

НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Кузьмін Володимир Валеріанович

УДК 621.384.6.01

ДИСЕРТАЦІЯ
ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛЯХ ВЕЛИКОЇ ІНТЕНСИВНОСТІ

01.04.20 – фізика пучків заряджених частинок

Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: Буц Вячеслав Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Кузьмін В.В. Прискорення заряджених частинок у електромагнітних полях великої інтенсивності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук із спеціальності 01.04.20 – фізика пучків заряджених частинок. –

Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут». –

Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут». –

Харків, 2020.

У дисертаційній роботі подані результати встановлення особливостей динаміки заряджених частинок у зовнішніх сильних електромагнітних полях, зокрема, знайдені умови їх регулярного та хаотичного руху.

Наведені результати розв'язання задачі руху заряджених частинок (електрон) в зовнішньому постійному магнітному полі величини H_0 , яке направлене уздовж осі z і в полі електромагнітної хвилі довільної поляризації. Показано, що у випадку, коли параметр сили хвилі ($a = eE/mc\omega$) $a \geq 1$, умови циклотронного резонансу не є необхідними для ефективного обміну між зарядженими частинками і хвилями. В таких полях завжди виконуються умови перекриття нелінійних циклотронних резонансів. При цьому динаміка частинок стає хаотичною, і в середньому набір енергії відбувається по дифузійному закону.

Вперше показано, що при взаємодії типу хвиля-частинка, коли параметр сили хвилі стає більше одиниці ($a > 1$), то резонансні умови не є необхідними для ефективного обміну енергією між частинками та хвилями. В цьому випадку ефективний обмін енергії може реалізуватися за короткий час, який може дорівнювати одному періоду високочастотної хвилі.

Вперше показано, що в сильних ($a > 1$) поперечних електромагнітних полях основну роль відіграє поздовжній рух заряджених частинок, тоді як в полях малої інтенсивності основний рух відбувається в поперечному до хвильового вектору напрямку.

Розглянута задача про збудження електромагнітного поля моноенергетичним пучком осциляторів. Для цього досліджено збудження хвилі, котра розповсюджується перпендикулярно магнітному полю, та пучок, який рухається в постійному магнітному полі, направленому вздовж осі z . Самоузгоджена система рівнянь, котра описує динаміку збуджених полів і динаміку заряджених частинок, складається з рівнянь максвелла та рівнянь руху окремих частинок. У випадку, коли щільність не занадто велика, динаміка частинок і полів подібна динаміці частинок та полів при плазмово-пучковій взаємодії. Збільшення щільності частинок пучка до значень, що відповідають $\omega_b^2 = 1$, призводить до того, що рівень збуджених коливань в результаті розвитку локальної нестійкості руху частинок обмежується значенням рівня поля, котре задає поріг розвитку локальної нестійкості. Цей рівень може бути визначений при розгляді одночасткової задачі. Це дозволяє значно спростити розгляд багатьох пучкових і плазмово-пучкових задач. Збільшення щільності пучка до значень, що відповідають $\omega_b^2 \approx 2$, призводить до того, що глибина модуляції збудженого поля хвилі може досягнути ста відсотків. При цьому відбувається повна модуляція поля збудженої хвилі. У цьому випадку коливання можуть збуджуватися, однак вони носять релаксаційний характер, це пов'язано з тим, що збуджені коливання не є власними.

Запропоновано для підвищення якості згустку прискорених частинок використати модуляцію амплітуди хвилі, що прискорює частинки. Якщо ця частота буде близька до подвоєної частоти баунс-коливань захоплених полем хвилі частинок, то виникають умови для реалізації параметричної нестійкості. Енергія захоплених частинок при цьому зростає.

Вперше запропоновані схеми параметричного, додаткового прискорення заряджених частинок. Ці схеми можна використовувати для зменшення розкиду енергій прискорених частинок, захоплених в резонанс. Також запропоновано використовувати модуляцію амплітуди хвилі для запобігання розбігання частинок згустків у фазовому просторі.

Для керування характеристиками прискорюваних електронних згустків запропоновано використовувати таку модуляцію амплітуди хвилі, яка значно перевершує частоту баунс-коливаний частинок. У цьому випадку на фазовому портреті з'являються нові особливі точки. Зокрема, показано, що нестійка сідлова точка може стати стійкою. Наявність додаткових стійких точок призводить до істотної зміни всієї динаміки частинок в полі хвилі, зокрема, до утворення додаткових згустків. Ці згустки будуть відповідати тим частинкам, які потрапили в околицю стійких особливих точок.

Досліджено взаємодію у схемі оберненого лазера на вільних електронах. Як показали результати досліджень, при досить великій напруженості лазерного випромінювання, у схемі оберненого лазера на вільних електронах розвивається стохастична нестійкість. Така нестійкість починає розвиватись, коли параметр сили хвилі стає $a > 0,3$ та руйнує схему прискорення. Тільки частинки, розташовані в околиці нульових фаз комбінаційної хвилі, не беруть участі у хаотичній динаміці, вони знаходяться в острівцях стійкості. Проте зі збільшенням амплітуди хвиль, таких частинок стає все менше.

Досліджено задачу руху зарядженої частинки в полі плоскої електромагнітної хвилі довільної поляризації, коли параметр сили хвилі більше одиниці ($a > 1$), визначено вид траєкторії частинки та найбільш ефективні просторові та часові характеристики полів для прискорення заряджених частинок. В полі плоскополяризованої плоскої хвилі динаміка частинок суттєво залежить від початкового положення частинок щодо фази хвилі, в полі хвилі з круговою поляризацією поздовжній імпульс частинки не залежить від її початкової фази, а в полі імпульсу, динаміка не залежить від первісного розташування частинок у просторі. До того ж в полі

високочастотного імпульсу, що має кругову поляризацію, поздовжній імпульс частинок, і їх енергія, повторює форму обвідної імпульсу поля. Тому найбільш привабливим для прискорення заряджених частинок є лазерний імпульс з круговою поляризацією завдяки тому, що характер зміни поздовжнього імпульсу заряджених частинок, і їх енергія повторюють форму обвідної лазерного імпульсу, що дозволяє легше обмежити область взаємодії.

У відсутності умов перекриття резонансів знайдені спектральні області випадкового поля, які найбільш ефективно віддають свою енергію частинкам. Для цього із спектру хвилі, фаза якої випадково змінюється, виділялися три основні області спектра: низької, основної і область високої частоти. При цьому відсутні ділянки частотного спектра доповнювалися нульовими значеннями. При малих амплітудах поля, параметр сили хвилі $a \leq 0,01$, основний внесок в енергообмін між полем і частинкою відбувається в низькочастотній області спектра. При великих значеннях амплітуди поля $a \geq 1$ динаміка набору енергії якісно змінюється. Основний внесок у енергообмін вносить основна частина спектра.

Результати порівняння схем стохастичного прискорення й нагрівання частинок при взаємодії частинок з полем хвилі, фаза якої випадково змінюється і з полем регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів показала, що ефективність передачі енергії від поля частинкам значно вища при використанні регулярних полів. Більша ефективність стохастичного набору енергії зарядженими частинками в полі регулярної хвилі, порівняно з ефективністю набору енергії в хаотичних полях, обумовлена більшою напруженістю поля, що діє на частинки (як результат більш вузькою спектральною лінією такого випромінювання), а також наявністю циклотронних резонансів.

Сукупність одержаних результатів визначає динаміку заряджених частинок в полі інтенсивних електромагнітних хвиль. В умовах, коли параметр сили хвилі порядку або більше одиниці, визначені нові умови, в тому числі і при відсутності відомих резонансних умов, для ефективного

обміну енергії між частинками і хвилями. Побудовані нові схеми прискорення заряджених частинок в вакуумі, в яких не має необхідності у використанні резонансних умов.

Ключові слова: електромагнітна хвиля, частинки, лазерне прискорення, прискорення у вакуумі, стохастичність.

Список публікацій, у яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Buts A.V., Buts V.A., Kuzmin V.V. Acceleration of charged particles by elliptic polarized waves of large amplitude // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigation (43). 2004. № 2. P. 144-146.

2. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of the motion of charged particles in the field of the high-frequency impulse of large intensity // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (11). 2005. № 2. P. 137-139.

3. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика частиц в полях большой интенсивности // Успехи современной радиоэлектроники 2005. № 11. С. 5-20.

4. Буц В.А., Кузьмин В.В. Стохастическая неустойчивость движения частиц в схемах обращенного лазера на свободных электронах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (5). 2006. №5. С. 3-6.

5. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц интенсивным лазерным излучением // Успехи современной радиоэлектроники 2007. №6. С. 68-75

6. Буц В.А., Кузьмин В.В. Особенности динамики заряженных частиц в постоянном магнитном поле и в поле волны с меняющейся амплитудой // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно-физические исследования (53). 2010. №2 (66). С. 111-113.

7. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем интенсивного лазерного импульса // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно–физические исследования (59). 2012. №4(80). С. 117-121

8. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (19). 2013. №1(83). P. 137-139.

9. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic acceleration of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations (63). 2014. №5(93). P. 143-149.

10. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Особенности динамики частиц и полей при циклотронных резонансах // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 2017, Т 152, вып. 4 (10), С. 767–780

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

11. Buts V.A., Kuzmin V.V. Peculiarities of charged particles moving in the field of high frequency pulse of large intensity // 10th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, September 13-18, 2004, Alushta: Book of abstracts. NSC KIPT Kharkov, 2004. P. 153, (заочно).

12. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика заряженных частиц в поле электромагнитных импульсов большой напряженности // XIX Международного семинара по ускорителям заряженных частиц, 12-18 сентября 2005, Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2005. С. 61–62, (участь у обговоренні)

13. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // 11th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion and 2-nd International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokomaks. September

11-16, 2006, Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2006. P. 136, (доповідач).

14. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме полями интенсивных электромагнитных волн // XX Международного семинара по ускорителям заряженных частиц. 9-15 сентября 2007 Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2007. С. 49–50, (доповідач)

15. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of dynamics of the charged particles in the constant magnetic field and in the field of the wave with varying amplitude // XXI International Workshop on Charge Particle Accelerators September 2-6, 2009 Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2009. P. 136, (участь у обговоренні)

16. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем лазерного импульса // IX конференция по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям 21-25 февраля 2011 Харьков труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2011. С. 119, (доповідач).

17. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating and stochastic acceleration of charged particles // International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion September 17-22, 2012 Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2012. P. 131, (участь у обговоренні)

18. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Стохастическое ускорение заряженных частиц // XXIII Международного семинара по ускорителям заряженных частиц 08-14 сентября 2013 Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков 2013. С. 40, (участь у обговоренні).

Список публікацій, які додатково відображають наукові результати дисертації:

19. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (13). 2007. №1. P. 127-129.

20. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме интенсивными электромагнитными волнами // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно–физические исследования (50) 2008. №5. С. 116-120.

ABSTRACT

Kuzmin V.V. “Acceleration of charged particles in electromagnetic fields of high intensity”. – Research Project, Manuscript copyright.

Thesis for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences by specialty 01.04.20 - physics of beams of charged particles. – National Scientific Center “Kharkov Institute of Physics and Technology”. National Scientific Center “Kharkov Institute of Physics and Technology”. Kharkiv 2017

The thesis presents the results of determination of the peculiarities of the dynamics of charged particles in external strong electromagnetic fields are presented, in particular the conditions of their regular and chaotic motion are found.

The results of the solution of the problem of charged particles (electron) motion in the external magnetic field of magnitude H_0 directed along the axis z and in the field of an electromagnetic wave of arbitrary polarization are given. It is shown that under $a \geq 1$ conditions of cyclotron resonance are not necessary for an efficient exchange between charged particles and waves. In such fields, conditions for overlapping of nonlinear cyclotron resonances are always satisfied. At the same time, the dynamics of particles becomes chaotic and the average set of energy occurs by diffusion law.

It has been shown for the first time that when a wave-particle type interaction occurs, when the wave-wave parameter becomes more than one ($a > 1$), the resonant conditions are not necessary for the efficient exchange of energy between particles and waves. In this case, an efficient energy exchange can be realized in a short time, which can be equal to only one period of high-frequency wave.

It has been shown for the first time that in the strong ($a > 1$) transverse electromagnetic fields the longitudinal motion of charged particles plays a major role, whereas in the fields of low intensity the main motion occurs in the transverse to the wave vector of the direction.

The problem of the excitation of an electromagnetic field by a mono-energy bundle of oscillators is considered. For this an excitation of a wave propagating perpendicular to a magnetic field is considered. That beam that moves in a constant magnetic field directed along the z axis. The self-consistent system of equations that describes the dynamics of excited fields and the dynamics of charged particles consists of the equations of maxwell and equations of motion of individual particles. In the case when the density of the particle beams is not too large, the dynamics of particles and fields is similar to the dynamics of particles and fields when plasma-beam interaction. Increasing the density to the values $\omega_b^2 = 1$ of the corresponding particles of the beam leads to the fact that the level of excited oscillations as a result of the development of local instability of the motion of particles is limited to the value of the level of the field which sets the threshold for the development of local instability, It should be noted that this level can be determined when considering a one-particle problem. This feature allows considerably simplifying the consideration of many beam and plasma-beam problems. The increase in the beam density, to the values $\omega_b^2 \approx 2$ corresponding to it, leads to the fact that the depth of modulation of the excited wave field can reach one hundred percent. In this case, there is a complete modulation of the field of the excited wave. However, it should be noted that in this case fluctuations can be excited, but they are relaxing in nature, due to the fact that the excited oscillations are not their own.

Investigation of the interaction of particles in a constant magnetic field and in the field of a wave whose amplitude changes with a given frequency. It is proposed to use the modulation of the amplitude of the wave which accelerates the particles to improve the quality of the accelerated particle bunch. At the same time, if this frequency is close to the doubly-frequency of the bunch-wave oscillations of the

particles trapped by the particle wave, then conditions for the implementation of parametric instability arise. The energy of trapped particles is increasing.

For the first time, schemes of parametric, additional acceleration of charged particles are proposed. These circuits can be used to reduce the energy scattering of accelerated particles trapped in resonance. It is also proposed to use modulation of the amplitude of the wave to prevent the dispersion of clusters particles in the phase space.

To control the characteristics of accelerated electronic clusters, it is proposed to use such modulation of the wave amplitude which is much greater than the frequency of the bunch of oscillations of the particles. In this case, new special points appear on the phase portrait. In particular, it has been shown that an unstable saddle point can become stable. The presence of additional stable points leads to a significant change in the entire dynamics of particles in the wave field, in particular, to the formation of additional clusters. These clusters will correspond to those particles that have fallen into the vicinity of stable special points.

Investigation of interaction in the scheme of a reverse laser on free electrons. As the results of the research showed, with a sufficiently high intensity of laser radiation, stochastic instability develops in the pattern of a reverse laser on free electrons. Such instability begins to develop when the wave power parameter becomes $a > 0.3$, and it destroys the acceleration circuit. Only the particles located in the vicinity of the zero phases of the combination wave do not participate in the chaotic dynamics, they are in the islands of stability. However, with an increase in the amplitude of the waves of such particles, it becomes less and less.

Experimentally, the problem of the motion of a charged particle in the field of a plane electromagnetic wave of arbitrary polarization, when the wave power parameter becomes more than one ($a > 1$), determines the type of particle trajectory and the most effective spatial and temporal characteristics of the fields for accelerating charged particles. In the field of a flat-polarized plane wave, the dynamics of particles essentially depends on the initial position of the particles in relation to the phase of the wave, in the field of a wave with circular polarization

the longitudinal momentum of the particle does not depend on its initial phase, and in the field of the momentum the dynamics of the field does not depend on the initial arrangement of the particles in space. In addition, in the field of high-frequency pulse, which has circular polarization, the longitudinal momentum of the particles and their energy repeats the shape of the bypass pulse. Therefore, the most attractive for accelerating charged particles is a laser pulse with circular polarization, due to the fact that the nature of the change in the longitudinal pulse of charged particles and their energy repeat the shape of the bypass laser pulse, which makes it easier to limit the interaction field.

Investigation of schemes of stochastic acceleration and heating of particles, in the interaction of particles with a phase field of the phase which randomly varies. In the absence of conditions for overlapping of resonances, spectral regions of a random field that most effectively give their energy to particles are found. To do this, the spectrum of this wave distinguished three main areas of the spectrum: the low, the main and the region of high frequency. In this case, the missing areas of the frequency spectrum were supplemented by zero values. For small field amplitudes, the wave power parameter $a \leq 0.01$, the main contribution to the energy exchange between the field and the particle occurs in the low-frequency region of the spectrum. At large values $a \geq 1$ of the field amplitude, the dynamics of the set of energy changes qualitatively. The main contribution to energy exchange is to make the bulk of the spectrum.

The results of the comparison of the schemes of stochastic acceleration and heating of particles, when the interaction of particles with a wave field of phase which is randomly varies with the field of a regular wave under conditions of overlapping of nonlinear resonances, showed that the efficiency of energy transfer from the field to particles is much higher when using regular fields. The greater efficiency of the stochastic energy set by charged particles in the field of a regular wave compared with the efficiency of the energy set in chaotic fields is due to the greater field strength acting on the particles (as a result of the narrower spectral line of such radiation), as well as the presence of cyclotron resonances.

The set of obtained results determines the dynamics of charged particles in the field of intense electromagnetic waves. In conditions where the waveform parameter is of order or more than one, new conditions are determined, including in the absence of known resonant conditions, for the efficient exchange of energy between particles and waves. New schemes of acceleration of charged particles in a vacuum have been constructed in which there is no need to use resonant conditions.

Key words: electromagnetic waves, particles, laser acceleration, acceleration in a vacuum, stochastics.

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	26
1.1.	Неможливість прискорення в першому порядку по напруженості..	26
1.2.	Основні ідеї та схеми.....	28
1.2.1.	Метод прискорення за допомогою хвиль щільності заряду в плазмі.....	29
1.2.2.	Прискорення на основі зворотного ефекту Черенкова.....	32
1.2.3.	Обернений лазер на вільних електронах (ОЛВЕ).....	35
1.2.4.	Прискорення в полі сфокусованої хвилі.....	37
1.2.5.	Прискорення в обмеженій області в вакуумі.....	37
1.3.	Висновки.....	51
РОЗДІЛ 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ, МОДЕЛІ І РІВНЯННЯ. ІНТЕГРАЛИ	52
2.1.	Моделі і рівняння. Інтеграли.....	53
2.2.	Умови виникнення режимів з динамічним хаосом.....	57
2.3.	Динаміка частинок у полі хвильового пакету.....	64
2.4.	Динаміка частинок в полі плоскополяризованої хвилі при наявності зовнішнього постійного однорідного магнітного поля.....	79
2.5.	Самоузгоджена теорія збудження хвиль потоками осциляторів в умовах ізольованого циклотронного резонансу.....	83
2.6.	Висновки.....	89

РОЗДІЛ 3. ПАРАМЕТРИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ПОЛЕМ ЗОВНІШНЬОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ.....	91
3.1. Умови параметричного прискорення заряджених частинок полем зовнішньої електромагнітної хвилі.....	92
3.2. Чисельне дослідження процесу параметричного прискорення заряджених частинок.....	94
3.3. Висновки.....	97
РОЗДІЛ 4. ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ПОЛЕМ ДВОХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ РІЗНИХ ЧАСТОТ.....	99
4.1. Динаміка руху заряджених частинок в полі двох електромагнітних хвиль різних частот.....	100
4.2. Чисельне дослідження прискорення заряджених частинок полем двох електромагнітних хвиль різних частот.....	104
4.3. Висновки.....	107
РОЗДІЛ 5. ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У ПОЛІ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ДОВІЛЬНОЇ ПОЛЯРИЗАЦІЇ.....	108
5.1. Взаємодія з плоскополяризованою хвилею.....	109
5.2. Взаємодія частинок з хвилею кругової поляризації.....	112
5.3. Взаємодія частинки з імпульсом електромагнітної хвилі.....	117
5.4. Схеми прискорення в вакуумі.....	125

	17
5.5. Роль сил тертя при лазерному прискоренні.....	128
5.6. Висновки.....	136
РОЗДІЛ 6. СТОХАСТИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК.....	137
6.1. Динаміка частинок в полі зовнішньої електромагнітної хвилі.....	137
6.2. Модель хвилі з фазою, що випадково змінюється.....	140
6.3. Динаміка частинок в полі хвилі з фазою, що випадково змінюється.....	143
6.4. Динаміка частинок в полі регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів.....	149
6.5. Висновки.....	150
ВИСНОВКИ.....	151
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	154
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ...	165
ДОДАТОК Б.....	168

ВСТУП

Актуальність теми. Одним з основних процесів фізики плазми та фізики пучків заряджених частинок є процес взаємодії хвиля-частинка. Одним з основних параметрів, що характеризує таку взаємодію є параметр $a = eE_0 / mc\omega$. Цей параметр називається параметром сили хвилі або параметром нелінійності.

У переважній більшості випадків реальних застосувань цей параметр малий. Для 10 см діапазону довжин хвиль, цей параметр дорівнює одиниці, якщо напруженість електричного поля досягає величини 10^5 В/см, відповідно для оптичного діапазону ($\lambda = 10^{-4}$ см) ця напруженість становитиме 10^{10} В/см. Такі напруженості полів призводять до руйнування структур, в яких вони ж і створювалися. Тому до недавнього часу практично вся електродинаміка була побудована для випадку, коли параметр нелінійності малий. Малість цього параметра призводить до того, що для ефективного обміну енергій заряджених частинок і хвиль необхідно створювати умови їх тривалої синхронної взаємодії. Така синхронна взаємодія реалізується при виконанні однієї з резонансних умов: черенковський резонанс, циклотронний резонанс, резонанс на нормальному і аномальному ефектах Доплера, параметричний та інші.

На даний час, в основному завдяки успіхам лазерної технології, отримані поля, напруженість яких така, що параметр нелінійності може бути значно більше одиниці. З такими полями відкриваються можливості створення нових схем прискорення заряджених частинок. Причому таке прискорення може відбуватися у вакуумі, і не вимагає виконання резонансних умов. Дійсно, коли параметр сили хвилі великий, порядку або більший за одиницю, то заряджена частинка в полі таких хвиль набуває швидкість близьку до швидкості світла за час порядку періоду високочастотної хвилі. В результаті умови синхронізму між частинкою і хвилею можуть зберігатися протягом досить тривалого часу і на великій

відстані без необхідності виконання умов резонансу. Крім цього, у полях такої інтенсивності легко виникають режими з динамічним хаосом. Для цілей прискорення заряджених частинок такі режими мають бути пригнічені. Однак вони можуть бути корисними для інших прикладних цілей. Наприклад, для нагріву заряджених частинок, стохастичного прискорення, а також для збудження стохастичного випромінювання.

У цих умовах, коли параметр сили хвилі, порядку або більше одиниці, необхідно визначити нові (відмінні від резонансних) умови для ефективного обміну енергії між частинками і хвилями. Темою запропонованих досліджень є вивчення динаміки заряджених частинок у полі інтенсивних електромагнітних хвиль. Побудова нових схем прискорення заряджених частинок у вакуумі, в яких не буде необхідності у створенні резонансних умов взаємодії хвиля-частинка. У зв'язку з вищесказаним, тема дисертаційної роботи, безумовно, **являється актуальною.**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що становлять основу дисертаційної роботи отримані в ННЦ «ХФТІ» НАНУ в рамках виконання планових бюджетних науково-дослідних робіт:

«Програма фундаментальних досліджень ННЦ «ХФТІ» по атомній науці і техніці до 2010 р.», № д/р 080906UP0010 у рамках теми: «Теоретичні дослідження фізичних принципів і концепцій плазмової НВЧ-електроніки, кильватерних методів прискорення частинок в плазмі та діелектрику, інерціального термоядерного синтезу на базі лінійного індукційного прискорювача іонів» (шифр теми III-2-06), ПЕНМП ННЦ «ХФТІ» (2005–2010р.).

«Програма фундаментальних досліджень ННЦ «ХФТІ» по атомній науці і техніці до 2015 р.», № д/р 0112U002026 у рамках теми: «Розробка основ плазмової НВЧ-електроніки, нових методів прискорення заряджених частинок, інерціального термоядерного синтезу, основанийого на пучках

важких іонів» (шифр теми III-2-11), ІПЕНМП ННЦ «ХФТІ» (2011–2015р).

«Програма фундаментальних досліджень ННЦ «ХФТІ» по атомній науці і техніці до 2020 р.», № д/р 0116U006486 в рамках теми: «Теоретичні дослідження проблем плазмової НВЧ-електроніки, нерівноважної плазмохімії та нових принципів прискорення для отримання і використання пучків заряджених частинок в інерціальному термоядерному синтезі та фізиці високих енергій», шифр теми III-3-16, (ІПЕНМП), виконується за Постановою Бюро ВЯФЕ НАН України від 01.07.2015 р. протокол № 4 (110), п. 2.

Дисертант у зазначених роботах виступав у якості виконавця.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є знаходження нових умов прискорення заряджених частинок, при їх русі у електромагнітному полі великої напруженості, коли заряджена частинка на відстані довжини хвилі набуває енергію, яка дорівнює або є більшою за енергію спокою цієї частинки. Особливу увагу приділено умовам, при яких регулярна динаміка взаємодії заряджених частинок з полем електромагнітних хвиль переходить у хаотичну динаміку цих частинок.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

1. Визначити вплив резонансних умов на прискорення частинок у полях, коли параметр сили хвилі стає більше одиниці ($a > 1$). Для цього дослідити рух заряджених частинок (електронів) у зовнішньому постійному магнітному полі величини H_0 , яке направлене уздовж осі z , і у полі електромагнітної хвилі довільної поляризації.

2. Визначити значення густини пучка, за якою має місце регулярна або тільки хаотична динаміка частинок пучка у самоузгоджених електромагнітних полях, що збуджуються цим пучком. В останньому випадку будуть випромінюватися електромагнітні хвилі з широким спектром.

3. З метою підвищення якості згустку прискорених частинок розглянути динаміку частинок у постійному магнітному полі і у полі хвилі, амплітуда якої змінюється із заданою частотою.

4. Розглянути схему оберненого лазера на вільних електронах (ОЛВЕ) та визначити максимальні значення напруженості полів, при яких стохастична нестійкість не відіграє істотну роль і при яких нею не можна нехтувати.

5. Визначити вид траєкторії частинки в полі хвилі довільної поляризації та в полях довільної амплітуди. Визначити найбільш ефективні для прискорення заряджених частинок просторові та часові характеристики полів. Для цього розглянути задачу руху зарядженої частинки в полі плоскої електромагнітної хвилі довільної поляризації.

6. Визначити найбільш ефективні схеми стохастичного прискорення й нагрівання частинок. Для цього провести порівняння схем при взаємодії частинок з полем хвилі, фаза якої випадково змінюється і з полем регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів.

Об'єкт дослідження. Регулярна і хаотична динаміка заряджених частинок у сильних електромагнітних полях.

Предмет дослідження. Закономірності та особливості динаміки заряджених частинок у зовнішніх електромагнітних полях.

Методи дослідження. Добре апробовані аналітичні методи теоретичної фізики, фізики пучків заряджених частинок, методи числового розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що вперше:

1. Показано, що при взаємодії типу хвиля-частинка, коли параметр сили хвилі стає більше одиниці ($a > 1$), то резонансні умови не є необхідними для обміну енергією між частинками та хвилями: набір енергії частинками в умовах циклотронного резонансу, а також у відсутності цього резонансу однаковий. У цьому випадку обмін енергії реалізується за короткий час, який може дорівнювати всього одному періоду високочастотної хвилі.

2. Показано, що для визначення динаміки електромагнітних полів, що збуджуються моноенергетичним пучком осциляторів, можливо використовувати одночасткове наближення.

3. Вперше знайдено, що електронний пучок може збуджувати регулярні коливання в умовах циклотронного резонансу, коли частота хвилі, що збуджується, є у декілька разів меншою, ніж пучкова частота, а саме $\omega_b^2 \approx 2\omega^2$. Відзначимо, що нелінійні коливання амплітуди поля, що збуджуються, можуть досягати ста відсотків.

4. Запропоновано застосування додаткового параметричного прискорення заряджених частинок, що дозволяє зменшити розкид енергій прискорених частинок захоплених у резонанс. Також визначена така модуляція амплітуди хвилі, яка значно перевершує частоту баунс-коливань частинок та яка не дозволяє розпливатися частинкам згустків у фазовому просторі.

5. Показано, що в схемі ОЛВЕ, коли параметр сили хвилі досягає значень більше 0,3, динаміка частинок стає стохастично нестійкою, що призводить до руйнування схеми прискорення.

6. Показано, що в сильних ($a > 1$) поперечних електромагнітних полях основну роль у динаміці заряджених частинок відіграє нелінійна магнітна сила Лоренца (вона пропорційна $a^2 > a$). Тому поздовжній, по відношенню до хвильового вектору, рух заряджених частинок значно більш суттєвий ніж поперечний рух. Відзначимо, що у полях малої інтенсивності основний рух відбувається у поперечному до хвильового вектору напрямку.

7. Вперше показано, що у полі лазерного імпульсу з круговою поляризацією, за відсутності зовнішнього магнітного поля, форма зміни поздовжнього (по відношенню до хвильового вектору) імпульсу зарядженої частинки повторює форму огинаючу імпульсу поля. Завдяки цьому саме лазерний імпульс з круговою поляризацією найбільш ефективно можна використати для прискорення заряджених частинок. У цьому випадку прискорені частинки можуть бути легко виведені з області взаємодії.

8. Вперше проведено порівняння двох схем нагрівання частинок плазми, а саме нагріванням частинок зовнішнім хаотичним полем (з широким спектром $\Delta\omega \sim \omega$) та нагрівання частинок зовнішнім регулярним полем (з

вузьким спектром $\Delta\omega \ll \omega$) в режимах з динамічним хаосом. Доведено, що нагрівання регулярними хвилями є значно більш ефективним, ніж хаотичними полями.

Практичне значення одержаних результатів. Для практичного використання найбільш важливим результатом є той факт, що показана істотна відмінність динаміки заряджених частинок у полях малої і великої інтенсивності. Зокрема, у полях великої інтенсивності, найбільш значною є нелінійна магнітна сила Лоренца. Вона пропорційна квадрату параметру сили хвилі ($a^2 > a > 1$). Крім цього, вона спрямована вздовж хвильового вектору хвилі, що прискорює частинки. Таким чином, в полях поперечних електромагнітних хвиль великої інтенсивності основним є повздовжній рух зарядженої частинки по відношенню до хвильового вектору, а не поперечний. При цьому з'являється можливість використовувати цю особливість динаміки частинок в сильних полях для нових схем прискорення. Ці нові схеми прискорення не вимагають електродинамічних структур і не вимагають наявності середовища. Така особливість цих схем прискорення дозволяє використовувати сучасні досягнення лазерних технологій, а саме максимальні напруженості лазерних полів, які можуть перевершувати 10^9 В/см. При цьому знімається одна з основних проблем, яка пов'язана з лазерним прискоренням - пробій середовища, з яким взаємодіє лазерне випромінювання. Запропоновані схеми прискорення особливо корисні у схемах доприскорення. Як приклад можна вказати на можливість збільшити енергію заряджених частинок з початковою енергією $\gamma_0 = 10$ в 10 разів на відстані 0,4 см полем лазерного випромінювання, параметр сили хвилі якого дорівнює 3.

Особистий внесок здобувача. Автор брав участь в усіх етапах проведених робіт: він брав участь у постановці проблем; у формулюванні теоретичних моделей, які адекватно відображають суть проблеми, і які можуть дати відповіді на питання, що вирішуються; він проводив аналітичні та чисельні дослідження; брав участь в аналізі отриманих результатів і у формулюванні висновків.

Основні результати, що виносяться на захист, отримано дисертантом особисто. Особистий вклад здобувача у роботах, опублікованих у співавторстві, полягає у наступному.

У роботах [1-3, 9, 13, 14, 18] здобувачем проведені дослідження динаміки заряджених частинок у однорідному постійному магнітному полі та у полі плоскої хвилі довільної напруженості і поляризації. Досліджено динаміку заряджених частинок у полі лазерного імпульсу великої амплітуди з лінійною та еліптичною поляризацією.

У роботах [4-7, 15, 16] автором отримано результати аналітичного та числового досліджень руху заряджених частинок у схемі прискорення типу ОЛВЕ в інтенсивних електромагнітних хвилях.

У роботах [8, 17] дисертантом проведені дослідження динаміки частинок у постійному магнітному полі та в полі хвилі, амплітуда якої змінюється з заданою частотою.

У роботах [10, 11, 19, 20] автором проведено порівняння двох схем нагрівання (стохастичного прискорення) заряджених частинок – при взаємодії з полем хвилі, фаза якої випадково змінюється, та з полем регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів.

У роботі [12] дисертантом розглянута задача про збуджування електромагнітного поля моноенергетичним пучком осциляторів.

Здобувач брав участь у аналізі результатів досліджень та їх оформленні у вигляді журнальних публікацій та доповідей на семінарах і конференціях.

Автором було проведене числове моделювання, яке базувалося на апробованих числових алгоритмах, що дозволяють моделювати динаміку заряджених частинок у полях великої напруженості.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися, обговорювалися і отримали позитивну оцінку на таких наукових конференціях: 10th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion (Alushta Crimea, Ukraine, September 13-18, 2004) [13]; XIX Международный семинар по ускорителям заряженных частиц. (Алушта,

Крым, Украина, 12-18 сентября 2005) [14]; 11th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion and 2-nd International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokomaks. (Alushta Crimea, Ukraine, September 11-16, 2006) [15]; XX Международный семинар по ускорителям заряженных частиц. (Алушта, Крым, Украина, 2-6 сентября 2007) [16]; XXI International Workshop on Charge Particle Accelerators (Alushta Crimea, Ukraine, September 2-6, 2009) [17]; IX Конференция по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям (Харьков, Украина, 21-25 февраля 2011) [18]; International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion (Alushta, Crimea, Ukraine, September 17-22, 2012) [19]; XXIII Международный семинар по ускорителям заряженных частиц. (Алушта, Крым, Украина, 8-14 сентября 2013) [20].

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано всього 12 статей у спеціалізованих фахових наукових виданнях. З них 10 статей [1-4, 6, 8-12] задовольняють вимогам до публікацій, на яких ґрунтується дисертаційна робота, 2 статті у науково-технічних журналах [5, 7] додатково характеризують дисертацію. Статті [1, 2, 4, 5, 7-12] включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science ([1, 2, 4, 5, 7-11] - Q3, [12] – Q2 за Scimago Journal & Country Rank, www.scimagojr.com), 3 статті опубліковано у спеціалізованих фахових наукових виданнях іноземних держав [3, 6, 12]; 8 робіт у збірниках наукових праць, в матеріалах та тезах доповідей на наукових конференціях [13-20].

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків, списку використаних літературних джерел та двох додатків. В дисертації пронумеровано 170 сторінок, з них основний текст становить 135 сторінок. Дисертація містить 71 рисунок. Бібліографія включає 112 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Проблема лазерного прискорення електронів, останнім часом, привертає до себе помітну увагу. Запропоновано багато різноманітних схем прискорення заряджених частинок за допомогою лазерів. Інтерес до цієї проблеми зрозумілий. Випромінювання сучасних потужних лазерів має дуже високу інтенсивність (до 10^{18} Вт/см² та вище), якій відповідає дуже сильне електричне поле (до 10^{10} В/см та більше) [21, 22]. В принципі настільки сильні поля можуть забезпечити дуже високий темп прискорення, який може привести до дуже значного збільшення енергії електронів на дуже малій довжині. Звідси випливає, що в принципі компактні лазерні методи прискорення могли б мати величезні переваги у порівнянні з існуючими дуже великими традиційними прискорювачами заряджених частинок. Однак для створення таких компактних лазерних прискорювачів необхідно забезпечити можливість використання сильних лазерних полів для цілей прискорення. На шляху вирішення цього завдання є певні труднощі. Опубліковано досить багато робіт, наприклад [23-30], в яких аналітично і чисельно досліджується прискорення електронів у вакуумі сфокусованим пучком лазерного випромінювання.

Основні труднощі використання інтенсивного лазерного поля для цілей прискорення електронів полягає в тому, що поле лазерної хвилі є знакозмінним. Таке поле викликає осциляції частинок, але можливість отримання систематичного приросту енергії їх поступального руху, взагалі кажучи, не очевидна [31]. Також ефект фазового ковзання є причиною обмеження ефективності прискорення заряджених частинок лазерним випромінюванням [32].

1.1. Неможливість прискорення в першому порядку по напруженості

Можна легко продемонструвати твердження про відсутність енергообміну в першому порядку по полю для довільних світлових пучків.

Прямий ефект Черенкова полягає в передачі енергії від частинки до поля в припущенні, що має місце синхронізм $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ між швидкістю частинки і відповідною проекцією фазової швидкості хвилі. При наявності фазового синхронізму може відбуватися або вимушене черенковське випромінювання, або зворотний ефект Черенкова в залежності від фази поля уздовж траєкторії частинки. Оскільки ця фаза постійна на траєкторії частинки, передача енергії відбувається вже в першому порядку по амплітуді поля.

Відсутність синхронізму $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ в вакуумі очевидно для плоскої монохроматичної хвилі $E \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Для світлового імпульсу зі складною просторовою структурою відсутність синхронізму менш очевидна. У деяких роботах, опублікованих на тему лазерного прискорення частинок, пропонуються складні конфігурації світлових полів і імпульсів, для опису яких неминуче вдаються до наближених виразів. Хоча самі наближені вирази дають маленьку відносну помилку, їх використання може призвести до помилкового результату щодо енергообміну між полем і часткою.

Для роз'яснення цієї проблеми запишемо енергію, що передається від поля до частинки з зарядом e , яка рухається уздовж траєкторії $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, дорівнює:

$$\delta K = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{real}[\mathbf{r}(t)] \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt. \quad (1.1)$$

Оскільки магнітне поле не робить роботи (тут \mathbf{E}_{real} – миттєва речова напруженість поля світлової хвилі).

Також задамо необурений рух частинки:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (1.2)$$

Враховуючі вираз (1.2), вираз для енергії можна записати у вигляді:

$$\delta K^{(1)} = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_0 \vec{E}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t) dt + O(E^2). \quad (1.3)$$

Врахувавши $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}/k_1$, де $k_1 \equiv \omega/c$, та проінтегрувавши вираз (1.3), отримаємо остаточний вираз для енергії частинки:

$$\delta K^{(1)} = e\pi \int \mathbf{v}_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - c|\mathbf{k}|) d\mathbf{k} + c.c. \quad (1.4)$$

Аналізуючи останній вираз ми бачимо, що оскільки для частинки $|\mathbf{v}_0| < c$, аргумент δ - функції ніколи не стає рівним нулю і отже, $\delta K^{(1)} = 0$. Рівність нулю аргументу $\delta(x)$ в останньому виразі відповідає умові Черенкова, яке може бути виконане в середовищі з показником заломлення $n > c/v_0$, ($\omega = c|\mathbf{k}|/n < kv_0$), але не в вакуумі.

Таким чином, можливість прискорення лазерним полем можлива у разі виконання умови Черенкова, або у разі обмеження області взаємодії частинок з полем. Обмеження області взаємодії можливо організувати, припустимо, введенням структур, що обмежують проникнення поля і відповідно взаємодію з ним частинок. При цьому, по можливості, необхідно організувати схему прискорення таким чином, щоб властивий періодичний характер взаємодії частинок з полем електромагнітної хвилі, був, якомога найменше виражений.

1.2. Основні ідеї та схеми

В даний час запропоновано ряд способів вирішення проблеми прискорення заряджених частинок за допомогою сильних електромагнітних полів. Найбільш відомими з них є методи які засновані на використанні додаткового середовища, для отримання поздовжньої хвилі, яка прискорює заряджені частинки. До таких методів можливо віднести прискорення за допомогою хвиль щільності заряду в плазмі та прискорення на основі зворотного ефекту Черенкова.

1.2.1. Метод прискорення за допомогою хвиль щільності заряду в плазмі

Плазма є привабливим середовищем для прискорення частинок [33] через високу напруженість електричного поля, яке вона може витримати. В основному на плазмовому прискорювачі [34], частинки отримують енергію від поздовжньої плазмової хвилі. Щоб виникли релятивістські пучки частинок, плазмові хвилі повинні бути досить інтенсивними, зі швидкістю фази близькою до швидкості світла у вакуумі.

Багато лабораторних схем використовується, для отримання інтенсивної плазмової хвилі, яка може прискорити заряджені частинки. Зокрема таку хвилю можна отримати за допомогою лазерного випромінювання (Plasma Beat-Wave Acceleration (PBWA) та Laser Wake-Field Acceleration (LWFA)), його більш сучасна модифікація, заснована на само модуляції лазерного імпульсу (Self-Modulation Wake-Field Acceleration (SMWFA)), а також за допомогою коротких електронних згустків або їх періодичної послідовності (Plasma Wake-Field Acceleration (PWFA)).

Перші схеми для прискорення заряджених частинок засновані на використанні релятивістської плазмової хвилі, виробленої лазерами, були запропоновані в [34]. Але тільки в [35] та [36] було продемонстровано, що введені високоенергетичні електрони можуть бути прискорені до істотних енергій релятивістськими плазмовими хвилями. Головна ціль в цих експериментах була продемонструвати прискорення частинок релятивістською плазмовою хвилею. У цих експериментах максимальний градієнт поля, що прискорює, був обмежений уповільненням хвилі, яке відбувається в холодній плазмі коли плазмове обурення щільності хвилі дорівнює плазмовій щільності. Хвильове гальмування відбувається, коли із-за нелінійних процесів, високі гармоніки, спотворюють спочатку синусоїдальну хвилю в криву трикутної форми, з крутим переднім фронтом, градієнт якого в кінцевому рахунку стає нескінченним. Такий процес прискорення ґрунтується на використанні двох лазерних імпульсів, солінійно

введених в плазму, що має малу щільність. Таким чином плазмова частота дорівнює частоті відмінності цих двох лазерних променів. При таких умовах велика амплітуда релятивістської плазмової хвилі поширюється зі швидкістю фази, яка дорівнює швидкості лазерного променя, яка є близькою до швидкості світла.

Надалі прискорення частинок релятивістськими електронними плазмовими хвилями було продемонстровано в багатьох експериментах [37-39] були отримані більш ніж 100MeV електронні пучки на відстанях приблизно 1 мм. У цих експериментах було досягнуто темп прискорення порядку 1 GeV/см. Відзначимо, що максимальний темп прискорення в високоенергетичних прискорювачах складає близько 20 мВ/м. Подальше ж збільшення темпу прискорення, ускладнено, в основному через розстройку системи.

Поява коротких лазерних імпульсів петаватної і тераватної потужності, призвели до появи ефектів при яких лазерно-електронна взаємодія стає дуже нелінійна і релятивістська. Також відкриваються можливості вивчити лазерно-плазмові взаємодії ультрависокої інтенсивності, де з'являється широке розмаїття цікавих явищ, таких як:

- релятивістське самофокусування лазерів в плазмових каналах,
- релятивістська самофокусуюча модуляція,
- прискорення фотонів,
- протонне прискорення,
- генерація гармонік,
- генерація ультрависоких магнітних полів і т.і.

Таке широке розмаїття явищ підігриває інтерес до даного методу прискорення електронів. Однак цей метод обмежений величиною максимальної напруженості електричного поля релятивістської хвилі в плазмі, яка дорівнює:

$$E_{\max} = \frac{\tilde{n}_p}{n_0} \sqrt{4\pi n_0 m c^2 \gamma}, \quad (1.5)$$

де \tilde{n}_p – максимальне значення щільності в хвилі просторового заряду в плазмі.

Напруженість електричного поля хвилі щільності заряду істотно залежить від способу її збудження. У формулі (1.5) відношення \tilde{n}_p/n_0 визначається способом збудження щільності заряду.

При лазерному збудженні ця величина не перевищує 15% і дорівнює:

$$\frac{\tilde{n}_p}{n_0} = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (1.6)$$

де $a = eE\lambda/2\pi mc^2$, E и $\lambda = 2\pi/\omega$ – напруженість електричного поля і довжина хвилі лазерного випромінювання відповідно.

При збудженні плазмової хвилі електронними згустками величина складає близько 3% і $\tilde{n}_p/n_0 \sim n_b/n_0$ де n_b – щільність електронів пучка

Так максимально можливе значення напруженості електричного поля заряду в плазмі, при $E=10^{10}$ В/см, $\lambda=10^{-4}$ см та $n_0=10^{19}$, досягає значення порядку 10^8 В/см.

Таким чином, збільшення максимальної напруженості електричного поля плазмової хвилі обмежено максимальним значенням напруженості електричного поля або довжиною хвилі лазерного випромінювання, а при збудженні електронними згустками - величиною максимальної щільності згустку електронів.

Друге обмеження максимальної напруженості електричного поля плазмової хвилі пов'язане з величиною щільності плазми. Максимальне значення щільності досягнуте для газової плазми $n_0=10^{19}$, подальше збільшення щільності можливо при переході до плазми твердого тіла $n > 1$.

При цьому зауважимо, що величина максимально можливої напруженості поля хвилі щільності заряду в плазмі обмежена умовою, що

швидкість електронів плазми v_e , яка здобувається в поле цієї хвилі, дорівнює її фазовій швидкості. Це обмеження призводить до того, що параметр сили хвилі $a = eE/mc\omega$ не може бути більше 1.

1.2.2. Прискорення на основі зворотного ефекту Черенкова

У 1962 р Шимода [40] запропонував для прискорення частинок використовувати зворотний ефект Вавилова - Черенкова, коли уповільнення електромагнітної хвилі досягається наявністю середовища з показником заломлення $n(\omega)$, а резонансний характер взаємодії частинки з падаючою хвилею забезпечується вибором черенковського кута між напрямком падаючої хвилі і швидкістю частинки:

$$\cos\theta = 1/n(\omega)\beta. \quad (1.7)$$

У 1972-1980 рр. в роботах [41, 42] детально було розглянуто прискорення заряджених частинок за допомогою оберненого ефекту Вавилова - Черенкова в різних, в тому числі газоподібних, середовищах. В роботі Г. А. Нагорського, Ю. Ф. Орлова, [42], по суті, вперше в теорії лазерного прискорення на прикладі оберненого ефекту було приділено увагу питанням стійкості руху прискорених частинок. Зокрема, було звернено увагу на роль магнітного поля хвилі лазера, напруженість якого в середовищі більше напруженості електричного поля. При релятивістських швидкостях частинок його дія виявляється істотною і порушує стійкість черенковського резонансу хвиля - частинка. Для забезпечення стійкості було запропоновано включення постійного магнітного поля, спрямованого уздовж магнітного вектору хвилі. Також було запропоновано і проаналізовано система трьох черенковських хвиль, де також можливий режим стійкого прискорення частинок з великим фазовим об'ємом пучка.

Для обох цих варіантів прискорення подалі був розвинений метод обліку впливу багатократного розсіяння на стійкість режиму прискорення і показано, що тривала стійкість має місце тільки при досить великій

напруженості електричного поля хвилі. Зокрема, в полі пікосекундних лазерних імпульсів з потоком 10^{14} Вт/см², коли пробою середовища ще немає, багаторазове розсіювання не може ефективно перешкоджати тривалому прискоренню частинок.

В роботі [43] було здійснено перше експериментальне спостереження зверненого ефекту Вавилова - Черенкова на вільних електронах, що проходять різні середовища. В [44] попередні дані роботи [43] були розвинені і підтверджені; на додаток до гелієвого середовища, використаного в роботі [43], були застосовані газоподібні водень і метан. Крім того, вплив лазерного імпульсу на розподіл електронів було досліджено при порушенні черенковської умови, а саме при зміні коефіцієнта заломлення середовищ (див. також [45]).

В [46] була виявлена цікава і, мабуть, перспективна можливість створення великих полів за допомогою вторинного обігу ефекту Вавилова - Черенкова, коли прискорені і модельовані, за допомогою оберненого ефекту, пучки частинок, потрапляючи в іншу, спеціально підібрану середу, створюють випромінювання з високою напруженістю поля. У цьому методі звернення, ефект Вавилова - Черенкова використовується двічі. Спочатку за участі лазера модулюються пучки частинок, які отримали необхідний запас енергії в традиційному прискорювачі, потім за рахунок цієї енергії порушується черенковська хвиля в природньому або штучному середовищі, і знову використовується обернений ефект для прискорення частинок.

В огляді Фонтана [47] наведені результати розгляду ефектів пробою середовища і впливу гальмівного випромінювання електронів в середовищі на процес їх прискорення з використанням оберненого ефекту Вавилова - Черенкова.

Суть методу прискорення на основі оберненого ефекту Черенкова полягає в наступному: якщо в речовині з показником заломлення світла $n > 1$ поширюється електромагнітна хвиля з фазовою швидкістю $v_f = c/n < c$, то вона може прискорювати заряджені частинки, які рухаються зі швидкістю v ,

близькою до v_f , якщо виконується умова $n(v/c)\cos\theta=1$, де v - швидкість частинок, θ – кут між v та v_f .

У роботі [46] отримано умову прискорення за рахунок оберненого ефекту Черенкова яке ґрунтується на наявності будь-якого додаткового обурення, наприклад постійного однорідного магнітного поля з напруженістю $H=a_0(n^2-1)/n$, спрямованого уздовж вектору магнітного поля хвилі. У роботі [46] також наведено оцінку швидкості росту енергії частинок:

$$E = mc \left\{ \gamma_n^2 + \left[(\gamma^2 - \gamma_n^2)^{1/2} + ea_0 t (n^2 - 1)^{1/2} / (mc) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (1.8)$$

де $\gamma_n = n/(n^2-1)^{1/2}$, a_0 – напруженість електричного поля хвилі в лабораторній системі координат.

Труднощі здійснення і використання цього способу прискорення полягають у тому, що для його високої ефективності необхідна середа з досить високим значенням n .

У цьому випадку має місце значне кулонівське розсіювання на атомах середовища. Крім того, в сильних полях неминучий оптичний пробій, а ще раніше - нагрівання і зміна властивостей середовища.

Для забезпечення фазового синхронізму електронів і прискорюючого поля можна використовувати різного роду уповільнюючі системи, в яких швидкість електромагнітної хвилі менше швидкості світла у вакуумі. Тоді, якщо швидкість електронів дорівнює фазовій швидкості хвилі, можливе ефективне прискорення. Створити сповільнену електромагнітну хвилю можна, наприклад, використовуючи середу з показником заломлення $n > 1$ [48] або дифракційну решітку, вздовж площини якої, перпендикулярно напрямку штрихів, поширюється світло (зворотний ефект Сміта-Парселла [49]). В цьому випадку труднощі здійснення цієї схеми полягає в тому, що під дією інтенсивного випромінювання, середовище може змінювати свій агрегатний стан, а решітка просто випаровуватися.

Одним з таких варіантів є межа розділу середовище - вакуум, на яке з середовища падає електромагнітна хвиля. В умовах повного внутрішнього відображення випромінювання (у вакуумі) в приповерхневому шарі створюється поверхнева хвиля, швидкість руху якої уздовж поверхні менша швидкості світла. Така система в принципі може бути використана для прискорення електронів, що ковзають уздовж поверхні середовища в поле поверхневої хвилі [50, 51]. Труднощі реалізації і використання такої системи ті ж, що і в попередніх системах: необхідність підтримки фазового синхронізму і можливість руйнування середовища в сильному світловому полі.

На закінчення, необхідно відзначити деякий спад інтересу, що спостерігається в останні роки, до розвитку методу прискорення частинок за допомогою оберненого ефекту Вавилова-Черенкова [52–59]. Можливо, це пов'язано з виникненням нових схем прискорення, що інтенсивно обговорюються в даний час в літературі. Однак треба завжди пам'ятати, що ефект Вавилова-Черенкова в «неявному вигляді», без згадки про це, використовується практично у всіх схемах прискорення (наприклад, в різного типу кристалічних прискорювачах).

1.2.3. Обернений лазер на вільних електронах (ОЛВЕ)

Як відомо, ідеї використання лазерів для прискорення заряджених частинок з'явилися майже відразу ж після успішного пуску перших лазерів на початку 60-х років. У 1962 р А. А. Коломенський і А. Н. Лебедев [60-62] запропонували принцип авторезонансного прискорення частинок, що рухаються в магнітному полі різних конфігурацій і одночасно в полі електромагнітної хвилі. Аналогічні ідеї майже одночасно були розвинені В. Я. Давидовським [63].

У 1972 р. Пальмер [64] через 10 років після появи робіт [60, 63] детально розглянув взаємодію частинок, що рухаються в магнітному ондуляторі або спіральному магнітному полі, з лазерною хвилею і розрахував пристрій для

прискорення частинок, який отримав згодом назву оберненого лазера на вільних електронах (ОЛВЕ). При цьому виявилось, що темп прискорення обернено пропорційний енергії частинки і може досягати 100 МеВ/м при енергіях частинок до декількох мегаелектрон-вольт.

У 1982 р А. М. Кондратенко і Е. Л. Салдін [65] здійснили детальний розрахунок оберненого лазера на вільних електронах з поперечним знакозмінним постійним магнітним полем.

В оглядах Пелегріні [66, 67] і Ренієрі [68] розглянуто конкретні схеми прискорювачів на енергії до декількох сот гігаелектрон-вольт, які засновані на ОЛВЕ. При цьому темп прискорення електронів навіть при енергіях порядку 10 ГеВ можна зберегти на рівні ~ 100 МэВ/м, причому на струм не накладається принципів обмежень. Прискорення методом ОЛВЕ привабливо ще й в тому відношенні, що тут може бути повністю використаний весь великий теоретичний доробок і майже вся експериментальна техніка, яка розроблена для лазерів на вільних електронах (див., Наприклад, огляди [69-72]).

Перевага ОЛВЕ полягає у відсутності необхідності в створенні плазми або будь-якого середовища, так як прискорення відбувається у вакуумі. Отже, в ОЛВЕ не виникає проблем, пов'язаних з руйнуванням середовища або з пондеромоторним тиском. Однак і в цьому випадку є обмеження на інтенсивність поля хвилі, і вони пов'язані з нелінійністю. У найпростішій схемі ОЛВЕ з постійними параметрами це обмеження визначається умовою $\mu < 1$, де μ – параметр насичення. При цьому оптимальна довжина ондулятора і максимальний приріст енергії $\Delta E \sim \Delta_m$ дорівнюють відповідно

$$l_{onm} \sim E / [e(a_0 B_0)^{1/2}], \Delta E_{\max} \sim E \lambda / l_{onm},$$

де за припущенням $l_{onm} \gg \lambda_0$, і, отже, $E_{\max} \ll E$. Наприклад, при $B_0 = 10^3$ Гс, $\lambda_0 = 2$ см та $\gamma = 10$ умова $l_{onm} \gg \lambda_0$, дає $a_0 \ll 3 \cdot 10^7$ В/см.

Одним із варіантів ОЛВЕ можна назвати обернений неколінеарний комптонівський лазер [73]. По суті, пропонується використовувати дві

електромагнітні хвилі з близькими частотами і близькими напрямками хвильових векторів. Електронний пучок проходить через перетин їх фокальних областей і ефективно набирає енергію. У такій схемі також існують обмеження, пов'язані з нелінійністю. Крім того, є проблема забезпечення достатньо великої довжини взаємодії.

1.2.4. Прискорення в полі сфокусованої хвилі

У роботах [74, 75] описана схема прискорення, в якій електрони взаємодіють у вакуумі з полем плоскополяризованої сфокусованої електромагнітної хвилі і з постійним однорідним магнітним полем, спрямованим перпендикулярно площині поляризації. Зауважимо, що даний метод має низку переваг. По-перше, приріст енергії електрона і сам ефект прискорення не мають настільки різко вираженого резонансного характеру, як у всіх описаних вище схемах. По-друге, оскільки прискорення відбувається у вакуумі, а не в плазмі і не в речовині, не виникає обмежень на інтенсивність поля, пов'язаного з пондеромоторним тиском або з руйнуванням середовища. І нарешті, по-третє, як і в ОЛВЕ, прискорення виявляється можливим не тільки при оптимальних фазових співвідношеннях, а й за відсутності фазової селективності, тобто в середньому по фазі поля або електронів у пучку.

1.2.5. Прискорення в обмеженій області в вакуумі

Останнім часом великий інтерес представляє проблема прискорення електронів у вакуумі за допомогою надпотужних лазерних імпульсів [60, 63, 76-83]. Зазвичай в задачах такого роду досліджується динаміка руху одиночного електрона в полі потужної електромагнітної хвилі, при цьому власне випромінювання електрона в рівняннях руху не враховується. У цьому наближенні виявляється справедливою теорема Лоусона-Вудворта [63] згідно з якою в плоскій хвилі електрон в середньому не прискорюється, а області прискорення змінюються на області уповільнення, і в середньому

енергія електрона не росте. Аналогічний висновок можна зробити як в разі обмежених пучків в просторі (наприклад, гаусові пучки), так і в часі (потужні надкороткі імпульси): в середньому енергія електрона не збільшується при взаємодії з такими полями. Так, наприклад, при взаємодії зі надкороткими імпульсами електрон прискорюється переднім фронтом імпульсу (відбувається "виштовхування" електрона в область слабшого поля [60, 63, 77]), але потім енергія знову відбирається від електрона заднім фронтом імпульсу, так що в підсумку середнє вкладення енергії виявляється близьким до нуля. Така ж ситуація спостерігається і при взаємодії з просторово обмеженими пучками, що мають кінцевий градієнт поля. Існують методи, що дозволяють витягувати електрон з області взаємодії при досягненні ним значної енергії, засновані на бічному розсіянні електронів в просторово неоднорідному полі [60, 63, 76-79]. Однак, ці методи вимагають значної початкової енергії, а отже і попереднього прискорення електронів. Крім того, вони не дозволяють отримувати інтенсивний потік прискорених електронів з малим поперечним розкидом швидкостей.

В останні роки з'явилися методи отримання щільних електронних згустків шляхом іонізації твердих мішеней надкороткими лазерними імпульсами [82]. Концентрація електронів в них практично дорівнює концентрації в твердому тілі, що вимагає використання нових підходів при описі процесу прискорення таких згустків потужним лазерним полем у вакуумі. Дійсно, сила самодії за рахунок власного випромінювання згустку може бути вже не малою і повинна враховуватися при визначенні характеру його руху. З урахуванням цієї сили теорема Лоусона-Вудворта виявляється вже несправедливою [80], і електрон може прискорюватися в середньому при взаємодії з плоскою хвилею.

Сучасні досягнення лазерної фізики забезпечують генерацію когерентного випромінювання з інтенсивністю $10^{19} - 10^{21}$ Вт/см² [60, 63]. Одним з основних застосувань такого випромінювання є прискорення заряджених частинок. В роботах [76-81], чисельно досліджується

прискорення електронів у вакуумі сфокусованим пучком стаціонарного лазерного випромінювання великої інтенсивності (10^{21} - 10^{22} Вт/см²). Показана принципова можливість отримання електронів з енергією ~ 1 ГеВ в лабораторних умовах.

Однак в схемі, яку розглянуто в [76-81], процес прискорення в значній мірі є випадковим, оскільки розглядається вліт релятивістських електронів в лазерний пучок під кутом до напрямку його поширення. Тільки за певних кутів вльоту і початкових швидкостях електрона, а також певною початковою фазою поля можливе «захоплення» електрона лазерним пучком і його прискорення до енергії 0,1 - 1 ГеВ. Наслідком цього є сильна залежність енергії електрона від кута вльоту, початкової швидкості електрона і початкової фази. Зауважимо, що контролювати з високою точністю ці параметри практично неможливо. Крім того, в разі стаціонарного випромінювання існує проблема виведення прискореного електрона з поля. В [76,77] для виведення електрона запропоновано використовувати статичне магнітне поле, що ускладнює експеримент. Конкретний механізм прискорення в роботах [76-81] виявлено не було.

Треба зазначити, що одним із механізмів, який дозволяє створити найбільш ефективні схеми обміну енергією між електромагнітними хвилями і потоками заряджених частинок, є електронний циклотронний резонанс (ЕЦР). Він є одним з найбільш відомих і найбільш вивчених резонансів, а також одним з найбільш використовуваних. Дійсно, ЕЦР широко використовується в електроніці, а також у багатьох схемах високочастотного нагріву високотемпературної плазми в установках керованого термоядерного синтезу та в установках використовуваних як джерела нейтронів. Теорія і властивості цього резонансу вивчені досить добре, як і механізми такої взаємодії. При цьому важливим є пошук режимів, коли така взаємодія є регулярною, а також знаходження умов, коли вони стають хаотичними. Останнім часом якихось нових особливостей ЕЦР не очікувалося. Звичайно, в кожному конкретному випадку використання ЕЦР в експерименті

доводиться враховувати особливості експериментальних установок, в яких реалізується взаємодія електромагнітних хвиль і заряджених частинок. Так, наприклад, в роботах [83-85] детально аналізуються схеми ЕЦР нагріву плазми для конкретних установок. При цьому доводиться враховувати неоднорідності плазми, неоднорідності зовнішнього магнітного поля, можливість існування просторових областей захоплення електромагнітного поля і багато інших особливостей використання ЕЦР в конкретних експериментальних установках. Це досить складна проблема. Здавалося б, з цими особливостями, викликаними реальними експериментами, і можуть бути пов'язані всі нові особливості ЕЦР. Однак ЕЦР має деякі досить загальні особливості, що не були раніше вивчені. Ці особливості, в основному, стосуються режимів з динамічним хаосом.

Важливо відзначити, що отримані в [86, 87] критерії перекриття циклотронних резонансів, дозволяють чітко визначити умови переходу від регулярної динаміки частинок в цих резонансах до хаотичної динаміки. Для отримання цих критеріїв в даних роботах були проаналізовані системи рівнянь для випадку малих амплітуд поля $a_0 \ll 1$, і при виконанні резонансних умов:

$$k_z V_{||0} + s \omega_H / \gamma_0 - 1 = 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При виконанні цих умов та введені резонансної фази $\theta_s = \theta_s - \tau$ в [86] були отримані укорочені рівняння, що описують динаміку частинки в умовах ізольованого нелінійного резонансу:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp &= \frac{1}{p_\perp} (1 - k_z v_z) W_s \cdot a_0 \cos \theta_s; & \dot{p}_z &= \frac{1}{\gamma} k_z W_s a_0 \cos \theta_s; \\ \dot{\theta}_s &= \Delta_s \equiv k_z v_z + s \frac{\omega_H}{\gamma} - 1; & \dot{\gamma} &= \frac{a_0}{\gamma} W_s \cdot \cos \theta_s. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Також було отримано критерій перекриття резонансів у вигляді:

$$a_0 \geq \omega_H^2 / (16|W_s|k_x^2), \quad (1.10)$$

де $W_s \equiv \alpha_x p_\perp J_s s / \mu - \alpha_y p_\perp J_s' + \alpha_z p_\perp J_s$, $\mu \equiv k_x p_\perp / \omega_H$, $p_x = p_\perp \cos \theta$, $p_y = p_\perp \sin \theta$.

Докладніше отримання виразів дивись в Додатку 1.

Циклотронні резонанси широко використовуються у фізиці плазми і в фізичній електроніці. На основі цих резонансів розроблені різноманітні схеми нагріву частинок плазми. Вони лежать в основі цілого ряду гірорезонансних приладів (дивись, наприклад, [88-90]). Особливий інтерес представляють випадки, коли умови циклотронних резонансів не змінюються в результаті обміну енергією між хвилею і частинками. При цьому умови циклотронних резонансів збігаються з інтегралами руху частинок. Такі умови називаються циклотронним авторезонансом, або просто - авторезонанс.

Механізм циклотронного авторезонансу викликає великий інтерес серед різних механізмів прискорення заряджених частинок. Відкритий А.А. Коломенським і А.Н. Лебедєвим [60], та незалежно В.Я. Давидовським [63]. Цей механізм забезпечує високий темп прискорення при досить малих радіаційних витратах [76]. На основі циклотронного авторезонансу були запропоновані різні схеми мікрохвильових [77-79] і лазерних [80,81] прискорювачів електронів. Тим часом циклотронний авторезонанс, уявляючи собою релятивістський ефект, строго існує лише в разі плоскої поперечної електромагнітної хвилі, що розповсюджується зі швидкістю світла у вакуумі вздовж постійного магнітного поля, за умови, що здійснюється циклотронний резонанс в початковий момент часу. При порушенні цих умов можлива "примусова" підтримка синхронізму частинки з хвилею різними способами [76]. Як показано в роботі [80], в полі потужного лазерного випромінювання електрони можуть бути прискорені до колосальних енергій з дуже високим темпом прискорення при малих радіаційних витратах. Однак ці результати були отримані при припущенні, що лазерне випромінювання описується плоскою хвилею. В реальних умовах це припущення найчастіше порушується. У багатьох випадках лазерне, а також мікрохвильове

випромінювання може розглядатися в квазіоптичному наближенні у вигляді гауссова пучка. Ясно, що в цьому випадку умови циклотронного авторезонансу свідомо порушені, так що монотонного зростання енергії не повинно бути.

Однак, незважаючи на високу ефективність і на той факт, що теорія циклотронних резонансів, зокрема теорія авторезонансу, досить добре розроблена, авторезонанс, наскільки нам відомо, не знайшов належного використання. Зокрема, при спробах створити джерела інтенсивного когерентного міліметрового випромінювання, робота яких заснована на принципі авторезонансу, виявилось, що ефективність таких пристроїв значно нижче, ніж передбачалося. Замість передбачуваної ефективності в 20-40 відсотків вдавалося домогтися ефективності всього лише в 2-4 відсотка (дивись [91] і цитовану там літературу). Автори огляду [91] відзначають, що одним з можливих пояснень такої малої ефективності є відсутність обліку в теоретичних розрахунках впливу несинхронних (нерезонансних) хвиль і сил. Дійсно, в теоретичних розрахунках, в основному, враховуються тільки резонансні моди електродинамічної структури, які ефективно взаємодіють з потоками заряджених частинок. Нерезонансні моди в більшості випадків до уваги не беруться. В огляді [91], зазначено, що коли таких нерезонансних мод стає досить багато, вони можуть не тільки кількісно, але й якісно змінювати ефективність взаємодії між частинками і хвилями.

Тому звернемо увагу на деякі особливості динаміки заряджених частинок в умовах, близьких до умов авторезонансу. Зокрема, зазначимо різницю в динаміці частинок при їх прискоренні і при передачі енергії від частинок хвилям (при гальмуванні). Крім того, також є різниця в динаміці частинок на великих інтервалах часу (асимптотично), та в динаміці частинок на малих інтервалах часу. Особливо необхідно зазначити, що динаміка частинок в умовах близьких до авторезонансу, аномально чутлива до флуктуацій.

Навіть простий аналіз системи рівнянь (1.9) може розкрити важливі особливості динаміки взаємодії заряджених частинок з полем електромагнітної хвилі. Наприклад, якщо хвиля поширюється строго уздовж напрямку зовнішнього постійного магнітного поля і її поперечною структурою можна знехтувати, то в формулах (1.9) слід покласти $k_x \rightarrow k_y \rightarrow 0$. При цьому $\mu \rightarrow 0$. Наслідком цього є той факт, що відмінними від нуля залишаються тільки члени, що описують резонанси з $s=0, \pm 1$, тобто описують черенковський резонанс ($s=0$) і резонанси на нормальному $s = -1$ і аномальному $s = 1$ ефектах Доплера. Таким чином, в умовах авторезонансу ефективна взаємодія частинок з полем відбувається тільки в умовах цих резонансів. Зокрема, це означає, що збуджувані поля на частотах гармонік циклотронної частоти повинні мати неоднорідну поперечну структуру.

Для подальшого опису динаміки звернемо увагу на те, що зміна енергії частинок відбувається значно повільніше, ніж фазові зміни. В цьому випадку в системі рівнянь (1.9) обмежуються лінійними по γ членами. В результаті отримаємо вираз:

$$\frac{d^2\theta_s}{d\tau^2} - \frac{\partial R_{s0}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0} \frac{\varepsilon_0 W_s}{\gamma_0} \cos\theta_s = 0. \quad (1.10)$$

Саме з цього рівняння отримані значення ширини нелінійного резонансу в енергетичних одиницях:

$$\Delta\gamma_s = 4 \sqrt{\varepsilon_0 W_s / \left(\gamma_0 \frac{\partial R_{s0}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma_0} \right)}. \quad (1.11)$$

Також завершуючи перетворення можна отримати остаточний вираз відстані між циклотронними резонансами для даного випадку:

$$\delta\gamma = \omega_H / (1 - k_z^2). \quad (1.12)$$

Враховуючи що $\partial R_s / \partial \gamma \sim (1 - k_z)$, можна зробити висновок про те, що при наближенні до авторезонансу ($(1 - k_z) \rightarrow 0$) росте як ширина нелінійного резонансу, так і відстань між ними. Однак видно, що відстань між резонансами зростає значно швидше. Це означає, що в умовах авторезонансу

нелінійні резонанси не будуть перекриватися. Відповідно, не виникатимуть режими з динамічним хаосом. Динаміка частинок буде регулярною. Відзначимо, що, мабуть, цей результат був вперше отриманий в роботі [92].

Окремо варто відзначити можливість регулярної динаміки в умовах, близьких до авторезонансу. Таку динаміку найлегше реалізувати в таких умовах $\alpha = \{\alpha_x, 0, 0\} = \{1, 0, 0\}$, $k_{\perp} \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, $W_1 \rightarrow p_{\perp}/2$.

Система рівнянь (1.9) в цих умовах набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\perp} &= \frac{1}{2}(1 - p_z / \gamma) \cdot a_0 \cos \theta_1; & \dot{p}_z &= \frac{p_{\perp}}{2\gamma} a_0 \cos \theta_1; \\ \dot{\theta}_1 &= R_1 \equiv -[\gamma - p_z - \omega_H] / \gamma; & \dot{\gamma} &= [(a_0 p_{\perp}) / 2\gamma] \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Праві частини рівнянь для енергії і поздовжнього імпульсу збігаються. В результаті є такий інтеграл:

$$\gamma - p_z = \gamma \theta - p_z(0) = C. \quad (1.14)$$

Використовуючи цей інтеграл і зв'язок енергії з імпульсом: $\gamma^2 = 1 + p_z^2 + p_{\perp}^2$, отримані такі вирази для квадрата поперечного імпульсу: $p_{\perp}^2 = 2\gamma C - C^2 - 1 = 2p_z C + C^2 - 1$.

Розглядаючи процес прискорення, отримані результати говорять про те, що енергія частинки після прискорення стала істотно більшою від початкової, тоді $p_{\perp} = \sqrt{2\gamma C}$. при авторезонансі $\theta_1 = const$. Тому з останнього рівняння системи (1.13) можна отримати таку залежність енергії частинки при прискоренні в умовах авторезонансу:

$$\gamma = (M\tau + \gamma_0^{2/3})^{2/3} \approx (M\tau)^{2/3}, \quad (1.15)$$

де $M = a_0 \cos \theta_1 \sqrt{C} [3/(2)^{3/2}]$.

Така залежність енергії частинки від часу в умовах авторезонансу була вперше отримана вже в перших роботах по авторезонансу. Розглядаючи тепер процес при гальмуванні частинки в умовах авторезонансу можна вважати, що: $p_z \rightarrow 0$, $p_{\perp}^2 = C^2 - 1$. З цих співвідношень легко знаходиться наступна залежність енергії частинки від часу при гальмуванні в умовах авторезонансу:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + D\tau}, \quad (1.16)$$

де $D = a_0 \sqrt{(C^2 - 1) \cos \theta_1} < 0$.

Порівнюючи вирази (1.15) і (1.16), можна побачити, що закони обміну енергією при прискоренні і при гальмуванні відрізняються. Це асимптотичні формули.

Особливо варто відзначити динаміку частинок на коротких інтервалах часу. На коротких інтервалах часу тимчасова динаміка в більшості випадків відрізняється від асимптотичної динаміки. Однак для багатьох важливих додатків (наприклад, для вивчення процесів розвитку нестійкостей, зокрема нестійкостей на циклотронних резонансах) немає необхідності знати асимптотичну поведінку залежних змінних. Більш того, якщо ми знаємо асимптотичну поведінку, це може перешкодити правильній оцінці аналізованих процесів. У багатьох випадках нам потрібно знати динаміку процесів на досить малих часах. На тому часі, протягом якого розвивається нестійкість. Важливим і вражаючим прикладом факту, що динаміка на малих часах може якісно відрізнитися від динаміки на великих часах, може служити закон розпаду. Дійсно, як відомо, цей закон має такий звичний вигляд: $P(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$, де $P(\tau)$ – ймовірність знайти систему в момент часу τ у вихідному, нераспавшемуся стані. Однак цей закон справедливий тільки на великих часах ($\lambda\tau \gg 1$). На малих часах він має вигляд: $P(\tau) = [1 - (\rho\tau)^2]$, $\rho\tau \ll 1$. Звернемо увагу на те, що доданок до одиниці в останній формулі пропорційний квадрату малого параметра. Таку залежність можна отримати, якщо розкласти асимптотичну формулу, вважаючи, що параметр $\lambda\tau$ малий ($\lambda\tau \ll 1$). Така особливість процесу розпаду квантових систем вперше була виявлена в роботі [93]. Ця особливість розпаду на малих часах є ключовим елементом квантового ефекту Зенона. Динаміку на малих часах потрібно також знати при аналізі розвитку різного роду нестійкостей. Особливо при аналізі розвитку і придушенні нестійкостей. У нашому випадку, при наявності флуктуації різниця в динаміці на великих часах і на малих часах

також може відігравати суттєву роль. На малих інтервалах часу динаміка взаємодії між хвилею і частинкою при авторезонансі може бути описана ліанерізованою системою рівнянь (1.9). Щоб її проаналізувати підставимо в (1.9) $\theta_1 = \theta_0 + \theta$, $\theta \ll 1$, $\gamma \equiv \gamma + \gamma_1$, $\gamma \ll 1$, також в праву частину рівнянь системи (1.9), з огляду на те, що вони містять малий множник a_0 , поставимо незбурені значення параметрів. Цю ліанерізовану систему можна представити у вигляді:

$$\dot{\gamma}_1 = (a_0 W_1 / 2\gamma_0) \cos \theta_0 \tau + \gamma_0 \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = -B\theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = d\tilde{\gamma}, \quad (1.17)$$

$$\text{де } B = (a_0 W_1 / 2\gamma_0) \sin \theta_0, \quad d \equiv \left. \frac{\partial R}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0}.$$

Загальний вираз для енергії частинки набуває вигляду:

$$\gamma \equiv \tilde{\gamma} (a_0 W_1 / 2\gamma_0) \cos \theta_0 \tau + \gamma_0. \quad (1.18)$$

З (1.17) і (1.18) випливає, що тільки для тих частинок, для яких $dB < 0$, мала добавка γ до енергії може виявитися істотною. Для інших цією добавкою можна знехтувати. Більш того, в умовах авторезонансу ($d \rightarrow 0$), $\theta = \text{const} \ll 1$ і для всіх частинок ця добавка несуттєва. Таким чином, в умовах авторезонансу на коротких проміжках часу регулярна динаміка частинок для прискорених частинок і для частинок, що гальмуються, однакова.

Слід зауважити, що, говорячи про малі проміжки часу, ми завжди маємо на увазі малі проміжки часу для тих процесів, які ми розглядаємо. Зокрема, малі проміжки часу для процесів, які описуються укороченими рівняннями, в дійсності можуть означати чималі проміжки часу для вихідних високочастотних процесів.

Треба відзначити ще одну особливість динаміки заряджених частинок в умовах порушення теореми про безперервну залежність рішення від параметрів. У більшості фізичних задач малі зміни параметрів досліджуваної системи призводять до малих змін в її динаміці. Такий стан справ гарантується теоремою про безперервну залежність рішень рівнянь від змін

параметрів. Однак це справедливо лише тоді коли значення параметрів системи, що вивчаються, далекі від біфуркаційних. Причому слід розрізняти небезпечні і безпечні біфуркаційні кордони у просторі параметрів. При перетині небезпечних меж як завгодно, малі відхилення від цієї межі не дозволяють системі повернутися в початковий стан (динаміка в околиці цих кордонів описується вибуховими нестійкостями). При переході через звичайні (безпечні) кордони малі відхилення від цієї межі дозволяють системі повернутися в початковий стан (в околиці цієї межі нестійкості експоненціальні). У всіх цих випадках області параметрів, в яких відбувається якісна зміна динаміки досліджуваної системи, являють особливий інтерес. Такі області вимагають уважного вивчення.

Можна зазначити, що в деяких випадках динаміка провідних центрів заряджених частинок має область параметрів, в околиці яких відбувається якісна зміна динаміки цих центрів. У постійних однорідних зовнішніх магнітних полях динаміка провідного центру заряджених частинок виражена слабо. Вона визначається тільки нелінійними ефектами. У більшості випадків цією динамікою можна знехтувати. Так робиться при аналізі високочастотних приладів, робота яких заснована на циклотронних резонансах, наприклад, в мазерах на циклотронних резонансах. Однак саме динаміка провідних центрів, зокрема чутлива до малої зміни маси зарядженої частинки, може бути найбільш чутливою до малої зміни параметрів системи.

Найбільш проста структуру полів, котра дозволяє визначити таку динаміку, це коли плоска електромагнітна хвиля з лінійною поляризацією поширюється строго перпендикулярно до зовнішнього магнітного поля і магнітна компонента поля цієї хвилі колінеарна до зовнішнього магнітного поля. Також, треба виконати умови, які будуть близькі до іонного циклотронного резонансу. Такі умови означають, що частота зовнішньої хвилі близька до іонної циклотронної частоти. У цьому випадку параметр сили хвилі можна переписати як відношення напруженості електричного поля електромагнітної хвилі до напруженості постійного магнітного поля

($a=E/H$). Цей параметр практично завжди малий. Крім того, при аналізі динаміки іонів ефектами релятивізму можна знехтувати. Скориставшись дешицею цих параметрів, можна отримати наступну систему вкорочених рівнянь, яка справедлива в околиці іонних циклотронних резонансів:

$$\dot{\theta} = [\omega_H - 1] + \frac{a}{2V} \sin \theta_1 \quad \dot{V} = -0.5a \cos \theta_1 \quad \dot{\xi} = -aV \sin \theta_1. \quad (1.19)$$

де $\omega_H = qH/Mc\omega$ – безрозмірна іонна циклотронна частота.

З цих рівнянь видно, що перші два рівняння являють собою повністю замкнуту систему рівнянь щодо змінних V та θ_1 . Після вирішення цієї пари рівнянь: $\theta \cong (\omega_H - 1) \tau$, $V = V(0) - (a \sin \theta_1) / 2(\omega_H - 1)$ отримано рівняння, що визначає динаміку провідного центру ξ :

$$\dot{\xi} = -a [V(0) - (a \sin \theta_1) / 2(\omega_H - 1)] \sin \theta_1. \quad (1.20)$$

З цього рівняння видно, що другий доданок в квадратних дужках являє собою розривну функцію від параметра ω_H . Точка $\omega_H = 1$ є точкою розриву другого роду. В цьому випадку умови теореми про безперервну залежність рішення від параметрів не виконується. Динаміка досліджуваної системи може мати відчутні відмінності при незначній зміні параметра ω_H . Дійсно, з огляду на те, що параметр $a = E/H$ малий, рівняння (1.20) можна усереднити по фазі θ_1 . Рішення, яке описує усереднену динаміку провідного центру, можна представити в наступному вигляді:

$$\langle \dot{\xi} \rangle \cong -a^2 \tau / 4(\omega_H - 1) \langle V \rangle = V(0). \quad (1.21)$$

Тут кутовими дужками позначено усереднення по θ_1 . З вигляду вираження для $\langle \dot{\xi} \rangle$ випливає, що можна підібрати таку частоту ω , що частинки з однієї масою рухатимуться в одному напрямку ($\omega_H > 1$), а частинки з іншого масою ($\omega_H < 1$) – в іншому напрямку. Розглянута вище модель не дуже зручна для практичної реалізації. Схоже, що значно цікавіше для реалізації буде модель, коли поле хвилі являє собою поле іоннозвуквої хвилі. Ця хвиля поздовжня. Її хвильовий вектор паралельний вектору напруженості електричного поля хвилі. Магнітної складової хвиля не має.

Легко показати, що в полі такої хвилі зберігаються всі описані вище особливості динаміки частинок.

При прискоренні заряджених частинок електромагнітними хвилями, зокрема, при прискоренні лазерним випромінюванням електромагнітні поля, в основному, моделюються полем когерентної електромагнітної хвилі. Реально модель монохроматичних хвиль є ідеалізованою моделлю хвиль. В реальних умовах, в умовах експерименту, хвилі існують в обмеженому просторі і обмеженому інтервалі часу. Такі хвильові процеси в деяких випадках можуть проявляти особливості, які відсутні в моделях монохроматичних хвиль. Особливо ця відмінність може проявити себе в задачах про взаємодію хвиль із зарядженими частинками, тобто практично у всій фізиці плазми, плазмової електроніки, в теорії прискорення заряджених частинок. Важливо розрізнити механізми взаємодії заряджених частинок з полями регулярних монохроматичних хвиль від механізмів взаємодії таких частинок з полями хвильових пакетів. Головною особливістю механізмів взаємодії є наявність в моделях хвильових пакетів великого числа (набору) монохроматичних хвиль. Це число велике. Тому виникає питання про особливості взаємодії таких хвильових полів з зарядженими частинками. Виникає питання як врахувати цей ансамбль монохроматичних хвиль. Особливо ця проблема виникає у визначенні критеріїв виникнення режимів з динамічним хаосом. На перший погляд може здатися, що динаміка частинок в хвильових пакетах завжди буде хаотичною. Насправді є умови виникнення як режимів з динамічним хаосом так і режимів регулярної динаміки частинок.

Також варто відзначити схеми прискорення коли саме прискорення носить випадковий характер, але при цьому в середньому відбувається набір енергії частинками. На даний час є два основні механізми такого стохастичного прискорення і нагріву заряджених частинок полями електромагнітних хвиль. Перш за все це передача енергії від випадкового поля до частинок [94,95]. На таку передачу енергії вперше було зазначено в

роботі [94]. Потім такі схеми обміну енергією для цілей нагрівання і пробою були детально вивчені в роботах Я.Б. Файнберга і В.І. Карася (дивись, наприклад, [95] і цитовану там літературу). Такі схеми прискорення і нагріву виявляються ефективними навіть у відсутності резонансної взаємодії частинок і полів. Однак, коли можливо виконати умови резонансної взаємодії хвиль і частинок, то привабливішими здаються схеми резонансної взаємодії частинок і регулярних хвиль, в умовах, коли нелінійні резонанси перекриваються. Перекриття нелінійних резонансів створює умови, при яких динаміка частинок виявляється аналогічною до динаміки частинок у випадковому полі. Істотним є той факт, що діюче на частинки поле завжди більше ніж поле, яке діє на частинки у випадковому полі (звичайно при однаковій енергії поля яке діє на частинки). Як приклад ефективного нагріву частинок полем регулярних хвиль можна привести схему прискорення і нагрівання частинок в плазмових пастках. Так, при нагріванні плазми в магнітних пастках, взаємодія заряджених частинок з полем хвилі відбувається у вузькій просторовій області. В цій області частинки знаходяться в резонансі з хвилею. Пройшовши цю область, вони набувають енергію з високою ефективністю. Подальша динаміка частинок практично не залежить від наявності електромагнітної хвилі. Відбиваючись від магнітних пробок, заряджені частинки знову потрапляють в область резонансної взаємодії. Багаторазове проходження частинками резонансних областей призводить до їх нагрівання. У такій схемі нагріву передбачається, що на шляху від резонансної області до магнітної пробки і назад, частинки випадковим чином змінюють фазове співвідношення з хвилею. Причина виникнення випадковості в більшості випадків не обговорюється. Неявно передбачається, що реалізується режим динамічного хаосу, або наявні в плазмі флуктуації виявляються достатніми для такої зміни. Можливо, ці дві причини можуть існувати одночасно.

В роботі [96] розглядалося нагрів плазми регулярним полем лазерного випромінювання в умовах перекриття нелінійних резонансів. Там же було

проведено порівняння ефективності передачі енергії від поля частинкам завдяки цьому механізму і випадковими полями. Було показано, що нагрівання регулярними полями значно ефективніше, ніж нагрів випадковими полями. Однак в цій роботі порівняння проводилося з дельта-корельованим шумовим полем. В цьому випадку енергія хвилі розподілена по дуже широкому спектру. В роботі [95] зверталася увага на регулярні хвилі, фази яких в середньому за період випадковим чином (стрибком) змінювалися. Зазначалося, що в даному випадку енергія хвилі зосереджена у вузькому спектрі. Аналіз динаміки частинок в полі таких хвиль вказував на ефективність передачі енергії таких хвиль до енергії заряджених частинок.

1.3. Висновки

У даному розділі був зроблений огляд літературних даних які описують відомі схеми прискорення в котрих можливо використання електромагнітних полів великої інтенсивності. Показана недоліки та проблеми які виникають при використанні кожної з цих схем прискорення. Зроблені висновки по найбільш перспективному напрямку досліджень. Також у розділі детально проведено огляд динаміки частинок в умовах циклотронного резонансу, та описані деякі умови виникнення режимів з динамічним хаосом, які можуть виникати в сильних полях.

Обґрунтована доцільність використання схем прискорення заряджених частинок в вакуумі за наявності сильних електромагнітних полів. Сформульовано низку задач, які необхідно було розв'язати, і які були успішно вирішені у дисертаційній роботі.

РОЗДІЛ 2

ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ, МОДЕЛІ І РІВНЯННЯ. ІНТЕГРАЛИ

Динаміка заряджених частинок в електромагнітних полях хвиль помірної інтенсивності до теперішнього часу практично добре вивчена. При цьому під помірними полями ми розуміємо поля, параметр сили хвилі яких досить малий [97] ($a = eE/mc\omega$, де E - напруженість електричного поля хвилі; ω - частота хвилі). Цей параметр ще називають параметром нелінійності, а також прискорювальним параметром хвилі. Один по одному величини цей параметр дорівнює відношенню роботи, яка здійснюється хвилею над частинкою на відстані, рівному довжині, хвилі, до енергії спокою частинки. Також він дорівнює відношенню осциляторної швидкості частинки в полі хвилі до швидкості світла. В останньому випадку осциляторна швидкість визначена таким чином, що може бути більшою за швидкості світла.

В таких полях малість параметру сили хвилі в багатьох випадках дозволяє досліджувати динаміку частинок аналітичними методами. Для ефективного обміну енергією між хвилею і частинками при цьому необхідно виконання однієї з умов резонансів. Умови резонансів практично означають тривалу синхронну взаємодію заряджених частинок з електромагнітною хвилею.

Однак, якщо не вживати спеціальних умов, то нелінійні ефекти обмежують величину переданої енергії від частинок до хвилі і в зворотному напрямку. Важливим окремим випадком, коли нелінійні ефекти не виводять заряджену частинку з резонансу з хвилею, є випадок авторезонансу. [60,63]. Умови авторезонансу виконуються при взаємодії заряджених частинок з хвилею у вакуумі в разі, коли електромагнітна хвиля строго поширюється уздовж зовнішнього постійного однорідного магнітного поля.

Другою можливістю необмеженого прискорення заряджених частинок є стохастичне прискорення. Воно може бути реалізовано, наприклад, при перекритті нелінійних циклотронних резонансів. [86,87]

Якщо не брати до уваги ці два випадки, то обмін енергією між частинками і хвилями обмежений шириною нелінійного резонансу.

Останнім часом значних успіхів досягнуто в створенні електромагнітних полів виключно великої напруженості. Параметр сили хвилі в таких полях вже не тільки близький до одиниці, а може, навіть, значно перевищувати її. Для десятисантиметрового діапазону довжин хвиль це означає, що напруженість електричного поля хвилі повинна перевершувати величину 10^5 В/см. Для лазерного випромінювання ($\lambda \sim 10^{-4}$ см) ця напруженість вже більше 10^{10} В/см.

В таких полях параметр сили хвилі більший за одиницю. Аналіз динаміки руху частинок при цьому значно ускладнений, так як відсутній малий параметр. Крім того, в полях такої напруженості за час порядку періоду хвилі швидкість частинки досягає швидкості близької до швидкості світла. Ефективний обмін енергією між хвилями і частками при цьому може відбуватися за дуже короткі інтервали часу. Тривалий синхронізм в цих умовах може виявитися непотрібним, тобто, резонансні взаємодії хвиль і частинок перестають відігравати визначальну роль в обміні енергією між ними. Особливості динаміки заряджених частинок в таких полях до теперішнього часу вивчені дуже мало. Деякі результати таких досліджень містяться, наприклад, в роботах [98-100].

У цьому розділі ми розглянемо загальну постановку задачі про рух частинки в зовнішньому однорідному постійному магнітному полі і в полі інтенсивної плоскої електромагнітної хвилі. Також у цьому розділі будуть сформульовані основні рівняння та інтеграли на основі яких будуть розглянуті окремі випадки динаміки заряджених частинок.

2.1. Моделі і рівняння. Інтеграли

Розглянемо заряджену частку (електрон), що рухається в зовнішньому постійному магнітному полі величини H_0 спрямованому вздовж осі z і в полі

електромагнітної хвилі довільної поляризації. Ця хвиля має наступні компоненти:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \text{Re} \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \\ \mathbf{H} &= \text{Re} \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}] \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \\ \mathbf{E} &\equiv \{E_0(\boldsymbol{\alpha})\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z\}$ - вектор поляризації хвилі.

Без обмеження спільності можна вважати, що вектор \mathbf{k} має тільки дві відмінні від нуля компоненти k_x та k_z . Якщо час вимірювати в ω^{-1} , швидкість – в c , величину хвильового вектора k – в ω/c , імпульс – в $m\omega$ і ввести безрозмірну амплітуду поля $a = eE_0/mc\omega$, то рівняння руху матеріальної точки можна привести до вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{\gamma}\right) \text{Re}(\mathbf{a}e^{i\psi}) + \frac{\omega_H}{\gamma} [\mathbf{p}\mathbf{e}] + \frac{\mathbf{k}}{\gamma} \text{Re}(\mathbf{p}\mathbf{a})e^{i\psi}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{p} / \gamma; \dot{\psi} = \mathbf{k}\mathbf{p} / \gamma - 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $\tau \equiv \omega t$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{H}/H_0$, $\omega_H \equiv eH_0/mc\omega$, $\psi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \tau$.

В цьому випадку безрозмірна амплітуда поля збігається з параметром сили хвилі [97].

Помноживши, перше з рівнянь (2.2) на p і враховуючи, що $p^2 = \gamma^2 - 1$, отримаємо рівняння для зміни енергії частинки:

$$\dot{\gamma} = \text{Re}(\mathbf{v}\mathbf{a}e^{i\psi}). \quad (2.3)$$

Використовуючи рівняння (2.3), з системи рівнянь (2.2) знаходимо інтеграл руху:

$$\mathbf{p} - \text{Re}(i\mathbf{a}e^{i\psi}) + \omega_H [\mathbf{r}\mathbf{e}] - \mathbf{k}\gamma = \text{const}. \quad (2.4)$$

Інтеграл (2.4) є узагальненням інтегралів, отриманих в [59, 62]. В цьому випадку враховано довільний напрямок між вектором \mathbf{k} і зовнішнім магнітним полем \mathbf{H}_0 , а також облік параметра сили хвилі \mathbf{a} .

Отримані вище рівняння, що описують динаміку руху частинки, досить складні для аналізу, тому становить значний інтерес отримання якомога більшої інформації з аналізу інтегралів руху (2.4).

Такий аналіз був частково проведено в [101], з якого важливо відзначити головні результати, які необхідні для розуміння подальшого розгляду динаміки частинок. У роботі відзначено, що рух частинки в просторі імпульсів $(\gamma, p_{\parallel}, p_{\perp})$ може відбуватися тільки по поверхні гіперболоїда обертання:

$$\gamma^2 = p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + 1. \quad (2.5)$$

При цьому часткам доступна не вся поверхня гіперболоїда, що описується рівнянням (2.5), а тільки верхня фізично доступна частина гіперболоїда $\gamma > 1$ та $p_{\perp} > 0$.

Також аналіз інтеграла (2.4) показує, що завдяки тому, що він представлений у векторному вигляді і є проекцією інтеграла (2.4) на осі декартової системи координат x, y, z , тобто три алгебраїчних співвідношення залишаються постійними в процесі взаємодії частинки з хвилею, і які в свою чергу теж є інтегралами. В роботі [101] показано, що особливу роль з цих трьох інтегралів має інтеграл, який є проекцією інтеграла (2.4) на вісь z . При поширенні хвилі вздовж осі z ($k_x = k_y = 0$, $k_z \neq 0$), або при усередненні цього інтеграла по швидкій фазі $\psi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \tau$, цей інтеграл істотно спрощується і в обох цих випадках набуває вигляду:

$$p_{\parallel} - k_z = p_{\parallel,0} - k_z \gamma_0 \equiv C = const. \quad (2.6)$$

У (2.6) індексом «0» позначені початкові значення поздовжнього імпульсу частинки і її енергії.

Аналіз інтеграла (2.6) показує, що якщо зобразити його на площині (γ, p_1) , то він являє собою рівняння паралельних прямих, які відрізняються один від одного різним значенням константи C . Нахил цих інтегралів щодо осі визначається поздовжнім хвильовим числом k_z , яке дорівнює $\arctg(1/k_z)$. Також відзначено, що резонанси на площині (γ, p_1) являють собою прямі лінії, кут нахилу яких щодо осі дорівнює $\arctg(k_z)$.

Враховавши вище описані особливості можливо виділити умови взаємодії котрі є умовами авторезонансу, які мають значний самостійний інтерес. Такі умови можливо отримати, якщо хвиля поширюється строго уздовж зовнішнього постійного магнітного поля у вакуумі, при цьому $k_z=1$, а прямі інтегралів виявляються паралельними прямим резонансів. Однак для збігання прямих інтегралів і резонансів, також необхідно, щоб константа C дорівнювала $s\omega_H$.

Також інтеграли (2.4) представлені у вигляді лінії перетину гіперболоїда обертання з площиною, де враховано, що в цьому просторі частинка може рухатися тільки по поверхні гіперболоїда обертання. При цьому, зазначено, що якщо фазова швидкість хвилі вздовж осі z менше швидкості світла ($k_z > 1$), то тоді лінія перетину являє собою еліпс. Якщо ж фазова швидкість хвилі більше швидкості світла ($k_z < 1$), то ця лінія являє собою гіперболу.

Звідси зроблені висновки, які ми постараємося врахувати в подальшому, а саме при взаємодії повільної хвилі ($k_z > 1$) з частинкою, обмін енергією обмежений характеристиками еліпса. Тобто частинка не може набрати енергії більше якоїсь певної величини. В умовах же взаємодії частинки з швидкою хвилею ($k_z < 1$), енергія частинки не обмежена інтегралами і може досягати довільних величин.

Нами поставлено чисельні експерименти за для підтвердження даних цього аналізу.

На рисунку 2.1 представлені результати чисельних розрахунків набору енергії зарядженими частинками для різних k в залежності від напруженості електромагнітної хвилі. У разі взаємодії частинки з швидкою хвилею ($k_z=1$)

енергія частинки не обмежена (рисунок 2.1а). При взаємодії повільної хвилі ($k_z=1,05$) з частинкою, обмін енергією обмежений характеристиками еліпса (рисунок 2.1б) і видно, що при значеннях напруженості поля $a=1,7$ відбувається обмеження набору енергії частинками. Причому, чим більш повільна хвиля, тим при менших амплітудах поля відбувається обмеження набору енергії.

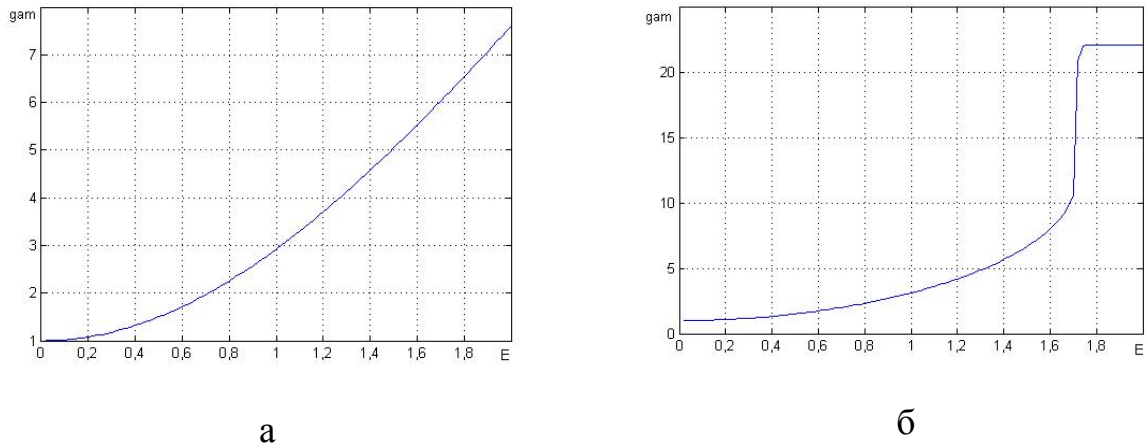


Рис. 2.1. Енергія, що набирає частинка в залежності від напруженості поля при: а – $k_z=1$, б – $k_z=1,05$.

Як видно, що саме випадок взаємодії зі швидкою хвилею ($k_z < 1$), є випадком при реалізації якого потенційно можливе необмежене прискорення частинок, а також можлива значна передача енергії від частинок до хвилі.

2.2. Виникнення режимів з динамічним хаосом в умовах електронного циклотронного резонансу

При вивченні електронних циклотронних резонансів найбільш істотним є питання про умови реалізації регулярної та хаотичної динаміки частинок в цих резонансах. Критерії перекриття циклотронних резонансів, які характеризують динаміку частинок в умовах циклотронних резонансів, були проаналізовані чисельними методами в багатьох роботах, крім того, вони були підтверджені в багатьох експериментальних дослідженнях [102, 103]. Тому, здавалося б, що питання про умови регулярної та хаотичної динаміки

частинок в умовах циклотронних резонансів в даний час остаточно вирішене. Однак, деякі наші чисельні дослідження, а також чисельні дослідження авторезонансу [91, 104] показують, що в деяких важливих випадках динаміка часток не відповідає цим критеріям.

Проте пояснити суперечності чисельних результатів і аналітичних критеріїв можливо. Для цього ми розглянемо найбільш просту структуру поля електромагнітної хвилі:

$$\mathbf{E}=\operatorname{Re}\{0, iE_y, 0\}, \quad \mathbf{H}=\{0, 0, H_z\}, \quad \mathbf{k}=\{k_x, 0, 0\}.$$

У цьому випадку критерій перекриття двох сусідніх нелінійних циклотронних резонансів, який отримано в [96], можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_0 \geq \omega_H^2 / (16|W_s|k_x^2), \quad (2.7)$$

де $W_s \equiv -p_\perp J'_s(\mu)$, $\mu \equiv k_x p_\perp / \omega_H$, $p_x = p_\perp \cos \theta$, $p_y = p_\perp \sin \theta$.

Використовуючи для оцінок перший циклотронний резонанс можна написати:

$$k_x=1, \quad s=1, \quad W_1=-p_\perp J'_1.$$

Для цього випадку на рисунку 2.2 представлена залежність амплітуди поля, виражена критерієм (2.7).

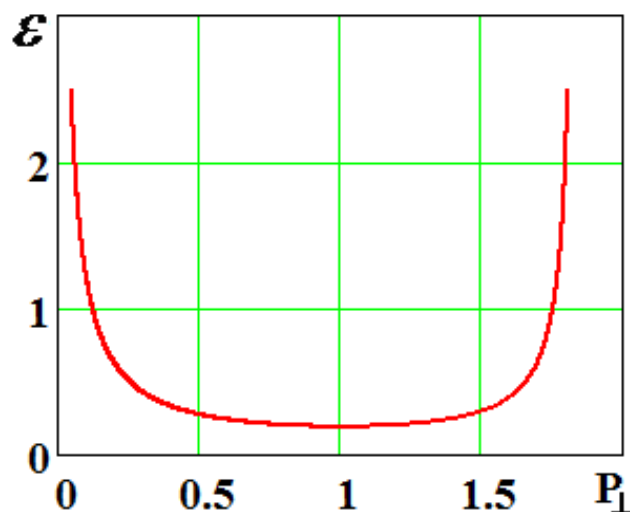


Рис.2.2. Критерій перекриття резонансів.

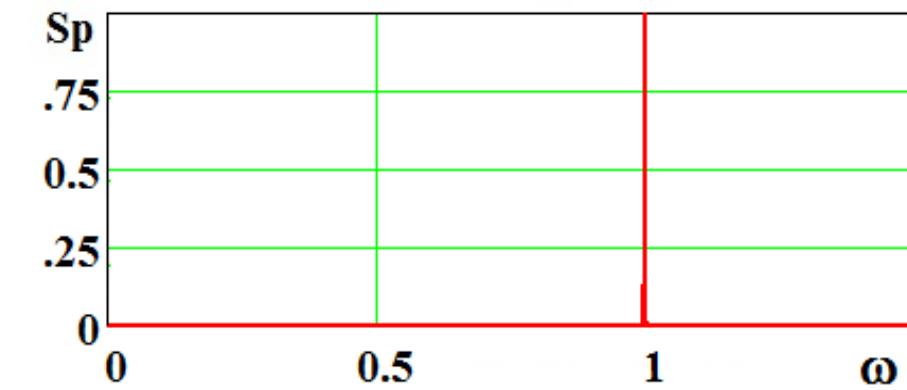
Вся область, що знаходиться нижче кривої - область, коли умови перекриття резонансів не виконуються і хаотична динаміка не повинна виникати, а область вище кривої відповідає режимам з динамічним хаосом.

З критерію (2.7) зокрема впливає, що при виконанні умови $W_s \rightarrow 0$ амплітуда хвилі необхідна для виникнення режиму з динамічним хаосом прямує до нескінченності. Фізично ця умова означає, що ширина одного з нелінійних циклотронних резонансів прагне до нуля. Зокрема ширина першого нелінійного циклотронного резонансу прагне до нуля, коли $J_1' \rightarrow 0$ ця умова легко досягається при деякому значенні поперечного імпульсу. При цьому можна очікувати, що частинка, отримуючи енергію від хвилі в результаті резонансної циклотронної взаємодії з хвилею, перестає ефективно відбирати енергію у хвилі. Наші попередні чисельні дослідження динаміки частинок в цих умовах показують, що такого зриву хаотичної динаміки частинок не відбувається. Тому були вжиті більш ретельні аналітичні та чисельні дослідження цього уявного протиріччя.

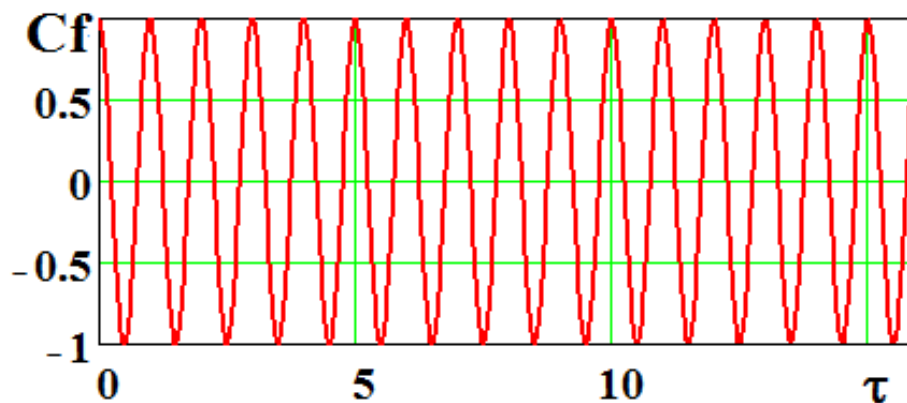
Для цього були проведені чисельні розрахунки системи в обраній конфігурації. Рівняння руху для даного випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x / \gamma, \quad \dot{y} = p_y / \gamma, \\ \dot{p}_x &= (p_y / \gamma)(-a_0 \sin(\psi) + \omega_H), \\ \dot{p}_y &= -a_0 \sin(\psi) + (p_x / \gamma)(a_0 \sin(\psi) - \omega_H). \end{aligned} \quad (2.8)$$

На рисунку 2.3 представлені рішення системи рівнянь (2.8) при $a_0=0,0001$, $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$. На рисунку 2.3а представлений спектр поперечного імпульсу p_x , а на рисунку 2.3б – кореляційна функція. З цих малюнків видно, що при даних значеннях параметрів, динаміка частинок регулярна.



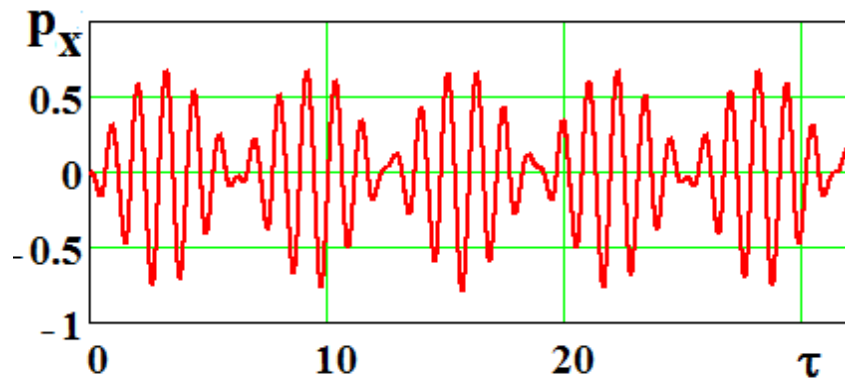
а



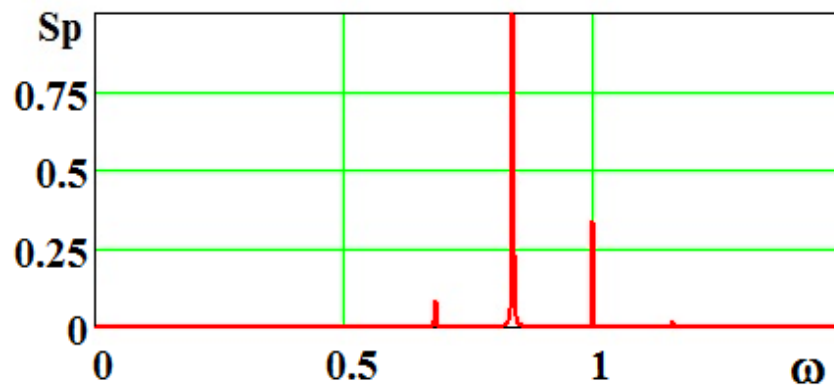
б

Рис. 2.3. Спектр поперечного імпульсу частинки p_x (а), кореляційна функція (б) при $a_0=0,0001$, $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$.

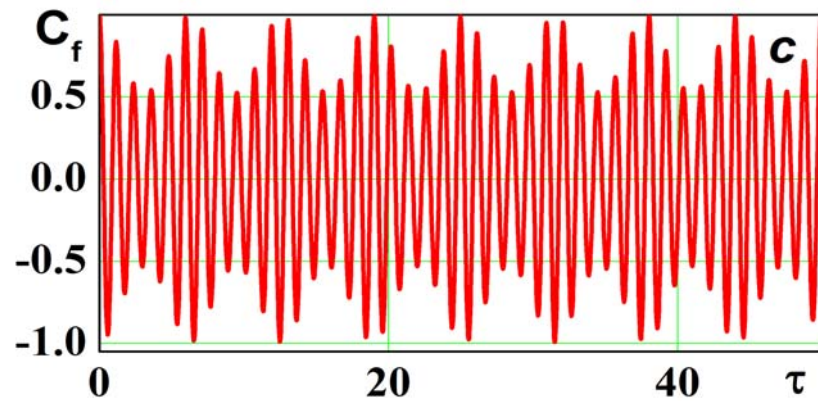
При збільшенні напруженості поля до величин порядку $a_0=0,1$ відбувається більш інтенсивні биття, однак, динаміка частинок залишається регулярною. На рисунку 2.4а представлений поперечний імпульс частинки p_x , на рисунку 2.4б – спектр поперечного імпульсу p_x , а на рисунку 2.4в – кореляційна функція. З результатів розрахунків видно, що спектр залишається вузьким, кореляційна функція не спадає. Тобто динаміка залишається регулярною.



а



б



в

Рис. 2.4. Поперечний імпульс частинки p_x (а), його спектр (б) і кореляційна функція (в) при $a_0=0,1$, $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$.

Необхідно відзначити, що незважаючи на те що динаміка частинок може дуже відрізнятися залежно від початкових фаз розташування відносно зовнішньої хвилі, але у даному випадку динаміка частинок залишається

регулярною у всьому діапазоні початкових фаз частинок в інтервалі $0 \leq x_0 < 2\pi$.

При підвищенні напруженості поля вище ніж $a_0=0,15$ та за умов $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$ відбувається якісна зміна динаміки. При цьому слід зазначити, що така напруженість поля нижче тієї, яка необхідна для виконання умови перекриття резонансів. В даному випадку критерій (2.7) ще не виконується. На перший погляд цей результат суперечить отриманому нами критерію (2.7). Пояснення отриманого результату полягає в тому, що в початковий момент часу і протягом деякого відрізка часу динаміка частинок дійсно регулярна. Частинки знаходяться в циклотронному резонансі і набирають енергію. При досягненні достатньої величини поперечного імпульсу критерій перекриття (2.7) починає виконуватися, що призводить до виникнення нерегулярної динаміки частинок.

На рисунку 2.5 представлені результати чисельних розрахунків системи рівнянь (2.8) при $a_0=0,19$, $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$, $x_0=0$, $y_0=0$. На рисунку 2.5а представлений поперечний імпульс p_x частинок, на рисунку 2.5б - спектр поперечного імпульсу p_x частинок, а на рисунку 2.5в – кореляційна функція цієї динаміки. З цих рисунків видно, що при даних значеннях параметрів динаміка частинок стає нерегулярною. Необхідно відзначити, що навіть при малих змінах початкових координат частинки, її динаміка суттєво змінюється. Тобто можна казати, що в даному випадку спостерігається режим з наявністю динамічного хаосу.

Як впливає з робіт [86, 87] нелінійні циклотронні резонанси в загальному випадку всі перекриваються. В результаті частинки безперервно (по дифузійному закону) набирають енергію. При цьому вони повинні потрапити в область з поперечним імпульсом порядку $p_{\perp}=1,8$ (дивися рисунок 2.2). Відповідно до критерію (2.7) напруженість поля необхідна для виникнення режиму з динамічним хаосом в цій області різко зростає. Можна було б очікувати, що на цих значеннях поперечних імпульсів відбудеться стабілізація рівня енергії, яку можуть отримати частинки. Однак наші

чисельні розрахунки показують, що стабілізація відсутня. Частинки продовжують набирати енергію (дивись рисунок 2.5а).

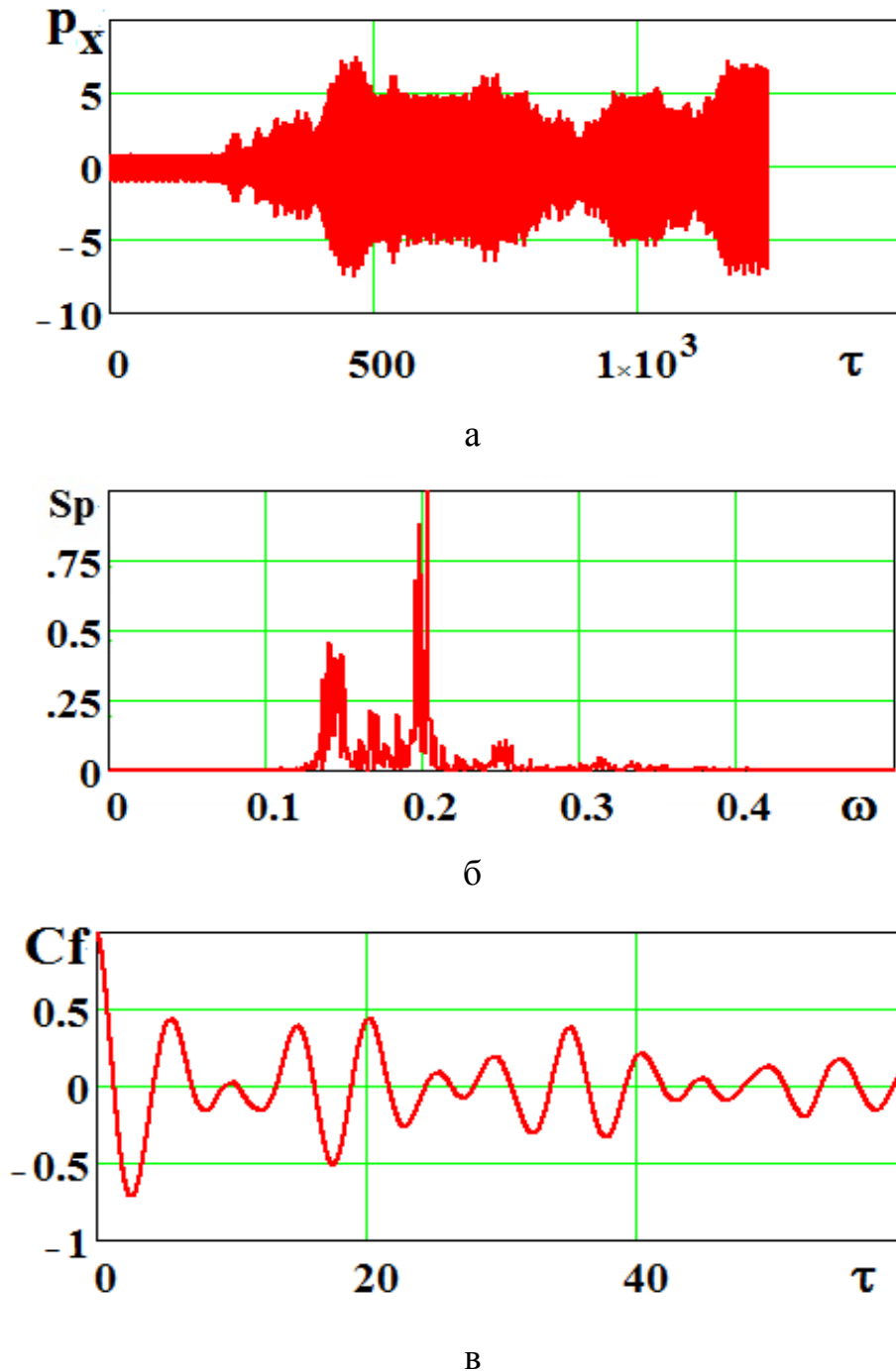


Рис. 2.5. Поперечний імпульс частинки p_x (а), його спектр (б) і кореляційна функція (в) при $a_0=0,19$, $p_{\perp}=0$, $p_{\parallel}=0$.

Таким чином, наведені вище результати показують, що існуючі протиріччя між багатьма чисельними результатами і аналітичними формулами, які описують динаміку частинок при циклотронних резонансах, можуть бути пояснені. Найбільш важливими з цих пояснень є той факт, що

невраховані в більшості аналітичних дослідженнях "нерезонансні" циклотронні резонанси можуть відігравати суттєву роль на динаміку частинок. Дійсно, як ми бачимо, саме вони визначають хаотичну динаміку частинок в області, для якої, відповідно до аналітичного критерію, має місце регулярна динаміка. Це пов'язано з тим, що аналітичний критерій був отриманий в умовах, коли визначальну роль в динаміці частинок відіграють тільки два сусідніх циклотронних резонанси. Коли ширина одного з цих нелінійних циклотронних резонансів прагне до нуля, то отриманий аналітичний критерій перестає працювати. Визначальними при цьому виявляються інші "нерезонансні" циклотронні резонанси.

Пояснення цього результату полягає в тому, що при цих значеннях параметрів, циклотронні резонанси, що залишилися неврахованими в критерії (2.7) починають відігравати визначальну роль. Мабуть велика кількість нелінійних циклотронних резонансів з якими частинка взаємодіє слабо, можуть грати роль зовнішнього шумового впливу.

2.3. Динаміка частинок у полі хвильового пакету

Відомо, що режими з динамічним хаосом характерні практично для всіх нелінійних коливальних систем. Суворий доказ умов переходу в режим з динамічним хаосом є досить важке завдання. У переважній більшості фізичних завдань є можливість використовувати простий аналітичний критерій переходу до динамічного хаосу - критерій Чирікова. Цей критерій простий. Прозорим є його фізичний зміст. Він використовується в більшій кількості досліджень. Однак цей критерій все-таки є феноменологічний критерій і в багатьох випадках його потрібно використовувати з обережністю. Зокрема, в роботі [105] висловлюється припущення, що коли відношення ширини нелінійних резонансів до відстані між цими резонансами більше, ніж число хвиль, то динаміка може бути не хаотичною, а регулярною. Це досить прозоре фізичне міркування. Це питання вивчено нижче

Далі ми наведемо основні особливості хвильових пакетів, які ми будемо використовувати в подальшому.

По перше, що треба згадати це фазова та групова швидкість. Одразу зазначимо, що фізичний сенс фазової швидкості полягає в наступному, для спостерігача, який рухається з фазовою швидкістю v_{ph} в напрямку поширення хвилі, хвиля як би застигає. Однак може виявитися, що у деяких випадках фазова швидкість хвилі більше швидкості світла. Тут немає ніяких протиріч, так як темп перенесення енергії описується зовсім іншою характеристикою хвильового пакета, а саме груповою швидкістю. Групова швидкість є швидкістю передачі будь-якого сигналу, а також швидкістю перенесення енергії, маси і аналогічних величин. Вона ніколи не перевершує швидкості світла у вакуумі.

Для визначення фазової швидкості запишемо рівняння монохроматичної хвилі, що розповсюджується в позитивному напрямку осі x :

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

де Ψ – будь-яка фізична величина, що описує хвильовий рух. Аргумент гармонійної функції (в даному випадку - косинуса) називається фазою:

$$\varphi = kx - \omega t.$$

Запишемо координату через фазу і час $x = \varphi/k + \omega t/k$

Саму фазову швидкість хвилі можливо виділити якщо зафіксувати фазу. У цьому випадку координата стає лінійною функцією часу, а множник перед t уявляє собою ту саму фазову швидкість хвилі $v_{ph} = \omega/k$. Також така залежність називається характеристикою.

Для вводу поняття групової швидкості, через те, що воно пов'язано з інтерференцією коливань, які мають різні частоти і довжини хвиль, необхідно розглянути дві хвилі з однаковими амплітудами які розрізняються, але з близькими частотами і довжинами хвиль:

$$\Psi_1 = A \cos(kx - \omega t),$$

$$\Psi_2 = A \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t],$$

Причому необхідно виконання таких умов $|\Delta k| \ll k$, $|\Delta \omega| \ll \omega$.

Якщо скласти ці коливання, та в аргументі першого косинуса правої частини знехтували складовими $\Delta \omega$ та Δk в порівнянні з 2ω і $2k$, то отримаємо:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1 + \Psi_2 \approx 2A \cos(kx - \omega t) \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right).$$

На рисунку 2.6 наведено графік функції $\Psi(x)$ в певний проміжок часу. Результируєче коливання являє собою хвилю практично з колишніми значеннями частоти і хвильового числа, але з модульованою амплітудою.

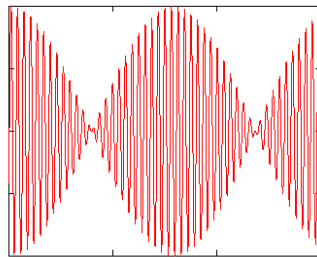


Рис. 2.6. Биття при складанні двох хвиль з близькими частотами.

Ми можемо домогтися того, щоб для нас стала нерухомою картина модуляції амплітуди. Для цього треба рухатися зі швидкістю:

$$v_g = \Delta \omega / \Delta k. \quad (2.9)$$

Локалізацію хвильового пакета можна отримати тільки при безперервному розподілі частот і хвильових чисел. В такому випадку частоту можна уявити як безперервну функцію хвильового вектору:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

Залежність (2.10) називається дисперсійним рівнянням. Саме для такої функції вводиться поняття групової швидкості як межі (2.9):

$$v_g = d\omega / dk. \quad (2.11)$$

Однак треба зазначити, що при безперервній залежності (2.10) хвильовий пакет повинен бути представлений не у вигляді суми, а як інтеграл від безперервного розподілу монохроматичних коливань:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\Delta k} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad (2.12)$$

Причому тут $\Delta k \ll k_0$.

Різницю в поняттях фазової та групової швидкості можливо показати на прикладах. Наприклад як що уявити матеріальну частинку як хвильової пакет. Обчислимо фазову і групову швидкості такого пакета, для визначеності задавшись параметрами електрона. Припишемо частці частоту, відповідну дебройлевской довжині хвилі. В результаті фазова швидкість виходить рівною:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p}. \quad (2.13)$$

Виражаючи імпульс і енергію через швидкість v , можливо продовжити перетворення та отримати остаточній вираз для фазової швидкості:

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma m_e c^2}{\gamma m_e v} = \frac{c^2}{v} \geq c. \quad (2.14)$$

Ця нерівність ще раз нас переконує, що фазова швидкість не має прямого відношення до швидкості частинки. Тепер визначимо групову швидкість частинки як хвильового пакета:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\hbar\omega}{d\hbar k} = \frac{dE}{dp}. \quad (2.15)$$

Використовуючи тотожність, що об'єднує швидкість, імпульс і енергію частинки $E = pc^2/v$ та використовуючи (2.15) можливо обчислити похідну dE/dp та отримати остаточний вираз для групової швидкості:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{Ev}{pc^2} \frac{dE}{dp} = \frac{v}{c^2} \frac{d(E^2)}{d(p^2)} = \frac{v}{c^2} \frac{d(p^2 c^2 + m^2 c^4)}{d(p^2)} = v. \quad (2.16)$$

Вираз (2.16) показує, що швидкість переміщення обвідної хвильового пакету є швидкістю руху частинки.

У разі лінійного зв'язку між частотою і хвильовим числом фазова швидкість дорівнює груповий. Наприклад, електромагнітні хвилі в вакуумі,

як відомо, описуються лінійним рівнянням $\omega = kc$. З нього випливає $v_{ph} = v_g = c$. Але при поширенні в тому чи іншому середовищі зв'язок між частотою і хвильовим числом може виявитися нелінійним. Прийнято говорити, що таке середовище має дисперсію. При нелінійній функції $\omega(k)$ групова і фазова швидкості розрізняються. Наприклад, поширення електромагнітної хвилі в плазмі можливо описати дисперсійним рівнянням:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2, \quad (2.17)$$

де ω_0 — плазмова частота. Диференціюючи (2.17) за хвильовим числом k , отримуємо:

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k^2)} \equiv \frac{\omega d\omega}{k dk} = c^2.$$

З останньої рівності випливає зв'язок між фазовою і груповою швидкостями електромагнітної хвилі в плазмі:

$$v_{ph} \cdot v_g = c^2.$$

Самі швидкості в одиницях швидкості світла рівні:

$$\frac{v_{ph}}{c} = \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}}, \quad \frac{v_g}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}}}. \quad (2.18)$$

Таким чином, фазова швидкість вийшла більшою за швидкість світла, а групова швидкість — менша за c , в повній відповідності з її змістом як швидкості передачі сигналу.

Для зручності подальших обчислень треба перейти до експоненціального подання коливань і додати «нормувальний» множник $1/(2\Delta k)$. Амплітуда A , у загальному випадку, може залежати від хвильового числа k , але для простоти будемо вважати її постійною і винесемо за знак інтеграла.

Розглядаючи модуляцію коливань в пакеті хвиль з безперервним розподілом частот, обмежуючись лінійним розкладом по малому параметру $\Delta k = k - k_0$:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_{g0} \cdot \Delta k + \dots, \quad (2.19)$$

де

$$v_{g0} = (\partial \omega / \partial k)_{k=k_0}, \quad \omega_0 = \omega(k_0). \quad (2.20)$$

Підставивши (2.19) в (2.12) і виконуючи інтегрування, можна отримати:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{A}{2\Delta k} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \times \exp[i(x - v_{g0} t) \Delta k] d\Delta k = \\ &= \frac{A}{2\Delta k} \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[i(x - v_{g0} t) \Delta k] d\Delta k = , \quad (2.21) \\ &= A \frac{\sin[(x - v_{g0} t) \Delta k]}{(x - v_{g0} t) \Delta k} \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \end{aligned}$$

та знову прийти до рівняння для плоскої хвилі з частотою ω_0 і хвильовим числом k_0 , але з модульованою амплітудою. На цей раз модуляція здійснюється функцією $f(\xi) = \sin \xi / \xi$, $\xi = (x - v_{g0} t) \Delta k$, та графік якої наведено на рисунку 2.7

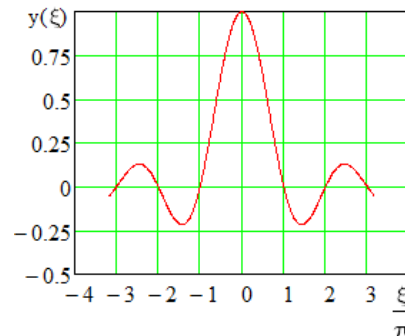


Рис. 2.7. Графік функції $y = \sin(\xi)/\xi$.

Нам важливі такі властивості цієї функції.

По-перше, функція $f(\xi)$ приймає найбільше значення в центрі хвильового пакета: $f(0) = 1$.

По-друге, так саме як і $\sin(\xi)$ вона має нескінченне число коренів: $f(\xi) = 0$ при $\xi = \pm \pi n$ $n = 1, 2, \dots$

Та по-третє, в проміжках між нулями, в точках $\xi = \pi/2 \pm \pi n$ $n = 1, 2, \dots$ модуль функції має локальні максимуми, висота яких падає обернено

пропорційно ξ . Модульований пакет (2.21) зображений на рисунку 2.8, він практично повністю локалізований в першому максимумі.

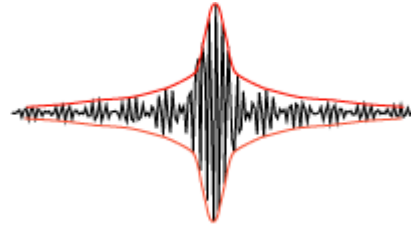


Рис. 2.8. Суперпозиція безперервного спектра хвиль.

Осцилююча крива зображує коливання на основній частоті ω_0 . Їм відповідає фазова швидкість $v_{ph} \approx \omega_0/k_0$. (Нагадаємо, що $|\Delta k|$ і $|\Delta\omega|$ тут вважається малими в порівнянні з k і ω , відповідно). Також зображена огинаюча, яка побудована по локальним максимумам хвильового пакета. Вона переміщується в просторі з груповою швидкістю v_{g0} , яка визначається формулою (2.20).

Також покажемо як можливо визначити значення ширини та тривалості хвильового пакету.

Для визначення ширини хвильового пакету необхідно зафіксувати момент часу $t=0$, тоді аргумент функції амплітудної модуляції дорівнює $\xi = x\Delta k$. В даному випадку графік функції представляє миттєву фотографію хвильового пакета (рисунок 2.8). Повторимо центральну частину рисунку 2.7 з новими позначеннями рисунок 2.9.

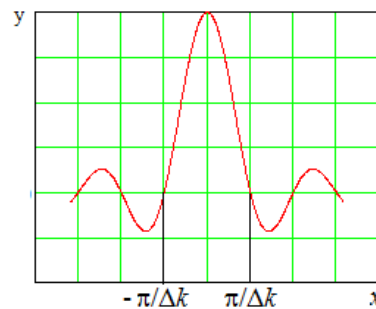


Рис.2.9. Ширина хвильового пакету.

Розмір пакету визначається шириною центрального максимуму, де фаза ξ змінюється на 2π .

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi. \quad (2.22)$$

Знак нерівності нагадує, що частина пакета, хоча і невелика, все ж виходить за межі центрального максимуму.

Для визначення тривалості хвильового пакету необхідно зафіксувати координату, наприклад через початок координат $x=0$. За таких умов ми можемо визначити скільки часу хвильовий пакет витрачає на проходження через задану точку. В цьому випадку змінні приймають значення:

$$\xi = -v_{g0} \cdot t \Delta k = -\Delta\omega \cdot t.$$

Однозначну залежність функції $f(\xi)$ від часу відображає рисунок 2.10.

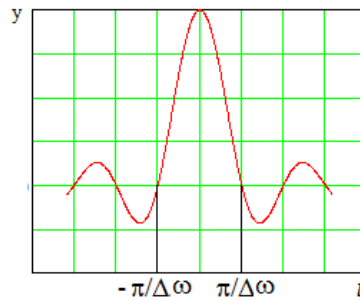


Рис. 2.10. Тривалість хвильового пакета.

Тривалість хвильового пакета, як і його просторова протяжність, визначається зміною фази на 2π .

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi. \quad (2.23)$$

Нерівності (2.22) і (2.23) добре відомі в теорії коливань і в радіотехніці. Наприклад, так звана майже монохроматична хвиля (хвильовий пакет з дуже вузьким інтервалом хвильових чисел) має велику протяжність в просторі. З іншого боку, для реєстрації коротких ($\Delta t \rightarrow 0$) імпульсів, необхідний широкосмуговий приймач.

Розглянуті нерівності відображають операції, необхідні для вимірювання довжини хвилі λ і частоти. Для визначення λ необхідно фіксувати положення як мінімум двох сусідніх «горбів». При цьому точність визначення λ буде тим більше ($\Delta\lambda \rightarrow 0$ і $\Delta k \rightarrow 0$), та чим більше число максимумів буде зафіксовано ($\Delta x \rightarrow \infty$). Аналогічно, для визначення частоти коливань маятника ω вимір потрібно проводити, принаймні, протягом одного

періоду коливань. Точність вимірювання частоти буде зростати ($\Delta\omega \rightarrow 0$) зі збільшенням числа вимірюваних періодів ($\Delta t \rightarrow \infty$).

Остання характеристика яку ми визначимо є здатність хвильового пакету з часом розпливатися. Така особливість хвильового пакету зумовлена тим що хвильовий пакет складається з хвиль з відмінними фазовими швидкостями, і ці хвилі, з плином часу, повинні розходитися, а хвильовий пакет – розпливатися. Однак відзначимо, що таке розпливання не завжди відбувається, наприклад у нерелятивістському випадку його не спостерігається

Час розпливання пакета можна оцінити, як що в розкладанні (2.19) залишити доданок з другою похідною $d^2\omega/dk^2$:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_{g0} \cdot \Delta k + \frac{(\Delta k)^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} + \dots$$

Тепер показник експоненти в формулі (2.12) дорівнює:

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega_0 t + \underbrace{\Delta k \cdot (x - v_{g0} t)}_{\xi} + \delta \cdot t, 0$$

$$\text{де } \delta = \frac{(\Delta k)^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}.$$

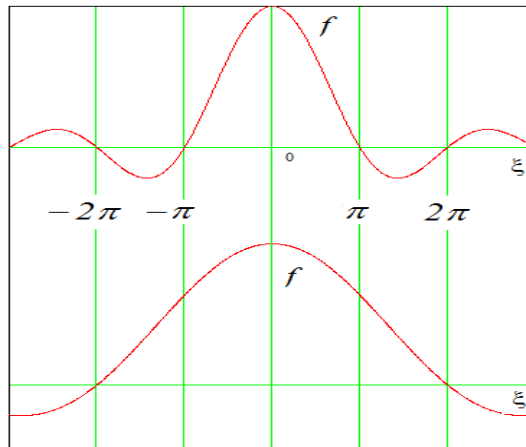


Рис. 2.11 Розпливання хвильового пакета.

Квадратична добавка дає додатковий набіг фази. Сказане ілюструє рисунок 2.11.

Як що вважати, що відбулося помітне розпливання, якщо за проміжок часу τ приріст фази $\delta\tau$ стало порядку π . Звідси впливає оцінка масштабу часу распливання:

$$\tau \sim \frac{\pi}{\delta} \sim \frac{\pi}{(\Delta k)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)} \sim \frac{(\Delta x)^2}{\left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)}.$$

Тут ми скористалися співвідношенням (2.22), яке пов'язує протяжність хвильового пакета з розкидом хвильових чисел. Квадратичний доданок дорівнює нулю при лінійній залежності частоти від хвильового вектору. В цьому випадку ефект распливання хвильового пакета не має місця, як, наприклад, у фотона у вакуумі.

Розглянемо тепер нерелятивістському частинку з масою M . Другу похідну частоти за хвильовим вектором оцінимо наступним чином:

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \hbar \frac{d^2(\hbar\omega)}{d(\hbar k)^2} = \hbar \frac{d^2 E}{dp^2} = \frac{\hbar}{M}.$$

Отже, час распливання хвильового пакету по порядку величини складає:

$$\tau \sim \frac{(\Delta x)^2 M}{\hbar}. \quad (2.24)$$

У межах класичної динаміки ($\hbar \rightarrow 0$) ефект распливання відсутній.

Це основні особливості хвильових пакетів які будуть використані у подальшому.

Щоб визначити основні особливості руху заряджених частинок у полі хвильового пакета, розглянемо найбільш просту модель, в якій такі особливості можуть проявитися. Такою моделлю може служити одномірна модель руху заряджених частинок в полі великої кількості хвиль:

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} \sum_i E_i \sin(k_i z - \omega_i t). \quad (2.25)$$

Щоб з'ясувати умови виникнення режимів з динамічним хаосом, розглянемо спочатку рух частинки в одній з цих хвиль. З рівняння (2.25) тоді можна отримати відомий інтеграл:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \Omega^2 \cos \varphi = H = \text{const} , \quad (2.26)$$

де $\varphi = kz - \omega t$, $\Omega^2 = |e| Ek/m\omega^2$, $\dot{\varphi} = d\varphi/d\tau$, $\tau = \omega t$.

Використовуючи інтеграл (2.26), знаходимо ширину нелінійного резонансу:

$$\dot{\varphi}_{\max} = +2\Omega , \quad \dot{\varphi}_{\min} = -2\Omega . \quad (2.27)$$

Для визначення відстані між резонансами звернемо увагу, що ефективна взаємодія частинок з хвилями пакета відбувається в умовах черенковського резонансу. У цьому випадку легко визначити відстань між резонансами:

$$\Delta\dot{\varphi} = -\Delta k \left[v_0 - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} k_0 \right] . \quad (2.28)$$

При отриманні виразу (2.28) враховано, що $v = v_{ph} = \omega/k$.

Використовуючи вирази (2.27) і (2.28), легко знайти умови виникнення локальної нестійкості:

$$K = \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right) \frac{2\sqrt{A}}{[1 - v_g / v_{ph}]} = N \frac{2\sqrt{A}}{[1 - v_g / v_{ph}]} , \quad (2.29)$$

де v_g – групова швидкість; N – кількість хвиль в пакеті.

Дивлячись на формули (2.28) і (2.29), вже можна зробити кілька важливих висновків. Перше – видно з формули (2.28), що якщо групова швидкість прагне до фазової швидкості хвилі, то відстань між резонансами прагне до нуля. Це означає, що всі хвилі пакету розташовані на прямолінійній ділянці дисперсії. У фазовому просторі всі резонанси таких хвиль збігаються. Для частинок такі резонанси практично неможливо розрізнити. Динаміка повинна бути регулярною. По-друге – з іншого боку, якщо групова швидкість хвиль прагне до нуля (наприклад, ленгмюровські хвилі в плазмі), то, як видно з формули (2.29), критерій перекриття резонансів виявляється значно меншим числа хвиль, що беруть участь у пакеті. У цьому випадку, динаміка частинок повинна бути хаотичною. При цьому звернемо увагу, що нерелятивістська динаміка частинок завжди відповідає випадку $A \ll 1$.

Подальший аналіз динаміки частинок був проведений чисельними методами. Для цього права частина рівняння (2.25) була представлена в такому вигляді:

$$G = \sum_{i=m}^N \sin \left[\left(k + i \frac{\Delta k}{N} \right) z - \left(\omega + i \frac{\Delta \omega}{N} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) описує структуру полів, що становлять хвильовий пакет. Особливістю поля такого хвильового пакету є його інтерференція полів, що становлять пакет. Як приклад на рисунку 2.12 представлений вид поля цього пакета, при одиничних значеннях k і ω , зафіксованих значеннях x і t в разі 25 хвиль ($\Delta \omega = v \Delta k$). При збільшенні числа хвиль у пакеті, відстань між максимумами поля зростає, а амплітуда кожного з максимумів збільшується.

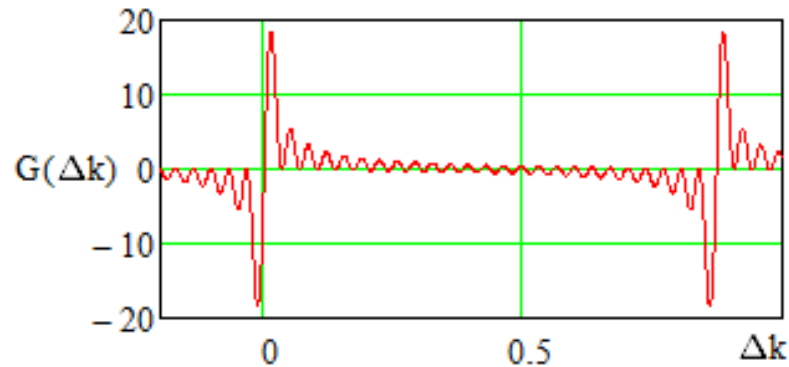


Рис. 2.12. Структура полів що складають хвильової пакет.

Для дослідження динаміка заряджених частинок у полі хвильового пакету, спочатку була обрана найпростіша модель руху у полі двох хвиль з амплітудами $A=0,1$, при цьому для простоти, частоти першої та другої хвилі були зафіксовані $\omega_1=1$, $\omega_2=0,99$. Також було зафіксовано значення хвильового вектору першої хвилі $k_1=1$.

На рисунку 2.13а представлена швидкість частинки, на рисунку 2.13б – спектр швидкості цієї частинки, а на рисунку 2.13в – кореляційна функція цієї динаміки. Аналіз числових розрахунків показав, що хаотична динаміка частинок починається при значенні коефіцієнта $K = 0,46$ рисунок 2.13. Така динаміка зберігається до значень $K \sim 31$ рисунок 2.14, на якому зображено швидкість частинки, спектр і кореляційна функція при значенні коефіцієнта

$K \sim 31$. Тільки після того як коефіцієнт K стає більшим за 31, спостерігається перехід до регулярної динаміки заряджених частинок у полі цього волнового пакету.

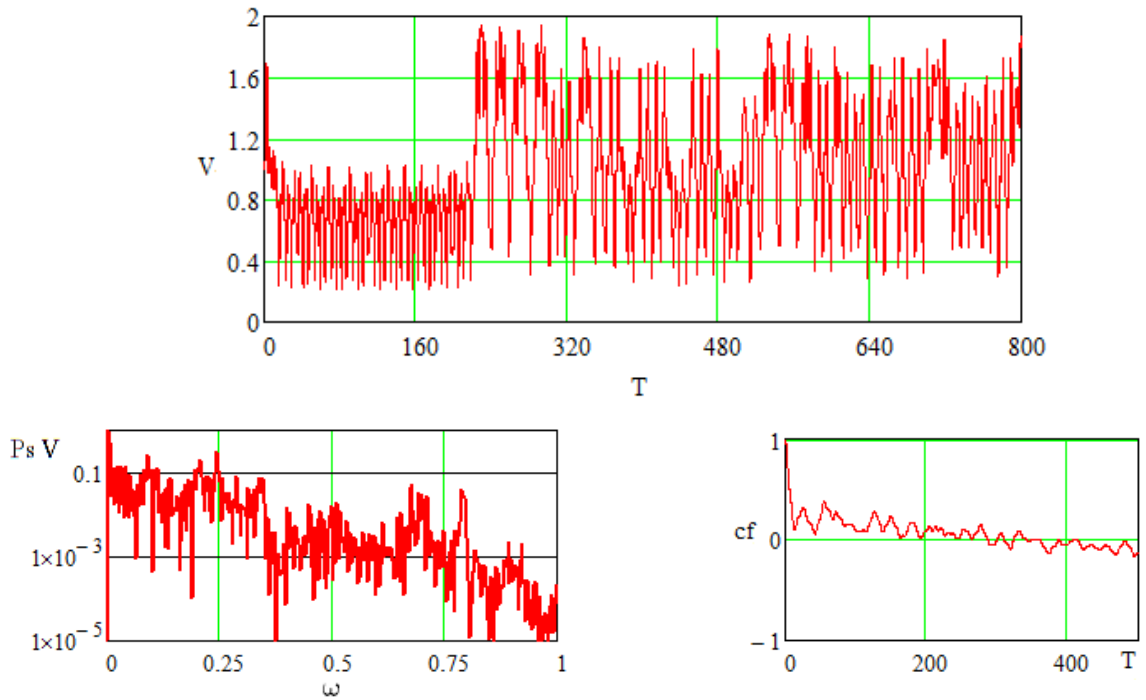


Рис. 2.13. Швидкість частинки, спектр і кореляційна функція $K=0,46$.

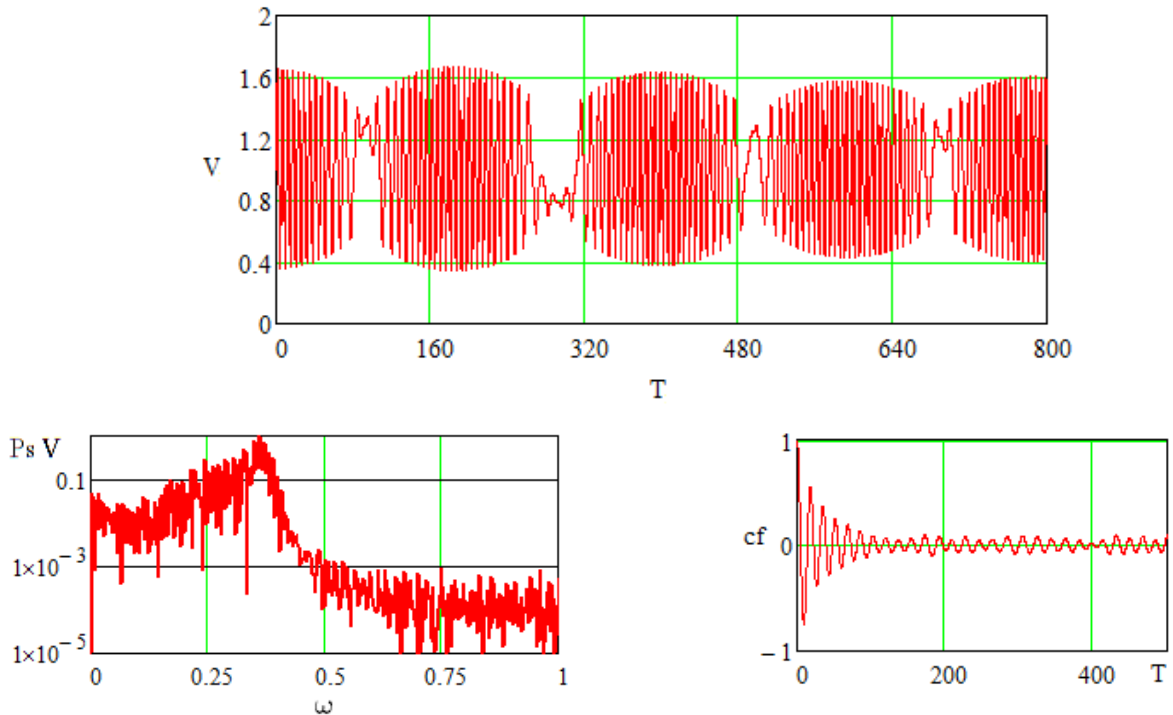


Рис. 2.14. Швидкість частинки, спектр і кореляційна функція $K \sim 31$.

Аналогічна ситуація спостерігається, коли розглядається задача руху заряджених частинок в полі хвильового пакету з двох хвиль, але за значень групової швидкості, яка дорівнює нулю ($v_g=0$).

В подальшому була розглянута динаміка заряджених частинок в полі хвильового пакету. За основу побудови хвильового пакету в цьому випадку обрана попередня модель, яка була побудована у полі двох хвиль. Для цього були зафіксовані частоти першої і останньої хвилі відповідно $\omega_1=1$, $\omega_2=0,99$. Всі хвилі, з яких було побудовано хвильовий пакет були рівномірно розташовані в проміжку між двома крайніми, зафіксованими хвилями. Також було зафіксоване значення хвильового вектору першої хвилі $k_1=1$. Всі хвилі хвильового пакету були взяті амплітудами $A=0,1$.

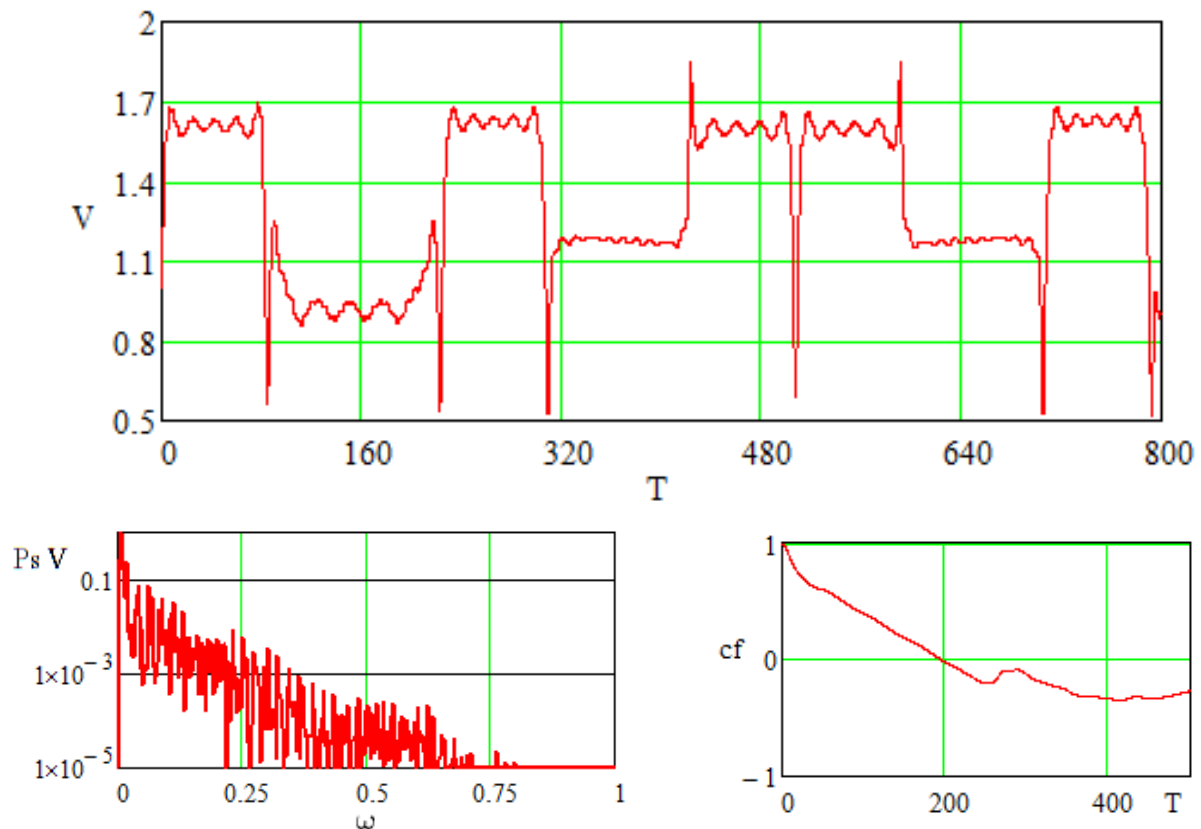


Рис. 2.15. Швидкість частинки, спектр і кореляційна функція при $K=1$ і кількості хвиль в пакеті $N=10$.

В подальшому числовими методами була проаналізована динаміка частинок в такому хвильовому пакеті при різній кількості хвиль в хвильовому пакеті. Як приклад характерної динаміки частинок на рисунку 2.15 наведено результати чисельного розрахунку зміни швидкості частинки,

спектр і кореляційна функція при значенні коефіцієнту $K=1$ та кількості хвиль в хвильовому пакеті $N=10$. Аналіз динаміки частинок в хвильовому пакеті показує, що практично завжди при $v_g=0$ динаміка частинок виявляється хаотичною.

Але треба відзначити, незважаючи на те, що динаміка частинок в хвильовому пакеті практично завжди при $v_g=0$ виявляється хаотичною, можливо виділити область параметрів коли динаміка частинок регулярна. Це область, яка відповідає лінійній ділянці дисперсії хвиль, що складають хвильовий пакет $\Delta\omega=v\Delta k$, $v=v_{ph}$. На рисунку 2.16 неведені результати чисельного розрахунку динаміки частинок, а саме швидкість частинки, спектр і кореляційна функція при $K>1000$ і кількості хвиль в пакеті $N=10$.

Така динаміка частинок відповідає тому випадку, коли на рисунку 2.12 наступний імпульс поля йде на нескінченність. Тому ефективна взаємодія частинок з полем відбувається тільки в області одного максимуму цього поля. Динаміка частинок при цьому є регулярною.

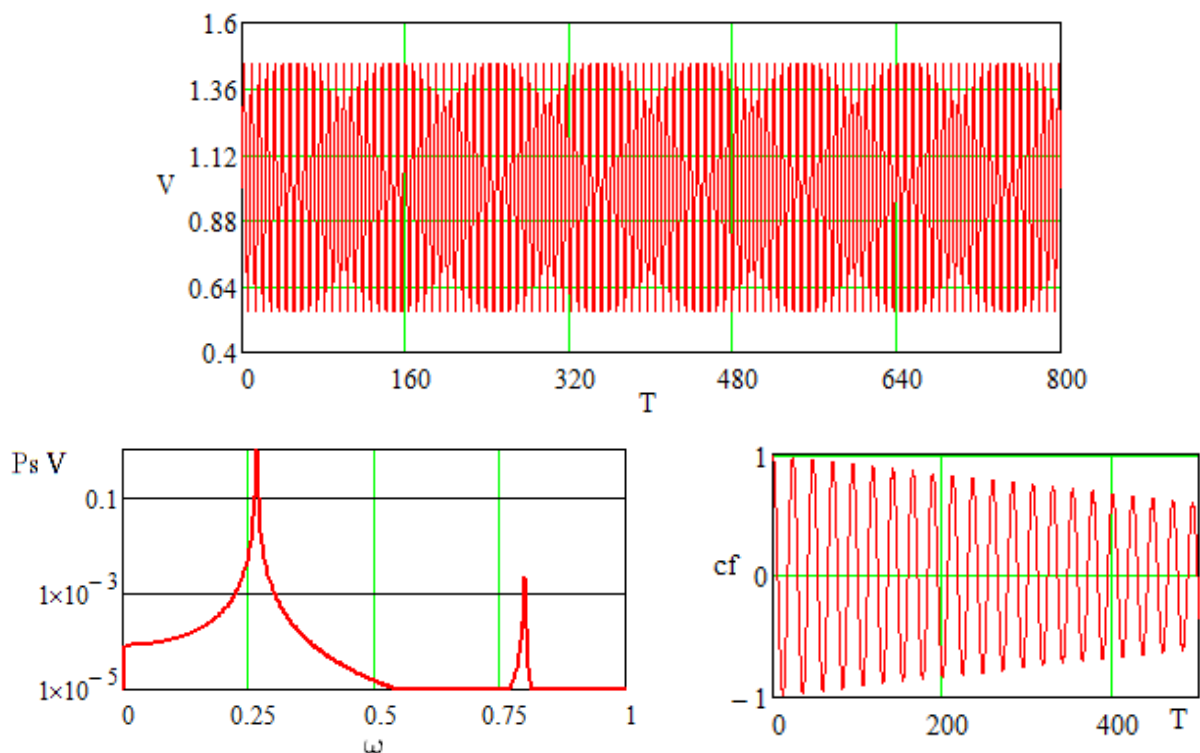


Рис. 2.16. Швидкість частинки, спектр і кореляційна функція при $K>1000$ і кількість хвиль в пакеті $N=10$.

Аналіз руху заряджених частинок в пакетах хвиль, групова швидкість яких дорівнює нулю, показав, що практично завжди ця динаміка виявляється хаотичною. З іншого боку, якщо пакет утворений хвилями, які розташовані на прямолінійній ділянці дисперсії, то динаміка частинок в такому пакеті залишається регулярної.

2.4. Динаміка частинок в полі плоскополяризованої хвилі при наявності зовнішнього постійного однорідного магнітного поля

Окремо варто відзначити той факт, що в умовах коли циклотронні резонанси перекриті, таке відбувається при великих значеннях параметра сили хвилі. Частинки стають не чутливими до виконання резонансних умов і набирають енергію не залежно від їх виконання.

Нами було проведено широке чисельне вивчення цього факту. Найбільш значущі результати цих досліджень представлені на рисунках 2.17-2.18. На рисунку 2.17 представлена часова залежність динаміки руху зарядженої частинки, що знаходиться в першому циклотронному резонансі з зовнішньою електромагнітною хвилею, у разі маленьких значень параметра сили хвилі ($\omega = \omega_H$, $a = 0, 1$). На вертикальній осі цього рисунка відкладені значення x -ої компоненти імпульсу частинки. На цьому рисунку ми бачимо звичайну динаміку частинки захопленої у перший циклотронний резонанс. Максимальне значення імпульсу в цьому випадку обмежене нелінійним циклотронним резонансом. При збільшенні амплітуди електромагнітної хвилі максимальне значення імпульсу зростає пропорційно \sqrt{a} . Однак при значному зростанні амплітуди поля, динаміка частинок значно змінюється. На рисунку 2.18 представлені результати розрахунку динаміки частинки, що рухається в полі інтенсивної електромагнітної хвилі та виконуються умови знаходження частинки у першому циклотронному резонансі ($\omega = \omega_H$, $a = 2$). У цьому випадку динаміка частинок якісно відрізняється від попереднього випадку. Ця різниця полягає в тому, що максимальне значення імпульсу

частинки значно зростає. Це зростання можна пояснити перекриттям нелінійних циклотронних резонансів. Крім того, можна помітити, що рух заряджених частинок має особливості характерні для локальної нестійкості.

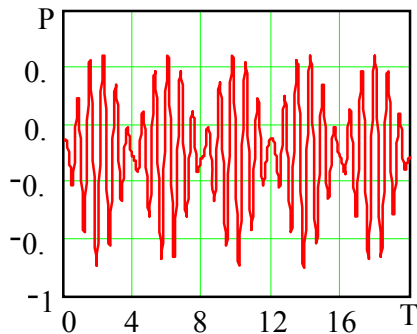


Рис. 2.17. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = \omega_H$, $a = 0,1$.

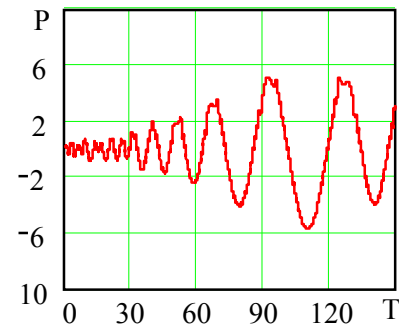


Рис. 2.18. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = \omega_H$, $a = 2$.

Необхідно відзначити, що коли інтенсивність хвилі велика ($a > 1$), умови циклотронного резонансу перестають відігравати вирішальну роль в процесах взаємодії заряджених частинок з електромагнітними хвилями. Ілюстрацією цього факту є результати чисельного дослідження, представлені на рисунках 2.19-2.20. На рисунку 2.19 представлена залежність імпульсу від часу в умовах, коли частота електромагнітної хвилі в два рази менше циклотронної частоти. Можна бачити, що прискорення частинок має місце і в цьому випадку, хоча максимальне значення імпульсу в цьому випадку і не досягає значень для випадка, коли виконуються умови циклотронного резонансу.

Майже такий же результат розрахунку динаміки частинок виходить і в тому випадку, коли частота хвилі в два рази більше ніж циклотронна частота (дивись рисунок 2.20).

Необхідно відзначити, що в полі електромагнітної хвилі великої амплітуди оптимальні умови для найбільш ефективного обміну енергією між полем і частинками далекі від умов циклотронного резонансу.

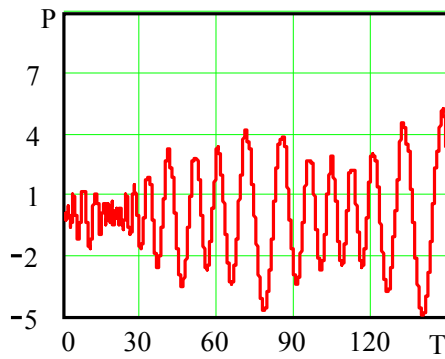


Рис. 2.19. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = 0,5\omega_H$, $a = 2$.

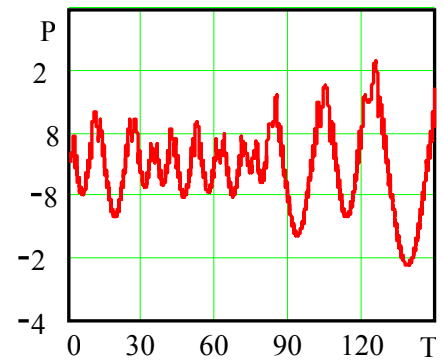


Рис. 2.20. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = 2\omega_H$, $a = 2$.

Дійсно, як можна бачити з рисунків 2.21 і 2.22 темп прискорення частинок, в разі, коли частота хвилі менше ніж циклотронна частота, може бути вищею. Так на рисунку 2.21 максимальне значення імпульсу частинка досягає за час приблизно рівний 900 періодам високочастотної хвилі. Якщо частота хвилі ще менша то таке значення імпульсу частинка набуває за 600 періодів (дивись рисунок 2.22). Відзначимо, що подальше зменшення частоти не призводить до підвищення темпу прискорення.

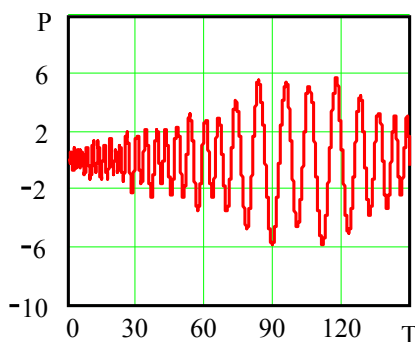


Рис. 2.21. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = 0,3\omega_H$, $a = 2$.

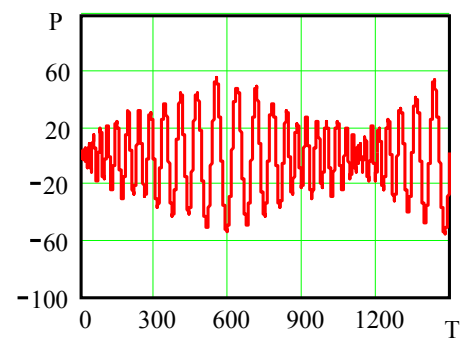
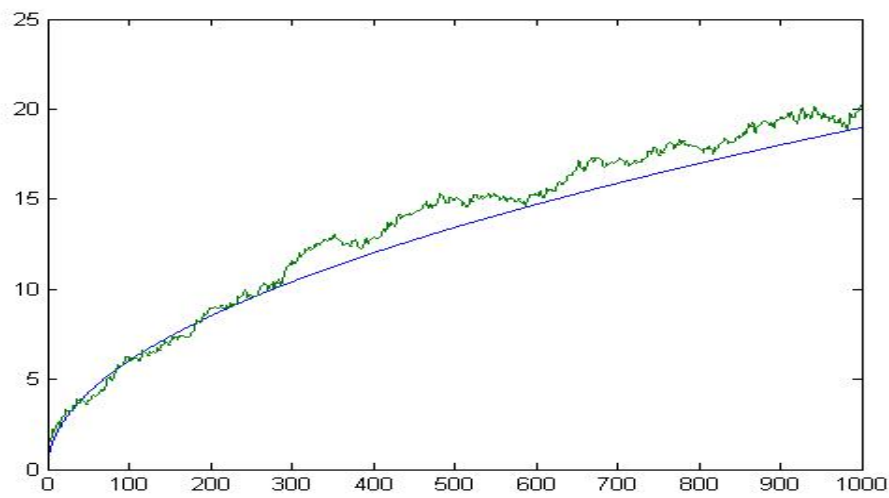


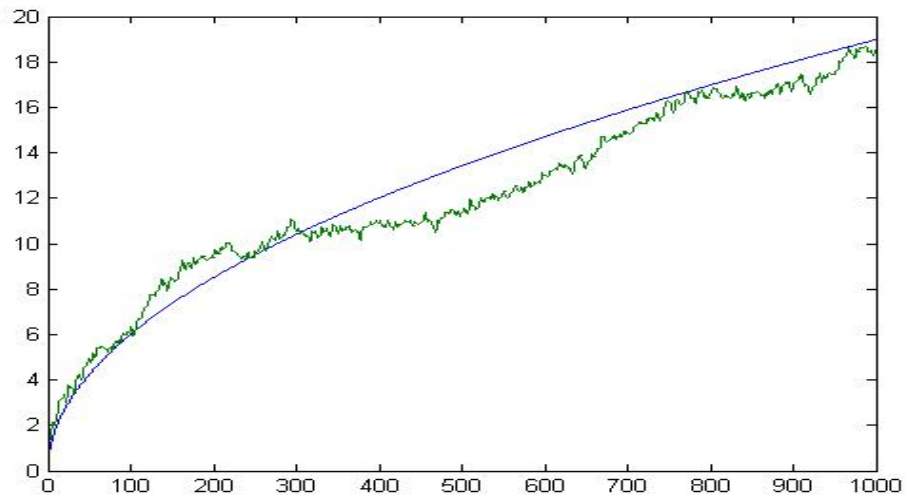
Рис. 2.22. Залежність поздовжньої компоненти імпульсу від часу при $\omega = 0,25\omega_H$, $a = 2$.

З цього можна зробити висновки, що в полі інтенсивної електромагнітної хвилі умови циклотронного резонансу перестають

відігравати вирішальну роль в процесі обміну енергією між зарядженими частинками і хвилями. Також на підтвердження цього результату нижче наведені графіки набору енергії часткою усереднені по 30-ти реалізаціям, така кількість реалізацій була обрана з умов стабілізації усереднених результатів при чисельних розрахунках. При чому кожна реалізація відрізняється одна від одної за рахунок початкової фази відносно зовнішньої хвилі.



а



б

Рис. 2.23. Енергія, що набирається частинкою, усереднена по 30-ти реалізаціям. а) $a=1$, $\omega=\omega_H$; б) $a=1$, $\omega=0,5\omega_H$.

На рисунку 2.23 представлена середня енергія, яку набрала частинка у разі виконання умов циклотронного резонансу при амплітуді зовнішньої

хвилі рівній $a=1$ (рисунок 2.23а), та в умовах, коли частота електромагнітної хвилі в два рази менша за циклотронну частоту і амплітуду зовнішньої хвилі рівній $a=1$ (рисунок 2.23б). Також на рисунку 2.23 наведені криві які засвідчують, що набір енергії частинками відбувається по дифузійному закону.

З цих рисунків видно, що середня енергія яку набрали частинки практично рівні як у разі виконання умов циклотронного резонансу, так і без них, в обох випадка середня набрана енергія дорівнює $\gamma \sim 18$. Тобто умови циклотронного резонансу не є необхідними для набору енергії частинками.

2.5. Самоузгоджена теорія збудження хвиль потоками осциляторів в умовах ізольованого циклотронного резонансу

Вище було розглянуто критерій виникнення режимів з динамічним хаосом в умовах перекриття нелінійних циклотронних резонансів. Якщо амплітуди збуджуваних хвиль не надто великі і критерій (2.7) виникнення локальної нестійкості не виконується, то динаміка частинки може бути промодельованою динамікою в одному ізольованому нелінійному циклотронному резонансі. Як показують попередні дослідження, в цьому випадку також можуть виникати режими з динамічним хаосом. Крім того, розвиток стохастичної нестійкості, також як і при перекритті циклотронних резонансів, призводить до стабілізації рівня збуджуваних полів. Нижче ми вивчимо це питання, і з'ясуємо, який механізм відповідальний за розвиток стохастичної нестійкості. Для цього розглянемо найбільш просту модель, яка дозволяє відповісти на питання, що нас цікавлять.

Розглянемо задачу про порушення електромагнітного поля моноенергетичним пучком осциляторів з функцією розподілу:

$$f_0 = \frac{N_b}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_\parallel), \quad (2.31)$$

де p_{\perp} , p_{\parallel} перпендикулярна і паралельна осі z складова імпульсу, N_b – рівноважна густина пучка.

Будемо розглядати збудження хвилі, яка поширюється перпендикулярно до зовнішнього магнітного поля. Повна нелінійна самоузгоджена система рівнянь, яка описує динаміку частинок і полів, складається з рівнянь Максвелла і рівнянь руху частинок. Така система приведена в роботах [86, 87]. Нижче ми випишемо скорочену систему рівнянь, що описує динаміку частинок і полів в ізольованому циклотронному резонансі з номером s :

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}}{d\tau} &= iJ'_s(\mu)e^{i\theta_s}a, \\ \frac{d\theta_s}{d\tau} &= \frac{s\omega_H}{\gamma} - 1 + \frac{1}{\omega_H} \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2}\right) \operatorname{Re}\left(J_s(\mu)e^{i\theta_s}a\right), \\ \frac{da}{d\tau} &= i\frac{\omega_b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_{s0} \frac{p_{\perp}}{\gamma} J'_s(\mu)e^{-i\theta_s} \end{aligned} \quad (2.32)$$

де $p_{\perp} = p_{\perp}/mc$, $\mu = p_{\perp}/\omega_H$, $\gamma = \sqrt{1 + \mu^2\omega_H^2}$, $\omega_H = eH_0/mc\omega$, $a = eE/mc\omega$, $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b/m_b\omega$.

Можна очікувати, що основним фактором, який призводить до виникнення стохастичності, є останній доданок в правій частині рівняння для фази. Дійсно, якщо зафіксувати амплітуду поля, то система рівнянь (2.32) буде аналогічною рівнянню математичного маятника, на який діє зовнішня періодична сила. Розвиток стохастичною нестійкості в такій моделі було досліджено в роботі [106]. Також у цій роботі, зокрема, вписаний критерій виникнення локальної нестійкості. Однак нижче буде видно, що збуджувані потоком осциляторів поля, не можуть задовольнити цим критерієм. Є певний додатковий механізм. Для його з'ясування, а також для відповіді на сформульовані вище питання, система рівнянь (2.32) була вирішена чисельно. Результати чисельного розрахунку наведені нижче на рисунку 2.24.

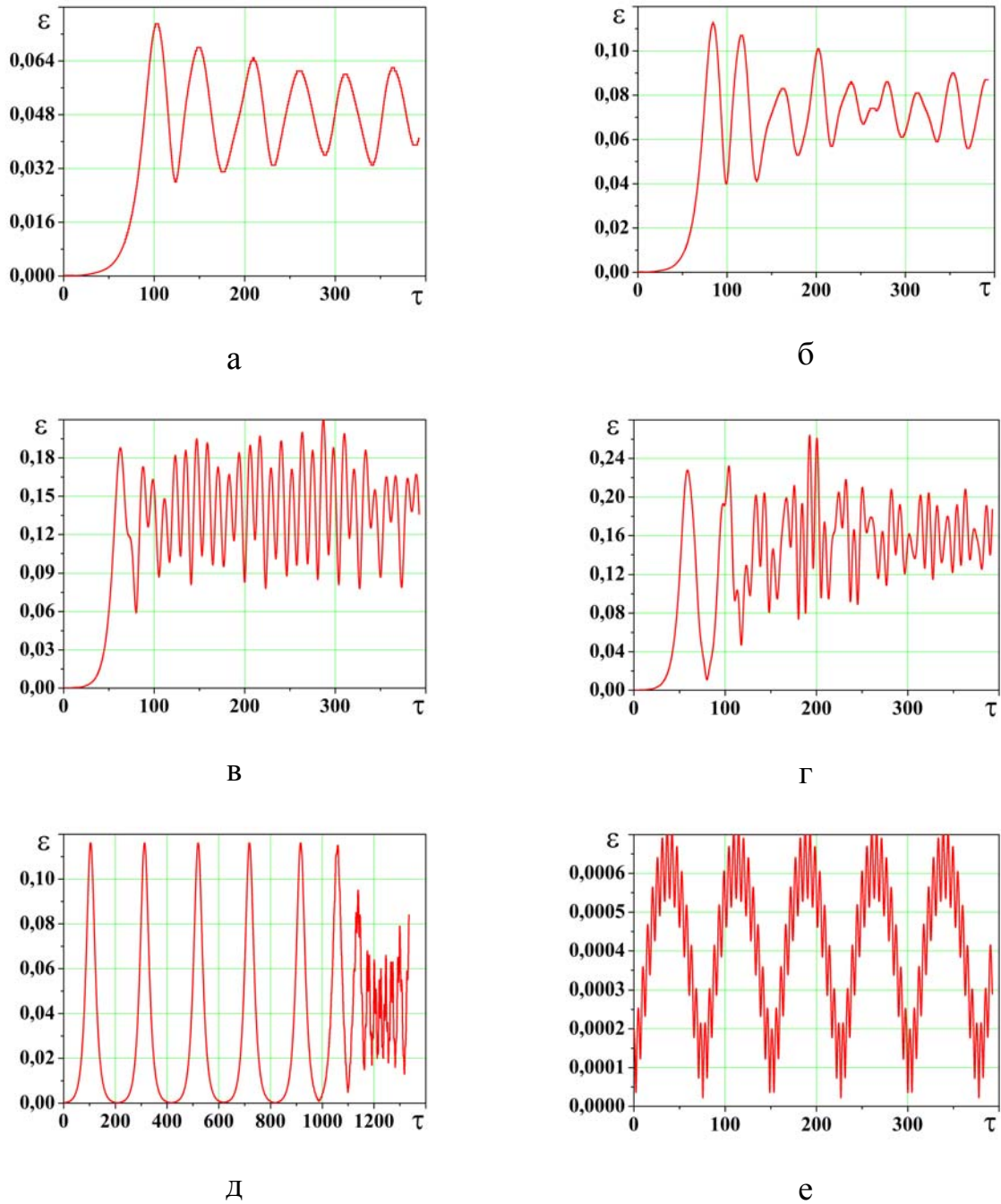


Рис. 2.24. Амплітуда поля від часу при густині пучка. а – $\omega_b^2 = 0,04$; б – $\omega_b^2 = 0,1$; в – $\omega_b^2 = 0,5$; г – $\omega_b^2 = 1,5$; д – $\omega_b^2 = 4$; е – $\omega_b^2 = 4,6$.

З наведених вище рисунків можна побачити такі особливості динаміки взаємодії частинок і полів при циклотронних резонансах. Перш за все, видно, що зі збільшенням густини активних частинок, рівень збудженого поля зростає. Динаміка частинок та збуджуваного поля регулярна аж до значень $\omega_b^2 = 0,04$ (рисунок 2.24а). Це звична динаміка зростання поля. При більшій густині пучка $\omega_b^2 > 0,04$ в динаміці збуджуваного поля з'являється хаотична

компонента (рисунок 2.24б). На малих часах динаміка поля регулярна і нагадує динаміку при малій густині пучка. Причому амплітуда поля спочатку наростає до значень відповідних рівню захоплення частинок полем збудженої хвилі. Потім амплітуда поля зменшується. Причому процес зменшення поля носить хаотичний характер.

Починаючи приблизно з густини пучка $\omega_b^2=0,5$, асимптотичне значення поля не перевищує значень 0,15. Таким чином, також як і при перекритті циклотронних резонансів (дивись, наприклад, [101]), виникнення локальної нестійкості призводить до обмеження рівня збуджуваного пучком поля (рисунок 2.24в). Відзначимо, що такий самий процес стабілізації характерний і для плазменно-пучкової нестійкості [107]. Така динаміка поля з ростом густини частинок залишається досить звичною до тих пір, поки густина частинок задовольняє нерівності $\omega_b^2 < 1$. З подальшим збільшенням густини частинок, коли $\omega_b^2 > 1$ можна було припустити, що порушення коливань на обраних частотах ($\omega \approx \omega_H$) буде відсутній. Дійсно, при виконанні нерівності $\omega_b^2 > 1$ коливання на частотах $\omega \approx \omega_H$ не є власними в такому середовищі. Збудившись, вони згасають. З рисунків 2.24г-2.24е, можна побачити, що, завдяки нерівноважності пучкової системи на частотах $\omega \approx \omega_H$, відбувається збудження коливань. Однак ці коливання досить швидко згасають. Виникає режим релаксаційних коливань. Він існує на досить великому інтервалі часу. В подальшому цей режим переходить в режим хаотичних коливань, і процес збудження коливань на цих частотах припиняється. При цьому з ростом густини частинок амплітуди порушуваних коливань зменшується. Наскільки нам відомо, збудження таких релаксаційних коливань до сих пір не було описано. Такі коливання можуть, мабуть, виникати в іоносферній плазмі.

У розглянутій вище моделі виділено один циклотронний резонанс, і вивчається динаміка взаємодії частинок та поля в моделі ізольованого циклотронного резонансу. У цьому випадку механізм перекриття циклотронних резонансів відсутній. Однак, виходячи з аналізу поведінки

амплітуди поля на рисунках 2.24а-г, видно, що механізм стабілізації якісно пов'язаний з розвитком процесу локальної нестійкості. Проте причина такої нестійкості має бути іншою. Можна було припустити, що цей механізм схожий на механізм виникнення локальної нестійкості динаміки руху математичного маятника, на який діє зовнішня періодична сила. Такий механізм виникнення режимів з динамічним хаосом був описаний в роботі [106]. Однак аналіз умов виникнення динамічного хаосу за цим механізмом показує, що на частинки діють сили недостатньо великі щоб привести до розвитку динамічного хаосу. Тому важливо доповнити розглянуту модель додатковим аналізом динаміки частинок в ізольованому циклотронному резонансі. Найпростішу модель розглянуто в [108], в цій моделі розглядається рух зарядженої частинки в полі зовнішньої електромагнітної хвилі в умовах ізольованого циклотронного резонансу. Амплітуду хвилі вважається постійною. В цьому випадку система рівнянь, яка описує динаміку частинок, збігається з системою рівняння (2.32), в якій можна знехтувати третім рівнянням. Динаміка частинок при цьому описується першими двома рівняннями. Така система має гамільтоніан:

$$H(\theta_s, I) = \frac{s}{\omega_H} \gamma - I + \frac{\varepsilon}{\omega_H} 2I \frac{d}{dI} \left(J_s(\sqrt{2I}) \right) \cos(\theta_s), \quad (2.33)$$

де $I = \mu^2/2$.

Фазовий портрет системи з гамільтоніаном (2.33) топологічно подібний фазовому портрету осцилятора Дуффінга. Дійсно, на фазовій площині (p_{\perp}, θ_s) , в загальному випадку, є три особливі точки: $(\theta_s=0, p_{\perp 1}=G)$, $(\theta_s=0, p_{\perp 1}=1-G/2, p_{\perp 2}=1-G/2)$, $(\theta_s=\pi, p_{\perp 3}=1+G/2)$. Тут $G=a/p_{\perp 0}^3$, $p_{\perp 0}$ – початковий імпульс частинки. Причому, дві з цих особливих точок (друга і третя) представляють собою точки типу «центр», а одна (перша) – сідлова точка. Такий вид фазового простору реалізується при малій амплітуді зовнішньої хвилі ($G \ll 1$). Якщо ж амплітуда досить велика ($G \gg 1$), то дві особливі точки, а саме сідлова точка і точка типу «центр» (перша і друга особливі точки) зливаються і зникають. Залишається тільки одна особлива точка –

точка типу «центр». Всі ці особливості фазового простору аналогічні особливостям фазового простору осцилятора Дуффінга. Однак слід звернути увагу на той факт, що коливання осцилятора Дуффінга є потенційними, а для розглянутих нами рівнянь потенціалу знайти не вдається. Важливою особливістю топології фазового простору даної системи є також той факт, що на замкнутих траєкторіях в околиці особливої точки типу «центр» можна ототожнити захоплені частинки. Не замкнуті траєкторії, які охоплюють замкнуті траєкторії, можна ототожнити прольотними частинками. Характерні види фазового портрета при малих ($G \ll 1$) і при великих ($G > 1$) напруженостях поля зовнішньої хвилі представлені на рисунках 2.25 і 2.26. Зазвичай захоплені і прольотні частинки поділяються сепаратрисою, тобто гомоклінічними або гетероклінічними траєкторіями. В даному випадку, при $G > 1$ (рисунок 2.26), такі траєкторії важко виявити. Є тільки виражені області захоплення та області для прольотних частинок. Як видно з рисунку 2.25, на фазовій площині, в повній відповідності з наведеними вище результатами, є три особливі точки: дві типу центр і сідлова точка. При збільшенні амплітуди хвилі, дві точки («сідло» і «центр» при $\theta_s = 0$) зближуються і зникають (рис.2.26).

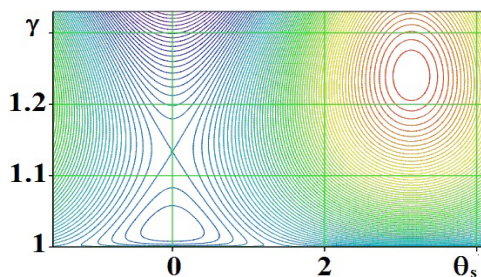


Рис. 2.25. Фазові траєкторії при $a=0.08$.

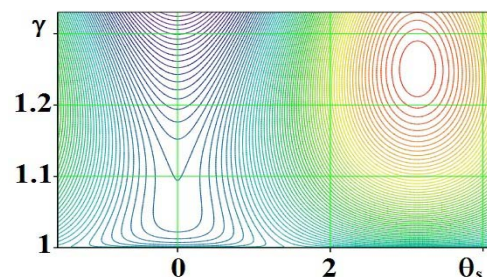


Рис. 2.26. Фазові траєкторії при $a=0.105$.

Таким чином, при зростанні амплітуди хвилі відбувається якісна зміна виду фазового портрета, який описує динаміку руху частинок. Такий процес якісної зміни динаміки може бути причиною виникнення режиму з динамічним хаосом. Більш того, видно, що навіть кількісні характеристики виникнення такої якісної зміни динаміки, наведені на рисунку 2.24б,

підтверджують таку можливість. Дійсно, з цього рисунку можна побачити, що як тільки амплітуда збуджуваної хвилі перевершує величину 0,105, динаміка частинок набуває нерегулярний характер. При подальшому збільшенні щільності частинок, а, відповідно, і при зростанні напруженості збуджуваної хвилі ця нерегулярність стає помітнішою. Та вже на коротких проміжках часу, напруженості поля, що збуджується може перевищувати величину 0,2. Однак динаміка частки виявляється такою, що нерегулярно осцилює, амплітуда поля виходить на рівень близько 0,15. Це значення напруженості поля якісно добре узгоджується з тією напруженістю поля хвилі, при якій відбувається якісна зміна фазової динаміки частинок. Можна, мабуть, стверджувати, що саме цей механізм, механізм біфуркації виду фазового портрета є тим механізмом, який породжує режим з динамічним хаосом (дивись також [109]). Таким чином, в розглянутому нами випадку (у разі взаємодії заряджених частинок з електромагнітними полями в умовах ізольованого циклотронного резонансу) стабілізація рівня збуджуваного поля визначається виникненням динамічного хаосу. На відміну від випадку перекриття нелінійних циклотронних резонансів в цьому випадку основною причиною виникнення динамічного хаосу є якісна зміна фазового портрета при зміні амплітуди поля збуджуваного коливання.

Основна частина матеріалів цього розділу була опублікована у роботах [3, 10, 12]

2.6. Висновки

На основі аналітичних та числових досліджень показано, що при $a \geq 1$ умови циклотронного резонансу у задачі руху заряджених частинок (електронів) у зовнішньому постійному магнітному полі величини H_0 , яке направлене уздовж осі z , і в полі електромагнітної хвилі довільної поляризації, не є необхідними для обміну енергією між зарядженими частинками і хвилями. В таких полях завжди виконуються умови перекриття нелінійних циклотронних резонансів, окрім випадку авторезонансу. У цьому

випадку обмін енергією реалізується за короткий час, який може дорівнювати всього одному періоду високочастотної хвилі. При цьому динаміка частинок стає хаотичною і в середньому набір енергії відбувається по дифузійному закону – $\gamma \sim \gamma_0 \sqrt{\tau}$.

Показано, що до значень $\omega_b^2 = 1$ у задачі про збудження електромагнітного поля моноенергетичним пучком осциляторів, для визначення динаміки полів, що збуджуються можливо використовувати одночасткове наближення. Також знайдені умови, коли електронний пучок може збуджувати коливання в умовах циклотронного резонансу коли частота хвилі, що збуджується, у декілька разів менша, ніж пучкова частота ($2\omega^2 = \omega_b^2$). В цих умовах глибина нелінійної модуляції збудженого поля хвилі може досягнути ста відсотків.

РОЗДІЛ 3

ПАРАМЕТРИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ПОЛЕМ ЗОВНІШНЬОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ

Вище ми досліджували динаміку частинок в постійному магнітному полі і в полі електромагнітної хвилі з фіксованою амплітудою.

Коли розглядається задача прискорення заряджених частинок за допомогою використання циклотронних резонансів, тоді енергія частинок є дуже залежною від розташування заряджених частинок відносно фази електромагнітної хвилі, яка прискорює заряджені частинки. Розкид енергії частинок при цьому досягає ширини нелінійного резонансу. Щоб зменшити цей розкид у даному розділі ми пропонуємо використати явища параметричного резонансу, який дозволяє прискорити ті частинки, які знаходяться у центрі нелінійного резонансу. При цьому частинки, що знаходяться в околі сепаратриси практично не знаходяться під впливом параметричного резонансу. Для досягнення цієї мети ми пропонуємо прискорювати заряджені частинки за допомогою електромагнітної хвилі, амплітуда якої періодично змінюється у часі. Причому частота цієї зміни повинна дорівнювати подвоєній баунс-частоті частинок, що захоплюються у перший циклотронний резонанс електромагнітною хвилею, та в яких прискорюються частинки. Нижче ми покажемо, що ця періодична модуляція амплітуди хвилі дійсно параметрично прискорює частинки, які знаходяться у центрі нелінійного резонансу (і, як результат, не прискорюються хвилею).

Також розглянуто можливу ситуацію коли частота модуляції амплітуди хвилі значно перевершує частоту баунс-коливань частинок, у цьому випадку на фазовому портреті з'являються нові особливі точки. Зокрема, показано, що нестійка сідлова точка може стати стійкою. Ця особливість аналогічна особливості маятника Капіци (маятника з перевернутим підвісом). Наявність додаткових стійких точок може призводити до істотної зміни всієї динаміки частинок у полі хвилі, зокрема, до утворення додаткових згустків. Ці згустки

будуть відповідати тим частинкам, які потрапили в околицю цих стійких особливих точок.

3.1. Умови параметричного прискорення заряджених частинок полем зовнішньої електромагнітної хвилі

Розглянемо рух зарядженої частинки в полі плоскої електромагнітної хвилі з довільною поляризацією. При наявності постійного магнітного поля \mathbf{H}_0 , що має компоненти $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_{0z}\}$. Компоненти електричних і магнітних полів такої хвилі можна представити у вигляді:

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0(t)e^{i\psi}), \quad \mathbf{H} = \text{Re}(1/k_0[\mathbf{kE}]), \quad (3.1)$$

де $\Delta = \Delta(\gamma_0) + \delta\gamma(\partial\Delta/\partial\gamma)_{\gamma_0}$, $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{a}E_0(t)$, $\mathbf{a} = \{\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z\}$ – вектор поляризації хвилі; $k_0 = \omega/c$; ω , k – частота і хвильовий вектор хвилі.

Рівняння руху:

$$\dot{\mathbf{p}} = \left(1 - \frac{\mathbf{kp}}{\gamma}\right) \text{Re}(\mathbf{a}(\tau)e^{i\psi}) + \frac{\omega_H}{\gamma}[\mathbf{pe}] + \frac{\mathbf{k}}{\gamma} \text{Re}(\mathbf{pa}(\tau))e^{i\psi}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} / \gamma; \quad \dot{\psi} = \mathbf{kp} / \gamma - 1,$$

де $\tau \equiv \omega t$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{H}/H_0$, $\omega_H \equiv eH_0/mc\omega$, $\psi = \mathbf{kr} - \tau$, $\mathbf{a}(\tau) = eE_0(\tau)/mc\omega$.

Якщо амплітуда хвилі постійна в часі, то така система рівнянь нами була розглянута вище в розділі 1. Тут же ми врахуємо той факт, що амплітуда хвилі змінюється в часі. Однак припустимо, що ця зміна дуже повільна, тобто частота модуляції амплітуди значно нижче, ніж частота хвилі і частота обертання частинок у зовнішньому постійному магнітному полі. Можна довести, що з огляду на факт повільної зміни амплітуди, укорочені рівняння, що описують динаміку частинок в околиці ізольованого циклотронного резонансу, можуть бути приведені до такого виду:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp &= \frac{1}{p_\perp} (1 - k_z v_z) W_s \cdot a_0(t) \cos \theta_s, & \dot{p}_z &= \frac{1}{\gamma} k_z W_s a_0(t) \cos \theta_s, \\ \dot{\theta}_s &= \Delta_s \equiv k_z v_z + s \frac{\omega_H}{\gamma} - 1, & \dot{\gamma} &= \frac{a_0(t)}{\gamma} W_s \cdot \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $a_0(t) = eE_0(t) / mc$ параметр сили хвилі, що залежить від часу.

$$W_s \equiv \alpha_x p_\perp J_s s / \mu - \alpha_y p_\perp J_s' + \alpha_z p_\perp J_s, \quad \mu \equiv k_x p_\perp / \omega_H.$$

Рівняння (3.3) відрізняються від наведених вище, тим, що параметр сили хвилі є функція яка залежить від часу.

Розглянемо найбільш просту конфігурацію полів, в якій можливо реалізувати параметричне прискорення частинок. Такою конфігурацією є лінійно поляризована хвиля, що розповсюджується перпендикулярно до напрямку поширення зовнішнього магнітного поля. Будемо вважати, що взаємодія зовнішньої електромагнітної хвилі з зарядженими частинками відбувається в умовах першого циклотронного резонансу. Тобто ми маємо такі значення компонент хвильового вектору, вектору поляризації і параметра W_1 :

$$k_x = 1, \quad k_z = k_y = 0, \quad s = 1 \quad (\gamma_0 = \omega_H), \quad \alpha_x = \alpha_z = 0, \quad \alpha_y = 1, \quad W_1 = -p_\perp J_1'.$$

У всіх випадках, які мають реальний інтерес, параметр сили хвилі маленький ($a \ll 1$). При цьому приріст енергії частинки також буде маленьким. Тому вираз для енергії частинки можна представити у такому вигляді: $\gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} \ll \gamma_0$.

$$\ddot{\theta} + \Omega^2(t) \cdot \sin(\theta) = 0, \quad (3.4)$$

де $\Omega^2 = W a_0(t) / \gamma_0^2$ – квадрат баунс-частоти.

У нашому випадку баунс-частота залежить від часу. Якщо цю залежність можливо представити у вигляді $a_0 = a[1 + q \cos(2\Omega)]$, $q \ll 1$, то рівняння (3.4) для малих кутів ($\theta \ll 1$) є не чим іншим як рівняннями Матє.

При цьому кутова зміна буде експоненціально зростати з часом. Як наслідок буде рости з часом і енергія частинки.

Слід зазначити, що як раз ті частинки, що знаходяться при малих значеннях змінної θ , відповідають тим частинкам, які не будуть прискорюватися за рахунок циклотронного резонансу. Таким чином, ті частинки, що не змінюють свою енергію або змінюють її незначно будуть прискорюватися за рахунок параметричного резонансу. Відзначимо також, що частинки, які будуть найменш ефективно прискорюватися за рахунок циклотронного резонансу, будуть знаходитися близько до сепаратриси ($\theta \leq \pi$). Баунс-частота таких частинок буде значно меншою ніж частинок, які знаходяться в центрі циклотронного резонансу. При цьому параметричний резонанс на ці частинки практично не буде діяти.

3.2. Чисельне дослідження процесу параметричного прискорення заряджених частинок

Для побудови схем чисельних розрахунків ми будемо розглядати найбільш просту структуру поля електромагнітної хвилі:

$$\mathbf{E} = \{0, E_y, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, 0, H_z\}, \quad \mathbf{k} = \{k_x, 0, 0\}.$$

Така структура дозволяє записати рівняння руху в найбільш простому вигляді, зберігаючи при цьому всі особливості, які необхідні для ілюстрації параметричних процесів. Структура зовнішнього поля показана на рисунку 3.1.

Рівняння руху в цьому випадку матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\vec{P}}{\gamma}, \\ \frac{dP_x}{d\tau} &= -k \frac{P_y}{\gamma} (-E_y \sin(\psi) + H_0), \\ \frac{dP_y}{d\tau} &= -E_y \sin(\psi) + k \frac{P_x}{\gamma} (-E_y \sin(\psi) + H_0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

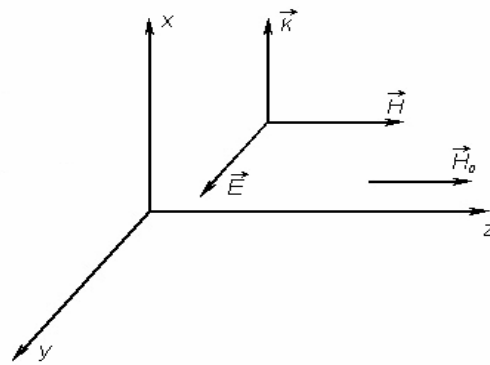


Рис. 3.1. Структура поля.

На рисунках 3.2 і 3.3 представлені характерні результати дослідження динаміки заряджених частинок в ізолюваному циклотронному резонансі при наявності модульованої електромагнітної хвилі. На рисунку 3.2 наведена залежність енергії частинок від часу. На рисунку 3.3 наведено фазовий портрет руху цієї ж частинки. Для дослідження обиралися частинки, що спочатку знаходяться не дуже далеко від особливої точки $\gamma=1,33$, $\theta=1,5$.

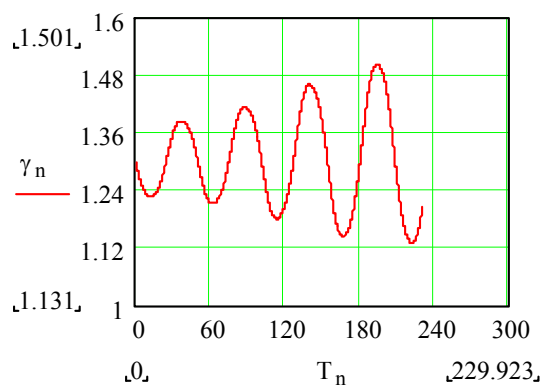


Рис.3.2. Залежність енергії частинок від часу.

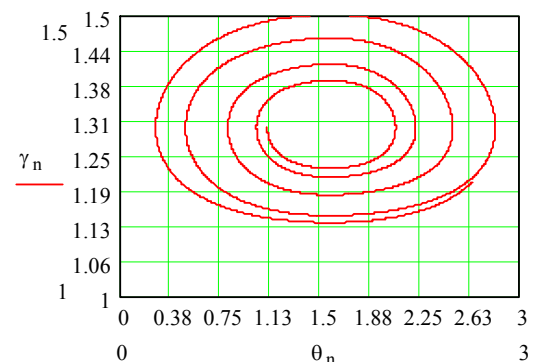


Рис.3.3. Фазовий портрет руху частинок.

Частота модуляції амплітуди зовнішньої електромагнітної хвилі обиралась такою, щоб дорівнювала подвоєній баунс-частоті захоплених в резонанс частинок. На цих рисунках можна бачити, що енергія частинок з часом зростає.

Таким чином, використовуючи умови параметричного резонансу, можливо значно змінити енергію заряджених частинок в умовах циклотронного резонансу.

Якщо частота зовнішньої сили буде значно перевищувати баунс-частоту, то можна очікувати суттєвої зміни виду фазового портрета. Найбільш важливим при цьому є поява нових стаціонарних стійких точок. Для знаходження умов появи таких точок найпростіше привести рівняння (3.4) до виду, яке вивчалось, наприклад, в [110]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - s\omega^2 \sin \omega t}{l} \sin \theta = 0, \quad (3.6)$$

де $g/l = \omega_0^2$, $s/l \equiv a \sim 1$, λ – коефіцієнт згасання, $(g - s\omega^2 \sin \omega t)/l = \Omega^2(t)$

У такому вигляді це рівняння відрізняється від рівняння (3.4) тільки наявністю слабого згасання і конкретизацією виду залежності амплітуди хвилі від часу. Далі перейдемо до безрозмірного часу $\tau = \omega t$ і введемо коефіцієнти:

$$b = \frac{\omega_0 l}{\omega s} < 1, \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0} b \sim 1, \quad \frac{\lambda}{\omega} = 2\alpha a, \quad \frac{g}{l\omega^2} = b^2 a^2.$$

У таких змінних рівняння (3.6) набуде вигляду:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\alpha a \frac{d\theta}{d\tau} + (b^2 a^2 - a \sin \tau) \sin \theta = 0. \quad (3.7)$$

Аналітичні дослідження рівняння (3.7) (дивись, наприклад, [110]) показують, що при наявності досить високої частоти модуляції нестійкі точки можуть стати стійкими. Як приклад для нашого випадку, за відсутності модуляції і згасання ($\lambda = a = 0$) точка ($\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$) є нестійкою сідловою. Однак при виконанні умови $\omega a > (\sqrt{2} \omega_0)$ ця нестійка точка стає стійкою. Фізично ця

умова означає, що, незважаючи на малу глибину модуляції амплітуди хвилі, при досить високій частоті цієї модуляції нестійка точка стає стійкою.

Рівняння (3.7) досліджувалося чисельно. У всіх випадках було отримано добре узгодження аналітичних і чисельних результатів.

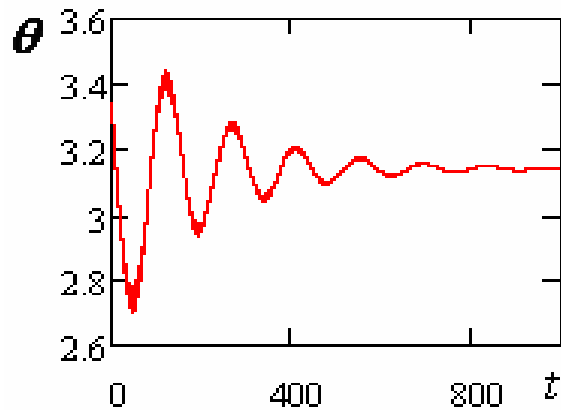


Рис.3.4. Часова динаміка кутової змінної.

Як приклад на рисунку 3.4 представлена часова динаміка кутової змінної θ . Дана залежність була побудована при наступних значеннях параметрів: $s = 0,1$, $b = 0,55$, $a = 0,01$. Для нашого випадку це означає, що глибина модуляції амплітуди складає $0,1$, а частота модуляції приблизно в 20 разів перевищує частоту баунс-коливачь захоплених частинок. З рисунку 3.4 видно, що область захоплення по перемінній θ достатньо велика.

Основна частина матеріалів цього розділу була опублікована у роботі [8].

3.3. Висновки

У цьому розділі ми розглянули динаміку частинок у постійному магнітному полі та у полі хвилі, амплітуда якої змінюється із заданою частотою. При цьому показано, що якщо частота зовнішньої модуляції амплітуди хвилі є близькою до подвоєної частоти баунс-коливачь захоплених полем хвилі частинок, то виникають умови для реалізації параметричної нестійкості. Енергія захоплених частинок при цьому зростає. Причому,

швидше набирають енергію ті частинки, які знаходяться поблизу особливої точки типу «центр». Для цих частинок умови параметричного резонансу виконуються більш строго. Частинки, розташовані далі від точки типу «центр», набирають енергію повільніше. У кінцевому рахунку, всі частинки, захоплені полем хвилі, набирають енергію і зосереджуються в околиці сепаратриси. У цьому випадку вони, за своїми параметрами, вже вийшли з умов параметричного резонансу, і модуляція амплітуди хвилі на них практично не діє. Таким чином, зовнішня модуляція амплітуди хвилі з частотою, яка близька подвоєній частоті баунс-коливань частинок, призводить до зростання енергії частинок. Слід, однак, відзначити, що групування частинок поблизу сепаратриси може призводити до нетривіальної і несподіваної динаміки останніх. Досить згадати, що при наявності навіть незначного зовнішнього збудження, сепаратриси розщеплюється. Динаміка частинок при цьому стає хаотичною.

При взаємодії частинок у постійному магнітному полі та у полі хвилі, амплітуда якої змінюється із заданою частотою. Запропоновано схеми параметричного, додаткового прискорення заряджених частинок, у фазовому просторі нелінійного циклотронного резонансу. Це додаткове прискорення реалізується модуляцією амплітуди хвилі, яка прискорює частинки. Цей механізм можливо використовувати для зменшення розкиду енергії прискорених частинок захоплених у резонанс. Також запропоновано використовувати модуляцію амплітуди хвилі для запобігання розбіганню частинок згустків в фазовому просторі.

РОЗДІЛ 4

ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ПОЛЕМ ДВОХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ РІЗНИХ ЧАСТОТ

Однією з перспективних схем прискорення, що дозволяє прискорювати заряджені частинки у вакуумі, є схема оберненого лазера на вільних електронах (ОЛВЕ). У цій схемі заряджені частинки рухаються в полі двох електромагнітних хвиль з заданими параметрами. При цьому вважається, що нелінійна взаємодія зарядженої частинки з полем цих двох поперечних електромагнітних хвиль еквівалентна взаємодії зарядженої частинки з повільною електромагнітною хвилею, яка має фазову швидкість, близьку до середньої швидкості частинок. Крім того, ця еквівалентна хвиля має подовжню компоненту електричного поля. Практично мова йде про черенковську взаємодію прискорених заряджених частинок з комбінаційною хвилею. Така схема прискорення заряджених частинок широко обговорюється у науковій літературі. Вона має багато важливих особливостей, з яких ми відзначимо лише той факт, що прискорення відбувається у вакуумі поперечними електромагнітними хвилями. Однак слід, відзначити, що в більшості випадків лазерне випромінювання являє собою многомодове випромінювання. У цьому випадку, як показано в роботі [111] у схемі ОЛВЕ розвивається стохастична нестійкість. Тому для реалізації ОЛВЕ необхідно використовувати одномодові лазерні пучки. Відзначимо також наступний факт, що прискорення у схемі ОЛВЕ відбувається силами, пропорційними E^2 тому бажано використовувати у цих схемах прискорення лазерні поля якомога більшої інтенсивності. Однак, як буде показано в нижче, навіть у випадку одномодових лазерів, при досить великій напруженості лазерного випромінювання, у схемі ОЛВЕ також розвивається стохастична нестійкість. Однак при досить помірних полях область фазового простору зі стохастичними траєкторіями займає незначну область в околиці сепаратриси. І тільки при достатньо великих напруженостях полів ця область може займати практично весь фазовий

простір. Нижче будуть визначені значення напруженості полів, при яких стохастична нестійкість грає істотну роль і при яких нею можна знехтувати.

Для реалізації ефективного обміну енергії у схемі ОЛВЕ необхідно вивчити особливості динаміки заряджених частинок у полі кількох поперечних електромагнітних хвиль. Особливу увагу при цьому було звернуто на залежність цієї динаміки від напруженості полів цих хвиль.

4.1. Динаміка руху заряджених частинок у полі двох електромагнітних хвиль різних частот

Розглянемо динаміку руху заряджених частинок у полі кількох електромагнітних хвиль. Вирази для електричних і магнітних полів цих хвиль можна представити в такому вигляді:

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{H} = \sum_n \mathbf{H}_n, \quad \mathbf{E}_n = \operatorname{Re}(\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}), \quad \mathbf{H}_n = \frac{c}{\omega_n} [\mathbf{k}_n \mathbf{E}_n], \quad (4.1)$$

де $\psi_n = \mathbf{k}_n \mathbf{r} - \omega_n t$.

Ці поля задовольняють рівнянням Максвелла.

Рівняння руху зарядженої частинки у полях (4.1) мають традиційний вигляд:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (4.2)$$

Ці рівняння зручно записати у безрозмірних змінних як для залежних так і для незалежних змінних:

$$\omega_0 = \omega_n / \omega_0, \quad \mathbf{P} \equiv d\mathbf{P} / d\tau, \quad \tau \equiv \omega_0 t, \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{P} / mc, \quad \mathbf{r} = \mathbf{v} / c, \quad \mathbf{a}_n \equiv e\mathbf{E}_n / mc\omega, \quad \mathbf{k}_n \equiv \mathbf{k}_n c / \omega, \\ \mathbf{r} \equiv \omega_0 \mathbf{r} / c.$$

Рівняння (4.2) зручно доповнити рівнянням для енергії:

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{P} \cdot e\mathbf{E}}{\gamma mc\omega_0}. \quad (4.3)$$

Підставляючи поля (4.1) в рівняння (4.2) (4.3) користуючись цими безрозмірними змінними можна отримати наступні, зручні для подальшого аналізу рівняння:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_n E_n (\omega_n - \mathbf{k}_n \dot{\mathbf{r}}) + \sum_n \mathbf{k}_n (\dot{\mathbf{r}} E_n), \quad (4.4)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{P}}{\gamma} \sum_n \omega_n E_n,$$

де $\mathbf{E}_n = \text{Re}(\mathbf{a}_n e^{i\psi_n})$, $\psi_n \equiv \mathbf{k}_n \mathbf{r} - \omega_n \tau$.

Для подальшого аналізу зручно ввести якусь допоміжну характеристику частинки, яку ми будемо надалі називати парціальною енергією частинки, що задовольняє наступним рівнянням:

$$\dot{\gamma}_n = \omega_n (\dot{\mathbf{r}} E_n). \quad (4.5)$$

З визначення цієї парціальної енергії випливає, що вона визначає те значення енергії яку мала б частинка якби рухалася тільки в полі однієї електромагнітної хвилі. Використовуючи визначення цієї парціальної енергії з рівнянь (4.4) (4.5) можна отримати наступний інтеграл руху:

$$\mathbf{P} - \sum_n \text{Re}(i\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}) - \sum_n \frac{\mathbf{k}_n}{\omega_n} \gamma_n = \mathbf{C}. \quad (4.6)$$

В загальному випадку рівняння (4.4) (4.5) спільно з інтегралом (4.6) можуть бути вивчені тільки чисельними методами. Для отримання аналітичних результатів ми будемо вважати, що параметр сили кожної з діючих на частку хвиль малий. В цьому випадку всі характеристики частинки (її енергію, імпульс, координату, швидкість) можна представити у вигляді суми повільно та швидко мінливих величин:

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \quad \gamma_n = \bar{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_n.$$

В цьому випадку можна отримати наступні вирази і рівняння, які пов'язують швидкі і повільні змінні:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \sum_n \frac{\mathbf{k}_n}{\omega_n} \bar{\gamma}_n + C, \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \sum_n \operatorname{Re}(i\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}) + \sum_n \mathbf{k}_n \tilde{\gamma}_n / \omega_n, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_n &= \omega_n \bar{\mathbf{v}} \mathbf{E}_n = \omega_n \bar{v} \operatorname{Re}(\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}), \\ \dot{\bar{\gamma}}_n &= \omega_n \bar{\mathbf{v}} \mathbf{E}_n \quad \tilde{\gamma}_n = \operatorname{Re}(\Gamma_n e^{i\psi_n}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

де $\Gamma_n = -i\omega_n \bar{\mathbf{v}} \mathbf{a}_n / \dot{\psi}_n$.

Рівняння для швидких змінних можуть бути проінтегровані:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n &= \operatorname{Re} \left[i\omega_n (\bar{\mathbf{v}} \mathbf{a}_n) e^{i\psi_n} / \omega_n - \mathbf{k}_n \bar{\mathbf{v}} \right], \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \sum_n \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\psi_n} [\mathbf{a}_n + \mathbf{k}_n (\bar{\mathbf{v}} \mathbf{a}_n) / \omega_n] \right\}. \end{aligned}$$

Рівняння для повільних змінних набудуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{P}}} &= \sum_{m,n} \mathbf{k}_n \frac{1}{\gamma} \left[\operatorname{Re}(i\mathbf{a}_m e^{i\psi_m}) \right] \left[\operatorname{Re}(\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}) \right], \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{m,n} \operatorname{Re}(i\mathbf{a}_m e^{i\psi_m}) \omega_n \operatorname{Re}(\mathbf{a}_n e^{i\psi_n}) = \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{2\gamma} \omega_n \mathbf{a}_n \mathbf{a}_m \left[\cos(\psi_m + \psi_n + \pi / 2) + \cos(\psi_m - \psi_n + \pi / 2) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) еквівалентні рівнянню нелінійного маятника (математичного маятника) на який діє зовнішня періодична сила. Покажемо це. Нехай серед тих хвиль, які діють на частинку, є дві хвилі (під номером 1 і 2), биття яких формують комбінаційну хвилю, фазова швидкість якої, близька до середньої швидкості частинки. Позначимо різницю фаз цих хвиль

через θ . $\theta \equiv \psi_1 - \psi_2$. Для цієї різниці фаз можна отримати наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi v - \Omega = \Delta(\gamma), \quad (4.9)$$

де $\chi \equiv k_1 - k_2$, $\Omega \equiv \omega_1 - \omega_2$.

При цьому ми вважаємо, що $\Omega/\chi \approx v$.

Рівняння (4.8) ми тепер можемо переписати у вигляді:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} a \Omega \cos \theta + F(\tau), \quad (4.10)$$

де $a = a_1 a_2$, $F(\tau)$ – періодична функція.

Будемо вважати, що початкова енергія частинки в точності відповідає черенковському резонансу частинки з комбінаційною хвилею. Це означає, що: $\Delta(\gamma_0) = 0$. Крім того, врахуємо, що в результаті взаємодії хвиль з частинками енергія частинки змінилася не на багато. В цьому випадку расстройку можна розкласти в ряд Тейлора:

$$\Delta = \Delta(\gamma_0) + \delta\gamma \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0}.$$

Тоді рівняння (4.9) і (4.10) будуть повністю замкнуті і приймуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \delta\gamma \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0}, \\ \frac{d\delta\gamma}{d\tau} &= \frac{a \Omega}{\gamma_0} \cos \theta + F(\tau). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Система рівнянь (4.11) еквівалентна рівнянню математичного маятника, який знаходиться під впливом зовнішньої періодичної сили (4.12):

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0} \frac{a \Omega}{\gamma_0} \cos \theta + F(\tau). \quad (4.12)$$

4.2. Чисельне дослідження прискорення заряджених частинок полем двох електромагнітних хвиль різних частот

Рівняння (4.12) правильно описує динаміку частинок при малих амплітудах діючих на них хвиль. І чим менші амплітуди цих хвиль, тим точніше описується динаміка.

Нас же цікавить динаміка як при малих, так і при великих напруженостях поля. Тому ми провели серію чисельних досліджень початкової системи рівнянь (4.4). Числено досліджувалася динаміка частинок в найбільш цікавій конфігурації полів, яка представляє собою поле двох електромагнітних хвиль що розповсюджуються назустріч один одному. Така конфігурація полів якраз відповідає схемі прискорення ОЛВЕ. Основні результати цих чисельних досліджень полягають в наступному.

Коли амплітуди хвиль малі a_1 та a_2 менше 0,1 результати чисельних розрахунків наведені на рисунках 4.1, 4.2. А саме на рисунку 4.1 представлена характерна залежність поздовжнього імпульсу частинки в полі двох хвиль від часу. Спектр цієї динаміки заряджених частинок наведено на рисунку 4.2. Ці залежності отримані для амплітуд даних двох хвиль рівних 0,1. Якісно динаміка частинок відповідає динаміці математичного маятника.

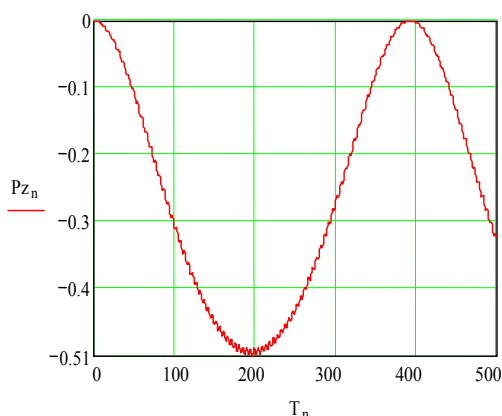


Рис. 4.1. Поздовжній імпульс частинок при амплітуді хвиль $a_1, a_2 = 0, 1$.

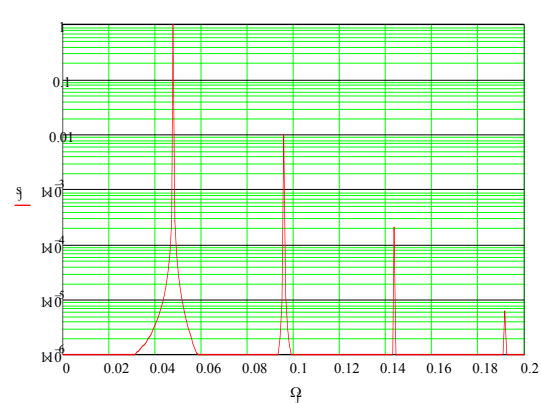


Рис. 4.2. Спектр поздовжнього імпульс частинок при амплітуді хвиль $a_1, a_2 = 0, 1$.

Коли амплітуди хвиль a_1 та a_2 стають більшими 0,1 динаміка деяких частинок, саме тих частинок, які потрапляють в околицю сепаратриси математичного маятника, стає хаотичною. Причому чим більше амплітуда хвиль, тим більша кількість частинок, згустку що прискорюється, включається в хаотичну динаміку. На рисунку 4.3 представлена характерна залежність поздовжнього імпульсу частинки від часу. Спектр поздовжнього імпульсу частинки наведено на рисунку 4.4. Ці залежності отримані для амплітуд хвиль a_1 та a_2 рівних 0,3. Видно, що динаміка частинок якісно змінилася, і частинка має хаотичну динаміку.

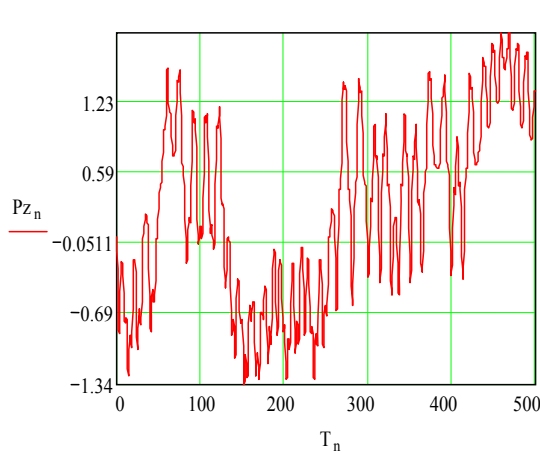


Рис. 4.3. Поздовжній імпульс частинок при амплітуді хвиль $a_1, a_2 = 0,3$.

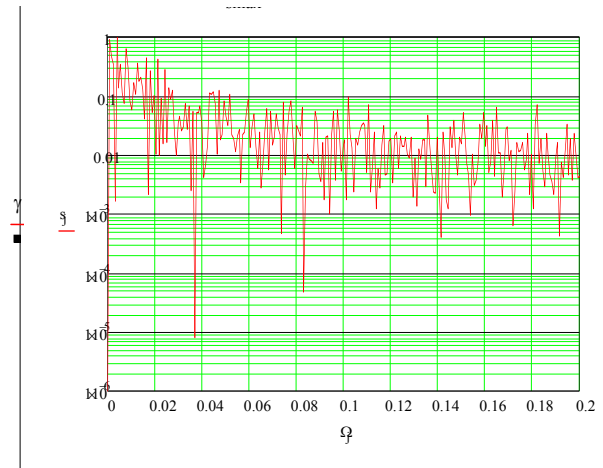


Рис. 4.4. Спектр поздовжнього імпульсу частинки при амплітуді хвиль $a_1, a_2 = 0,3$.

Однак залишається деяка кількість частинок, які виявляються в нульових фазах комбінаційної хвилі, вони не беруть участі в хаотичній динаміці, вони знаходяться в острівці стійкості, однак зі збільшенням амплітуди хвиль a_1 та a_2 таких частинок стає менше.

Нерегулярність динаміки руху заряджених частинок підтверджується статистичним аналізом, який було проведений для динаміки частинок, котрі

знаходилися в полі хвиль a_1 та a_2 рівних 0,3. Для аналізу цієї динаміки була побудована кореляційна функція, яка швидко спадає (рисунок 4.5).

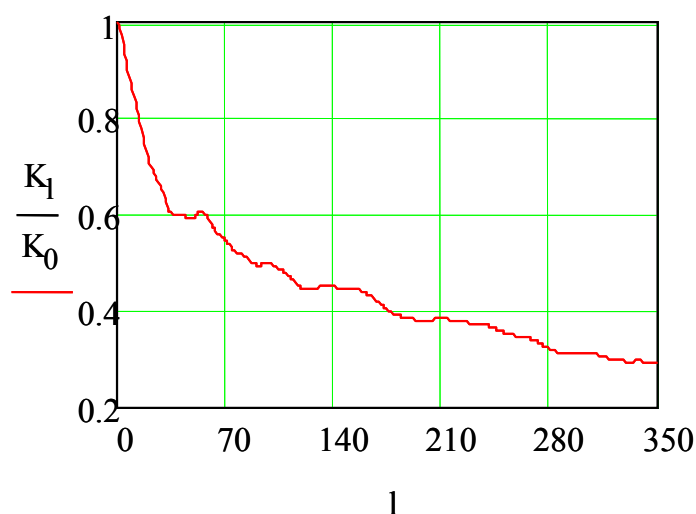


Рис. 4.5. Кореляційна функція.

Також чисельними методами була побудована карта максимальних показників Ляпунова, в залежності від напруженості хвиль a_1 та a_2 (рисунок 4.6). З результатів цих розрахунків видно, що в області значень напруженості хвиль a_1 та a_2 (або навіть однієї з хвиль) більшою за 0,3 максимальні показники Ляпунова додатні. Це свідчить, що в цій області спостерігається хаотична динаміка заряджених частинок. Слід відмітити, що навіть в області значень напруженості хвиль a_1 та a_2 менших за 0,3, не всі значення максимальних показників Ляпунова відповідають регулярній динаміці, а лише окремі островки. І лише коли значення напруженості хвиль a_1 та a_2 стають меншими за 0,1 можливо казати про повністю регулярну динаміку заряджених частинок в схемі ОЛВЕ.

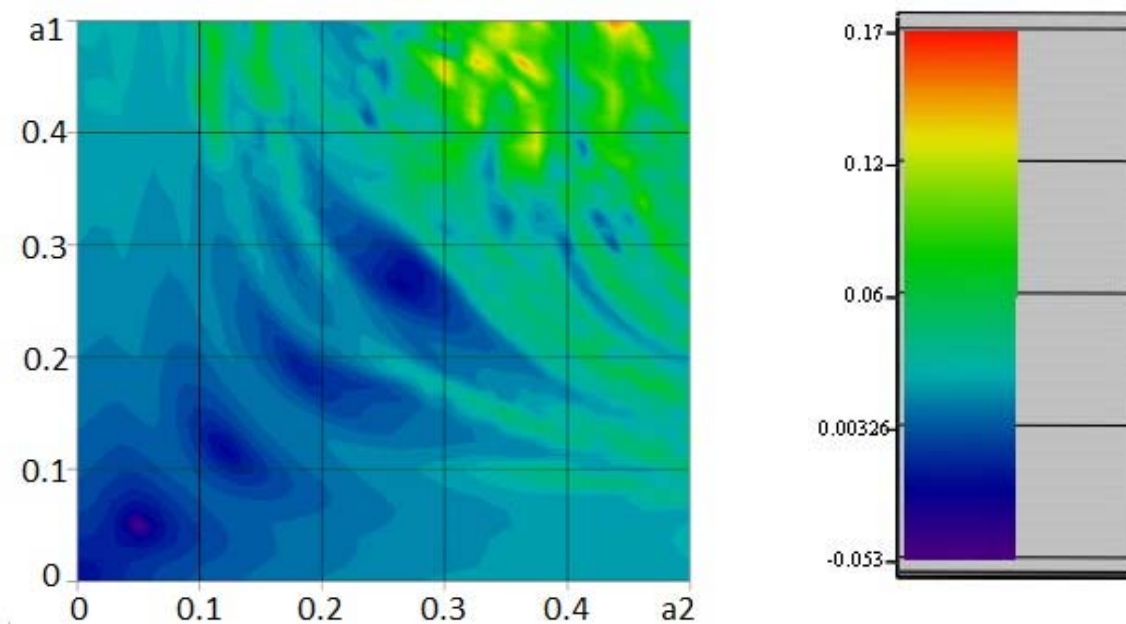


Рис 4.6. Карта максимальних показників Ляпунова, в залежності від напруженості хвиль.

Отримані чисельні результати знаходяться в хорошій якісній згоді з аналізом динаміки частинок на основі рівняння (4.12).

Основна частина матеріалів цього розділу була опублікована у роботах [4-7].

4.3. Висновки

У схемі оберненого лазера на вільних електронах, коли параметр сили хвилі стає більшим за $a_1, a_2 > 0,3$, розвивається стохастична нестійкість руху частинок, яка руйнує схему прискорення. Тільки частинки, що розташовані в околиці нульових фаз комбінаційної хвилі, не беруть участі в хаотичній динаміці. Вони знаходяться в острівцях стійкості. Але при збільшенні амплітуди хвилі таких частинок стає все менше.

РОЗДІЛ 5.

ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У ПОЛІ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ДОВІЛЬНОЇ ПОЛЯРИЗАЦІЇ

Для створення компактних лазерних прискорювачів необхідно забезпечити можливість використання сильних лазерних полів для цілей прискорення. У цьому розділі ми розглянемо можливість прискорення лазерним полем у разі обмеження області взаємодії частинок з полем. Необхідність побудови таких схем прискорення викликана тим, що як вище продемонстровано для довільних світлових пучків, відсутній енергообмін в першому порядку по полю. Обмеження області взаємодії можливо організувати, припустимо, введенням структур, що обмежують проникнення поля, а отже і взаємодію з ним частинок. При цьому, по можливості необхідно організувати схему прискорення таким чином, щоб властивий взаємодії частинок з полем електромагнітної хвилі періодичний характер, був, як можна менш виражений і виведення частинок з області взаємодії найбільш просте.

Розглянемо рух зарядженої частинки у полі плоскої електромагнітної хвилі з довільною поляризацією. Компоненти електричного і магнітного полів такої хвилі можна представити у вигляді:

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i\psi}), \quad \mathbf{H} = \text{Re}\left(\frac{1}{k_0} [\mathbf{kE}]\right), \quad (5.1)$$

де $\psi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$, $\mathbf{E}_0 = \alpha E_0$, $\alpha = \{\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z\}$ – вектор поляризації хвилі; $k_0 \equiv \omega/c$; ω , k – частота і хвильовий вектор хвилі. Введемо наступні безрозмірні змінні:

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}/mc, \quad \mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}/k_1, \quad \tau \equiv \omega t, \quad \mathbf{r}_1 = k_0 \mathbf{r},$$

$$a = e\mathbf{E}_0/mc\omega, \quad \mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}/c.$$

У цих змінних рівняння руху набуває вигляду (індекс «1» опускаємо):

$$\dot{\mathbf{p}} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \text{Re} \left\{ \left[(1 - \mathbf{k}\mathbf{v})a + \mathbf{k}(\mathbf{v}a) \right] e^{i\psi} \right\}. \quad (5.2)$$

До рівнянь (5.2) зручно додати рівняння, яке визначає енергію частинки і може бути отримано із системи (5.2):

$$\dot{\gamma} = \text{Re}(\mathbf{v}a e^{i\psi}), \quad (5.3)$$

де $\gamma = \sqrt{1 + p^2}$ – безрозмірна енергія частинки (виміряна в одиницях mc^2).

Рівняння (5.2) і (5.3) мають відомі інтеграли:

$$\mathbf{p} - \mathbf{k}\gamma + \text{Re}(i\mathbf{a}e^{i\psi}) = \mathbf{p}_0 - \mathbf{k}\gamma_0 + \text{Re}(i\mathbf{a}e^{i\psi_0}) = \text{const} = \mathbf{C}. \quad (5.4)$$

Індексом «0» тут позначені початкові змінні.

Надалі, без обмеження спільності, будемо вважати, що хвиля поширюється вздовж осі z , тобто. $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$.

5.1. Взаємодія з плоскополяризованою хвилею

Розглянемо випадок взаємодії частинки з плоскополяризованою хвилею. У цьому випадку дуже істотний вплив на рух частинки у полі електромагнітної хвилі справляє її первісне розташування, особливо у поздовжньому напрямку щодо поширення хвилі.

Якщо частинка рухається в полі плоскополяризованої хвилі, то динаміка її руху може бути виражена аналітичними виразами, для значень компонентів імпульсів і значень енергії:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} + a_x (\sin \psi - \sin \psi_0), \\ p_z &= p_{z0} \pm \frac{p_x^2 - p_{x0}^2}{2\gamma\dot{\psi}}, \\ \gamma &= \gamma_0 \pm (p_z - p_{z0}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

де $a_x \equiv eE_0/mc\omega$; верхній знак (+) у виразах для γ і p_z відповідає попутному поширенню хвилі і частинки ($k=1$), нижній (-) – зустрічному ($k=-1$).

Вирази (5.5) є спрощенням виразів, отриманих в [91], для випадку взаємодії частинок з полем плоскополяризованої хвилі.

Провівши чисельний аналіз виразу (5.2) для частинок, що спочатку покояться, можна зробити висновки, що величина поперечного імпульсу істотно залежить від початкового положення частинки відносно хвилі, тобто від ψ_0 . Дійсно, навіть якщо спочатку частинка не мала поперечної швидкості ($p_x=0$), то в залежності від початкової фази ψ_0 максимальні значення по модулю поперечного імпульсу змінюються від a_x до $2a_x$ (рисунок 5.1а).

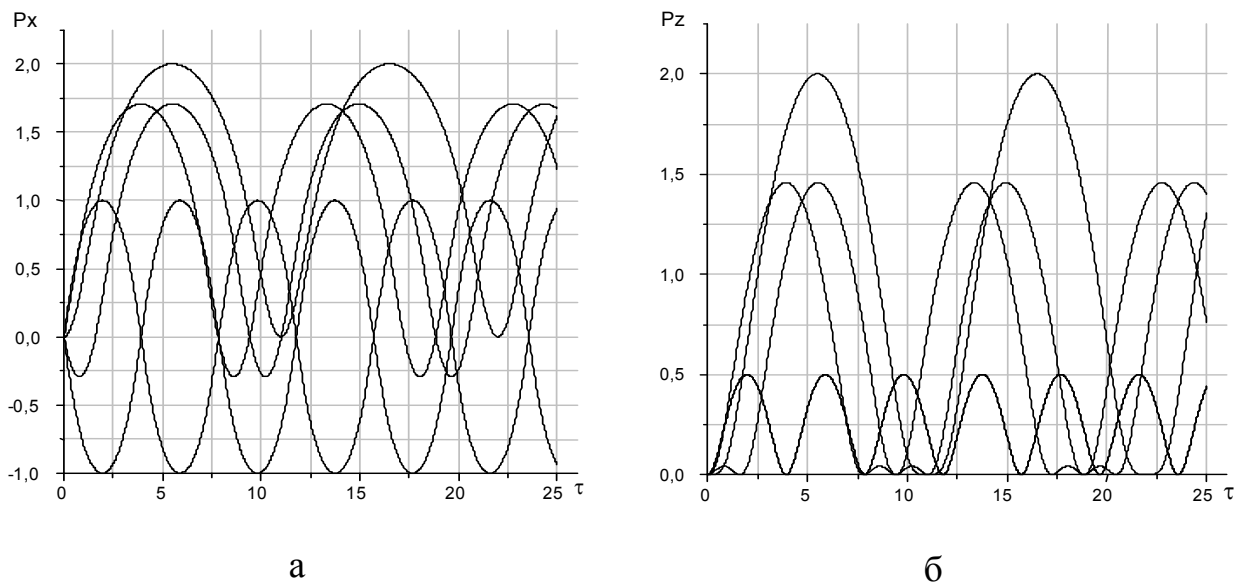


Рис. 5.1. Поперечний (а) і поздовжній (б) імпульси частинки в залежності від початкового розташування частинок $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a=1$.

Крім того, в залежності від початкової фази, змінюється величина середнього поперечного імпульсу. Середній імпульс дорівнює 0, для частинок, які розташовані у фазах π . Такі частинки не зміщуються в поперечному напрямку щодо свого початкового положення. Середня величина поздовжнього імпульсу, який вони набувають при взаємодії з хвилею, досягає величини $a_x^2/4$. Для частинок, які розташовані у фазах $\psi_0 = \pi(n+1/2)$, максимальні значення поперечного імпульсу по модулю досягають величини $2a_x$ (рисунок 5.1б). Причому середнє значення

поперечного імпульсу для таких частинок не дорівнює 0 і досягає величини a_x . Середня величина поздовжнього імпульсу таких частинок досягає величини a_x^2 . Таким чином, всі частинки, крім тих які розташовані у початкових фазах πn , будуть швидко розбігатися у поперечному напрямку, це добре видно на рисунку 5.2а.

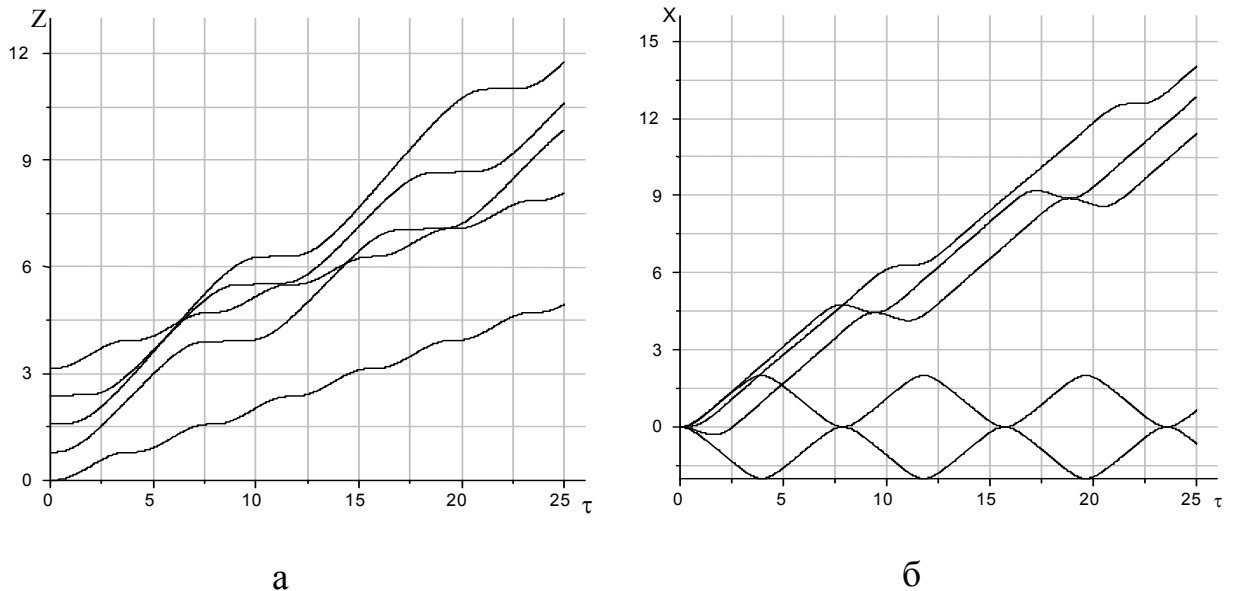


Рис. 5.2. Захоплення частинок у поздовжньому (а) і поперечному (б) напрямку в залежності від початкового положення $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a=1$.

Аналізуючи відхилення частинок з рисунку 5.2б видно, що частинки розташовані в початкових фазах відмінних від πn краще захоплюються хвилею в поздовжньому напрямку. Однак на рисунку 5.2а видно, що ті ж частинки (не в фазах πn) захоплюються в поперечному напрямку. Причому цей ефект більш яскраво виражений ніж захоплення у поздовжньому напрямку. У кінцевому підсумку захоплення частинок у поперечному напрямку стає порівняним з захопленням в поздовжньому напрямку, що і призводить до їх розбігання. Таким чином, всі частинки, крім тих, які розташовані в початкових фазах, будуть швидко розбігатися в поперечному напрямку. Ясно, що така схема лазерного прискорення заряджених частинок буде неефективна.

З формул (5.5) також можна знайти вирази для координат частинки і для періоду коливань частинок в полі хвилі. Для випадку лінійної поляризації поля ($\alpha_y=0$) вони були наведені в [91].

Значно зменшити розбігання можна, надавши частинкам початковий поздовжній імпульс (рисунок 5.3).

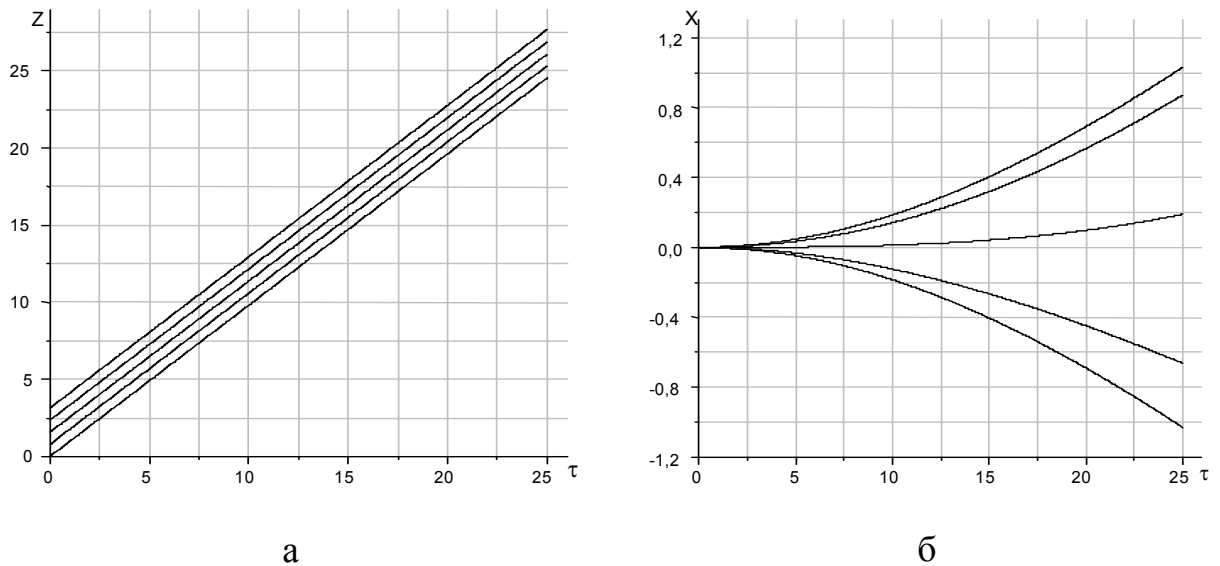


Рис. 5.3. Захоплення частинок в подовжньому (а) і поперечному (б) напрямку в залежності від початкового положення

$$0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi \text{ при } a=1$$

При цьому частинки однаково захоплюються у подовжньому напрямку незалежно від їх початкового розташування по фазах хвилі. Так на рисунку 5.3а представлені подовжні координати частинок при початковому імпульсі рівному $p_{z0}=5$. У поперечному напрямку частинки як і раніше розбігаються, проте в значно меншому ступені (рисунок 5.3б).

5.2. Взаємодія частинок з хвилею кругової поляризації

Динаміка частинок у хвилі еліптичної поляризації може бути виражена аналітичними формулами, які є рішеннями рівнянь руху (5.2):

$$\begin{aligned}
p_x &= p_{x0} + a_x (\sin \psi - \sin \psi_0), \\
p_y &= p_{y0} + a_y (\cos \psi - \cos \psi_0), \\
p_z &= p_{z0} \pm \frac{(p_x^2 + p_y^2) - (p_{x0}^2 + p_{y0}^2)}{2\gamma\dot{\psi}}, \\
\gamma &= \gamma_0 \pm (p_z - p_{z0}).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

З формул (5.6), так само як і для випадку взаємодії з плоскою хвилею, можна отримати вирази для координат частинок:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{1}{\gamma\dot{\psi}} [(\psi - \psi_0)(p_{x0} - a_x \sin \psi_0) - a_x (\cos \psi - \cos \psi_0)], \\
y &= y_0 + \frac{1}{\gamma\dot{\psi}} [(\psi - \psi_0)(p_{y0} - a_y \cos \psi_0) + a_y (\sin \psi - \sin \psi_0)], \\
z &= z_0 + \frac{p_{z0}(\psi - \psi_0)}{\gamma\dot{\psi}} \pm \frac{1}{2(\gamma\dot{\psi})^2} \left\{ (\psi - \psi_0) \left[a_x^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \psi_0 \right) - 2a_x p_{x0} \sin \psi_0 + \right. \right. \\
&+ a_y^2 \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \psi_0 \right) - 2a_y p_{y0} \cos \psi_0 \left. \right] - a_x^2 \left[\frac{1}{4} (\sin 2\psi - \sin 2\psi_0) - 2\sin \psi_0 (\cos \psi - \cos \psi_0) \right] \\
&+ a_y^2 \left[\frac{1}{4} (\cos 2\psi - \cos 2\psi_0) - 2\cos \psi_0 (\sin \psi - \sin \psi_0) \right] - \\
&\left. - 2a_x p_{x0} (\cos \psi - \cos \psi_0) + 2a_y p_{y0} (\sin \psi - \sin \psi_0) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Складність подальшого аналітичного дослідження, полягає в тому, що, вирази описують досить складну динаміку. Викликано це тим, що рішення (5.6) записані в неявному вигляді, бо фаза ψ сама є функцією імпульсу.

Для більш детального дослідження динаміки частинки у хвилі з круговою поляризацією система рівнянь (5.2), для випадку кругової поляризації поля хвилі, була досліджена чисельними методами. При цьому так само, як і при взаємодії з плоскополяризованою хвилею, основну увагу приділимо впливу початкового положення частинки відносно фази хвилі та її взаємодію з хвилею. На рисунках 5.5-5.8 представлені найбільш характерні приклади цієї динаміки.

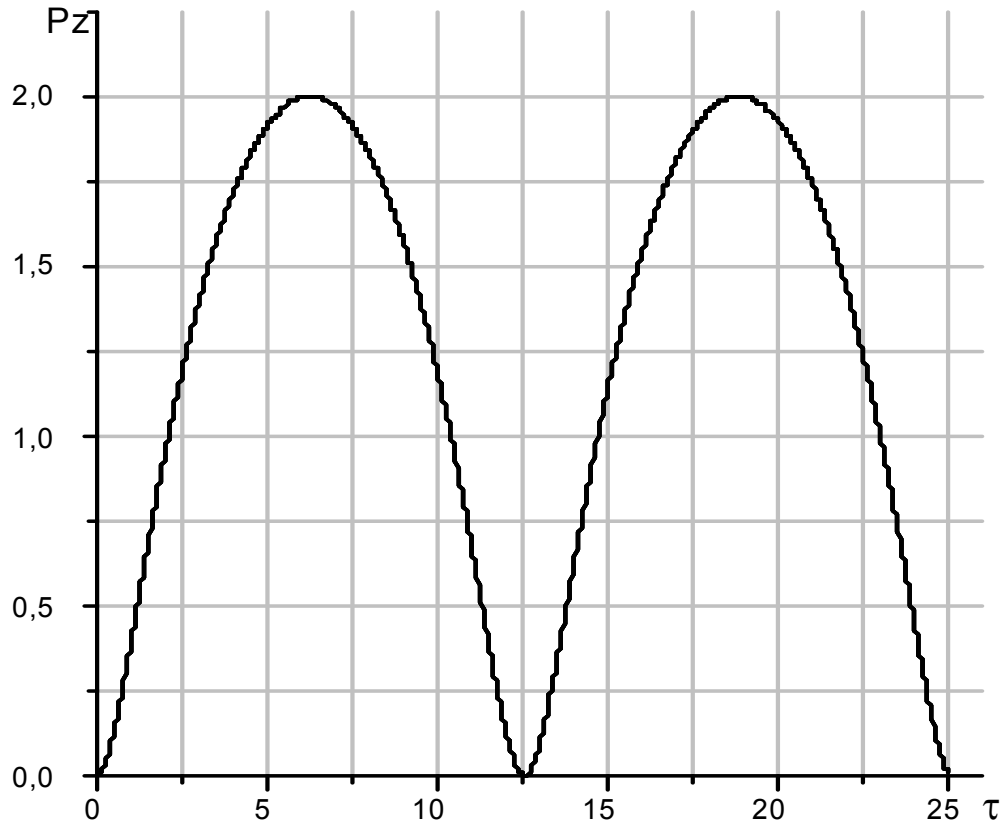


Рис. 5.5. Поздовжній імпульс частинок в залежності від початкового розташування частинок $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a = 1$.

Головною особливістю динаміки частинок у полі хвилі з круговою поляризацією є несприйнятливність поздовжнього імпульсу частинки від її початкової фази. Це видно із рисунку 5.5. На цьому рисунку видно, що величини поздовжніх імпульсів всіх частинок повністю збігаються.

З рівнянь (5.6) можна отримати вираз, який описує цю важливу особливість руху частинок:

$$P_z = 2a[1 - \cos(\psi - \psi_0)]. \quad (5.8)$$

З цього виразу видно, що величина поздовжнього імпульсу для всіх частинок однакова і не залежить від початкового розташування частинок по фазах. Дійсно, так як в початковий момент часу ψ та ψ_0 збігаються, то P_z для всіх частинок виявляються однаковими.

Величина поперечного імпульсу, також як і для випадку взаємодії з плоскополяризоване хвилею, залежить від початкового положення частинок щодо фази хвилі (рисунок 5.6).

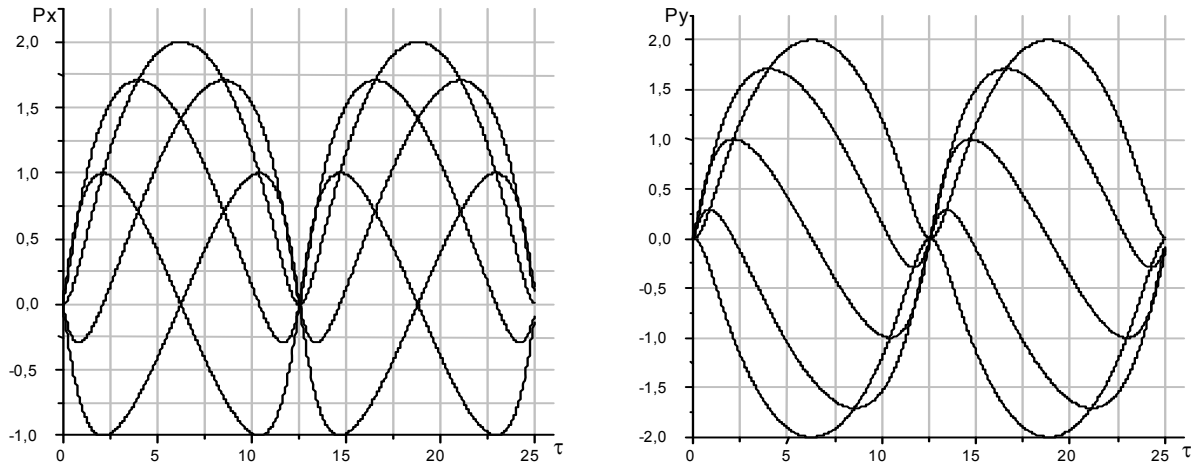


Рис. 5.6. Поперечні імпульси частинок в залежності від початкового розташування частинок $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a=1$.

Основні особливості просторової динаміки частинок у полі хвилі з круговою поляризацією представлені на рисунках 5.7-5.8. З цих рисунків видно, що в поздовжньому напрямку траєкторії частинок повністю подібні (рисунок 5.7).

У поперечному ж напрямку частинки розбігаються. Напрямок поперечного розбігання залежить від початкового положення частинок по відношенню до фази хвилі. Звернемо увагу, що величина цього відхилення не залежить від початкового розташування частинок (рисунок 5.8).

Частинки в рівній мірі відхиляються від поздовжньої осі при зміні початкових умов, що призводить до їх рівномірного відхилення в різні боки.

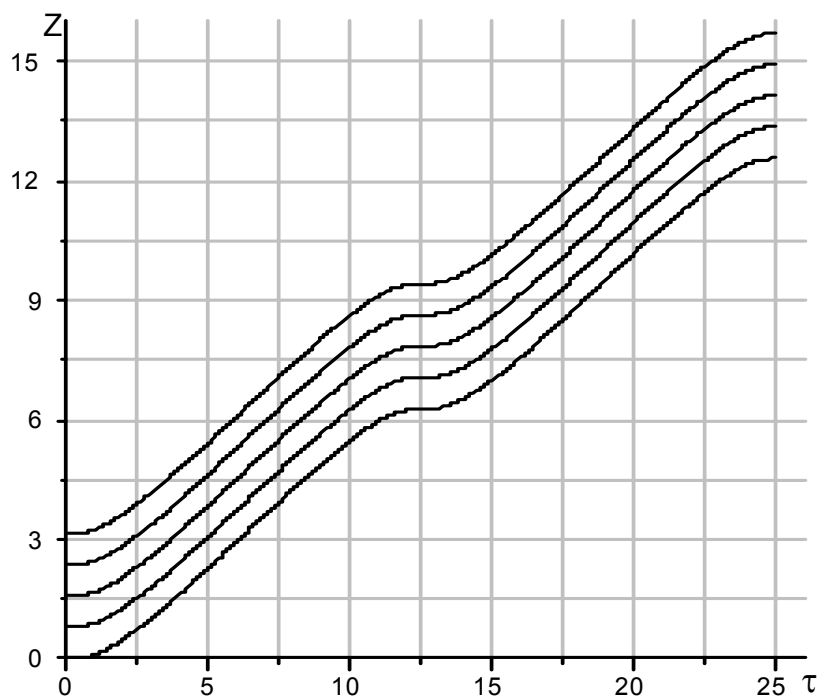


Рис. 5.7. Захоплення частинок в поздовжньому напрямку в залежності від початкового положення $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a=1$.

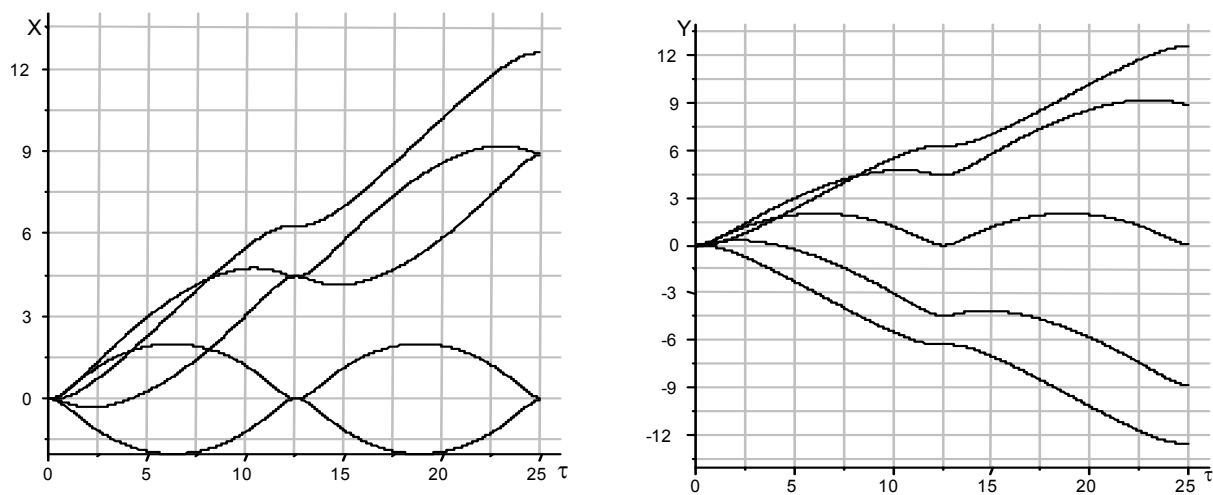


Рис. 5.8. Захоплення частинок в поперечному напрямку в залежності від початкового положення $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ при $a=1$.

Як випливає з аналітичного дослідження і чисельного аналізу, траєкторія руху частинки у хвилі з круговою поляризацією у просторі імпульсів являє собою спіраль з віссю, спрямовану уздовж поширення хвилі і з радіусом a . Дійсно, у просторі поперечних імпульсів траєкторія частинки описує коло. Рівняння цієї окружності можна представити у вигляді:

$$(P_x - A_x)^2 + (P_y - A_y)^2 = a^2, \quad (5.9)$$

де $A_x = P_{x0} + a_x^2 \cos \psi_0$, $A_y = P_{y0} + a_y^2 \sin \psi_0$.

Видно, що якщо початкові імпульси частинок (імпульси вльоту частинок в область взаємодії з хвилею) будуть більшими ніж a^2 ($P_{x0} \gg a_x^2$, $P_{y0} \gg a_y^2$), то всі частинки будуть здобувати середній поперечний імпульс, який не відрізняється від початкового імпульсу частинок. В цьому випадку прискорювані частинки практично не будуть розбігатися, тому їх середні імпульси не залежатимуть від розташування частинок щодо фази хвилі ψ_0 . Цей ефект проявляється при P_{x0} та P_{y0} рівне 100.

Таким чином, прискорення частинок полем кругової поляризації може зняти частину труднощів, пов'язаних з розбіганням електронів в поперечному напрямку, яке характерне для схеми взаємодії частинок з лінійно поляризованими хвилями.

5.3. Взаємодія частинки з імпульсом електромагнітної хвилі

Розглянемо рух зарядженої частинки у полі імпульсу плоскої біжучої електромагнітної хвилі, яка характеризується векторним потенціалом $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(\psi)$. Рівняння руху матеріальної точки в цьому полі у безрозмірних змінних: $\tau \equiv \omega t$, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}/k_1$, $k_1 \equiv \omega/c$, $\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{v}/c$, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1/mc$, (\mathbf{v} – швидкість частинки, \mathbf{p} – її імпульс), $A \equiv ek_0 A_1/mc\omega$, приймає вид (індекс «1» опускаємо):

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \psi} (1 - \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{k} \left(\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \psi} \right). \quad (5.10)$$

Помножимо скалярно рівняння (5.10) на \mathbf{p} , використовуючи співвідношення $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$, $\dot{\psi} = 1 - \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{p}/\gamma$. Таким чином можна отримати рівняння, що описує зміну енергії:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = - \left(\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \psi} \right). \quad (5.11)$$

За допомогою рівнянь (5.10) і (5.11) легко знайти наступний інтеграл:

$$\mathbf{p} + \mathbf{A} - \mathbf{k}\gamma = \text{Const} = p_0 + A_0 - k\gamma_0. \quad (5.12)$$

У разі чисто поперечної хвилі ($k_{\parallel} = 1$, $k_{\perp} = 0$, $[k_{\parallel} \mathbf{E}] = [k_{\parallel} \mathbf{H}] = [k_{\parallel} \mathbf{A}] = 0$), рівняння (5.10) з урахуванням (5.11) і співвідношення отриманого з (5.12) $p_{\parallel} - k_{\parallel} \gamma = \text{Const} = -\gamma(1 - \beta_{\parallel}) = -\gamma \dot{\psi}$ є повністю інтегрованими в лабораторній системі координат. Рішення має вигляд:

$$p_{\parallel} - p_{\parallel 0} = \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)^2 + \mathbf{p}_{\perp 0}^2}{2\gamma \dot{\psi}},$$

$$\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{p}_{\perp 0} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0), \quad (5.13)$$

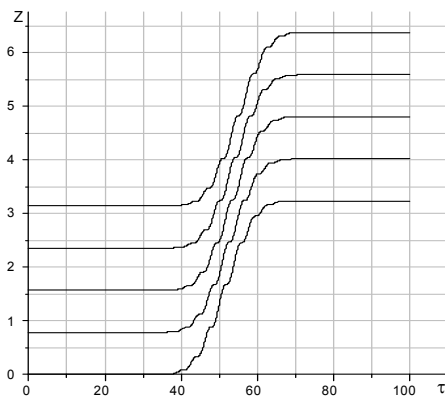
$$r_{\parallel} - r_{\parallel 0} = \frac{p_{\parallel 0}(\psi - \psi_0)}{\gamma \dot{\psi}} + \frac{1}{2(\gamma \dot{\psi})^2} \int_{\psi_0}^{\psi} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)^2 + \mathbf{p}_{\perp 0}^2 d\psi,$$

$$\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp 0} = \frac{-1}{\gamma \dot{\psi}} \int_{\psi_0}^{\psi} [(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) - \mathbf{p}_{\perp 0}] d\psi. \quad (5.14)$$

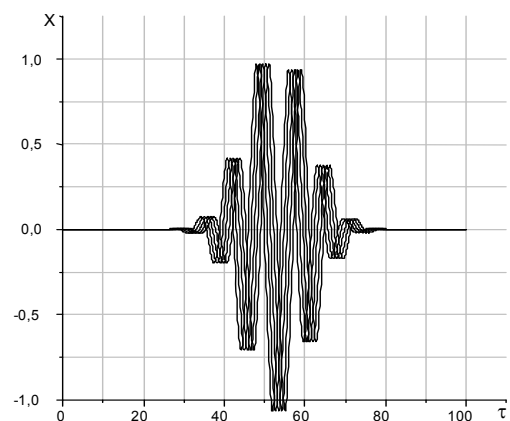
З виразів (5.13), (5.14) видно, що частинка захоплюється полем хвилі, тому, що її поздовжній імпульс осцилює, але залишається знакопостійним, а поздовжня координата визначається інтегралом від невід'ємної функції.

Подальші дослідження динаміки заряджених частинок проводилися чисельними методами. Також як і для випадку взаємодії з полем хвилі особлива увага приділялася залежності динаміки частинок від їх первісного стану. Для ілюстрації цього на рисунках 5.9-5.10 наведені часові залежності імпульсу і координати частинки, знайдені при чисельному рішенні рівняння (5.10) для випадку лінійної поляризації поля імпульсу. Рішення отримано для частинок, що спочатку покояться, на які впливає поперечне електромагнітне поле з компонентами, які визначаються співвідношенням $\partial A_x / \partial \psi = A_0 \exp[-\beta(\psi - \psi_0)^2] \cos \psi$, при $A_0 = 1$, $\beta = 0,01$, $\psi_0 = 50$.

На рисунку 5.9 видно, що всі частинки однаково захоплюються в поздовжньому напрямку і осцилюють в поперечному. Це викликано тим, що імпульс поля, набігаючи на частинки, що спочатку покояться, в однаковій мірі, впливають на них, викликаючи однакове відхилення кожної.



а



б

Рис. 5.9. Захоплення частинок в поздовжньому (а) і поперечному (б) напрямку у залежності від початкового положення $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$, $A_0 = 1$.

На рисунку 5.10 представлені результати чисельного розрахунку поздовжнього і поперечного імпульсу частинок для випадку взаємодії з імпульсом поля лінійної поляризації. Відзначимо, що в даній схемі взаємодії добре видна необхідність обмеження області взаємодії частинок з імпульсом

поля. Оскільки в іншому випадку, частинка після повного процесу взаємодії залишається з тією ж енергією що і на початку.

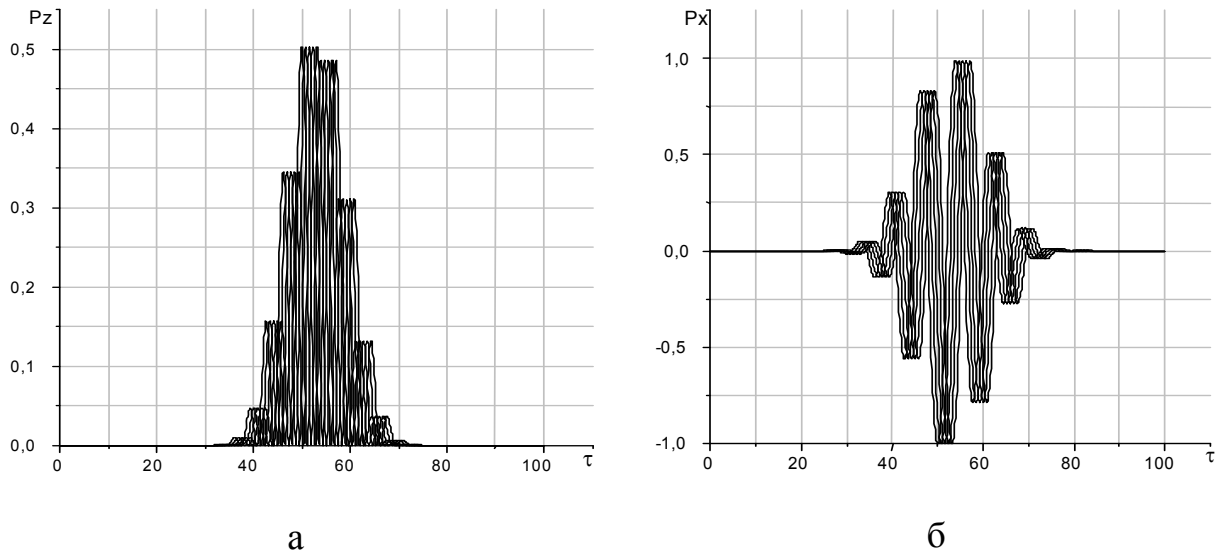


Рис. 5.10. Поздовжній (а) і поперечний (б) імпульс частинки в залежності від початкового розташування частинок $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, A_0=1$.

Однак така схема взаємодії також незручна для прискорення, оскільки поздовжній імпульс (рисунок 5.10а) осцилює в процесі взаємодії, і час на якому необхідно обірвати процес взаємодії частинок з полем імпульсу практично ідентичний, як і для випадку взаємодії з полем хвилі.

Більш привабливим для використання у прискоренні є схема взаємодії заряджених частинок з полем високочастотного імпульсу з круговою поляризацією. В цьому випадку особливістю динаміки частинок при взаємодії є те, що поздовжній імпульс всіх частинок повторює форму обвідної імпульсу високочастотної хвилі. Усі частинки однаково захоплюються полем високочастотної хвилі і не осцилюють у процесі взаємодії.

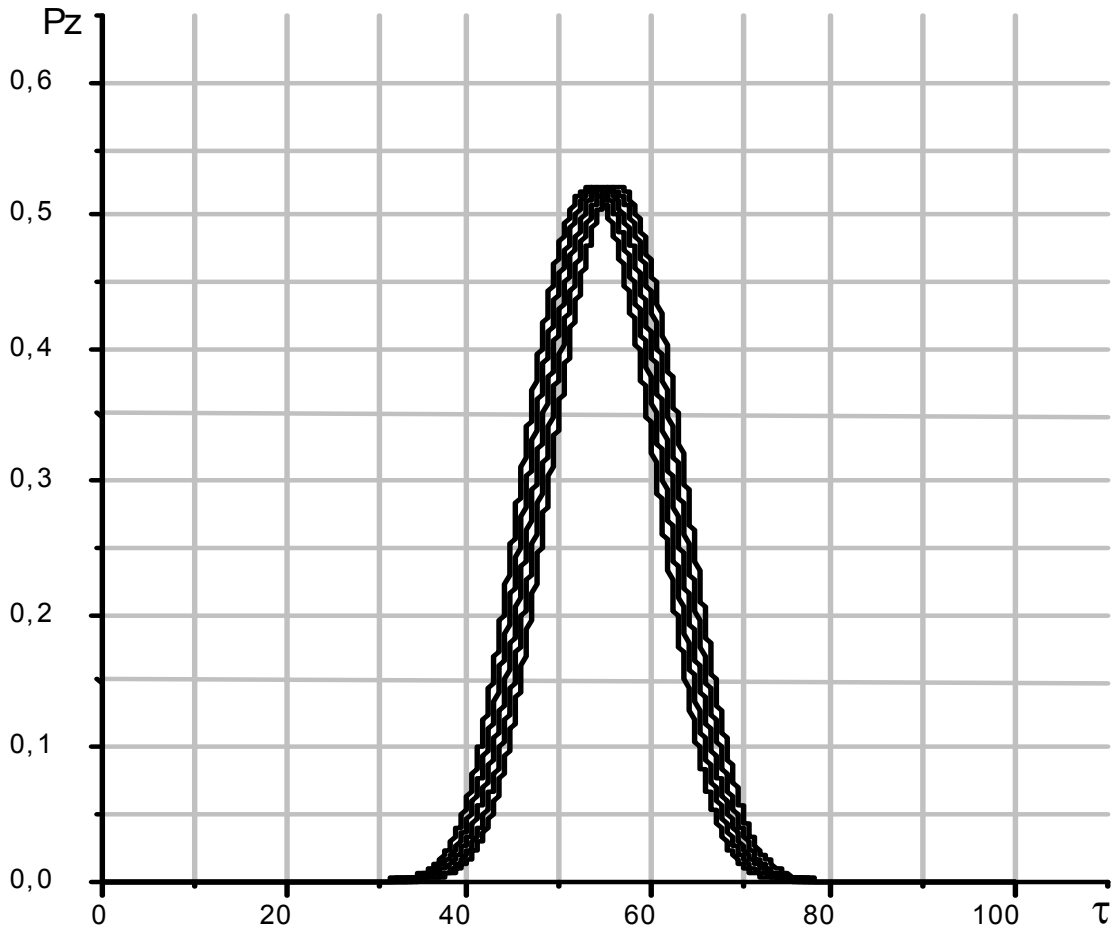


Рис. 5.11. Поздовжній імпульс частинки в залежності від початкового розташування частинок $0 \leq \tau \leq \pi$, $A_0=1$.

Така схема стає найбільш привабливою, оскільки час на якому необхідно перервати взаємодію між імпульсом поля і частинками значно розтягується.

Інші характеристики взаємодії частинок з імпульсом поля кругової поляризації аналогічні випадку взаємодії з полем імпульсу лінійної поляризації (рисунки 5.12-5.13). Тобто частинки, незалежно від початкового розташування зміщуються в повздовжньому напрямку (рисунок 5.12а) і асцилюють в поперечному (рисунок 5.12б,в). При цьому поперечний імпульс частинок не залежить від їх початкового розташування та також осцилює.

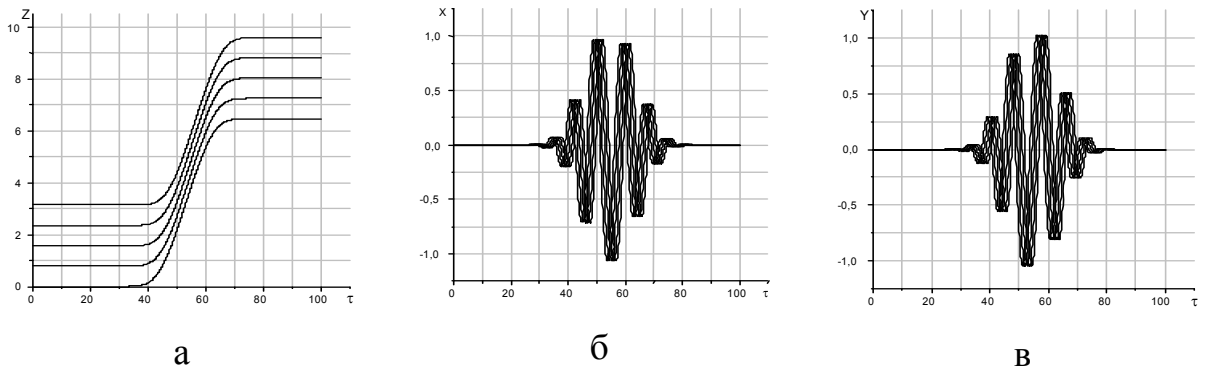


Рис. 5.12. Захоплення частинок у подовжньому (а) і поперечному (б, в) напрямку в залежності від початкового положення $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, A_0=1$.

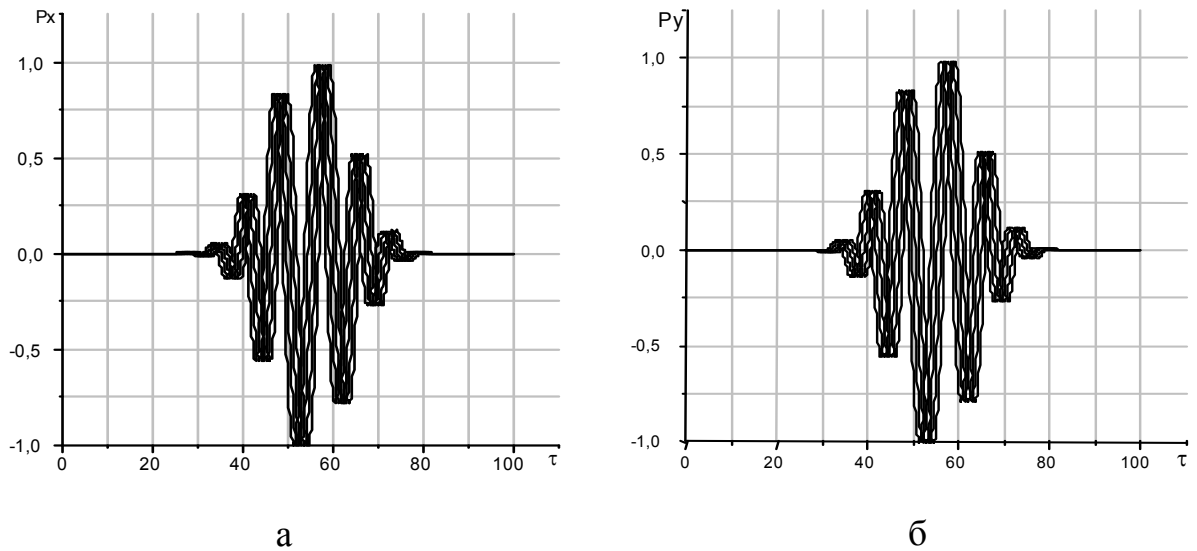


Рис. 5.13. Поперечний імпульс частинки в залежності від початкового розташування частинок $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, A_0=1$.

Для оцінки темпу прискорення більш детально розглянемо взаємодію заряджених частинок з полем імпульсу лінійної і кругової поляризації. Як приклад розглянемо згусток, частинки якого мають початкову енергію $\gamma_0=10$ і нехай на такий згусток діє імпульс з амплітудою $A_0=3$.

При цьому будемо вважати, що імпульс знаходиться досить далеко від заряджених частинок. Тобто в області, де знаходяться частинки, напруженість поля імпульсу повільно зростає. Цей випадок відповідає великим значенням ψ_0 . Зокрема, при $\psi_0=50$ залежність подовжнього

імпульсу від часу представлено на рисунку 5.14 – для випадку імпульсу з лінійною поляризацією і на рисунку 5.15 – для випадку імпульсу з круговою поляризацією. На рисунку 5.14 видно, що за час взаємодії відбувається багаторазове гальмування і прискорення частинок, на відміну від випадку на рисунку 5.15, де відбувається плавне наростання імпульсу частинок.

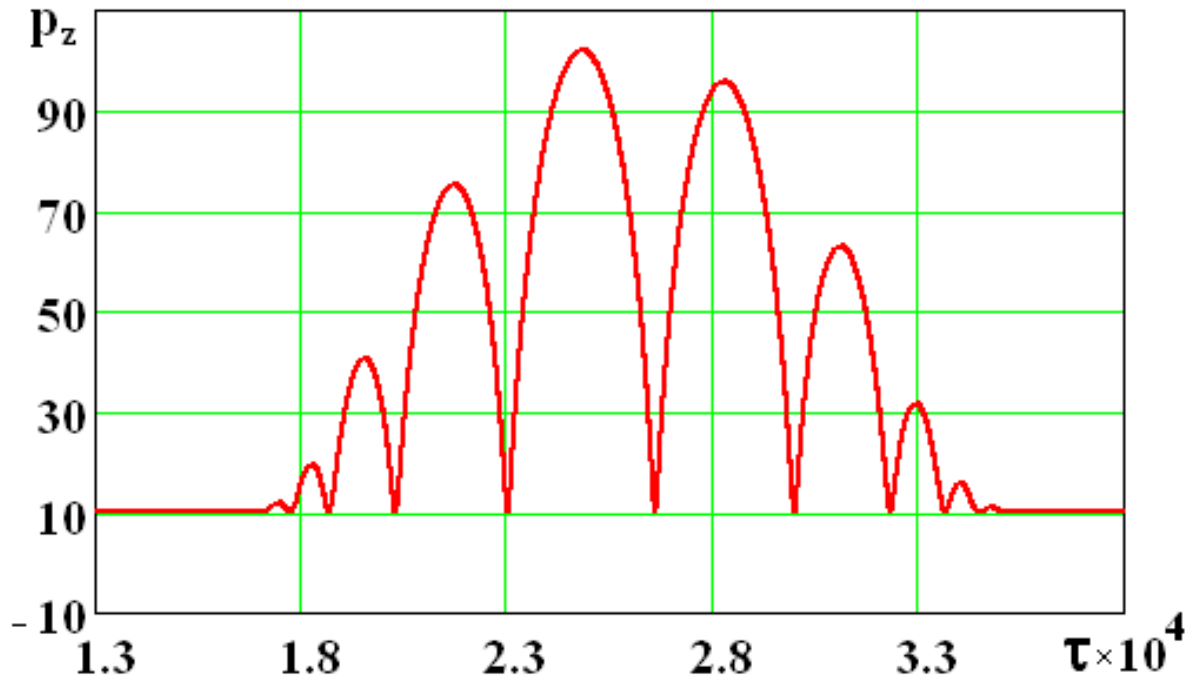


Рис. 5.14. Залежність поздовжнього імпульсу від часу (лінійна поляризація).

Однак при цьому максимальна енергія, що передається полем імпульсу частинкам однакова для двох випадків взаємодії. Відстань, на якій частинки набирають максимальну енергію від початку взаємодії з імпульсом також однакова для двох випадків та складає порядку 0,3 см. Тому можна говорити, що темп прискорення досягає 15 ГеВ/м, якщо рахувати по набору енергії від початку взаємодії до набору максимальної енергії. А для випадку взаємодії з полем імпульсу лінійної поляризації можна виділити ще й локальний темп прискорення, який може досягати 150 ГеВ/м.

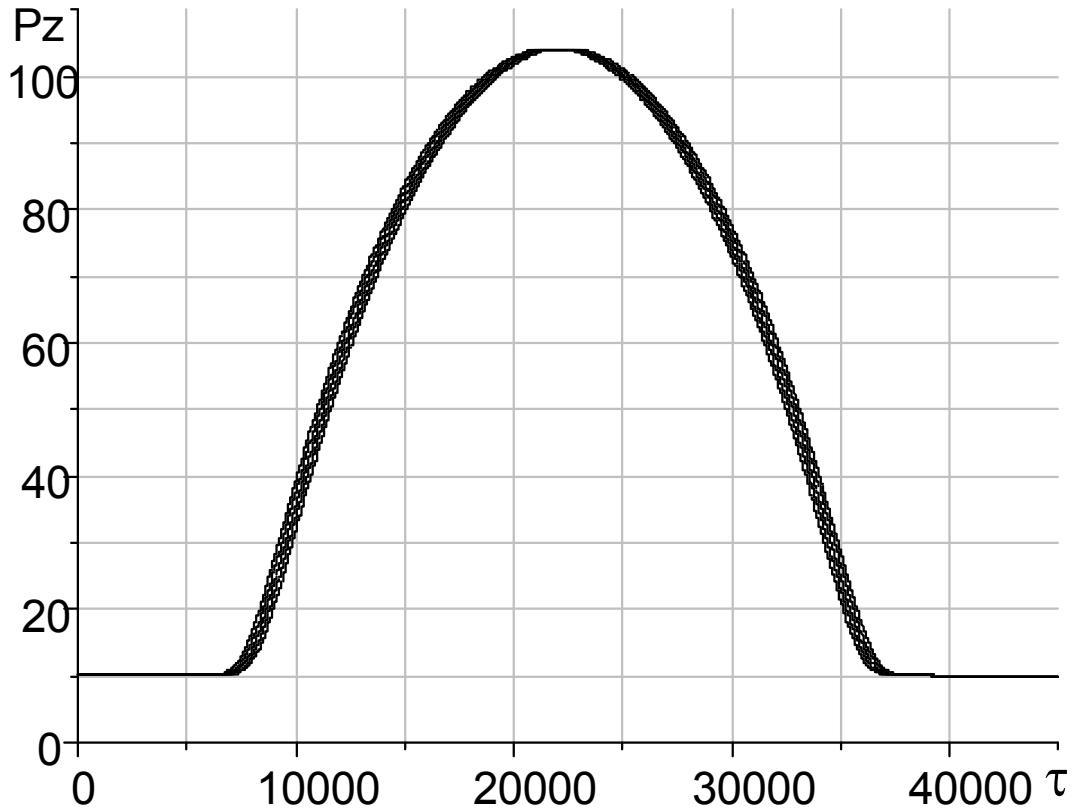


Рис. 5.15. Залежність поздовжнього імпульсу від часу (кругова поляризація).

Особливо можна виділити випадок, коли початок взаємодії відповідає максимальному значенню амплітуди імпульсу. Виникнення такого випадку можливо при народженні частинок в полі імпульсу. У цьому випадку величина ψ_0 дорівнює нулю. Залежність поздовжнього імпульсу від часу для цього випадку представлена на рисунку 5.16. В результаті взаємодії частинок згустку з полем такого імпульсу частинки прискорюються до значно більших енергій ($\gamma \approx 350$). При цьому прискорення відбувається на відстані 0.8 см. На жаль, за таких умов відбувається деяке розбігання частинок згустку в поперечному напрямку. Так при $\lambda \approx 10^{-4}$ поперечний розмір згустків становитиме $\Delta x \approx 3 \cdot 10^{-3}$ см. Слід зазначити, що в цьому випадку максимальну величину енергії можна оцінити формулою $\gamma_{\max} \approx \gamma_0(1 + 4A^2)$, яка збігається з формулою отриманої в [91] для випадку взаємодії з однорідним полем.

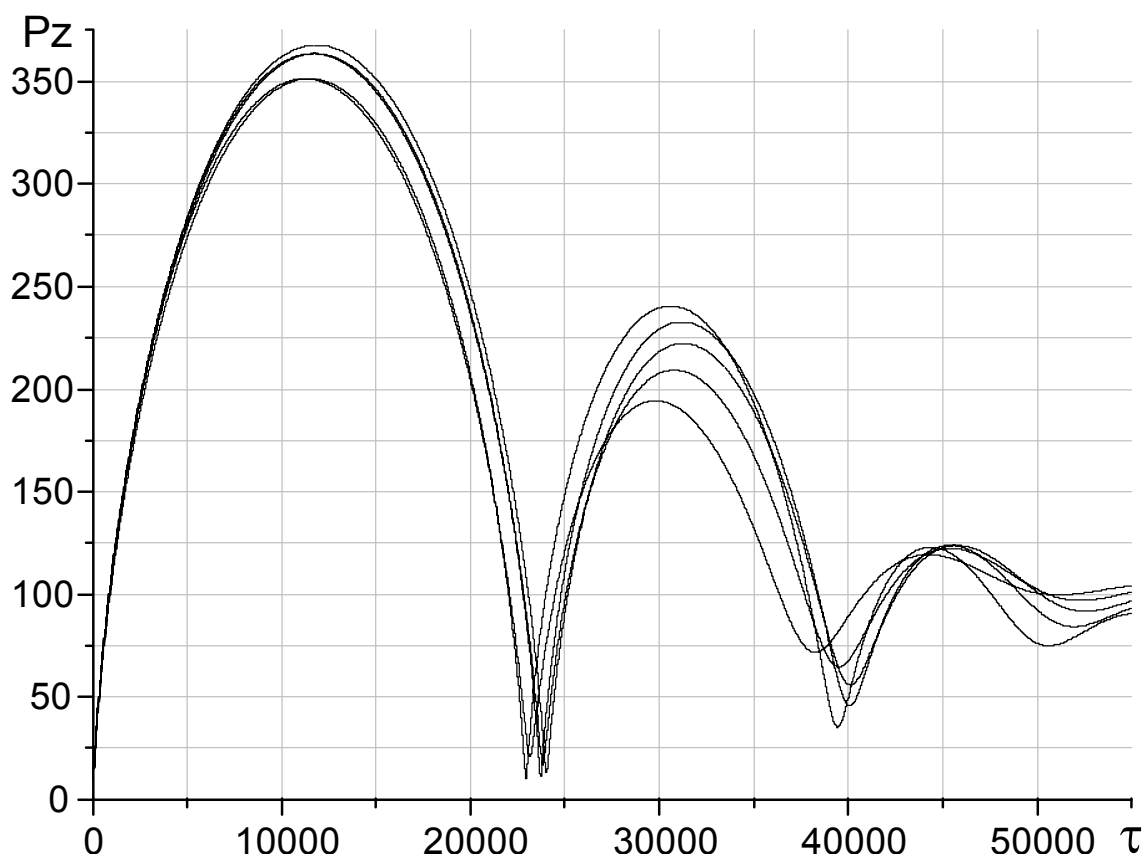


Рис. 5.16. Залежність поздовжнього імпульсу від часу.

5.4. Схеми прискорення у вакуумі

Для реалізації можливості прискорення необхідно передбачити виведення згустку частинок із зони взаємодії з полем лазерного імпульсу, в момент набуття частинкою максимального поздовжнього імпульсу.

Одна з можливих схем реалізацій такого процесу, представлена на рисунку 5.12. У такій схемі частинка, в момент набору максимальної енергії налітає на тонку фольгу, яка практично не заважає руху частинки і в той же час відсікає лазерний імпульс. Таким чином розривається взаємодія зарядженої частинки з електромагнітним полем і не відбувається зворотня передача енергії.

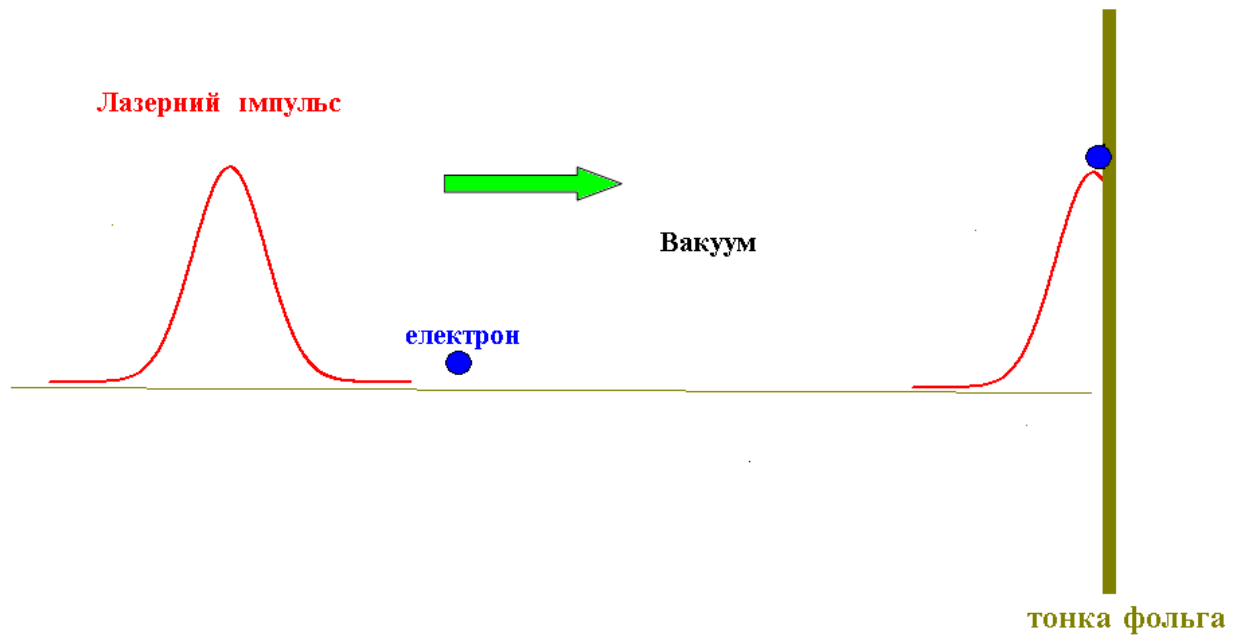


Рис. 5.17. Схема прискорення з фольгою.

Область, в якій можна реалізувати виведення частинок із зони взаємодії в разі імпульсу з круговою поляризацією, є більш протяжною, приблизно на порядок більше, ніж для випадку імпульсу з лінійною поляризацією.

На основі даної схеми можливе створення прискорювачів, кожна з секцій якого буде доприскорять згусток заряджених частинок. На рисунку 5.18 наведені результати чисельного моделювання можливої схеми послідовного доприскорення. Розраховані три послідовні ступені взаємодії зарядженої частинки з полем лазерного імпульсу кругової поляризації. Початкова енергія частинки на першій ступені бралася рівна 0, для наступних ступенях та з якої частинка закінчувала прискорення на попередній ступені. На кожній ступені напруженість поля хвилі, з якою взаємодіяла частинка, була однаковою та рівною, $a=1$. Як можна бачити на кожній ступені прискорення енергій яку набуває частинка зростає. Якщо на першій ступені $\Delta P_z=0,5$, то вже на третій ступені зростання енергії складає $\Delta P_z=1,5$. Однак треба відзначити, що з ростом початкової енергії частинок зростає довжина області взаємодії. Причому довжина області прискорення зростає пропорційно квадрату початкової енергії, в той час, як максимальна

енергія, набрана частинкою, зростає лінійно [91]. Така залежність призводить до зменшення темпу прискорення і зниження ефективності прискорення.

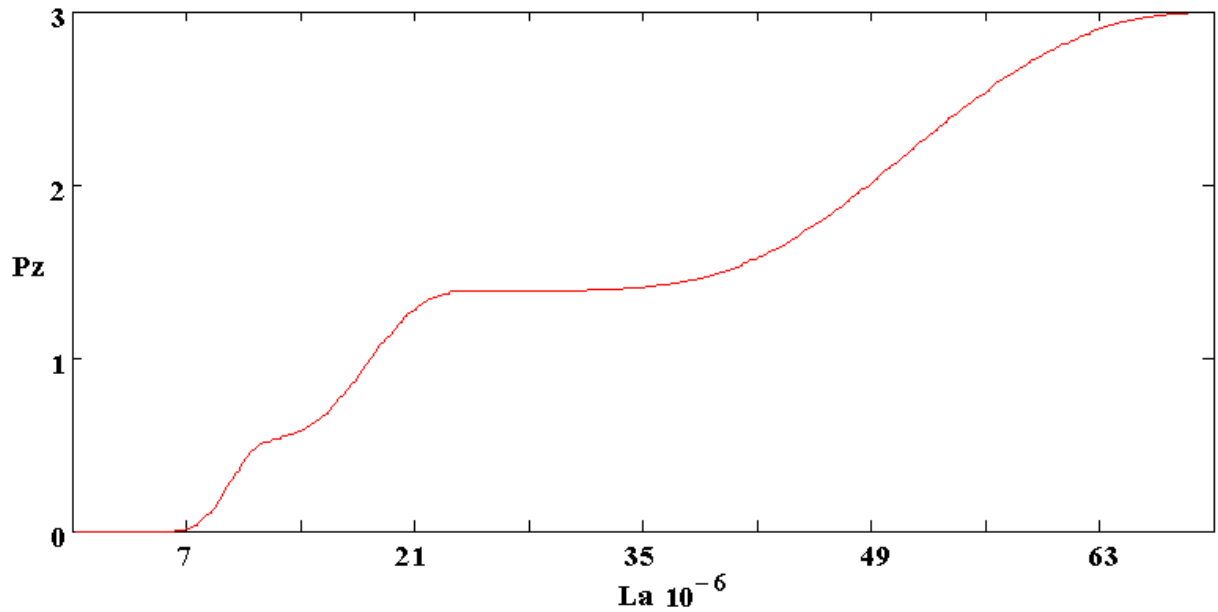


Рис 5.18 Каскад прискорення.

На рисунку 5.19 наведено залежність темпа прискорення та довжини взаємодії заряджених частинок з полем що їх прискорює від початкової енергії частинок.

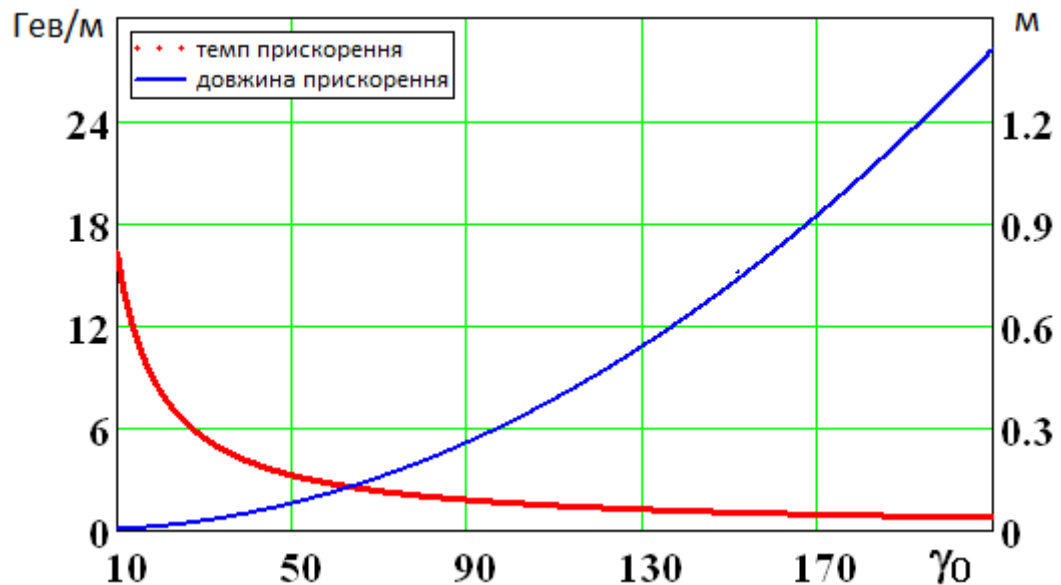


Рис.5.19. Темп та довжина прискорення в залежності від початкової енергії частинок (кругова поляризація) при $A_{max}=3$.

Як можна бачити (рисунок 5.19) коли початкова енергія частинок $\gamma_0 \approx 10$ темп прискорення складає близько 15 Гев/м, а довжина взаємодії близько 0,3см. Коли ж початкові енергії стають близькими до $\gamma_0 \approx 200$ темп прискорення знижується, однак залишається значним, порядку 1 Гев/м. Але при цьому довжина взаємодії зростає до 1,4м.

5.5. Роль сил тертя при лазерному прискоренні

При прискоренні електрона лазерним випромінюванням прискорювані частинки осцілюють у лазерному полі. При цьому виникає інтенсивне випромінювання. Це випромінювання, також як і випромінювання в циклічних прискорювачах, може обмежувати енергію, яку можуть придбати прискорювані частинки. Обмеження на максимальну енергію можна отримати, порівнюючи сили що прискорюють силам радіаційного тертя. Так, наприклад, в роботі [31], розглядаючи прискорення електронів полем лазерного випромінювання, автори порівняли силу радіаційного тертя до сил, що прискорюють (силам високочастотного тиску). В результаті вони знайшли, що в полі лазерного випромінювання електрони не можуть придбати енергію більшу, ніж 200 МеВ ($\lambda \sim 1 \mu k$). При цьому, так як сила високочастотного тиску і сила радіаційного тертя обидві пропорційні a^2 ($a = eE/mc\omega$ – параметр сили хвилі), то цей результат не залежить від напруженості поля лазерного випромінювання. У цьому сенсі він універсальний.

Ми покажемо, що сили тертя, в тому числі і сили радіаційного тертя, можуть сприяти передачі енергії від зовнішнього лазерного поля частинкам що прискорюються. Крім того, буде показано, що обмеження на максимальну величину енергії в 200 МеВ, яку можуть придбати частинки в полі лазерного випромінювання, в загальному випадку відсутнє. Відзначимо, що вперше на незвичайну роль сил тертя при русі заряджених частинок в полі інтенсивної електромагнітної хвилі було зазначено в роботі [101].

Розглянемо найбільш просту модель, яка описує динаміку зарядженої частинки в полі лазерного випромінювання. Нехай частинка рухається в полі однорідної плоскої електромагнітної хвилі. Поле цієї хвилі представимо у вигляді:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp(i\Psi) \}, \quad \mathbf{H} = \text{Re} \{ [\mathbf{kE}] / k_0 \},$$

де $\Psi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$, $\mathbf{E}_0 = \alpha E_0$, $\alpha = \{ \alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z \}$, $k_0 = \omega/c$.

При цьому будемо вважати, що існують сили тертя, які гальмують частинку. Спочатку ми розглянемо модель, в якій не будемо конкретизувати природу цих сил. Потім, розглянемо конкретно сили радіаційного тертя. Рівняння руху зарядженої частинки в безрозмірних змінних $\mathbf{p} = \mathbf{p}/mc$, $\tau = \omega t$, $\mathbf{r} = k_0 \mathbf{r}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k_0$, $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/mc\omega$ можна записати у вигляді:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \text{Re} \{ ((1 - \mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{a} + \mathbf{k}(\mathbf{v}\mathbf{a})) \exp(i\Psi) - \mu\mathbf{v} \}. \quad (5.15)$$

Це рівняння відрізняється від вивченого в [5,6,8] тільки наявністю сили тертя. З (5.15) можна отримати наступне співвідношення:

$$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{p} - \mathbf{k}\gamma + \text{Re}(i\mathbf{a} \exp(i\Psi)) \} = -\mu [\mathbf{v} - \mathbf{k}v^2], \quad (5.16)$$

де $\gamma = \sqrt{1+p^2}$.

Якщо тертя відсутнє ($\mu=0$), то вираз в фігурній дужці являє інтеграл рівняння (5.15). Щоб спростити наведені нижче формули будемо вважати, що взаємодія частинки з полем хвилі відбувається у вакуумі, що хвиля лінійно поляризована і поширюється вздовж осі z , тобто вважатимемо, що $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$; $\alpha = (1, 0, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. В цьому випадку векторне рівняння (5.15) можна істотно спростити:

$$\begin{aligned} p_x' &= a \cdot \cos \Psi - \mu(p_x / I), & p_z' &= (p_x \cdot a / I) \cdot \cos \Psi - \mu(p_z / I), \\ p_y' &= 0, & I' &= -\mu [1 - (1/\gamma \cdot I)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Тут введені такі величини і позначення: $I = \gamma - p_z$, $I' \equiv dI/d\Psi$.

В системі рівняння (5.17) перші три рівняння повністю самоузгоджені. Останнє, четверте рівняння, є наслідком цих трьох. Легко побачити, що четверте рівняння є z -ою компонентною рівняння (5.16). Зауважимо, що у відсутності сил тертя величина являє собою інтеграл рівняння (5.15). При цьому система рівнянь (5.17) повністю інтегрується. Цей факт дозволяє переписати систему (5.17) в такому вигляді, що в правій частині опиняться члени пропорційні μ . Для цього зробимо таку заміну:

$$\begin{aligned} p_x &= a \cdot \sin \Psi + (p_{x,0} - a \cdot \sin \Psi_0) + \rho_x, \\ p_z &= (p_x^2 / 2I) + (p_{z,0} - p_{x,0}^2 / 2I_0) + \rho_z. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Тут ρ_x та ρ_z нові залежні змінні, а індексом «0» позначені початкові значення відповідних змінних. Причому, якщо ρ_x та ρ_z дорівнюють нулю, то вирази (5.18) є рішенням початкової системи (5.15) при відсутності сил тертя. Із системи (5.17) легко знайти наступні рівняння для визначення ρ_x та ρ_z :

$$\begin{aligned} \rho_x' &= -(\mu / I) [\rho_x + a \cdot \sin \Psi], \\ \rho_z' &= -(\mu / I) \left[\rho_z + (p_x^2 / 2 \cdot \gamma \cdot I^2) - (p_x / I) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Слід зауважити, що всі отримані вище рівняння є строгими. Система (21) і останнє рівняння системи (5.17) є зручним об'єктом для якісного дослідження. Дійсно, з цих рівнянь видно, що нові змінні ρ_x та ρ_z , а також величина I повільно змінюються ($\mu \ll 1$). Врахуємо тепер, що завжди $I > 0$ та $\mu > 0$. Тоді, після усереднення першого рівняння системи (5.18), легко побачити, що величина ρ_x експоненціально прагне до нуля. З огляду на (5.18), це означає, що сили тертя асимптотично не впливають на динаміку поперечного імпульсу частинок. Підставимо отриманий вираз для p_x ($p_x = a \sin \Psi + (p_{x,0} - a \sin \Psi_0)$) в друге рівняння системи (5.19). В результаті, для визначення ρ_z , отримаємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Після усереднення можна знайти формальне рішення цього рівняння. Для якісного аналізу поздовжньої динаміки ми вчинимо інакше. Нас, перш за все, цікавлять умови, при яких сили тертя не гальмують

частинки, а сприяють передачі енергії від лазерного випромінювання до цих частинок. Це станеться при зменшенні величини I . З останнього рівняння системи (5.17) видно, що це буде при виконанні умови $\gamma I > 1$. При нульових початкових умовах це нерівність завжди виконується.

Особливий інтерес представляють релятивістські напруженості поля ($a \gg 1$). В цьому випадку $\gamma \sim p_z$, $I \sim (p_x^2 + 1)/2p_z$ і завжди $\gamma I > 1$. Потрібно сказати, що в цих умовах зростає і величина ρ_z . Причому, як впливає з другого рівняння системи (5.19) $\rho_z \sim -1/I$. Тому величина поздовжнього імпульсу буде рости трохи повільніше, ніж це описується першим членом у виразі для p_z (5.18). При отриманні цих оцінок ми враховували, що $p_z \sim a^2 \gg p_x \sim a \gg 1$. Слід зауважити, що також легко можна знайти приклади умов, при яких сили тертя будуть гальмувати частинки. Так, наприклад, при $p_{x,0} = 0$, $p_{z,0} = 3$, $a \sim 0,5$ величина γI буде менше одиниці ($\gamma I < 1$). При виконанні цих умов частка гальмується силами тертя.

Розглянемо тепер роль сил радіаційного тертя. Нас будуть цікавити великі напруженості полів ($a \geq 1$). Тому ми можемо обмежитися випадком релятивістського руху. Для цього випадку безрозмірну силу радіаційного тертя можна представити у вигляді [112]:

$$\mathbf{F}_f = \frac{\omega}{\Omega} (F_{ik} \cdot u^k) \cdot (F^{mn} \cdot u_n) \cdot \mathbf{v}, \quad (5.20),$$

де F_{ik} – тензор електромагнітного поля; u^k – чотирьохвектор швидкості; \mathbf{v} – тривимірний вектор швидкості, «частота» $\Omega_b = 3mc^3/2e^2 = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ сек}^{-1}$.

У нашому випадку ми маємо тільки дві компоненти електромагнітного поля (E_x, H_y). Враховуючи що $E_x = H_y$, а також, що чотирьохвектор швидкості в наших позначеннях має вигляд $u^k = (\gamma, \mathbf{p})$, $u_n = (\gamma, -\mathbf{p})$, силу радіаційного тертя можна представити таким виразом:

$$\mathbf{F}_f = -\frac{\omega}{\Omega} \cdot \varepsilon^2 \cdot I^2 \cdot \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \cdot \cos^2(\psi). \quad (5.21)$$

З формули (5.21) видно, що в даному випадку коефіцієнт μ вже є складною функцією часу. Однак якісний аналіз поведінки величини I можна

провести аналогічно до попереднього випадку. Легко бачити, що в даному випадку величина I згодом зменшується, хоча не так швидко як в попередньому випадку. Це пов'язано з тим, що із зменшенням I сила тертя також швидко зменшується. Це зменшення зумовлене тим фактом, що частота, яку сприймає частка, з ростом її енергії зменшується. Таким чином, якісно вплив сили радіаційного тертя аналогічний попередньому випадку..

Динаміка частинок у полі хвилі вивчалася чисельними методами. Якісно результати цього дослідження добре збігаються з аналітичними результатами. Багато результатів мають і кількісний збіг. Так поперечна динаміка частинок правильно описується першою формулою (5.18), в якій $\rho_x \rightarrow 0$. Звідси випливає, що асимптотично сила тертя не впливає на поперечну динаміку частинок. Найбільш характерні особливості поздовжньої динаміки частинок представлені на рисунках 5.20-5.23. На рисунку 5.20 представлена залежність поздовжнього імпульсу (F_n) від часу при відсутності сили тертя ($a=3$, $\mu=0$, $p_{x,0}=p_{z,0}=0$). Видно, що поздовжній імпульс завжди позитивний і осцилює з подвоєною частотою. Максимальне значення поздовжнього імпульсу дорівнює $a^2/2$. Відзначимо, що період осциляцій зростає з ростом напруженості поля хвилі: $T=2\pi(1+a_x^2/4)$. Ця динаміка описана в [99]. На рисунку 5.21 представлена залежність поздовжнього імпульсу від часу при наявності сили тертя. Параметри поля і початкові умови для частки ті ж, що і на рисунку 5.20: ($a=3$, $\mu=0,01$, $p_{x,0}=p_{z,0}=0$). З рисунку видно, що наявність сил тертя призводить до зростання величини поздовжнього імпульсу. Причому, чим більша сила тертя, тим це зростання швидше. Однак, максимальне значення поздовжнього імпульсу, яке при цьому може бути досягнуто, виявляється меншим, ніж при менших силах тертя. Величина I практично монотонно зменшується.

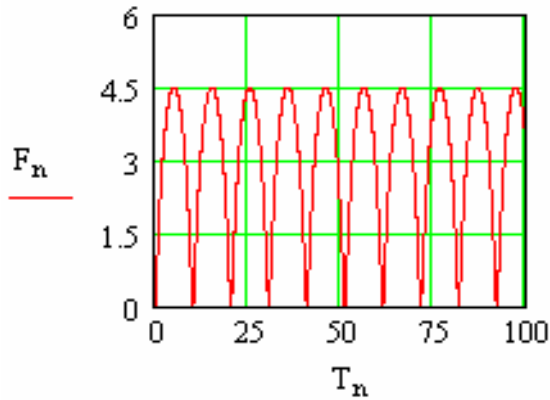


Рис. 5.20. Залежність поздовжнього імпульсу (F_n) від часу при відсутності сили тертя ($a=3$, $\mu=0$, $p_{x,0}=p_{z,0}=0$).

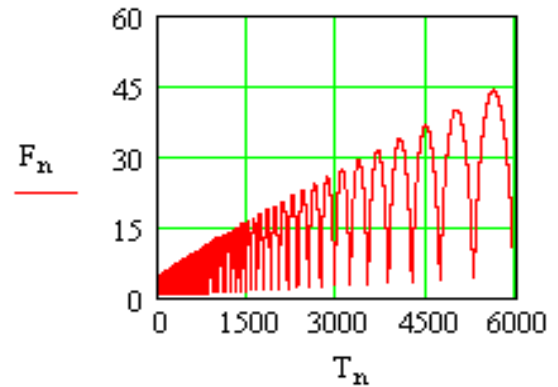


Рис. 5.21. Залежність поздовжнього імпульсу від часу при наявності сили тертя $a=3$, $\mu=0,01$, $p_{x,0}=p_{z,0}=0$.

Як ми бачили в попередньому пункті, сила тертя може призводити до гальмування частинок. Ілюстрацією цього факту є рисунок 5.22. На цьому рисунку представлена залежність поздовжнього імпульсу від часу при наступних значеннях основних параметрів: $a=0,2$, $\mu=0,01$, $p_{x,0}=p_{z,0}=2$. При цих значеннях параметрів величина γI менше одиниці. Це призводить, як впливає з останнього рівняння системи (19), до зростання величини I і, як наслідок, до гальмування частинок у подовжньому напрямі. Поперечна динаміка, як і у всіх інших випадках, асимптотично не залежить від сил тертя. Слід зауважити, що в усіх випадках при малих напруженостях поля ($a \ll 1$) сили тертя гальмують швидкі частинки ($p_z \gg 1$).

Щоб проілюструвати той факт, що при лазерному прискоренні енергія частинок може досягати значень більших 200 MeV, на рисунку 5.23 представлена часова залежність поздовжнього імпульсу від часу, яка була порахована з використанням сили радіаційного тертя (5.21). При чисельних розрахунках ми суттєво збільшили силу (5.21), взявши в якості відношення частот величину 10^{-2} ($\mu = \omega/\Omega = 10^{-2}$). Значення інших параметрів вибиралися такими: $a=5$, $p_{x,0}=0$, $p_{z,0}=20$. З цього рисунку видно, що з ростом енергії частинок період їх осциляції в полі лазерного випромінювання значно

збільшився. Так, за час розрахунку, представленого на цьому рисунку, частинка не зробила жодного коливання, тобто відбувається практично квазістатичне прискорення заряджених частинок. Втрати енергії на випромінювання при цьому істотно зменшуються. Крім того, з рисунку 5.23 видно, що енергія частинки вже перевищує 200 MeV. Відзначимо, що у відсутності сил тертя ($\mu=0$) в тих же умовах ($a=5$, $p_{x,0}=0$, $p_{z,0}=20$) динаміка частинок за час розрахунку практично не змінилася. Таким чином, у розглянутій схемі взаємодії лазерного поля з частинками, сили радіаційного тертя не грають суттєвої ролі. Якщо стежити за динамікою частинок на великих часах або якщо початкова енергія частинок досить велика, то сила радіаційного тертя грає все меншу роль. Всі ці факти добре узгоджуються з аналітичними результатами.

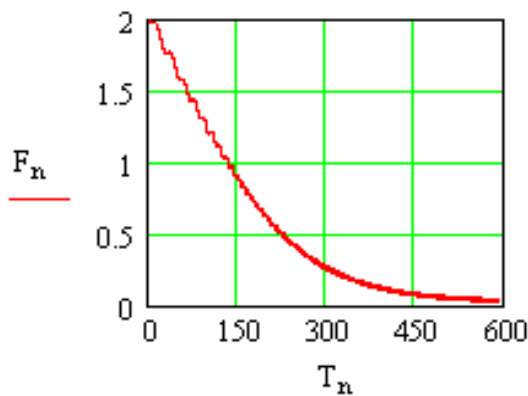


Рис. 5.22. Залежність поздовжнього імпульсу від часу при $a=0,2$, $\mu=0,01$, $p_{x,0}=p_{z,0}=2$.

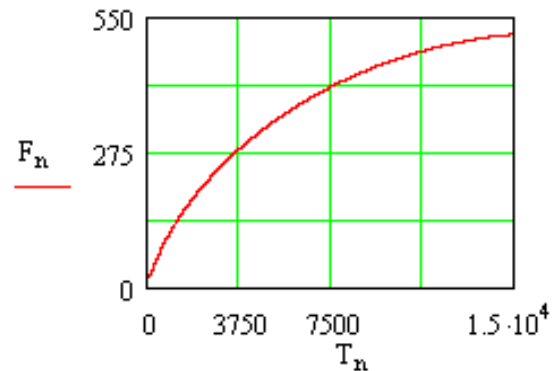


Рис. 5.23. Залежність поздовжнього імпульсу від часу з використанням сили радіаційного тертя.

Таким чином, динаміка частинок у полі лазерного випромінювання має важливу особливість, яка дозволяє використовувати сили тертя для підвищення ефективності передачі енергії від хвилі частинкам. Існують умови, при яких сили радіаційного тертя не гальмують частинки, а сприяють їх прискоренню полем лазерного випромінювання. При цьому прирівнювання сил радіаційного гальмування середнім силам, що прискорюють (силам височастотного тиску), не завжди може правильно описувати динаміку частинок при лазерному прискоренні. Дійсно в

розглянутій нами схемі середня сила, яка прискорює частинки, дорівнює нулю. Наявність сил радіаційного гальмування повинно було б привести до зменшення величини відхилення від середнього положення, до зменшення величини максимальної швидкості, яку отримують частинки. Таке, як ми бачили вище, відбувається далеко не завжди. Більш того, в більшості випадків динаміка взаємодії така, що сили тертя, в тому числі і радіаційного тертя, сприяють передачі енергії від поля до частинок.

Частинки, рухаючись з прискоренням, втрачають частину своєї енергії на випромінювання. Причому, чим більше енергія частинок, тим більше втрати енергії частинки на випромінювання. Так, якщо релятивістський електрон рухається по круговій орбіті, радіус якої не змінюється (наприклад, в магнітному полі циклічного прискорювача), то вираз для потужності випромінювання можна представити у вигляді:

$$W = \frac{2}{3} e^2 c \cdot K^2 \cdot \gamma^4,$$

де γ – релятивістський фактор; K – кривизна орбіти.

З цієї формули видно, що втрати зростають як четверта ступінь енергії частинки. Цей факт обмежує можливості циклічних прискорювачів електронів. У розглянутому нами випадку радіус кривизни траєкторії електронів зростає пропорційно квадрату енергії електрона ($K \sim 1/\gamma^2$). Тому потужність випромінювання не змінюється з ростом енергії і проблема, пов'язана з ростом радіаційних втрат, не виникає.

Слід відзначити той факт, що в розглянутій вище схемі взаємодії поля з частинками, при великих значеннях енергії, величина I стає малою. вирази (5.20) та (5.21) для радіаційної сили в цьому випадку не повністю описують силу радіаційного впливу. Необхідно скористатися більш повним виразом для цієї сили. Вираз для сили (5.21) набуває додаткові складові. Однак, якісно, результати при цьому не змінюються.

Основна частина матеріалів цього розділу була опублікована в роботах [1-3, 9].

5.6. Висновки.

У задачі руху зарядженої частинки у полі плоскої електромагнітної хвилі довільної поляризації, коли параметр сили хвилі стає більше одиниці, визначений вид траєкторії частинки та найбільш ефективні просторові і часові характеристики полів для прискорення заряджених частинок. В полі плоскополяризованої плоскої хвилі динаміка частинок істотно залежить від початкового положення частинок щодо фази хвилі. У полі хвилі з круговою поляризацією поздовжній імпульс частинки не залежить від її початкової фази, а в полі імпульсу поля динаміка не залежить від початкового розташування частинок у просторі. До того ж в полі високочастотного імпульсу, що має кругову поляризацію, поздовжній імпульс частинок і їхня енергія повторює форму обвідної імпульсу. Тому найбільш привабливим для прискорення заряджених частинок є лазерний імпульс із круговою поляризацією. Завдяки тому, що характер зміни поздовжнього імпульсу заряджених частинок і їх енергія повторюють форму обвідної лазерного імпульсу така схема взаємодії дозволяє легше обмежити область взаємодії заряджених частинок з полем хвилі.

РОЗДІЛ 6

СТОХАСТИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

В даний час є два основні механізми стохастичного прискорення і нагріву заряджених частинок полями електромагнітних хвиль. Перш за все це передача енергії від випадкового поля до частинок. Такі схеми прискорення і нагріву виявляються ефективними навіть у відсутності резонансної взаємодії частинок і полів. Однак, коли можливо виконати умови резонансної взаємодії хвиль і частинок, то привабливішими здаються схеми резонансної взаємодії частинок і регулярних хвиль в умовах, коли нелінійні резонанси перекриваються. Перекриття нелінійних резонансів створює умови, при яких динаміка частинок опиняється аналогічною динаміці частинок у випадковому полі.

Аналіз динаміки частинок у полі таких хвиль вказував на ефективність передачі енергії таких хвиль в енергію заряджених частинок. Однак порівняльного аналізу з ефективністю прискорення в режимах з динамічним хаосом не проводилося. Далі ми виконаємо такий аналіз.

6.1. Динаміка частинок у полі зовнішньої електромагнітної хвилі

Розглянемо заряджену частинку, яка рухається у зовнішньому магнітному полі H_0 , спрямованого уздовж осі z і полі зовнішньої плоскої електромагнітної хвилі з довільною поляризацією [86, 87]. Рівняння руху записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{\gamma}\right) \text{Re}(\mathbf{a}e^{i\Psi}) + \frac{\omega_H}{\gamma} [\mathbf{p}\mathbf{e}] + \frac{\mathbf{k}}{\gamma} \text{Re}(\mathbf{p}\mathbf{a})e^{i\Psi}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{p} / \gamma; \quad \dot{\Psi} = \mathbf{k}\mathbf{p} / \gamma - 1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

де $\tau \equiv \omega t$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{H}/H_0$, $\omega_H \equiv eH_0/mc\omega$, $\psi = \tau - \mathbf{k}\mathbf{r} + \xi(\tau)$, $\mathbf{a} = eE_0/mc\omega$, $\xi(\tau)$ – випадкова функція.

Нижче ми розглянемо окремо динаміку руху матеріальної точки у полі хвилі з випадковою фазою та у полі хвилі, коли випадкова модуляція фази відсутня ($\xi(\tau)=0$).

При малих напруженостях поля має місце нерелятивістський рух частинок. У цьому випадку рішення рівняння (6.1) для швидкості частинок виражається аналітично. Середній темп зміни енергії електрона під дією імпульсу поля $g(t)$ з фазою, що випадково змінюється, можна характеризувати величиною середньої потужності:

$$P(t) = \frac{1}{t-t_0} \operatorname{Re} \left(\int_{t_0}^t dt' g_T(t') v(t') \right), \quad (6.2)$$

де $v(t) = v_x(t) + i v_y(t) = \int_{t_0}^t dt' \exp[i\omega_H(t'-t)] g(t')$ є рішення рівнянь руху (6.1) в

нерелятивістському наближенні, імпульс поля має вигляд: $g(t) = a_x E_0 \cos(\psi(t)) + i a_y E_0 \sin(\psi(t))$. При цьому середній темп зміни енергії електрона за час імпульсу T для лінійно поляризованої хвилі, можна представити у вигляді Фур'є компоненти середньої спектральної потужності на частоті ω_H :

$$P_T = \frac{1}{2T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{Re}(g(t') \cdot e^{i\omega_H t'}) dt' \right|^2 = \frac{2\pi^2}{T} |\tilde{g}_T(\omega_H)|^2. \quad (6.3)$$

Як видно з цього співвідношення максимальний енергообмін буде спостерігатися у разі, коли різниця частот $\Delta\omega = \omega - \omega_H$ між частотою зовнішнього поля і циклотронною частотою буде досить мала. Таким чином, при взаємодії частинок з полем хвилі, за відсутності зовнішнього магнітного поля, максимальну ефективність енергообміну між полем хвилі з фазою що випадково змінюється і часткою, слід очікувати в області низьких частот.

В полі хвилі з регулярною фазою взаємодія відбувається при виконанні резонансних умов:

$$k_z V_{||0} + s \omega_H / \gamma_0 - 1 = 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.4)$$

При виконанні цих умов у роботі [86] були отримані зкорочені рівняння, що описують динаміку частинки в умовах ізольованого нелінійного резонансу:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp &= \frac{1}{p_\perp} (1 - k_z v_z) W_s \cdot a_0 \cos \theta_s, & \dot{p}_z &= \frac{1}{\gamma} k_z W_s a_0 \cos \theta_s, \\ \dot{\theta}_s &= \Delta_s \equiv k_z v_z + s \frac{\omega_H}{\gamma} - 1, & \dot{\gamma} &= \frac{a_0}{\gamma} W_s \cdot \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (6.5)$$

де $W_s \equiv \alpha_x p_\perp J_s(\mu) s / \mu - \alpha_y p_\perp J_s'(\mu) + \alpha_z p_\perp J_s(\mu)$, $\mu \equiv k_x p_\perp / \omega_H$.

Вважаємо, що при взаємодії частинки з хвилею, зміни її енергії малі $\gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma}_s$, $|\tilde{\gamma}_s| \ll \gamma_0$. Тоді для визначення $\tilde{\gamma}_s$, та θ_s отримаємо замкнену систему рівнянь:

$$\frac{d\tilde{\gamma}_s}{dt} = a_0 \frac{W_s}{\gamma_0} \cos \theta_s, \quad \frac{d\theta_s}{dt} = \frac{k_z^2 - 1}{\gamma_0} \tilde{\gamma}_s. \quad (6.6)$$

Визначимо ширину нелінійного ізольованого резонансу:

$$\Delta \theta_s = 4 \left[\frac{(k_z^2 - 1) a_0 W_s}{\gamma_0^2} \right]^{1/2} \quad \text{або} \quad \Delta \tilde{\gamma}_s = 4 \left[\frac{a_0 W_s}{(k_z^2 - 1)} \right]^{1/2}. \quad (6.7)$$

Відстань між сусідніми резонансами:

$$\delta \gamma_s = \gamma_{0,s+1} - \gamma_0 = \frac{\omega_H}{1 - k_z^2}. \quad (6.8)$$

Зміна характеру руху частинок від регулярного до хаотичного, як відомо, відбувається при виконанні умов перекриття нелінійних резонансів.

Ця умова має вигляд:

$$a_0 \geq \frac{\omega_H}{16 W_s (1 - k_z^2)}. \quad (6.9)$$

6.2. Модель хвилі з фазою, що випадково змінюється

Вище ми отримали аналітичний вираз для передачі енергії заряджених частинок у випадковому полі для нерелятивістського випадку. На жаль, в полях великої напруженості (релятивістський випадок) аналітичні вирази отримати важко. Тому нижче чисельними методами буде розглянута динаміка заряджених частинок у зовнішніх полях великої напруженості. При цьому складності виникають не тільки при математичному моделюванні зовнішніх полів з випадковими фазами, та й при розрахунку динаміки руху заряджених частинок в таких полях. Основна складність полягає у неможливості порівняння розрахунків з однаковими параметрами, це відбувається саме за рахунок випадковостей. У цьому розділі ми розглянемо одну з можливостей моделювання таких полів.

За основу моделювання хвилі з фазою, що випадково скаче, взята бігуча гармонійна хвиля виду $f(t, \mathbf{r}) = a \cos(\omega_0 t - k r + \varphi_0)$ (надалі ми її будемо називати регулярною хвилею), до фази якої додамо випадкову функцію часу з щільністю ймовірності, що має рівномірний розподіл. Для чисельного аналізу реалізована схема рахунку, яка дозволяє варіювати величину інтервалу фаз в межах $-\pi < \Delta \varphi_0 < \pi$, в якому відбувається стрибкоподібна зміна фази. Також реалізована можливість вибору інтервалу часу в якому, у випадковий момент часу, і відбувається стрибок фази. Час стрибка передбачається значно меншим за період хвилі. Завдяки цьому припущенню з'явилася можливість викреслити, сам стрибок фаз з розрахунку динаміки заряджених частинок. Для цього, при виникненні випадкового стрибка фаз, відбувалася зшивка двох сусідніх реалізацій з урахуванням випадкової величини стрибка фази.

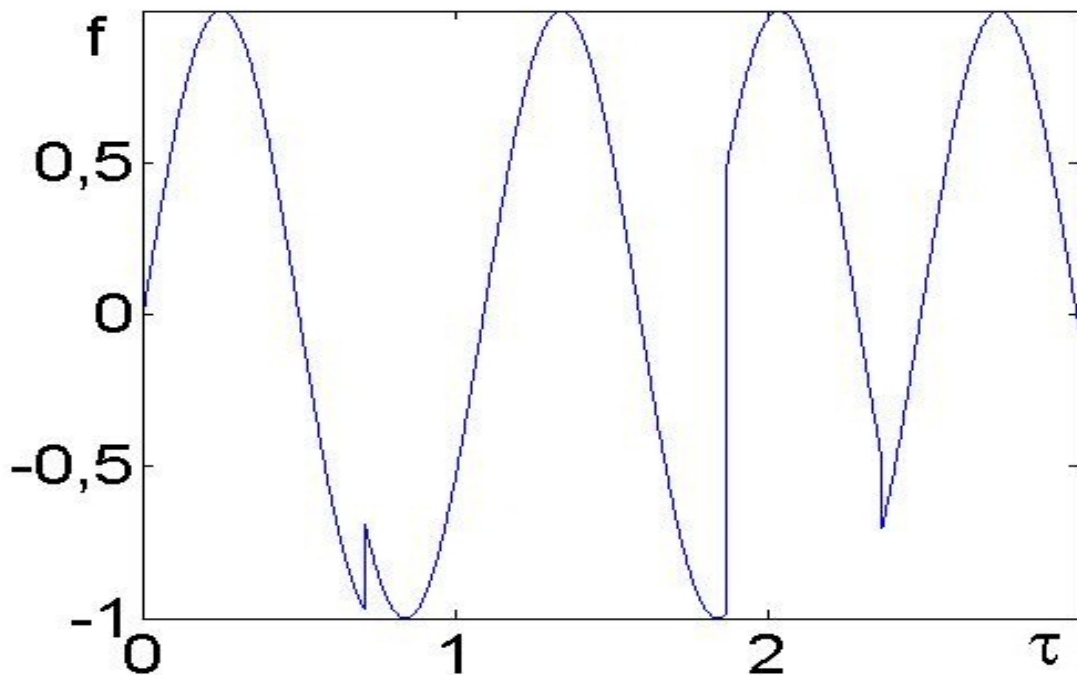


Рис. 6.1. Поле хвилі, з одним скачком на періоді величиною $(-\pi < \Delta \varphi_0 < \pi)$.

На рисунку 6.1, в якості прикладу, представлена початкова частина реалізації (довжиною 1000 періодів) напруженості поля хвилі від часу, при випадковому стрибку фази на кожному періоді хвилі для інтервалу стрибка фаз $-\pi < \Delta \varphi_0 < \pi$ і спектральна щільність потужності цієї реалізації рисунок 6.2 в одиницях ω .

З цього рисунку видно, що стрибок фази відбувається у випадковий момент часу на кожному періоді регулярної хвилі, а величина цього стрибка також випадкова і лежить в інтервалі фаз $(-\pi, \pi)$. Спектр (рисунок 6.2) досить розширений з максимумом поблизу одиниці. Слід відзначити, що при кожній реалізації числового розрахунку величина відхилення максимуму від одиниці різна. В цьому випадку неможливо передбачити величину відхилення, оскільки вона обумовлена випадковою величиною. Однак можливо визначити як на динаміку заряджених частинок впливає інтервал появи випадкових стрибків фази та їх величина.

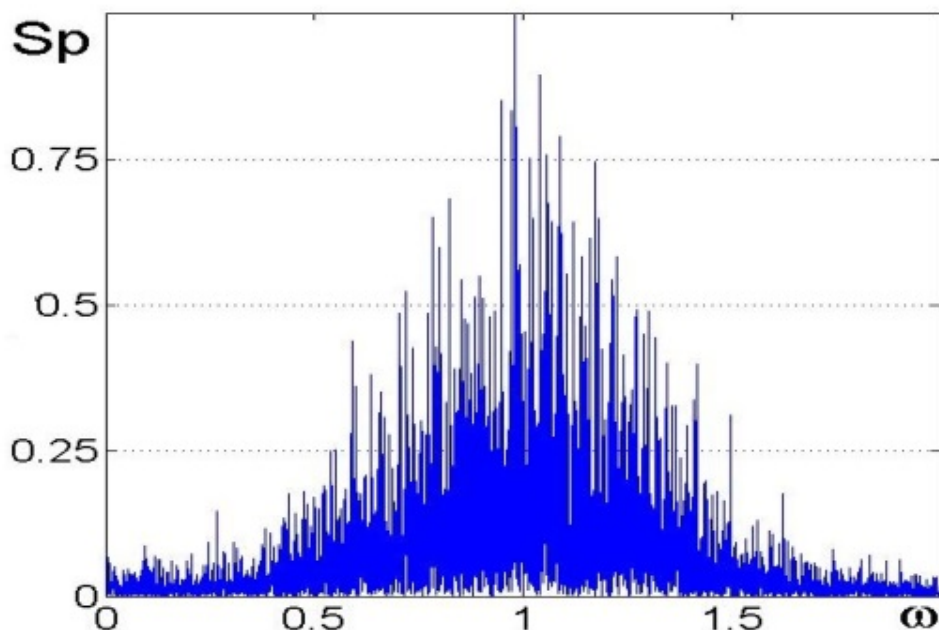


Рис. 6.2. Спектр хвилі, один скачок на періоді величиною $(-\pi < \Delta\varphi_0 < \pi)$.

На рисунку 6.3а наведено спектр хвилі з фазою, що випадково змінюється, при значенні амплітуди стрибка в межах $(-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2)$, та спектр хвилі з фазою, що випадково змінюється з тією ж самою амплітудою $(-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2)$, але в якій один скачок випадкової фази відбувається на п'яти періодах (рисунок 6.3б).

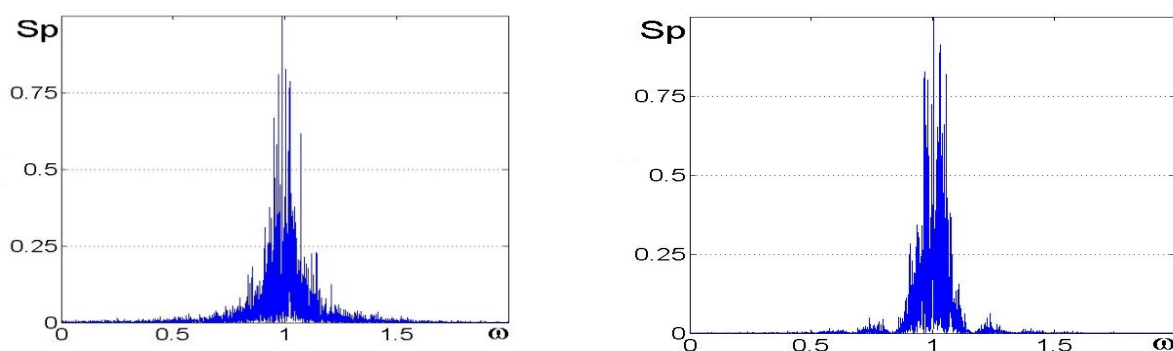


Рис. 6.3. Спектр хвиль.

а – один скачок на періоді величиною $(-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2)$, б – один скачок на п'яти періодах величиною $(-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2)$.

Як видно з цих рисунків із зменшенням амплітуди стрибка, відповідно з π до $\pi/2$, спектр хвилі значно звужується. Також можна бачити, що і збільшення інтервалу між стрибками фази призводить до звуження спектра хвилі з фазою, що випадково змінюється. Звуження смуги спектра відбувається пропорційно як зменшенню величини стрибка, так і підвищенню інтервалу часу, в якому цей стрибок має місце.

6.3. Динаміка частинок у полі хвилі з фазою, що випадково змінюється

Для визначення енергії частинки у полі хвилі з фазою, що випадково змінюється, розглянемо заряджену частинку, динаміка руху якої підпорядковується векторному рівнянню (6.1), в якому $\xi(\tau)$ – випадкова функція, що змінюється за законом, описаним в попередньому розділі. Чисельне моделювання руху частинки у полі хвилі з фазою що випадково змінюється проведено за відсутності магнітного поля $H_0=0$. Моделювання динаміки заряджених частинок проводилося для різних величин амплітуд стрибків випадкової фази, а саме для змін амплітуд ($-\pi < \Delta\varphi_0 < \pi$) та ($-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2$).

На рисунку 6.4а представлена залежність зміни енергії від часу для однієї частинки з початковою фазою $\psi_0=0$ і усередненої по ансамблю з 30 частинок для випадку одного стрибка на періоді та інтервалу стрибків фази ($-\pi < \Delta\varphi_0 < \pi$) (рисунок 6.4б). На цьому ж рисунку, для порівняння з дифузним законом зростання енергії від часу, наведена крива зміни енергії від часу $\gamma_d(\tau)=\alpha\sqrt{\tau}$ при величині коефіцієнта $\alpha=0,5$. Параметр нелінійності (параметр сили хвилі) був обраний $a=eE_0/mc\omega=1$.

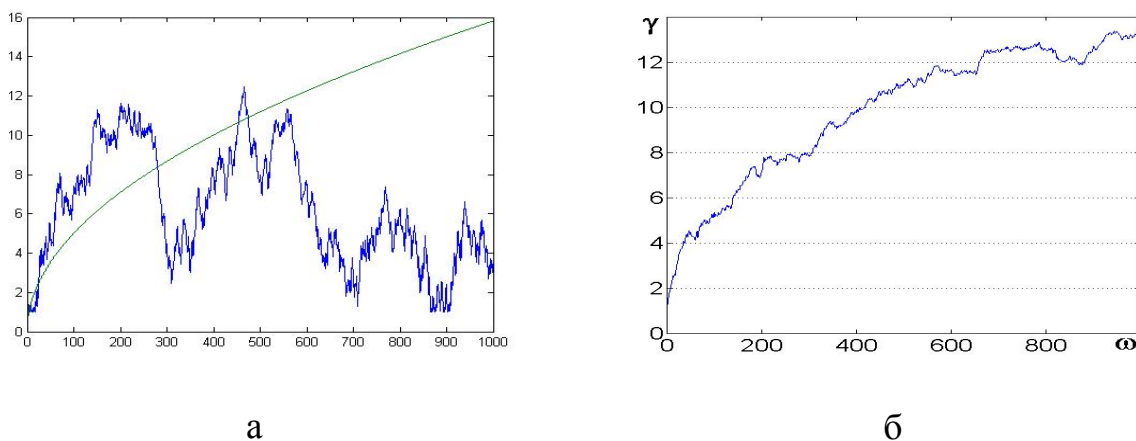


Рис. 6.4. Енергія, яку набирає частинка у полі хвилі з фазою яка випадково змінюється: а – одна частинка; б - ансамбль з 30 частинок.

З цих графіків видно, що одиночна частинка в процесі взаємодії з полем хвилі випадковим чином набирає і втрачає енергію. Однак при усередненні по ансамблю частинок (частинки з різними початковими фазами) спостерігається певна закономірність зростання енергії частинок.

На рисунку 6.5 наведені графіки залежності енергії частинок від часу, усереднені по ансамблю з 30 частинок для різних реалізацій випадкового значення стрибка фаз $\Delta\varphi_0$.

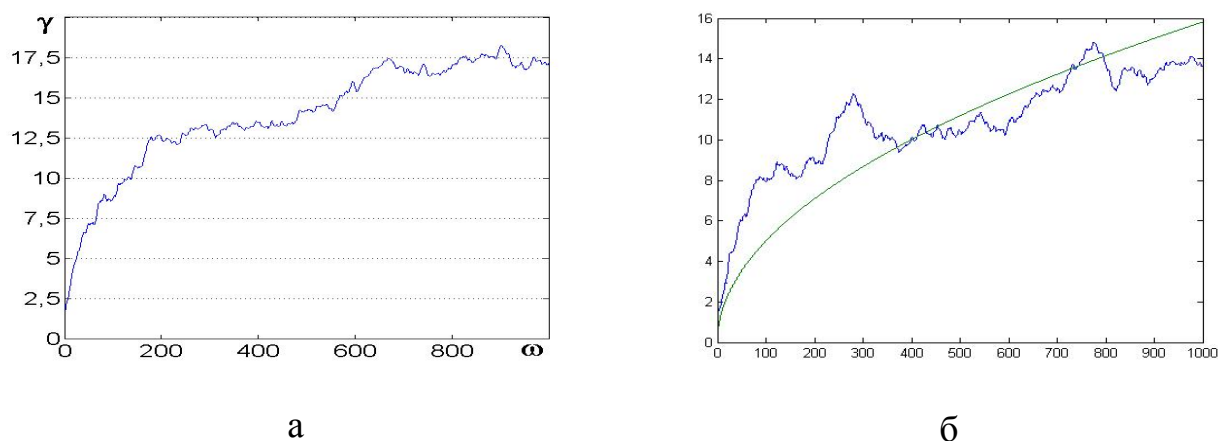


Рис. 6.5. Енергія, яку набирає частинка в полі хвилі, фаза якої випадково змінюється, при величині стрибка: а – $(-\pi < \Delta\varphi_0 < \pi)$, б – $(-\pi/2 < \Delta\varphi_0 < \pi/2)$.

З рисунку 6.5 видно, що при усередненні по ансамблю частинок залежність середньої енергії від часу носить близький до дифузного характер – гладка крива $\gamma_d(\tau) = \alpha\sqrt{\tau}$ де $\alpha = 0,5$. Є якась оптимальна величина інтервалу стрибків фази, при якій набір енергії частинок найбільш ефективний.

Для більш детального аналізу впливу різних частин спектра на якість обміну енергією заряджених частинок з полем хвилі з фазою, що випадково змінюється, із спектру цієї хвилі, виділялися три основні області спектра: низької, основної і область високої частоти. При цьому відсутні ділянки частотного спектра доповнювалися нульовими значеннями. За допомогою зворотного перетворення Фур'є була відновлена реалізація відповідна кожному з розглянутих ділянок спектра.

На рисунках 6.6-6.8 представлені графіки спектральної потужності ділянок спектра і відповідні їм початкові частини відновлених реалізацій для областей низької $10^{-3}\omega_0 < \omega < 0,5\omega_0$, основної (базової) $0,5\omega_0 < \omega < 1,5\omega_0$ і високої частоти $\omega > 1,5\omega_0$

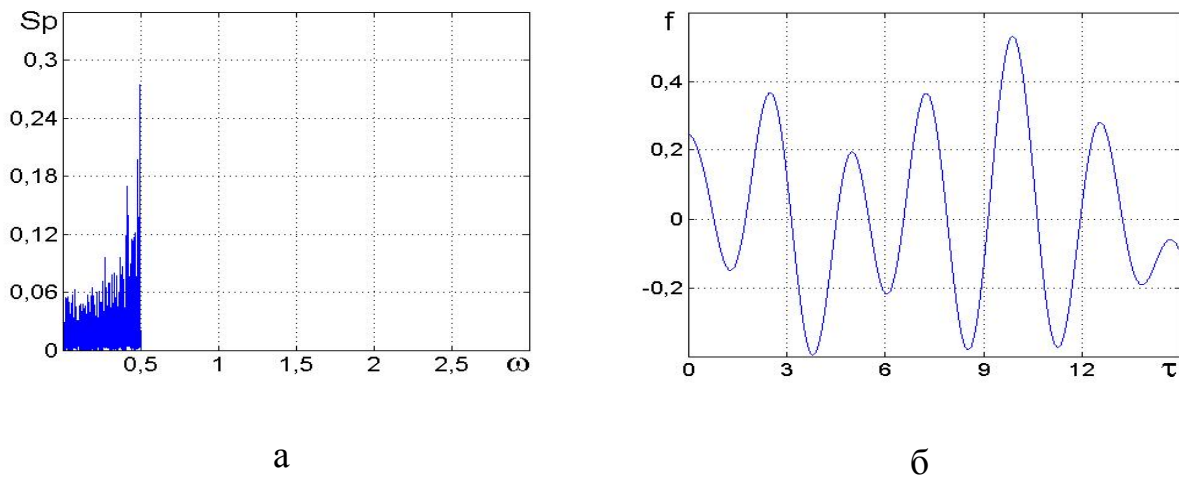


Рис. 6.6. Спектральна потужність ділянок спектра і відповідні їм початкова частина відновлених реалізацій: а – низькочастотна частина спектра, б – частина реалізації, яка відповідає низькочастотній частини спектра.

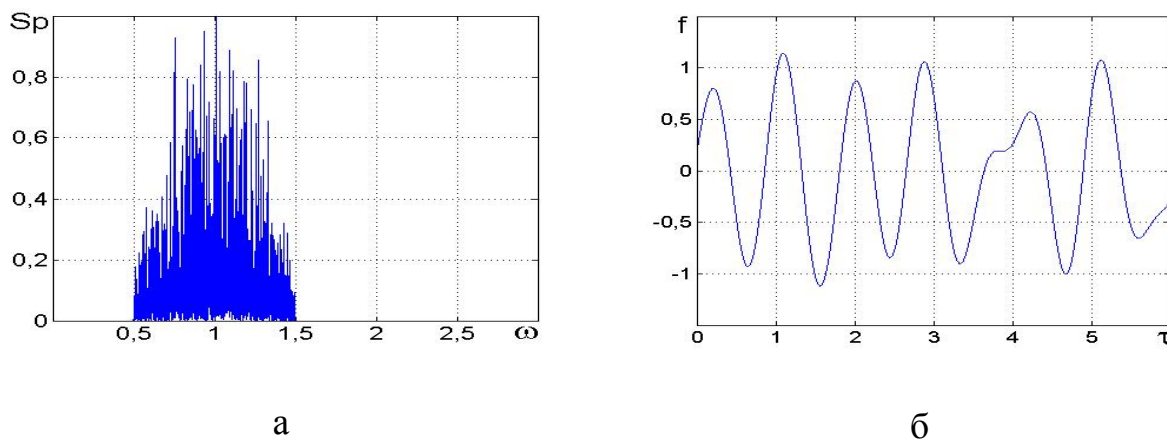


Рис. 6.7. Спектральна потужність ділянок спектра і відповідні їм початкова частина відновлених реалізацій: а – основна частина спектра, б – початкова частина реалізації, яка відповідає основній частини спектра.

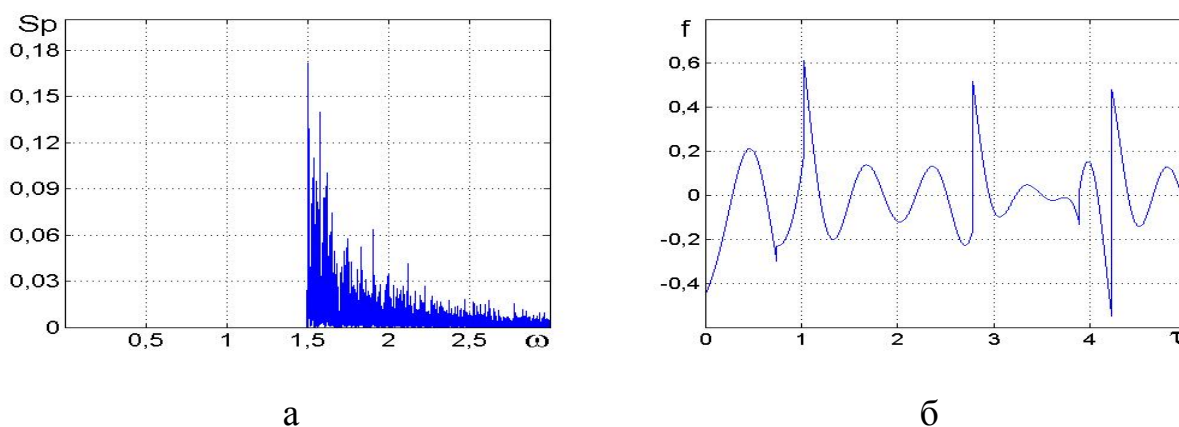


Рис. 6.8. Спектральна потужність ділянок спектра і відповідні їм початкова частина відновлених реалізацій: а – високочастотна частина спектра, б – початкова частина реалізації, яка відповідає високочастотній частини спектра.

Для кожної з відновлених реалізацій поля досліджена динаміка частинок в таких полях при різних значеннях амплітуди.

При малих амплітудах поля, параметр сили хвилі $a \leq 0,01$, основний внесок в енергообмін між полем і частинкою вносить та частина хвилі, яка відповідає низькочастотній області спектра.

Дійсно, при малих напруженостях поля має місце нерелятивістський рух частинок. В цьому випадку середній темп зміни енергії електрона під дією імпульсу поля $g(t)$ можна характеризувати величиною середньої потужності. Вираз для неї представлено формулою (6.3).

Як видно з цієї формули максимальний енергообмін буде спостерігатися в разі, коли різниця частот $\Delta\omega = \omega - \omega_H$ між частотою зовнішнього поля і циклотронною частотою буде досить мала. Таким чином, при взаємодії частинок з полем хвилі у відсутності зовнішнього магнітного поля, максимальну ефективність енергообміну між полем і частинкою слід очікувати в області низьких частот. Що і підтверджується чисельним аналізом.

На рисунках 6.9-6.11 наведені графіки залежності поздовжнього імпульсу (енергії) частинок від часу, усереднені по ансамблю з 30 частинок при використанні функцій відновлених з різних частин спектрального розкладання.

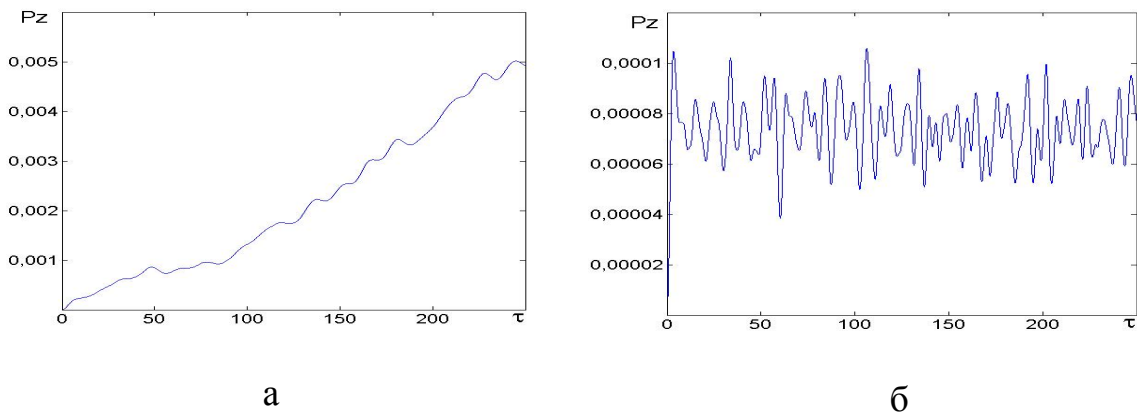


Рис. 6.9. Усереднений імпульс $a=0,01$:

а - низькочастотна частина спектру, б - основна частина спектру.

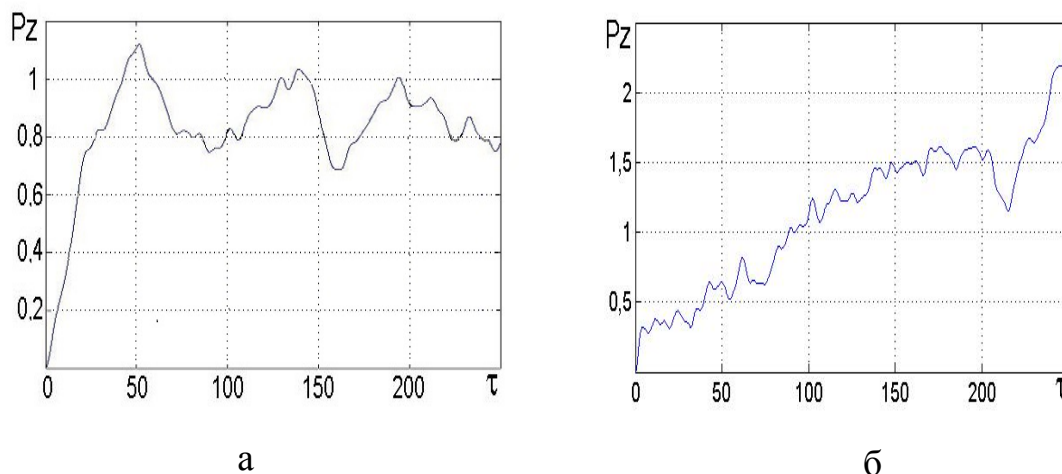


Рис 6.10. Усереднений імпульс, коли $a=0,5$:

а - низькочастотна частина спектру, б - основна частина спектру

Графіки усередненого імпульсу для високочастотної частини спектру аналогічні графікам для середньої частини спектру.

Як видно з цих графіків при малих значеннях амплітуди поля ($0 < a < 0,5$) основну роль в енергообміні частинок з полем грає низька частота.

При великих значеннях амплітуди поля $a \geq 1$ динаміка набору енергії якісно змінюється. Основний внесок в енергообмін вносить основна частина спектру (рисунок 6.10).

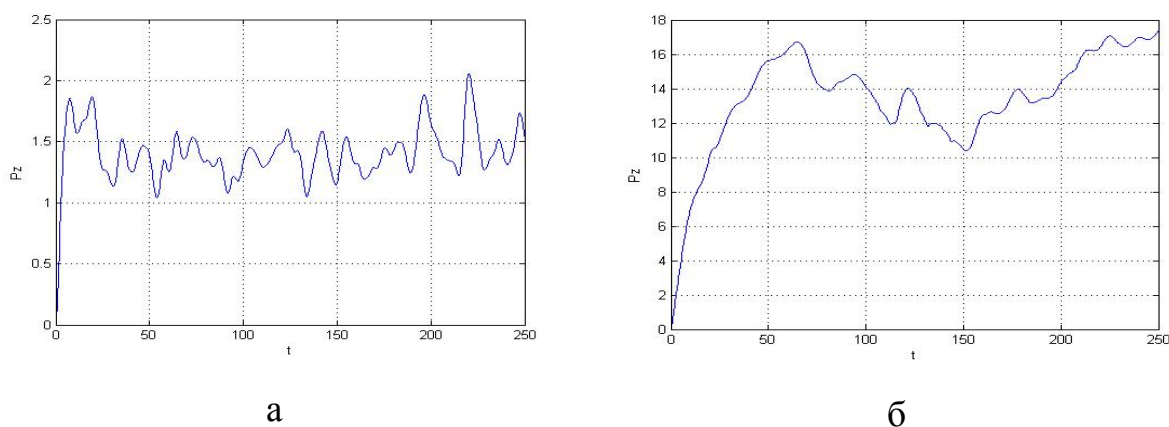


Рис. 6.11. Усереднений імпульс, коли $a=2$:

а - низькочастотна частина спектру, б - основна частина спектру.

Таким чином, можна говорити, що є якийсь перехідний процес, який полягає у зміні тієї області спектру, яка вносить основний вклад в обмін енергією частинки з полем. Цей перехідний процес відбувається в інтервалі зміни напруженості поля від $a=0,1$ до $a=1$.

6.4. Динаміка частинок у полі регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів

Розглянемо динаміку частинок у полі плоскої електромагнітної хвилі і в зовнішньому постійному магнітному полі під час відсутності випадкових стрибків фази. Ця динаміка описується рівняннями (6.1) при $H_0 \neq 0$ та $\xi(t)=0$. Для забезпечення умов перекриття нелінійних резонансів, а також для подальшого порівняння двох методів прискорення заряджених частинок, параметр сили хвилі $a=1$. У цих умовах динаміка зарядженої частинки, носить стохастичний характер, з характерним випадковим набором і втратою енергії (рисунок 6.12а). Однак, як і у випадку зі стрибками фази, середня по ансамблю енергія частинок змінюється згідно із законом, близькому до дифузійного з коефіцієнтом 0,6 (рисунок 6.12б).

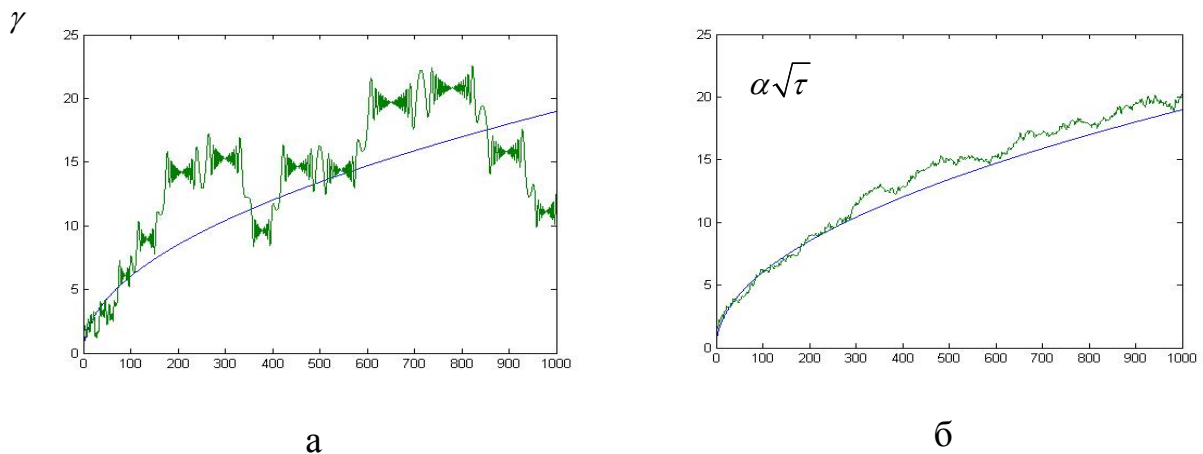


Рис. 6.12. Енергія, яку набирає частинка в умовах перекриття циклотронних резонансів: а - одна частинка; б - ансамбль з 30 частинок.

Основна частина матеріалів цього розділу була опублікована в роботах [10, 11].

6.5. Висновки

У висновку проведемо порівняння ефективності набору енергії частинками у випадковому полі і у полі регулярної хвилі (в умовах перекриття резонансів). При такому порівнянні будемо виходити з рівності енергії в хвилі з фазою, що випадково змінюється, і в регулярній хвилі $W_N = W_R$. Якщо амплітуди регулярної хвилі і випадкової однакові, то, як ми бачили вище, набір енергії частинками в таких полях приблизно однаковий $\Delta\gamma_R = \Delta\gamma_N$.

Енергія шумової хвилі $W_N = a_N^2 \Delta\omega_N$, $\Delta\omega_N \sim 0,4$.

Енергія регулярної хвилі $W_R = a_R^2 \Delta\omega_R$, $\Delta\omega_R \sim 1/Q$, Q – добротність. Так як $1/Q = 10^{-2} - 10^{-7}$, то для досягнення одного рівня енергії частинок у полі хвилі зі стрибками фази необхідний більш високий рівень енергії хвилі. Велика ефективність стохастичного набору енергії зарядженими частинками у полі регулярної хвилі, в умовах перекриття нелінійних резонансів, обумовлена вузькою спектральною лінією такого випромінювання, а також наявністю циклотронних резонансів. Можна очікувати, що при русі частинки у полі регулярної хвилі, в умовах циклотронних резонансів, наявність рідкісних випадкових стрибків, навіть без перекриття нелінійних резонансів, буде також ефективним. В цьому випадку спектр звужується. Частинка рухається в інтенсивному полі. Попередні дослідження такої динаміки частинок дійсно показують ефективність цієї схеми. Відзначимо, що така схема набору енергії схожа на схему набору енергії частинок в магнітних пастках. Вигідною відмінністю є тривалий рух частинок у синхронізмі з хвилею (резонанси), при якому набір швидкості частинок пропорційний часу резонансної взаємодії з полем. Короткі скачки в даному випадку грають роль втрати фази частинки відносно хвилі при русі від пробки до пробки в пастках.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано важливе наукове завдання – встановлено нові умови прискорення заряджених частинок, при їх русі у електромагнітному полі великої напруженості. Знайдено умови, при яких регулярна динаміка взаємодії заряджених частинок з полем електромагнітних хвиль переходить у хаотичну динаміку цих частинок.

Основні результати та висновки, що отримано в дисертаційній роботі, полягають у наступному:

1 Вперше показано, що при $a \geq 1$ умови циклотронного резонансу у задачі руху заряджених частинок (електронів) у зовнішньому постійному магнітному полі величини H_0 , яке направлене уздовж осі z і в полі електромагнітної хвилі довільної поляризації, не є необхідними для обміну енергією між зарядженими частинками і хвилями. В таких полях завжди виконуються умови перекриття нелінійних циклотронних резонансів, окрім випадку авторезонансу. У цьому випадку обмін енергії реалізується за короткий час, який може дорівнювати всього одному періоду високочастотної хвилі. При цьому динаміка частинок стає хаотичною і в середньому набір енергії відбувається по дифузійному закону - $\gamma \sim \gamma_0 \sqrt{\tau}$.

2 Показано, що до значень $\omega_b^2 = 1$ у задачі про збуджування електромагнітного поля моноенергетичним пучком осциляторів, для визначення динаміки полів, що збуджуються, можливо використовувати одночасткове наближення.

3 Вперше знайдено, що електронний пучок може збуджувати коливання в умовах циклотронного резонансу, коли частота хвилі, що збуджується, у декілька разів менша, ніж пучкова частота ($2\omega^2 = \omega_b^2$). В цих умовах глибина нелінійної модуляції збуджуваного поля хвилі може досягнути ста відсотків.

4 Вперше запропоновано схеми параметричного, додаткового прискорення заряджених частинок, у фазовому просторі нелінійного циклотронного резонансу. Це додаткове прискорення реалізується модуляцією амплітуди хвилі, яка прискорює частинки. Цей механізм можливо використовувати для зменшення розкиду енергій прискорених частинок, захоплених у резонанс.

5 Показано, що коли параметр сили хвилі $a > 0,3$, в схемі оберненого лазера на вільних електронах, розвивається стохастична нестійкість руху частинок, яка руйнує схему прискорення. Тільки частинки, розташовані в околиці нульових фаз комбінаційної хвилі, не беруть участь у хаотичній динаміці, вони знаходяться у острівцях стійкості. Проте зі збільшенням амплітуди хвиль таких частинок стає все менше.

6 Показано, що в сильних ($a > 1$) поперечних електромагнітних полях, поздовжній, по відношенню до хвильового вектору, рух заряджених частинок стає значно більш суттєвий, ніж поперечний рух. Це стає можливим завдяки тому, що у динаміці заряджених частинок нелінійна магнітна сила Лоренца (пропорційна $a^2 > a$) починає відігравати основну роль. Крім цього, вона спрямована вздовж хвильового вектору хвилі, що прискорює частинки. Така особливість динаміки частинок в сильних полях, дає можливість використовувати її для побудови нових схем прискорення.

7 Визначено вид траєкторії частинки та найбільш ефективні просторові та часові характеристики полів для прискорення заряджених частинок у задачі руху зарядженої частинки в полі плоскої електромагнітної хвилі довільної поляризації, коли параметр сили хвилі стає більше одиниці ($a > 1$). Найбільш привабливим для прискорення заряджених частинок є лазерний імпульс з круговою поляризацією, завдяки тому, що форма зміни поздовжнього імпульсу заряджених частинок і їх енергія повторюють форму обвідної лазерного імпульсу, що дозволяє легше обмежити область взаємодії.

8 Порівняння схем стохастичного прискорення й нагрівання частинок, при взаємодії частинок з полем хвилі, фаза якої випадково змінюється, і з

полем регулярної хвилі в умовах перекриття нелінійних резонансів показала, що ефективність передачі енергії від поля частинкам значно вища при використанні регулярних полів. Більша ефективність стохастичного набору енергії зарядженими частинками в полі регулярної хвилі, порівняно з ефективністю набору енергії в хаотичних полях, обумовлена більшою напруженістю поля, що діє на частинки (як результат більш вузькою спектральною лінією такого випромінювання), а також наявністю циклотронних резонансів.

Таким чином, з'ясована динаміка заряджених частинок у полі інтенсивних електромагнітних хвиль. В умовах, коли параметр сили хвилі порядку або більше одиниці, визначено нові умови (в тому числі і при відсутності відомих резонансних умов) для ефективного обміну енергії між частинками і хвилями. Побудовані нові схеми прискорення заряджених частинок у вакуумі, в яких не має необхідності у використанні резонансних умов.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Buts A.V., Buts V.A., Kuzmin V.V. Acceleration of charged particles by elliptic polarized waves of large amplitude // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigation (43). 2004. № 2. P. 144-146.
2. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of the motion of charged particles in the field of the high-frequency impulse of large intensity // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (11). 2005. № 2. P. 137-139.
3. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика частиц в полях большой интенсивности // Успехи современной радиоэлектроники. 2005. № 11. С. 5-20.
4. Буц В.А., Кузьмин В.В. Стохастическая неустойчивость движения частиц в схемах обращенного лазера на свободных электронах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (5). 2006. № 5. С. 3-6.
5. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (13) 2007. №1. P. 127-129.
6. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц интенсивным лазерным излучением // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. №6. С. 68-75
7. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме интенсивными электромагнитными волнами // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (50). 2008. №5. С. 116-120.
8. Буц В.А., Кузьмин В.В. Особенности динамики заряженных частиц в постоянном магнитном поле и в поле волны с меняющейся амплитудой // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (53). 2010. №2 (66). С. 111-113.
9. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем интенсивного лазерного импульса // Вопросы атомной науки и

техники. Серия: Ядерно–физические исследования (59). 2012. №4 (80). С. 117-121

10. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (19). 2013. №1 (83). P. 137-139.

11. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic acceleration of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations (63). 2014. №5 (93). P. 143-149.

12. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Особенности динамики частиц и полей при циклотронных резонансах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2017. Том 152, вып. 4 (10), С. 767–780.

13. Buts V.A., Kuzmin V.V. Peculiarities of charged particles moving in the field of high frequency pulse of large intensity // 10th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, September 13-18, 2004: Book of abstracts. Alushta, Crimea, Ukraine, 2004. P. 153.

14. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика заряженных частиц в поле электромагнитных импульсов большой напряженности // XIX Международный семинар по ускорителям заряженных частиц, 12-18 сентября 2005: тез. докладов. Алушта, Крым, Украина, 2005. С. 61–62.

15. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // 11th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion and 2-nd International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokomaks, September 11-16, 2006: Book of abstracts. Alushta, Crimea, Ukraine, 2006. P. 136.

16. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме полями интенсивных электромагнитных волн // XX Международный семинар по ускорителям заряженных частиц, 9-15 сентября 2007: тез. докладов. Алушта, Крым, Украина, 2007. С. 49–50

17. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of dynamics of the charged particles in the constant magnetic field and in the field of the wave with varying amplitude //

XXI International Workshop on Charge Particle Accelerators, September 2-6, 2009: Book of abstracts. Alushta, Crimea, Ukraine, 2009. P. 136.

18. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем лазерного импульса // IX конференция по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям, 21-25 февраля 2011: тез. докладов Харьков, ННЦ ХФТИ, 2011. С. 119

19. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating and stochastic acceleration of charged particles // International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, September 17-22, 2012: Book of abstracts. Alushta, Crimea, Ukraine, 2012. P. 131.

20. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Стохастическое ускорение заряженных частиц // XXIII Международный семинар по ускорителям заряженных частиц, 08-14 сентября 2013: тез. докладов. Алушта, Крым, Украина, 2013. С. 40.

21. Perry M.D., Pennington D., Stuart B.C., et al. Petawatt laser pulses // Opt. Lett. 1999. Vol. 24. P. 160-162.

22. Tajima T., Mourou G.. Eds M. Lontano, G.Mourou, O.Svelto, T.Tajima In Superstrong fields in plasmas // New York: Melville. 2002. Vol. 611. p.432-436.

23. Salamin Y.I., Mocken G.R., Keitel C.H. Relativistic electron dynamics in intense crossed laser beams: Acceleration and Compton harmonics // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 016501.

24. Salamin Y.I., Mocken G.R., Keitel C.H. Electron scattering and acceleration by a tightly focused laser beam // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2002. Vol. 5, P. 101301.

25. Salamin Y.I., Keitel C.H. Electron Acceleration by a Tightly Focused Laser Beam // Phys. Rev Lett. 2002. Vol. 88. P. 095005

26. Kong Q., Ho Y.K., Wang J.X., et al. Conditions for electron capture by an ultraintense stationary laser beam // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 1981.

27. Wang P.X., Ho Y.K., Yuan X.Q., et al. Vacuum electron acceleration by an intense laser // Appl. Phys. Lett. 2001. Vol. 78. P. 2253.

28. Wang J.X., Ho Y.K., Kong Q., et al. Electron capture and violent acceleration by an extra-intense laser beam // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 6575.
29. Бахари А., Таранухин В.Д. Прямое ускорение электронов интенсивным лазерным УКИ // *Квантовая электроника*. 2003. №33 (6). С. 563.
30. Бахари А., Таранухин В.Д. Лазерное ускорение электронов в вакууме до энергий $\sim 10^9$ эВ // *Квантовая электроника*. 2004. №34 (2), С. 129.
31. Баранова Н.Б., Скалли М.О., Зельдович Б.Я. Ускорение заряженных частиц лазерными пучками // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1994. Т. 105, № 3. С. 469-486.
32. Scully M.O., Zubairy M.S Simple laser accelerator: Optics and particle dynamics // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 2656.
33. Dawson, J. M., Plasma Particle Accelerators // *Scientific American*, 260, 54, 1989.
34. Tajima T., Dawson J.M. Enhanced Drag by Radiation for Runaway Electrons // *Phys. Rev. Lett.* 1979. Vol. 43. P. 267.
35. Clayton, C.E., et al. Ultrahigh-gradient acceleration of injected electrons by laser-excited relativistic electron plasma waves // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol.70. P. 37.
36. Everett, M., Lal, A., Gordon, D., Clayton, C. E., Marsh, K. A., & Joshi, C. Trapped electron acceleration by a laser-driven relativistic plasma wave // 1994, *Nature*, 368. P. 527.
37. Faure J., Glinec Y., Pukhov A., Kiselev S., Gordienko S., Lefebvre E., Rousseau J.-P., Burg F. & Malka V.. A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams // *Nature* 2004. 431. P. 541-544.
38. Geddes C. G. R., Toth CS., Van Tilborg J., Esarey E., Schroeder C. B., Bruhwiler D., Nieter C., Cary J. & Leemans W. P.. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding // *Nature* 2004. 431. P. 538–541.
39. Mangles S. P. D., Murphy C. D., Najmudin Z., Thomas A. G. R., Collier J. L., Dangor A. E., Divall E. J., Foster P. S., Gallacher J. G., Hooker C. J.,

Jaroszynski D. A., Langley A. J., Mori W. B., Norreys P. A., Tsung F. S., Viskup R., Walton B. R. & Krushelnick K.. Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions // *Nature* 2004. 431, P. 535–538.

40. Shimoda K. Proposal for an Electron Accelerator Using an Optical Maser // *Appl. Optics*. 1962. Vol. 1. P. 33-36.

41. Arutyunyan V.M., Avetisyan G.K. Emission by Charged Particles in the Field of a Plane Electromagnetic Wave in Medium // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972. Vol. 35, №5. P. 854.

42. Nagorskii G.A., Yu., Orlov F. Stable motion and acceleration of a charged particle in a linearly polarized electromagnetic wave in a gaseous medium // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1973. Vol. 37, №3. P. 387.

43. Piestrup M.A., Rothbart G.B., Fleming R.N.e.a. Momentum modulation of a free electron beam with a laser // *J. Appl. Phys.* 1975. Vol. 46. P. 132—137.

44. Edinghoffer J.A., Kimura W.P., Pantel P.H.e.a. Observation of inverse Čerenkov interaction between free electrons and laser light // *Phys. Rev. A*. 1981. Vol. 23. P. 1848.

45. Kimura W.P., Wang P.J.-, Pietstrup M.A.e.a. The stimulated Čerenkov interaction and its applications // *IEEE J. Quantum Electronics*. 1982. Vol. 18. P. 239-245.

46. Nagorsky G.A Laser acceleration of particles using resonance inversions of the Čerenkov effect // *Nucl. Inst. and Methods in Physics Research A*. 1986. Vol. 248. P.31.

47. Fontana J.R. Inverse Čerenkov acceleration // *AIP Conf. Proc. N.Y.*, 1985. Vol. 130. P. 357-366.

48. Dement'ev A.S., Kul'kin A.G., Pavlenko G. Emission by a Charge Moving in a Medium in the Field of an Intense Wave // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972. Vol. 35, №1. P. 86.

49. Palmer R.B. A lazer-driven grating linac // *Particle Acc.* Vol. 11. P.81. 1980.

50. Lawson Y.D. Lasers and Accelerators // IEEE Trans. on Nucl. Sci. 1979. Vol. 26. P.4217.
51. Амадуни А.Ц., Лазиев Э.М., Нагорский Г.А. и др. Развитие новых методов ускорения заряженных частиц в ЕрФИ. Ереван: ЦНИИАтоминформ, 1989.
52. Hartemann F.V. et. al. Nonlinear ponderomotive scattering of relativistic electrons by an intense laser field at focus // Phys. Rev. E. 1995, Vol. 51, № 5. P. 4833.
53. Esarey E., Sprangle P., Krall J. Laser acceleration of electrons in vacuum // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 5, P. 5443.
54. Malka G., Lefebvre E J., Miquel. L. Experimental Observation of Electrons Accelerated in Vacuum to Relativistic Energies by a High-Intensity Laser // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 17, P. 3314.
55. Quesnel B., Mora P. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum // Phys. Rev. E 1998. Vol. 58, № 3. P. 3719.
56. Zhu L.J. et. al. Violent acceleration of electrons by an ultra-intense pulsed laser beam // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 248, № 5. P. 319.
57. . Wang J.X. et. al. Electron capture and violent acceleration by an extra-intense laser beam // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 5.P. 6575.
58. Troha A.L. et. al. Vacuum electron acceleration by coherent dipole radiation // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 1. P. 926.
59. Wei Yu et. al. Ponderomotive acceleration of electrons at the focus of high intensity lasers // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 3. P. 2220.
60. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Авторезонансное движение частицы в плоской электромагнитной волне. // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 6. С. 1259-1261.
61. Kolomenskii A.A., Lebedev A.N. Resonance Effects Associated with Particle Motion in a Plane Electromagnetic Wave // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1963. Vol. 17, №1. P. 179.

62. Kolomenskii A.A., Lebedev A.N. Quasilinear Acceleration of Particles by a Transverse Electromagnetic Wave // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1966. Vol. 23, №4. P. 733.

63. Давыдовский В.Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле. // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1962. Т. 43. С. 886-888.

64. Palmer R.B. Interaction of Relativistic Particles and Free Electromagnetic Waves in the Presence of a Static Helical Magnet // *J. Appl. Phys.* 1972. Vol. 43. P. 3014-3023.

65. Кондратенко А.М., Салдин Е. Л. Ускорение электронов электромагнитной волной в ондуляторе // *Препринт ИЯФ СО АН СССР Новосибирск*, 1982. С. 82-85.

66. *Laser Acc. Part.* Los Alamos, 1982. AIP Conf. Proc. N.Y., № 91.

67. *Challenge of Ultra-High Energies. A Review of Limitations and Possibilities in Part. Acc.* Oxford, 1982.

68. *The Generation of High Fields for Part. Acc. to Very High Energy*, Frascati, Geneva, 1985.

69. Варфоломеев А.А. Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития (обзор). М.: Инст. Атомн. энергии им. И.В. Курчатова, 1980. 117 с

70. Варфоломеев А. А. Экспериментальные исследования ЛСЭ (обзор). М.: ЦНИИатоминформ, 1987. 120 с.

71. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах // *Сб. статей*. Под ред. А.А. Рухадзе. М.: Мир, 1983. 282 с.

72. Colson W.B., Sessler A.M. Free Electron Lasers // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sc.* 1985. Vol. 35. P. 25-54.

73. Аполонов В.В., Калачев Ю.Л., Прохоров А.М., Федоров М.В. Ускорение электронов при вынужденном комптоновском рассеянии // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1986. Т. 46. С. 61.

74. Аполлонов В.В., Артемьев А.И., Калачев Ю.Л. и др. Ускорение электронов в сильном лазерном и постоянном поперечном магнитном полях // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1988. Т. 47. С. 77.
75. Apollonov V.V., Artem'ev A.I., Kalachev Yu. L., Suzdal'tsev A.G., Prokhorov A.M., Fedorov M.V. Electron acceleration by intense laser beam in a static magnetic field // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1990. Vol. 70. № 5. P. 846.
76. Милантьев В.П. Явление циклотронного авторезонанса и его применения // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 1. С. 3-16.
77. Воробев А.А., Диденко А.Н., Ишков А.П. и др. Исследование авторезонансного метода ускорения частиц электромагнитными волнами // Атомная энергия. 1967. Т. 22, № 1. С. 3-4.
78. Jory H.R., Trivelpiece A.W. Charged Particle Motion in Large Amplitude Electromagnetic Fields // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39, № 7. P. 3053-3060.
79. Протасевич Е.Т. Экспериментальные исследования взаимодействия электронов с незамедленной волной H_{10} прямоугольного волновода в нарастающем магнитном поле // Журнал технической физики. 1995. Т. 65. № 6. С. 133-140.
80. Loeb A., Friedland L. Autoresonance laser accelerator // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. № 3. P. 1828-1835.
81. Loeb A., Friedland L. The nonlinear dynamics of dense electron beams in the autoresonance laser accelerator // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 129. № 5-6. P. 329-332.
82. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. // М. Наука, 1990. 432 С.
83. Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Smolyakova O.B. et al. Auxiliary ECR heating system for the gas dynamic trap // Phys. Plasmas. 2012. № 19, P. 052503

84. Yakovlev D.V., Shalashov A G, Gospodchikov E.D. et al. Electron-cyclotron plasma startup in the GDT experiment // Nuclear Fusion. 2016.Vol. 57, № 22.

85. Шалашов А.Г., Балакин А.А., Хусаинов Т.А. и др. Квазиоптическое моделирование электронного циклотронного нагрева плазмы в прямой магнитной ловушке. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2017. Т. 151, № 2. С. 379–395

86. Балакирев Б.А., Буц В.А., Толстолужский А.П., Туркин Ю.А.. Хаотизация движения пучка сфазированных осцилляторов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1983. Т.84, №4. С.1279.

87. Буц В.А.. Мазеры на циклотронном резонансе // Успехи современной радиоэлектроники. 2004. №8. С.13-34.

88. Гапонов А. В., Гольденберг А. Л., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Прибор для генерации сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн // Авторское свидетельство, No 223931 от 24.03.67. – БИОПОТЗ, 1976, № 11. С. 200.

89. Гиротрон: Сб. научных трудов. Институт прикладной физики АН СССР. Горький, 1981. 253 с.

90. Miller R.V. Intense charged particle beams // Plenum Press New York and London, 1983.

91. Кравченко В. Ф., Кураев А. А., Сеницын А. К. Несинхронные взаимодействия // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. С. 511–534

92. Буц В. А., Мануйленко О. В., Степанов К. Н., Толстолужский А. П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слаболинейном взаимодействии типа волна-волна // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 9. С. 794–801.

93. Крылов Н. С., Фок В. А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1947. Т. 17, № 2. С. 93–107.

94. Басс Ф.Г., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы с учетом корреляции электрических полей // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1965. Т.49, №.1(7). С.329–334.

95. Карась В.И., Файнберг Я.Б., Алисов А.Ф., Артамошкин А.М., Бингхам Р., Гавриленко И.В., Левченко В.Д., Лонтано М., Мирный В.И., Потапенко И.Ф., Старостин А.Н. Взаимодействие с плазмой или газами микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой // Физика плазмы. 2005. Т.31, №9. С. 810–822.

96. Балакирев Б.А., Буц В.А., Толстолужский А.П., Туркин Ю.А. Динамика движения заряженных частиц в поле двух электромагнитных волн // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1989. Т.95, №.4. С.1231-1245.

97. Зельдович Я.Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением. // Успехи физических наук. 1975. Т. 115, № 2. 161-197.

98. Болотовский Б.М., Серов А.В. Особенности движения частиц в электромагнитной волне // Успехи физических наук. 2003. Т.173, №6. С. 667-678.

99. Буц В.А., Буц А.В. Динамика заряженных частиц в поле интенсивной поперечной электромагнитной волны. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1996. Т. 110, №. 3(9). С. 818-831.

100. Buts V.A. Peculiarities of particles and field dynamics at critical intensity of electromagnetic waves (part 1), // Problems of Atomic Science and Technology. 2005. № 1. P. 119-121.

101. Buts V.A., Lebedev A.N., Kurilko V.I. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams. Book // Springer Berlin Heidelberg New York. 2006. 259 P.

102. Antonov A.N., Buts V.A., Kovpik O.F., Kornilov E.A., Manuilenko O.V., Svichenskii V.G., Stepanov K.N. Stochastic heating of plasma at electron cyclotron resonance. // JETP LETTERS. 1999. Vol. 69, № 11. P. 851-857.

103. Buts V.A., Tolstoluzhsky A.P. Nonrelativistic dynamics of the charged particles at cyclotron resonances. // Problems of atomic science and technology, Series: "Plasma Physics". 2008. № 5(14). P. 117-119.

104. Милантьев В.П. Циклотронный авторезонанс (к 50-летию открытия) // Успехи физических наук. 2013. Т. 183, № 8. С. 875-884.

105. Заславский Г.М., Чириков Б.В., Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физических наук. 1971. Т.105, №9. С. 3-39.

106. Балакирев В.А., Буц В.А., Толстолужский А.П. и др. Динамика движения нелинейного маятника под воздействием внешней периодической силы. // Письма в Журнал технической физики. 1983. Т.9, №. 23. С. 1427-1431.

107. Буц В.А., Мануйленко О.В., Толстолужський А.П. Стохастизація коливань в плазмово-пучковій системі під дією зовнішнього монохроматичного поля. // Український фізический журнал. 1994. Т.39, № 4. С. 429-433.

108. Buts V.A., Tolstoluzhsky A.P. Nonrelativistic dynamics of the charged particles at cyclotron resonances. Problems of atomic science and technology, Series: "Plasma Physics", 2008, № 6(14). P. 117-119.

109. Буц В.А., Войценья Е.А., А.П. Толстолужский. Нерелятивистская динамика заряженных частиц при циклотронных резонансах. Успехи современной радиоэлектроники. 2009. № 8. С. 44-51.

110. Митропольский Ю.А., Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова думка. 1971. 440 С.

111. Буц В.А., Эффективность схем ускорения заряженных частиц типа обращенного лазера на свободных электронах // Журнал технической физики. 1990. Т.60, №.6. С.133-134.

112. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.. Теория поля. М.: Наука, 1973.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій, у яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Buts A.V., Buts V.A., Kuzmin V.V. Acceleration of charged particles by elliptic polarized waves of large amplitude // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigation (43) 2004. № 2. P. 144-146.
2. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of the motion of charged particles in the field of the high-frequency impulse of large intensity // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (11). 2005. № 2. P. 137-139.
3. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика частиц в полях большой интенсивности // Успехи современной радиоэлектроники 2005. № 11. С. 5-20.
4. Буц В.А., Кузьмин В.В. Стохастическая неустойчивость движения частиц в схемах обращенного лазера на свободных электронах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (5). 2006. №5. С. 3-6.
5. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц интенсивным лазерным излучением // Успехи современной радиоэлектроники 2007. №6. С. 68-75
6. Буц В.А., Кузьмин В.В. Особенности динамики заряженных частиц в постоянном магнитном поле и в поле волны с меняющейся амплитудой // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно-физические исследования (53). 2010. №2 (66). С. 111-113.
7. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем интенсивного лазерного импульса // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно-физические исследования (59). 2012. №4(80). С. 117-121
8. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (19). 2013. №1(83). P. 137-139.

9. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic acceleration of charged particles // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations (63). 2014. №5(93). P. 143-149.

10. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Особенности динамики частиц и полей при циклотронных резонансах // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2017. Т 152, № 4 (10), С. 767–780.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

11. Buts V.A., Kuzmin V.V. Peculiarities of charged particles moving in the field of high frequency pulse of large intensity // 10th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, September 13-18, 2004, Alushta: Book of abstracts. NSC KIPT Kharkov, 2004. P. 153.

12. Буц В.А., Кузьмин В.В. Динамика заряженных частиц в поле электромагнитных импульсов большой напряженности // XIX Международного семинара по ускорителям заряженных частиц, 12-18 сентября 2005, Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2005. С. 61–62.

13. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // 11th International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion and 2-nd International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokomaks. September 11-16, 2006, Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2006. P. 136.

14. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме полями интенсивных электромагнитных волн // XX Международного семинара по ускорителям заряженных частиц. 9-15 сентября 2007 Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2007. С. 49–50.

15. Buts V.A., Kuzmin V.V. Features of dynamics of the charged particles in the constant magnetic field and in the field of the wave with varying amplitude // XXI International Workshop on Charge Particle Accelerators September 2-6, 2009 Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2009. P. 136.

16. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Ускорение заряженных частиц полем лазерного импульса // IX конференция по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям 21-25 февраля 2011 Харьков труды / ННЦ ХФТИ. Харьков, 2011. С. 119.

17. Buts V.A., Kuzmin V.V., Tolstoluzhsky A.P. Stochastic heating and stochastic acceleration of charged particles // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion September 17-22, 2012 Alushta: Book of abstracts NSC KIPT Kharkov, 2012. P. 131.

18. Буц В.А., Кузьмин В.В., Толстолужский А.П. Стохастическое ускорение заряженных частиц // XXIII Международного семинара по ускорителям заряженных частиц 08-14 сентября 2013 Алушта: труды / ННЦ ХФТИ. Харьков 2013. С. 40.

Список публікацій, які додатково відображують наукові результати дисертації:

19. Buts V.A., Kuzmin V.V. Dynamics of the charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics (13). 2007. №1. P. 127-129.

20. Буц В.А., Кузьмин В.В. Ускорение заряженных частиц в вакууме интенсивными электромагнитными волнами // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия: Ядерно-физические исследования (50). 2008. №5. С. 116-120.

ДОДАТОК Б

Перейдемо до нових змінних $p_{\perp}, p_{\parallel}, \theta, \xi$ та η згідно співвідношенням

$$p_x = p_{\perp} \cos \theta, \quad p_y = p_{\perp} \sin \theta, \quad p_z = p_{\parallel}, \quad x = \xi - \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \sin \theta, \quad y = \eta + \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \cos \theta$$

перепишемо вираз $e^{i\psi}$ згідно з новими змінним.

$$e^{i\psi} = \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - t))$$

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = k_z z + k_x x + k_y y$$

$$\exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - t)) = \exp(i(k_z z + k_x x - t)) = \exp\left(i\left(k_x \left(\xi - \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \sin \theta\right) + k_z z - t\right)\right)$$

$$\alpha = k_z z + k_x \xi - t \quad \mu = k_x \frac{p_{\perp}}{\omega_H}$$

$$\exp(i(\alpha - \mu \sin \theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) e^{i\alpha - in\theta}$$

Отримаємо вирази для $\dot{p}_{\perp}, \dot{\theta}$

$$p_x = p_{\perp} \cos \theta \rightarrow \dot{p}_x = \dot{p}_{\perp} \cos \theta - \dot{\theta} p_{\perp} \sin \theta,$$

$$p_y = p_{\perp} \sin \theta \rightarrow \dot{p}_y = \dot{p}_{\perp} \sin \theta + \dot{\theta} p_{\perp} \cos \theta.$$

Для отримання виразу для \dot{P}_{\perp} домножимо перше рівняння на $\cos \theta$, друге рівняння на $\sin \theta$, і складемо:

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= \dot{P}_{\perp} \cos \theta - \dot{\theta} P_{\perp} \sin \theta \Big| \cos \\ + \dot{P}_y &= \dot{P}_{\perp} \sin \theta + \dot{\theta} P_{\perp} \cos \theta \Big| \sin \\ \dot{P}_{\perp} &= \dot{P}_x \cos \theta + \dot{P}_y \sin \theta \end{aligned}$$

Для отримання виразу для $\dot{\theta}$ домножимо перше рівняння на $\sin \theta$, друге рівняння на $\cos \theta$, і віднімемо з першого рівняння друге:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_x &= \dot{P}_{\perp} \cos \theta - \dot{\theta} P_{\perp} \sin \theta \Big| \sin \\ -\dot{P}_y &= \dot{P}_{\perp} \sin \theta + \dot{\theta} P_{\perp} \cos \theta \Big| \cos \\ \dot{\theta} &= \frac{\dot{P}_y \cos \theta - \dot{P}_x \sin \theta}{P_{\perp}} \end{aligned}$$

Надалі будемо користуватися формулами перетворення функцій Бесселя

$$2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1} \quad J'_n = J_{n-1} - \frac{n}{x} J_n \quad J'_n = \frac{n}{x} J_n - J_{n+1}$$

$$2\frac{n}{x} J_n = J_{n+1} + J_{n-1} \quad J'_{m-1} = \frac{m-1}{x} J_{m-1} - J_m$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \cos \theta_n \cos \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n+1} + J_{n-1}) \cos \theta_n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \sin \theta_n \sin \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n-1} - J_{n+1}) \cos \theta_n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \sin \theta_n \cos \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n+1} + J_{n-1}) \sin \theta_n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \cos \theta_n \sin \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n+1} - J_{n-1}) \sin \theta_n\end{aligned}$$

отримання вираза для \dot{p}

початкове вираження.

$$\dot{P}_{\perp} = \dot{P}_x \cos \theta + \dot{P}_y \sin \theta$$

В котрому

$$\dot{P}_x = \text{Re} \left\{ a_x (1 - \mathbf{kV}) e^{i\psi} + \omega_H [\mathbf{Vh}]_x + \frac{k_x}{\gamma} (\mathbf{pa}) e^{i\psi} \right\}$$

$$\dot{P}_y = \text{Re} \left\{ a_y (1 - \mathbf{kV}) e^{i\psi} + \omega_H [\mathbf{Vh}]_y \right\}$$

$$\omega_H [\mathbf{Vh}]_x = \omega_H \frac{P_{\perp}}{\gamma} \sin \theta, \quad \omega_H [\mathbf{Vh}]_y = -\omega_H \frac{P_{\perp}}{\gamma} \cos \theta$$

$$(\mathbf{pa}) = a_0 (\alpha_x P_x + i\alpha_y P_y + \alpha_z P_z)$$

$$a_x = \alpha_x a_0, \quad a_y = -\alpha_y a_0$$

$$(1 - \mathbf{kV}) = 1 - (k_x P_x - k_z P_z) \frac{1}{\gamma}$$

Підставляючи в вихідне вираз і перетворюючи маємо

$$\begin{aligned}\dot{P}_{\perp} &= \text{Re} \left\{ a_0 (\alpha_x - V_z (\alpha_x k_z - \alpha_y k_x)) e^{i\psi} + a_0 i\alpha_y \frac{k_x}{\gamma} P_y e^{i\psi} + \omega_H [\vec{Vh}]_x \right\} \cos \theta + \\ &+ \text{Re} \left\{ i\alpha_y \varepsilon_0 \left(1 - k_x \frac{P_x}{\gamma} - k_z \frac{P_z}{\gamma} \right) e^{i\psi} + \omega_H [\vec{Vh}]_y \right\} \sin \theta\end{aligned}$$

ввівши позначення

$$\theta_n = k_z z + k_x \xi - \tau - n\theta = \alpha - n\theta$$

врахувавши

$$e^{i\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) e^{i\alpha - i\theta n}$$

і використовуючи функції Ейлера, отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \dot{P}_\perp &= a_0 (\alpha_x - V_z(\alpha_x k_z - \alpha_y k_x)) \sum J_n \cos \theta_n \cos \theta - \\ &- \alpha_y a_0 (1 - k_z V_z) \sum J_n \sin \theta_n \sin \theta \end{aligned}$$

Перетворюючи за допомогою

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \cos \theta_n \cos \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n+1} + J_{n-1}) \cos \theta_n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \sin \theta_n \sin \theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n-1} - J_{n+1}) \cos \theta_n \end{aligned}$$

І користуючись формулами перетворення функцій Бесселя знаходимо шукане вираз.

$$\frac{dp_\perp}{dt} = (1 - k_z V_\parallel) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0 \left(\alpha_x \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_y J'_n \right) \cos \theta_n + \alpha_z a_0 k_x V_\parallel \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\mu} J_n \cos \theta_n$$

Аналогічно виходять вирази для $\dot{P}_\parallel, \dot{\gamma}, \dot{\theta}, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{z}, \dot{\theta}_n$

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = a_0 \alpha_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - k_x \frac{n \omega_H}{\gamma} \right) J_n \cos \theta_n + a_0 k_z V_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_x \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_y J'_n \right) \cos \theta_n$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = a_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_x V_\perp \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_y V_\perp J'_n + \alpha_z V_\parallel J_n \right) \cos \theta_n$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\omega_H}{\gamma} + \frac{a_0 (1 - k_z V_\parallel)}{P_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_x J'_n - \alpha_y \frac{n}{\mu} J_n \right) \sin \theta_n + \frac{a_0 k_x}{P_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_z V_\parallel J'_n + \alpha_y V_\perp J_n \right) \sin \theta_n$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -a_0 \frac{1}{\omega_H} \alpha_y (1 - k_z V_\parallel) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \sin \theta_n - a_0 \frac{k_x V_\perp}{\omega_H} \alpha_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\mu} J_n \sin \theta_n$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -a_0 \frac{1}{\omega_H} \alpha_x (1 - k_z V_\parallel) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \cos \theta_n - a_0 \frac{k_x}{\omega_H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_y V_\perp J'_n - \alpha_z V_\parallel J_n \right) \cos \theta_n$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_n}{dt} &= k_z V_\parallel - k_x \left[-a_0 \frac{\alpha_y}{\omega_H} (1 - k_z V_\parallel) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \sin \theta_n - a_0 \frac{k_x V_\perp}{\omega_H} \alpha_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\mu} J_n \sin \theta_n \right] - \\ &- n \left[\frac{\omega_H}{\gamma} + \frac{a_0 (1 - k_z V_\parallel)}{P_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_x J'_n - \alpha_y \frac{n}{\mu} J_n \right) \sin \theta_n + \frac{a_0 k_x}{P_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_z V_\parallel J'_n + \alpha_y V_\perp J_n \right) \sin \theta_n \right] - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = V_\parallel$$