics Letters A, 1989, V.4, P.1827-1837.

M. Plyushchay, Lagrangian formulation for the massless (super)particles in (super)twistor approach, Physics Letters B, 1990, V.240, P.133-136.

[236] А. Гуменчук, Д.П. Сорокин, Динамика релятивистской суперчастицы и твисторное соответствие, Ядерная физика, 1990, Т.51, С.549-557.

[237] I. Bandos, J. Lukierski, Tensorial central charges and new superparticle model with fundamental spinor coordinates, Modern Physics Letters A, 1999, V.14, P.1257-1272. arXiv:hep-th/9811022.
I.A. Bandos, J. Lukierski, D.P. Sorokin, Superparticle models with tensorial central charges, Physical Review D, 2000, V.61, 045002. arXiv:hep-th/9904109.

[238] S. Fedoruk, V.G. Zima, Bitwistor formulation of massive spinning particle, The Journal of Kharkiv National University. Physical Series "Nuclei, Particles, Fields 2003, V.585, P.39-48. arXiv:hep-th/0308154.

[239] A. Bette, J.A. de Azcarraga, J. Lukierski, C. Miquel-Espanya, Massive relativistic particle model with spin and electric charge from two twistor dynamics, Physics Letters B, 2004, V.595, P.491-497. hep-th/0405166.

[240] I. Bars, M. Picon, Single twistor description of massless, massive, AdS, and other interacting particles, Physical Review D, 2006, V.73, 064002. arXiv:hep-th/0512091.

[241] J.A. de Azcarraga, J.M. Izquierdo, J. Lukierski, Supertwistors, massive superparticles and κ-symmetry, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0901, 041. arXiv:0808.2155 [hep-th].

[242] L. Mezincescu, A.J. Routh, P.K. Townsend, Supertwistors and massive particles, Annals of Physics, 2014, V.346, P.66-90. arXiv:1312.2768 [hep-th].

[243] S. Fedoruk, J. Lukierski, Massive twistor particle with spin generated by Souriau-Wess-Zumino term and its quantization, Physics Letters B, 2014, V.733, P.309-315. arXiv:1403.4127 [hep-th].

[244] K. Ilyenko, Twistor variational principle for null strings, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 2001, V.102-103, P.83-86. arXiv:hep-th/0104117.

K. Ilyenko, Twistor representation of null two surfaces, Journal of Mathematical Physics, 2002, V.43, P.4770-4789. arXiv:hep-th/0109036.

[245] A.A. Zheltukhin, D.V. Uvarov, An inverse Penrose limit and supersymmetry enhancement in the presence of tensor central charges, Journal of High Energy Physics, 2002, V.0208, 008. arXiv:hep-th/0206214.

A.A. Zheltukhin, D.V. Uvarov, Exactly solvable super-p-brane models with tensor central charge coordinates, Physics Letters B, 2002, V.545, P.183-189.

[246] I. Bengtsson, A.A. Zheltukhin, Wess-Zumino action and Dirichlet boundary conitions for super p-brane with exotic fractions of supersymmetry, Physics Letters B, 2003, V.570, P.222-230. arXiv:hep-th/0306172.

[247] W.T. Shaw, Twistor, minimal surfaces and strings, Classical and Quantum Gravity, 1985, V.2, P.L113-L119.

W.T. Shaw, An ambitwistor description of bosonic or supersymmetric minimal surfaces and strings in four dimensions, Classical and Quantum Gravity, 1986, V.3, P.753-761.

L.P. Hughston, W.T. Shaw, Constraint free analysis of relativistic strings, Classical and Quantum Gravity, 1988, V.5, P.L69-L72.

[248] I. Bengtsson, The fermionic gauge symmetry in the Green-Schwarz action, Classical and Quantum Gravity, 1987, V.4, P.1143-1148.

[249] M. Cederwall, An extension of the twistor concept to string theory, Physics Letters B, 1989, V.226, P.45-47.

[250] Р. Пенроуз, В. Риндлер, Спиноры и пространство-время. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. М.: Мир, 1987. - 528с.

[251] S. Fedoruk, J. Lukierski, Twistorial versus space-time formulations: unification of various string models, Physical Review D, 2007, V.75, 026004. arXiv:hep-th/0606245.

[252] I.A. Bandos, J.A. de Azcarraga, M. Picon, O. Varela, $D = 11$ superstring model with 30 $\kappa-$symmetries and $\frac{30}{32}$ BPS states in an extended superspace, Physical Review D, 2004, V.69, 085007. arXiv:hep-th/0307106.

[253] W. Siegel, Untwisting the twistor superstring. arXiv:hep-th/0404255.

[254] J.A. de Azcarraga, A. Frydryszak, J. Lukierski, C. Miquel-Espanya, Massive relativistic particle model with spin from free two-twistor dynamics and its quantization, Physical Review D, 2006, V.73, 105011. arXiv:hep-th/0510161.

[255] I. Bengtsson, M. Cederwall, Particles, twistors and the division algebras, Nuclear Physics B, 1988, V.302, P.81-103.

[256] N. Berkovits, A supertwistor description of the massless superparticle in ten-dimensional superspace, Nuclear Physics B, 1991, V.350, P.193-200.

[257] P.S. Howe, P.C. West, The conformal group, point particles and twistors, International Journal of Modern Physics A, 1992, V.7, P.6639-6664.

[258] N. Berkovits, S. Cherkis, Higher-dimensional twistor transforms using pure spinors, Journal of High Energy Physics, 2004, V.0412, 049. arXiv:hep-th/0409243.

[259] I. Bars, M. Picon, Single twistor description of massless, massive, AdS, and other interacting particles, Physical Review D, 2006, V.73, 064002. arXiv:hep-th/0512091.

I. Bars, M. Picon, Twistor transform in d dimensions and a unifying role for twistors, Physical Review D, 2006, V.73, 064033. arXiv:hep-th/0512348.

[260] A. van Proeyen, Tools for supersymmetry, Annals of the University of Craiova Physics, 1999, V.9 Part I, P.1-48. arXiv:hep-th/9910030.

[261] J. van Holten, A. van Proeyen, $N = 1$ supersymmetry algebras in $d = 2, 3, 4 mod 8$, Journal of Physics A: Mathematical and General, 1982, V.15, P.3763-3784.

[262] P.K. Townsend, Four lectures on M-theory, in Proceedings of 1996 Summer School in High energy physics and cosmology, eds. E. Gava, et.al. Singapore: World Scientific, 1997. - pp.385-438. arXiv:hep-th/9612121.

[263] P. Claus, R. Kallosh, A. van Proeyen, M5-brane and superconformal (0,2) tensor multiplet in six dimensions, Nuclear Physics B, 1998, V.518, P.117-150. arXiv:hep-th/9711161.

[264] H. Elvang, Yu-tin Huang, Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. - 335p. arXiv:1308.1697 [hep-th].

[265] N. Berkovits, E. Witten, Conformal supergravity in twistor string theory, Journal of High Energy Physics, 2004, V.0408, 009. arXiv:hep-th/0406051.

[266] L. Dolan, P. Goddard, Complete equivalence between gluon tree amplitudes in twistor string theory and in gauge theory, Journal of High Energy Physics, 2012, V.1206, 030. arXiv:1111.0950 [hep-th].

[267] D. Skinner, Twistor strings for $N = 8$ supergravity, Journal of High Energy Physics, 2020, V.2004, 047. arXiv:1301.0868 [hep-th].

[268] Bo Sundborg, Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 2001, V.102-103, P.113-119. arXiv:hep-th/0103247.

[269] E. Witten, Space-time reconstruction, http://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html.

[270] J. Corn, T. Creutzig, L. Dolan, Yangian in the twistor string, Journal of High Energy Physics, 2010, V.1010, 076. arXiv:1008.0302 [hep-th].

[271] L. Dolan, C. Nappi, E. Witten, A relation between approaches to integrability in superconformal Yang-Mills theory, Journal of High Energy Physics, 2003, V.0310, 017. arXiv:hep-th/0308089.

[272] P.K. Townsend, Higher-spin symmetries of the massless (super)particle, Classical and Quantum Gravity, 1991, V.8, P.1231-1240.

[273] M. Abou-Zeid, C.M. Hull, L.J. Mason, Einstein supergravity and new twistor string theories, Communications in Mathematical Physics, 2008, V.282, P.519-573. arXiv:hep-th/0606272.

[274] J. Polchinski, String theory. V.I. An introduction to the bosonic string. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. - 402p.

[275] D.V. Uvarov, Spinor description of $D = 5$ massless low-spin gauge fields, Classical and Quantum Gravity, 2016, V.33, 135010. arXiv:1506.01881 [hep-th].

[276] D.V. Uvarov, Ambitwistors, oscillators and massless fields on AdS_5, Physics Letters B, 2016, V.762, P.415-420. arXiv:1607.05233 [hep-th].

[277] M. Gunaydin, N. Marcus, The spectrum of the S^5 compactification of the chiral $N = 2$, $D = 10$ supergravity and the unitary supermultiplets of $U(2, 2|4)$, Classical and Quantum Gravity, 1985, V.2, P.L11-L17.

[278] M. Gunaydin, D. Minic, M. Zagermann, $4d$ doubleton conformal theories, CPT and IIB string on $AdS_5 \times S^5$, Nuclear Physics B, 1998, V.534, P.96-120. arXiv:hep-th/9806042.

[279] L.B Litov, V.N. Pervushin, Quantum supertwistors and fundamental superspaces, Physics Letters B, 1984, V.147, P.76-80.

[280] P. Claus, M. Gunaydin, R. Kallosh, J. Rahmfeld, Y. Zunger, Supertwistors as quarks of $SU(2, 2|4)$, Journal of High Energy Physics, 1999, V.9905, 019. arXiv:hep-th/9905112.

[281] P. Claus, J. Rahmfeld, Y. Zunger, A simple particle action from a twistor parametrization of AdS_5, Physics Letters B, 1999, V.466, P.181-189. arXiv:hep-th/9906118.

[282] P. Claus, R. Kallosh, J. Rahmfeld, BRST quantization of a particle in AdS_5, Physics Letters B, 1999, V.462, P.285-293. arXiv:hep-th/9906195.

[283] D.V. Uvarov, Multitwistor mechanics of massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, Nuclear Physics B, 2020, V.950, 114830. arXiv:1907.13613 [hep-th].

[284] D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for massless superparticle in $AdS_5 \times S^5$ superspace, Nuclear Physics B, 2018, V.936, P.690-713. arXiv:1807.08318 [hep-th].

[285] I. Bars, Twistor superstring in 2T-physics, Physical Review D, 2004, V.70, 104022. arXiv:hep-th/0407239.

[286] I. Bars, Twistors and 2T-physics, American Institute of Physics Conference Proceedings, 2005, V.767, P.3-27. arXiv:hep-th/0502065.
I. Bars, Lectures on twistors. arXiv:hep-th/0601091.

[287] D.V. Uvarov, Oscillator approach to quantization of $AdS_5 \times S^5$ superparticle in twistor formulation, Physics Letters B, 2021, V.815, 136132. arXiv:2004.03356 [hep-th].

[288] H.J. Kim, L.J. Romans, P. van Nieuwenhuizen, Mass spectrum of chiral ten-dimensional $N = 2$ supergravity on S^5, Physical Review D, 1985, V.D32, P.389-399.

[289] P. Howe, S. Penati, M. Pernicci, P. Townsend, Wave equations for arbitrary spin from quantization of the extended supersymmetric spinning particle, Physics Letters B, 1988, V.215, P.555-558.

[290] D.V. Uvarov, Massless spinning particle and null-string on AdS_d: projective-space approach, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, V.51, 285402. arXiv:1707.05761 [hep-th].

[291] D.V. Uvarov, Spinning particle interacting with electromagnetic and antisymmetric gauge fields in anti-de Sitter space, European Journal of Physics C, 2019, V.79, 425.

[292] P.A.M. Dirac, The electron wave equation in de-Sitter space, Annals of Mathematics, 1935, V.36, P.657-669.
P.A.M. Dirac, Wave equations in conformal space, Annals of Mathematics, 1936, V.37, P.429-442.

[293] T. Adamo, D. Skinner, J. Williams, Twistor methods for AdS_5, Journal of High Energy Physics, 2016, V.1608, 167. arXiv:1607.03763 [hep-th].

[294] C. Teitelboim, Supergravity and the square roots of constraints, Physical Reivew Letters, 1977, V.38, P.1106-1110.

[295] C. Teitelboim, Spin, supersymmetry and square roots of constraints, AIP Conference Proceedings, 1978, V.48, P.134-139.

[296] A. Barducci, R. Casalbuoni, L. Lusanna, Supersymmetries and the pseudoclassical relativistic electron, Nuovo Cimento A, 1976, V.35, P.377-399.

[297] L. Brink, S. Deser, P. di Vecchia, P. Howe, B. Zumino, Local suprsymmetry for spinning particles, Physics Letters B, 1976, V.64, P.435-438.

[298] F.A. Berezin, M.S. Marinov, Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics, Annals of Physics, 1977, V.104, P.336-362. Ф.А. Березин, М.С. Маринов, Классический спин и алгебра Грассмана, Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1975, Т.21, С.678-680.

[299] L. Brink, P. Di Vecchia, P.S. Howe, A Lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles, Nuclear Physics B, 1977, V.118, P.76-94.

[300] A. Barducci, Pseudoclassical description of relativistic spinning particles with anomalous magnetic moment, Physics Letters B, 1982, V.118, P.112-114.

[301] А.А. Желтухин, Суперполевое описание спиновой частицы с аномальным магнитным моментом, Теоретическая и математическая физика, 1985, Т.65, С.151-154.
A.A. Zheltukhin, The Kaluza-Klein mechanism and a superfield description of spinning particles interactions, Physics Letters B, 1986, V.168, P.43-46.

[302] А.А. Желтухин, О суперполевой структуре действия суперсимметричной частицы, Ядерная физика, 1987, Т.46, С.1791-1798.

[303] R. Penrose, A spinor approach to general relativity, Annals of Physics, 1960, V.10, P.171-201.

[304] E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, On the gravitational interaction of massless higher-spin fields, Physics Letters B, 1987, V.189, P.89-95.
E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, Cubic interaction in extended theories of massless higher-spin fields, Nuclear Physics B, 1987, V.291, P.141-171.

[305] M.A. Vasiliev, Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in 3+1 dimensions, Physics Letters B, 1990, V.243, P.378-382.

[306] E.S. Fradkin, V.Ya. Linetsky, Cubic interaction in conformal theory of integer higher-spin fields in four-dimensional space-time, Physics Letters B, 1989, V.231, P.97-106.
E.S. Fradkin, V.Ya. Linetsky, Superconformal higher-spin theory in the cubic approximation, Nuclear Physics B, 1991, V.350, P.274-324.

[307] M.A. Vasiliev, Free massless fields of arbitrary spin in the de Sitter space and initial data for a higher spin superalgebra, Fortschritte der Physik, 1987, V.35, P.741-770.

[308] V.E. Lopatin, M.A. Vasiliev, Free massless bosonic fields of arbitrary spin in d-dimensional de Sitter space, Modern Physics Letters A, 1988, V.3, P.257-270.

[309] V.E. Didenko, E.D. Skvortsov, Elements of Vasiliev theory. arXiv:1401.2975 [hep-th].

[310] C. Saemann, M. Wolf, On twistors and conformal field theories from six dimensions, Journal of Mathematical Physics, 2013, V.54, 013507. arXiv:1111.2539 [hep-th].

[311] L.J. Mason, R.A. Reid-Edwards, A. Taghavi-Chabert, Conformal field theories in six-dimensional twistor space, Journal of Geometry and Physics, 2012, V.62, P.2353-2375. arXiv:1111.2585 [hep-th].

[312] E. Sokatchev, An off-shell formulation of $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory in twistor harmonic superspace, Physics Letters B, 1989, V.217, P.489-495.

[313] P.J. De Smet, Black holes on cylinders are not algebraically special, Classical and Quantum Gravity,2002, V.19, P.4877-4896. arXiv:hep-th/0206106.

[314] M. Godazgar, Spinor classification of the Weyl tensor in five dimensions, Classical and Quantum Gravity, 2010, V.27, 245013. arXiv:1008.2995 [gr-qc].

[315] A. Garcia-Parrado Gomez-Lobo, J.M. Martin-Garcia, Spinor calculus on $5-$dimensional spacetimes, Journal of Mathematical Physics, 2009, V.50, 122504. arXiv:0905.2846 [gr-qc].

[316] E. Sezgin, P. Sundell, Doubletons and $5d$ higher spin gauge theory, Journal of High Energy Physics, 2001, V.0109, 036. arXiv:hep-th/0105001.
E. Sezgin, P. Sundell, Towards massless higher spin extension of $D = 5$, $N = 8$ gauged supergravity, Journal of High Energy Physics, 2001, V.0109, 025. arXiv:hep-th/0107186.

[317] M.A. Vasiliev, Non-linear equations for symmetric massless higher spin fields in $(A)dS_d$, Physics Letters B, 2003, V.567, P.139-151. arXiv:hep-th/0304049.

[318] G. Mack, Abdus Salam, Finite-component field representations of the conformal group, Annals of Physics, 1969, V.53, P.174-202.

[319] G. Mack, All unitary ray representations of the conformal group $SU(2,2)$ with positive energy, Communications in Mathematical Physics, 1977, V.55, P.1-28.

[320] V.K. Dobrev, Positive energy representations, holomorphic discrete series and finite-dimensional irreps, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, V.41, 425206. arXiv:0712.4375 [hep-th].

[321] P.A.M. Dirac, A remarkable representation of the 3+2 de Sitter group, Journal of Mathematical Physics, 1963, V.4, P.901-909.

[322] R. Metsaev, Lowest eigenvalues of the energy operator for totally (anti)symmetric massless fields of the $n-$dimensional anti-de Sitter group, Classical and Quantum Gravity, 1994, V.11, P.L141-L145.

[323] R. Metsaev, Massless mixed symmetry bosonic free fields in d-dimensional anti-de Sitter space-time, Physics Letters B, 1995, V.354, P.78-84.

[324] Y. Nambu, Relativistic wave equations for particles with internal structure and mass spectrum, Progress of Theoretical Physics Supplements, 1966, V.37-38, P.368-382.

[325] A.O. Barut, H. Kleinert, Current operators and Majorana equation for the Hydrogen atom from dynamical groups, Physical Review, 1967, V.157, P.1180-1183.

[326] G. Mack, I. Todorov, Irreducibility of the ladder representations of $U(2,2)$ when restricted to the Poincare subgroup, Journal of Mathematical Physics, 1969, V.10, P.2078-2085.

[327] V.K. Dobrev, V.P. Petkova, All positive energy unitary irreducible representations of extended conformal supersymmetry, Physics Letters B, 1985, V.162, P.127-132.

[328] S. Ferrara, C. Fronsdal, A. Zaffaroni, On $N = 8$ supergravity in AdS_5 and $N = 4$ superconformal Yang-Mills theory, Nuclear Physics B, 1998, V.532, P.153-162. arXiv:hep-th/9802203.

[329] M. Gunaydin, D. Minic, M. Zagermann, Novel supermultiplets of $SU(2, 2|4)$ and the AdS_5/CFT_4 duality, Nuclear Physics B, 1999, V.544, P.737-758. arXiv:hep-th/9810226.

[330] M. Gunaydin, C. Saclioglu, Oscillator-like unitary representations of noncompact groups with Jordan structure and the noncompact groups of supergravity, Communications in Mathematical Physics, 1982, V.87, P.159-179.

[331] I. Bars, M. Gunaydin, Unitary representations of non-compact supergroups, Communications in Mathematical Physics, 1983, V.91, P.31-51.

[332] A. Baha Balantekin, I. Bars, Dimension and character formulas for Lie supergeroups, Journal of Mathematical Physics, 1981, V.22, P.1149-1162. A. Baha Balantekin, I. Bars, Representations of supergeroups, Journal of Mathematical Physics, 1981, V.22, P.1810-1818.

[333] R.R. Metsaev, Massless arbitrary spin fields in AdS_5, Physics Letters B, 2002, V.531, P.152-160. arXiv:hep-th/0201226.

[334] R.R. Metsaev, Shadows, currents and AdS, Physical Review D, 2008, V.78, 106010. arXiv:0805.3472 [hep-th].

[335] R.R. Metsaev, CFT adapted approach to massless fermionic fields, AdS/CFT, and fermionic conformal fields, arXiv:1311.7350 [hep-th].

[336] C. Fronsdal, Singletons and massless, integral-spin fields on de Sitter space, Physical Review D, 1979, V.20, P.848-856.

[337] J. Fang, C.Fronsdal, Massless, half-integer-spin fields in de Sitter space, Physical Review D, 1980, V.22, P.1361-1367.

[338] K. Alkalaev, Massless hook field in AdS_{d+1} from the holographic perspective, Journal of High Energy Physics, 2013, V.1301, 018. arXiv:1210.0217 [hep-th].

[339] A. Chekmenev, M. Grigoriev, Boundary values of mixed-symmetry massless fields in AdS space, Nuclear Physics B, 2016, V.913, P.769-791. arXiv:1512.06443 [hep-th].

[340] L.J. Mason, Twistor actions for non-self-dual fields; a new foundation for twistor-string theory, Journal of High Energy Physics, 2005, V.0510, 009. arXiv:hep-th/0507269.

[341] L.J. Mason, D. Skinner, An ambitwistor Yang-Mills Lagrangian, Physics Letters B, 2006, V.636, P.60-67. arXiv:hep-th/0510262.

[342] R. Boels, L. Mason, D. Skinner, Supersymmetric gauge theories in twistor space, Journal of High Energy Physics, 2007, V.0702, 014. arXiv:hep-th/0604040.

[343] M. Cederwall, Geometric construction of AdS twistors, Physics Letters B, 2000, V.483, P.257-263. arXiv:hep-th/0002216.
M. Cederwall, AdS twistors for higher spin theory, American Institute of Physics Conference Proceedings, 2005, V.767, P.96-105. arXiv:hep-th/0412222.

[344] A.S. Arvanitakis, A.E. Barns-Graham, P.K. Townsend, Twistor variables for anti-de Sitter (super)particles, Physical Review Letters, 2017, V.118, 141601. arXiv:1608.04380 [hep-th].
A.S. Arvanitakis, A.E. Barns-Graham, P.K. Townsend, Twistor descripti-

on of spinning particles in AdS, Journal of High Energy Physics, 2018, V.1801, 059. arXiv:1710.09557 [hep-th].

[345] I. Bars, Hidden twelve-dimensional structures in $AdS_5 \times S^5$ and $M^4 \times R^6$ supergravities, Physical Review D, 2002, V.66, 105024. arXiv:hep-th/0208012.

[346] T. Horigane, Y. Kazama, Exact quantization of a superparticle in $AdS_5 \times S^5$, Physical Review D, 2010, V.81, (2010) 045004. arXiv:0912.1166 [hep-th].

[347] W. Siegel, Spacecone quantization of AdS superparticle. arXiv:1005.5049 [hep-th].

[348] M. Heinze, Spectrum and quantum symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ superstring. arXiv:1507.03005 [hep-th].

[349] E. Ivanov, S. Kalitsyn, Nguyen Ai Viet, V. Ogievetsky, Harmonic Superspaces of Extended Supersymmetry. The Calculus of Harmonic Variables, Journal of Physics A: Mathematical and General, 1985, V.18, P.3433-3445.

[350] I. Bars, A mysterious zero in $AdS_5 \times S^5$ supergravity, Physical Review D, 2002, V.66, 105023. arXiv:hep-th/0205194.

[351] M. Gunaydin, D. Volin, The complete unitary dual of non-compact Lie superalgebra $su(p, q|m)$ via the generalized oscillator formalism, and non-compact Young diagrams, Communications in Mathematical Physics, 2019, V.367, P.873-939. arXiv:1712.01811 [math-ph].

[352] E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, Conformal supergravity, Physics Reports, 1985, V.119, P.233-362.

[353] H. Liu, A.A. Tseytlin, $D = 4$ Super Yang-Mills, $D = 5$ gauged supergravity, and $D = 4$ conformal supergravity, Nuclear Physics B, 1998, V.533, P.88-108. arXiv:hep-th/9804083.

[354] V. Balasubramanian, E. Gimon, D. Minic, J. Rahmfeld, Four dimensional conformal supergravity from AdS space, Physical Review D, 2001, V.63, 104009. arXiv:hep-th/0007211.

[355] R. Marnelius, B.E.W. Nilsson, Equivalence between a massive spinning particle in Minkowski space and a massless one in a de Sitter space, Physical Review D, 1979, V.20, P.839-847.

[356] G. Bonelli, On the covariant quantization of tensionless bosonic strings in AdS spacetime, Journal of High Energy Physics, 2003, V.0311, 028. arXiv:hep-th/0309222.
G. Bonelli, On the boundary gauge dual of closed tensionless free strings in AdS, Journal of High Energy Physics, 2004, V.0411, 059. arXiv:hep-th/0407144.

[357] R. Marnelius, Manifestly conformally covariant description of spinning and charged particles, Physical Review D, 1979, V.20, P.2091-2095.

[358] I. Bars, C. Deliduman, O. Andreev, Gauged duality, conformal symmetry and space-time with two times, Physical Review D, 1998, V.58, 066004. arXiv:hep-th/9803188.
I. Bars, C. Deliduman, D. Minic, Strings, branes and two-time physics, Physics Letters B, 1999, V.466, P.135-143. arXiv:hep-th/9906223.

[359] R.R. Metsaev, Fermionic fields in the $d-$dimensional anti-de Sitter spacetime, Physics Letters B, 1998, V.419, P.49-56. arXiv:hep-th/9802097.

[360] A.C. Davis, A.J. Macfarlane, P.C. Popat, J.W. van Holten, The quantum mechanics of the supersymmetric nonlinear $\sigma-$model, Journal of Physics A: Mathematical and General, 1984, V.17, P.2945-2954.

A.J. Macfarlane, P.C. Popat, The quantum mechanics of the $N = 2$ extended supersymmetric nonlinear $\sigma-$model, Journal of Physics A: Mathematical and General, 1984, V.17, P.2955-2961.

[361] A.V. Smilga, How to quantize supersymmetric theories, Nuclear Physics B, 1987, V.292, P.363-380.

[362] J.W. van Holten, Theory of a charged spinning particle in a gravitational and electromagnetic field, 1989, preprint NIKHEF-H/89-4.

[363] F. Bastianelli, O. Corradini, E. Latini, Spinning particles and higher spin fields on (A)dS backgrounds, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0811, 054. arXiv:0810.0188 [hep-th].

[364] S.J. Avis, C.J. Isham, D. Storey, Quantum field theory in anti-de Sitter space-time, Physical Review D, 1978, V.18, P.3565-3576.

[365] P. Saltsidis, Hamiltonian BRST quantization of the conformal spinning string, Nuclear Physics B, 1995, V.446, P.286-298. arXiv:hep-th/9503062.

[366] H. Gustafsson, U. Lindström, P. Saltsidis, B. Sundborg, R. von Unge, Hamiltonian BRST quantization of the conformal string, Nuclear Physics B, 1995, V.440, P.495-520. arXiv:hep-th/9410163.

[367] U. Lindström, B. Sundborg, G. Theodoridis, The zero tension limit of the spinning string, Physics Letters B, 1991, V.258, P.331-334.

[368] U. Lindstrom, B. Sundborg, G. Theodoridis, The zero tension limit of the superstring, Physics Letters B, 1991, V.253, P.319-323.

[369] Д.М. Гитман, И.В. Тютин, Каноническое квантование полей со связями, М: Наука, 1986. - 216с.

[370] J. Isberg, U. Lindström, B. Sundborg, G. Theodoridis, Classical and quantized tensionless strings, Nuclear Physics B, 1994, V.411, P.122-156. arXiv:hep-th/9307108.

[371] J. Gamboa, C. Ramirez, M. Ruiz-Altaba, Null spinning strings, Nuclear Physics B, 1990, V.338, P.143-187.

Додаток

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список наукових праць, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, Physical Review D, 2009, V.79, 106007. arXiv:0811.2813 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

2. D.V. Uvarov, $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Classical and Quantum Gravity, 2011, V.28, 235010. arXiv:1011.5457 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in the light-cone gauge, Nuclear Physics B, 2010, V.826, P.294-312. arXiv:0906.4699 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

4. D.V. Uvarov, Light-cone gauge Hamiltonian for $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Modern Physics Letters A, 2010, V.25, P.1251-1265. arXiv:0912.1044 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

5. D.V. Uvarov, Kaluza-Klein gauge and minimal integrable extension of $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model, International Journal of Modern Physics A, 2012, V.27, 1250118. arXiv:1203.3041 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

6. D.V. Uvarov, Lagrangian mechanics of massless superparticle on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Nuclear Physics B, 2013, V.B867, P.354-369. arXiv:1205.5388 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

7. D.V. Uvarov, On integrability of massless $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superparticle equations, Modern Physics Letters A, 2014, V.29, 1350183. arXiv:1212.3157 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

8. D.V. Uvarov, On integrability of $D0$-brane equations on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of Physics: Conference Series, 2014, V.482, 012043. arXiv:1306.0732 [hep-th].

9. D.V. Uvarov, (Super)twistors and (super)strings, Classical and Quantum Gravity, 2006, V.23, P.2711-2726. arXiv:hep-th/0601149. (SJR квартиль Q1).

10. D.V. Uvarov, Gauge symmetries of strings in supertwistor space, International Journal of Modern Physics A, 2007, V.22, P.1663-1683. arXiv:hep-th/0606222. (SJR квартиль Q2).

11. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for higher dimensional superstrings, Classical Quantum Gravity, 2007, V.24, P.5383-5400. arXiv:hep-th/0703051. (SJR квартиль Q1).

12. D.V. Uvarov, Canonical description of $D = 10$ superstring formulated in supertwistor space, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, V.42, 115204. arXiv:0804.0908 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

13. D.V. Uvarov, Conformal higher-spin symmetries in twistor string theory, Nuclear Physics B, 2014, V.889, P.207-227. arXiv:1405.7829 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

14. D.V. Uvarov, Spinor description of $D = 5$ massless low-spin gauge fields, Classical and Quantum Gravity, 2016, V.33, 135010. arXiv:1506.01881 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

15. D.V. Uvarov, Ambitwistors, oscillators and massless fields on AdS_5, Physics Letters B, 2016, V.762, P.415-420. arXiv:1607.05233 [hep-th].

(SJR квартиль Q1).

16. D.V. Uvarov, Multitwistor mechanics of massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, Nuclear Physics B, 2020, V.950, 114830. arXiv:1907.13613 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

17. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for massless superparticle in $AdS_5 \times S^5$ superspace, Nuclear Physics B, 2018, V.936, P.690-713. arXiv:1807.08318 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

18. D.V. Uvarov, Oscillator approach to quantization of $AdS_5 \times S^5$ superparticle in twistor formulation, Physics Letters B, 2021, V.815, 136132. arXiv:2004.03356 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

19. D.V. Uvarov, Massless spinning particle and null-string on AdS_d: projective-space approach, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, V.51, 285402. arXiv:1707.05761 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

20. D.V. Uvarov, Spinning particle interacting with electromagnetic and antisymmetric gauge fields in anti-de Sitter space, European Journal of Physics C, 2019, V.79, 425. (SJR квартиль Q1).

Список наукових праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for the first-order superstring action, in Proceedings of IV Summer School in Modern Mathematical Physics (3-14 September 2006, Institute of Physics, Belgrade), Institute of Physics, Belgrade 2007, P.391-402.

2. D.V. Uvarov, Twistor formulation for superstrings, in Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (15-18 September 2009, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.151.

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3\,\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, in II Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics” (22-24 December 2010, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.18.

4. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times CP^3$ superstring as $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model in conformal basis, in Proceedings of III International Conference ”Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (29 August - 2 September 2011, NSC KIPT, Kharkiv), Problems of Atomic Science and Technology, 2012, N1, P.32-36. (SJR квартиль Q4). `http://vant.kipt.kharkov.ua/TABFRAME2.html`

5. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in AdS-light-cone gauge, in III Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics” (21-23 December 2011, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.21.

6. D.V. Uvarov, Spinor description and integral on-shell representation for curvatures of $D = 5$ gauge fields, in International Conference ”Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation (24-26 May, 2016, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.43.

7. D.V. Uvarov, Classically integrable models of massless particle and $D0$-brane on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, in V International Conference ”Analysis and Mathematical Physics” dedicated to V.A. Marchenko’s 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine (19-24 June 2017, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts P.51.

8. D.V. Uvarov, Ambitwistor space realization of $SU(2,2)$ positive energy unitary irreducible representations corresponding to massless fields on anti-de Sitter space, in VI International Conference ”Analysis and Mathematical Physics” dedicated to the centennial anniversary of the

NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory (18-22 June 2018, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts P.32-33.

9. D.V. Uvarov, Features of the twistor formulation of the massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, in Proceedings of XXVIth International Colloquium on Integrable Systems (8-12 July 2019, Czech Technical University, Prague), Journal of Physics: Conference Series, 2019, V.1416, 012039.

Відомості про апробацію результатів дисертації

• IV Summer School in Modern Mathematical Physics, Institute of Physics, Belgrade, Serbia, 3-14 September 2006;

• Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 15-18 September 2009;

• II-nd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 22-24 December 2010;

• III-rd International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics", NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 29 August - 2 September 2011;

• III-rd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 21-23 December 2011;

• International Conference "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena", Gallipoli, Italy, 22-29 June 2013;

• International Seminar "Quantum Field Theory and Supersymmetry" dedicated to the 90-th birhtday anniversary of Academician D.V. Volkov, NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 3 July 2015;

• International Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation, Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 24-26 May 2016;

• V International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to V.A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 19-24 June 2017;

• VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to the centennial anniversary of the NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 18-22 June 2018;

• XXVIth International Colloquium on Integrable Systems, Czech Technical University, Prague, Czech Republic, 8-12 July 2019.