

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО–ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Литвиненко Дмитро Михайлович

УДК 538.91

ДИСЕРТАЦІЯ

СТАТИСТИЧНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЗАРЯДЖЕНИХ
ЧАСТИНОК НАД ПОВЕРХНЕЮ ДІЕЛЕКТРИКІВ

01.04.02 — теоретична фізика

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Д.М.Литвиненко

Науковий керівник: Слюсаренко Юрій Вікторович, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України

Харків — 2019

АНОТАЦІЯ

Литвиненко Д.М. Статистична теорія систем заряджених частинок над поверхнею діелектриків. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика (104 - фізика та астрономія). - Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна МОН України. - Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, 2019.

У дисертаційній роботі наведено послідовну побудову статистичного підходу до опису системи заряджених фермі-частинок над поверхнею рідкого діелектрика у зовнішньому електричному притискуючому полі. Сформульовано варіаційний принцип, який доводить, що рівноважний стан зазначеної системи можна описати системою рівнянь самоузгодження, які отримані з умови мінімуму великого термодинамічного потенціалу. Дана обставина витікає з умови максимуму ентропії системи, що знаходиться у рівновазі, а також законами збереження, енергії, імпульсу і числа частинок системи.

Сформульовано очікуваний сценарій фазового переходу з утворенням просторово-періодичних структур у системі заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика, згідно з яким дані структури з'являються при досягненні зовнішнім електричним полем деякого критичного значення. Подібне формування несиметричної фази у системі відбувається як наслідок прогину поверхні діелектрика під дією заряджених частинок, що притискуються до поверхні зовнішнім електричним полем.

На основі сценарію фазового переходу поблизу критичної точки визначено вид параметра порядку - профілю просторово-періодичного збурення поверхні діелектрика. Здобуто рівняння самоузгодження, що описують симетричну фазу системи з незбуреною плоскою поверхнею діелектрика і несиметричну фазу системи поблизу точки фазового переходу. Дані рівняння отримані на основі теорії збурень за малими відхиленнями

від рівноважних значень параметрів опису системи - функції розподілу часток, потенціалу електричного поля і профілю поверхні рідкого діелектрика.

Продемонстровані можливості побудованого мікроскопічного підходу на прикладі опису станів системи електронів над поверхнею рідкого гелію. Зокрема, отримано вираз для глибини прогину поверхні рідкого гелію під впливом зовнішнього електричного поля, що притискує електрони до поверхні гелію.

Здобуто вирази для розподілів концентрації, електричного поля і потенціалу, як для невиродженого газу зарядів, так і з виходом за межі статистики Больцмана. Отримано умову застосовності квазікласичного опису даної системи, за якої справедливим є застосування зазначеного виходу за межі статистики Больцмана.

Знайдені розподіли також досліджені у випадку квазінейтральності, коли поле частинок компенсує зовнішнє притискуєче електричне поле на нескінченній відстані від поверхні діелектрика. Показано, що зазначені розподіли відрізняються від таких у випадку зарядженої системи, коли поля зарядів недостатньо, щоб компенсувати зовнішнє електричне поле на нескінченності. А саме, аналіз показує, що для невиродженого газу електричне поле спадає за експоненційним законом до фіксованого значення у зарядженому випадку і зменшується обернено пропорційно відстані від поверхні діелектрика у квазінейтральному випадку.

Досліджено отриманий розподіл концентрації зарядів і показано, що відстань від поверхні гелію, нижче якої знаходиться переважна кількість електронів за порядком величини можна порівняти з характерною відстанню локалізації відокремленого електрона в основному стані над поверхнею гелію.

Використовуючи отримані рівняння самоузгодження для опису симетричної фази, показано, що у випадку квазінейтральності системи при досить тонких плівках гелію і відносно великій кількості електронів над одиницею площі поверхні ефективна товщина плівки гелію, що враховує

ефект прогину поверхні під дією електронів, що притискуються зовнішнім полем, слабо залежить від цієї кількості електронів і при подальшому її збільшенні. Показана сама можливість досягнення великої кількості електронів, що можуть стійко утримуватись над одиницею площі поверхні плівки гелію при відносно малій її товщині, що зумовлено домінуючим внеском сил Ван дер Ваальса у порівнянні з гравітаційними силами, що діють на атоми гелію.

Досліджено критичні параметри фазового переходу системи заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика до просторово-періодичних станів. Одержано рівняння для профілю критичної поверхні фазового переходу в просторі параметрів - зовнішнього притискуючого електричного поля, температури і кількості частинок над одиницею поверхні діелектрика. Дане рівняння здобуто для одноперіодичних структур, як у випадку квазінейтральної системи, так і зарядженої, а також для невиродженої системи зарядів, і для системи заряджених частинок за межами статистики Больцмана.

Показано, що рівняння критичної поверхні має добре кількісне узгодження з експериментальними даними у випадку фазових переходів з утворенням макроскопічних періодичних структур у системі електронів над поверхнею рідкого гелію типу лункових кристалів - зарядженої системи.

Показано, що зв'язок між критичними значеннями притискуючого електричного поля, температури, кількості електронів над одиницею поверхні гелію, відстані між сусідніми лунками і товщиною гелієвої плівки добре описується рівнянням для критичної поверхні, отриманої для періодичних структур в одновимірному випадку.

Поблизу критичної поверхні здобуто вираз для параметра порядку - амплітуди просторово-періодичного збурення профілю поверхні рідкого діелектрика для макроскопічних структур одноперіодичного типу.

Досліджено залежність амплітуди просторово-періодичного збурення профілю поверхні рідкого діелектрика від критичної величини напруженості зовнішнього притискуючого поля поблизу точки переходу.

Показано, що ця залежність має кореневий характер і добре узгоджується з експериментальними даними для цієї залежності у системі електронів над поверхнею рідкого гелію.

Досліджено рівняння для профілю критичної поверхні фазового переходу до одноперіодичних збурень у квазінейтральному випадку при досить малих величинах товщини гелієвої плівки, коли внесок сил Ван дер Ваальса, що діють на атоми гелію, переважає силу гравітаційного тяжіння. Показана можливість існування двох критичних величин кількості електронів над одиницею площі поверхні гелію, що відображають факт утворення періодичних структур і їх «квантового плавлення» і отримано якісне узгодження цих величин з результатами здобутими в інших підходах.

Отримані у дисертаційній роботі результати можуть бути використані в якості основи для подальшого розвитку у декількох напрямках. Залучення квантових ефектів, наприклад, врахування обмінної взаємодії між зарядженими частинками може вдосконалити якість опису системи у запропонованому підході в області низьких температур і великих концентрацій частинок, що може бути застосовано для опису критичних явищ у системі електронів над тонкими гелієвими плівками.

Основні принципи викладеного в дисертації підходу можуть бути використані і для опису інших систем, таких, наприклад, як важкі іони в гравітаційному полі над поверхнею діелектриків. Згадана система може служити моделлю для вивчення просторових розподілів «лівітуючого» радіаційного пилу над діелектричними поверхнями, що актуально для екологічних досліджень, пов'язаних, наприклад, з проблемами Чорнобиля.

Отримані в дисертації результати крім наукового, носять і академічний характер, оскільки вони представляють собою пряме застосування методів статистичної фізики, квантової статистики і математичної фізики. Тому вони можуть бути використані при читанні лекцій студентам старших курсів університетів і аспірантів відповідних спеціальностей.

Ключові слова: заряджені частинки, поверхня діелектрику, рідкий гелій, електричне поле, варіаційний принцип, рівняння самузгодження, електрони,

статистика Фермі, розподіл Больцмана, фазовий перехід,
просторово-періодична структура.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Cond. Matt. Phys.* 2009. V. 12. № 1. P. 19-34.

2. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On phase transitions in the system of charged Fermi-particles above the liquid dielectric surface. *Problems of Atomic Science and Technology.* 2012. V. 57. № 1. P. 288-291.

3. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. The Thomas-Fermi model in the theory of systems of charged particles above the surface of liquid dielectrics. *J. Math. Phys.* 2012. V. 53. P. 103302(22 p).

4. Slyusarenko Yu.V., Lytvynenko D.M. The theory of spatially periodic equilibrium states in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Journal of Physical Studies.* 2015. Vol. 19. № 3. P. 3601(16 p.).

5. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Analyzing the equilibrium states of a quasi-neutral spatially inhomogeneous system of charges above a liquid dielectric film based on the first principles of quantum statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2017. V. 50. P. 315202(35 p.).

6. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On the spatially periodic ordering in the system of electrons above the surface of liquid helium in an external electric field. *Cond. Matt. Phys.* 2018. V. 21. № 3. P. 33601(12 p.).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Programme and abstracts of the 3rd Conference on Statistical Physics, Lviv, Ukraine, 23-25 June, 2009.* Lviv, 2009. P. 186. (Доповідач).

8. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On phase transitions in the system of charged Fermi particles above the liquid dielectric surface. *Quantum Electrodynamics and Statistical Physics (QEDSP2011): Book of abstracts of the 3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical*

Physics, Kharkiv, Ukraine, 29 August – 2 September, 2011. Kharkiv, 2011. P. 161. (Доповідач).

9. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of phase transitions in the system of charged Fermi-particles above liquid dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Book of Abstracts of the 4-th Conference on Statistical Physics*, Lviv, Ukraine, 3-6 July, 2012. Lviv, 2012. P. 143. (Доповідач).

10. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Spatial periodic structures in the system of charged Fermi-particles above the surface of liquid dielectrics. *Physics of Disordered Systems: Proceedings of VI International Conference on Physics of Disordered Systems*, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013. Lviv, 2013. P. 70. (Доповідач).

11. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the liquid dielectric surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems: Book of Abstracts of the 6th International Conference on Physics of Liquid Matter*, Kyiv, Ukraine, 23-27 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 244. (Доповідач).

12. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the V International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 2-6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 108. (Доповідач).

13. Lytvynenko D.M. and Slyusarenko Yu.V. Phase transitions in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VI International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2015. Kharkiv, 2015. P. 76. (Доповідач).

14. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of spatially periodic structures in a gas of charged particles above its surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems: Book of Abstracts of the 7th International Conference on Physics of Liquid Matter*,

Kyiv, Ukraine, 27-30 May, 2016. Kyiv, 2016. P. 182. (Доповідач).

15. Lytvynenko D.M. Analysis of influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of the phase transition to a spatially periodic structure in a gas of charged particles above it. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VII International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 109. (Доповідач).

ABSTRACT

Lytvynenko D.M. Statistical theory of systems of charged particles above dielectric surface. – Qualifying Scientific Work on the Rights of Manuscript. Research Project, Manuscript copyright.

Thesis for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences (doctor of philosophy) by speciality 01.04.02 – theoretical physics (104 - physics and astronomy) - V.N. Karazin Kharkiv National University of Ministry of Education and Science of Ukraine. - National Science Center «Kharkov Institute of Physics and Technology» of National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The consistent statistical approach to the description of the system of charged Fermi particles above the surface of liquid dielectric in an external electric clamping field. The formulated variation principle shows that the equilibrium state of such system can be described by a system of self-consistent equations obtained from the condition for the large thermodynamic potential minimum. This circumstance is caused by the condition for the entropy maximum of the system being in equilibrium state, as well as the conservation laws for the system energy, momentum, and the number of particles in the system.

The expected scenario of the phase transition is formulated for the case of forming of spatially periodic structures in the system of charged particles above the surface of a liquid dielectric. According to the scenario these structures appear when an external electric field exceeds a certain critical value. Such forming of the asymmetric phase of the system takes place on the background of the deflection of the dielectric surface caused by the action of charged particles that are pressed to the surface by an external electric field.

Basing on the assumed phase transition scenario near the critical point, the type of the order parameter is proposed. The proposed order parameter is the spatially-periodic profile of the dielectric surface perturbation. Using the type of the dielectric surface profile in the case of asymmetric phase of the system near the transition point, the self-consistent equations describing the symmetric

phase of the system with an unperturbed plane dielectric and the asymmetric phase of the system near the phase transition point are obtained. These equations are obtained on the basis of the perturbation theory for small deviations from the equilibrium values of the parameters describing the system - the distribution function of particles, the electric field potential, and the surface profile of liquid dielectric surface, initiated by the order parameter in the asymmetric phase.

The capabilities of the built microscopic approach are tested on the system of electrons above the surface of liquid helium. Particularly, the expression for the deflection depth of liquid helium surface is obtained as the result of the external electric field action that presses electrons to the surface of helium.

The expressions for the concentration of electrons, the distributions of electric field and potential are obtained for both cases of non-degenerate gas charges and also going beyond the scope of Boltzmann's statistics. The applicability condition of quasi-classical description of this system is obtained, i.e., the region of valid going beyond Boltzmann statistics is shown.

The obtained distributions found are also researched in the case of quasi-neutrality of the system, when the field of particles compensates the external clamping electric field at an infinite distance from the surface of the dielectric. It is shown that the distributions in quasi-neutral case differ from the charged case when the field of charges is insufficient to compensate for the external electric field at infinity. Thus, for a non-degenerate gas, in the charged case the electric field decreases exponentially to a fixed value and in the quasi-neutral case it decreases inversely proportional to the distance from the dielectric surface.

The obtained concentration distribution of electrons is researched and it is shown that the distance from the surface of helium, below which the majority of electrons are located, has a comparable order of magnitude to the characteristic localization distance of a single electron being in the ground state above the surface of helium.

Using the obtained self-consistent equations for the symmetric phase description, it is shown that in the case of the system quasi-neutrality for quite

thin helium films and sufficiently large number of electrons above a surface area unit, the effective thickness of helium film, taking into account the effect of surface deflection under the action of electrons pressed by the external field, weakly depends on the value of this field with its further increasing. It is shown that it is possible to achieve a large number of electrons that can be steadily hold above the unit of the surface area of the helium film at a fairly small values of this film, due to the dominant contribution of Van der Waals forces comparing to the gravitational forces acting on helium atoms.

The critical parameters of the phase transition in a system of charged particles above the surface of a liquid dielectric to spatially periodic states are investigated. The equation for the critical surface of the phase transition in the space of external clamping electric field, temperature and the number of particles above the unit of the dielectric surface area is obtained. This equation is obtained for one-period structures, as in the cases of quasi-neutral and charged systems, as well as for a non-degenerate system of charges, and for a system of charged particles that have distribution going beyond Boltzmann's statistics.

It is shown that the critical surface equation has a good quantitative agreement with experimental data in the case of phase transitions with the forming of macroscopic periodic structures in the electron system above the surface of liquid helium having the type of dimple crystals - a charged problem.

It is shown that the relation between the critical values of the clamping electric field, the temperature, the number of electrons per unit of helium surface area, the distance between adjacent dimples and the thickness of the helium film is quite accurately described by the equation for the critical surface obtained for periodic structures in the one-dimensional case.

Near the critical surface, the value of the order parameter of the phase transition - the amplitude of the spatially periodic perturbation of the surface profile of the liquid dielectric for macroscopic structures of one-period type is obtained.

The dependence of the amplitude of the spatially periodic perturbation of the surface profile of the liquid dielectric on the critical value of the external clamping

field near the transition point is studied. It is shown that this dependence has a square root type and a good agreement between the experimental data and this dependence in the electron system above the surface of liquid helium is obtained.

The equation for the critical surface of the phase transition to one-periodic perturbations in the quasi-neutral case with sufficiently small values of the thickness of a helium film is researched, when the contribution of Van der Waals forces acting on helium atoms dominates over the force of gravitational attraction. The possibility of existence of two critical values of the number of electrons per unit of helium surface area was shown. These two values reflect the fact of the forming of periodic structures and their “quantum melting” and a qualitative agreement of these values with available theoretical data is obtained.

The results obtained in the dissertation can be used as a basis for further development in several directions. Involving quantum effects, e.g., taking into account the exchange interaction between charged particles, can improve the description quality of the system in the proposed approach in the region of low temperatures and high values of particle concentrations. This improvement can be used to describe the critical phenomena in the electron system above thin helium films.

The basic principles of the approach outlined in the dissertation can be used to describe other systems, e.g., heavy ions in the gravitational field above the surface of dielectrics. This system can serve as a model for studying the spatial distribution of radiation dusts over dielectric surfaces, which is relevant to the environmental studies, related, e.g., to the problems of Chernobyl.

The results obtained in the dissertation, in addition to scientific can have an academic outcome, as they represent a direct application of statistical physics, quantum statistics and mathematical physics methods. Therefore, they can be used for lecturing for students of senior courses of universities and graduate students of the corresponding specialties.

Key words: charged particles, dielectric surface, liquid helium, electric field, variation principle, self-consistent equations, electrons, Fermi statistics, Boltzmann distribution, phase transition, spatially-periodic structure.

ЗМІСТ

ЗМІСТ	14
ВСТУП	16
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕНЬ	25
1.1. Літературний огляд	25
1.2. Мотивація основних напрямків досліджень	29
РОЗДІЛ 2. ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСУ ФАЗОВИХ СТАНІВ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ НАД ПОВЕРХНЕЮ РІДКИХ ДІЕЛЕКТРИКІВ	32
2.1. Геометрія системи та її основні характеристики	32
2.2. Основні засади варіаційного принципу при описі системи зарядів над поверхнею рідких діелектриків	34
2.3. Сценарій фазового переходу в системі що приводить до стану з просторово-періодичними структурами і граничні умови для потенціалу електричного поля	41
Висновки до розділу 2	50
РОЗДІЛ 3. РІВНОВАЖНИЙ СТАН СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ НАД ПЛОСКОЮ ПОВЕРХНЕЮ РІДКОГО ДІЕЛЕКТРИКА	52
3.1. Невироджений газ зарядів над плоскою поверхнею масивного діелектрика у зовнішньому притискуючому електричному полі	52
3.2. Екранування зовнішнього поля полем неvirодженого газу зарядів. Умова квазінейтральності.	58
3.3. Квазінейтральна система зарядів над плоскою поверхнею плівки рідкого діелектрика. Вихід за межі статистики Больцмана.	64
3.4. Заряджена система фермі-частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика у зовнішньому притискуючому електричному полі. Вихід за межі статистики Больцмана.	87
Висновки до розділу 3	98

РОЗДІЛ 4. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ ДО СТАНУ З ПРОСТОРОВО-ПЕРІОДИЧНИМ УПОРЯДКУВАННЯМ	100
4.1. Критичні параметри фазового переходу до станів з просторово-періодичним упорядкуванням у невиродженій системі зарядів над поверхнею рідкого масивного діелектрика у зовнішньому притискному полі	100
4.2. Параметр порядку фазового переходу у невиродженій квазінейтральній системі зарядів над поверхнею рідкого діелектрика	105
4.3. Особливості фазового переходу у квазінейтральній системі зарядів над поверхнею рідких діелектричних плівок.	116
4.4. Критичні параметри фазового переходу до просторово-періодичних станів у зарядженій системі частинок. Вихід за межі статистики Больцмана	128
Висновки до розділу 4	136
ВИСНОВКИ	139
ПОДЯКИ	142
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	143
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	151

ВСТУП

Як добре відомо, у системі, що складається з електронів над поверхнею рідкого гелію, при певних умовах виникають просторово-періодичні структури типу двовимірних електронних кристалів або так звані лункові кристали (див. у зв'язку з цим, наприклад, [16–20]). Теоретичні підходи до опису таких структур виходять з уявлення про так звані «левітуючі» електрони [21].

Первинним поняттям при такому розгляді є опис енергетичного спектра окремого заряду над поверхнею діелектрика. Окремий заряд над поверхнею діелектрика разом з його електростатичним зображенням в діелектрику трактується як одновимірний воднеподібний стан з відповідним енергетичним спектром. Воднеподібна структура спектру передбачає локалізацію такого квантовомеханічного об'єкта в основному стані на деякій відстані від поверхні діелектрика («перший Борівський радіус»). Це, зокрема, дозволяє у більшості випадків не враховувати вплив неоднорідностей поверхні на стан окремого заряду.

Але система зарядів над поверхнею діелектрика є системою багатьох частинок. Із цієї причини через далекодіючий характер кулонівських сил коректність розгляду зарядів як відокремлених над поверхнею діелектрика стає сумнівною навіть у випадку малих концентрацій. Остання обставина робить практично неможливим розрахунок енергетичного спектру зарядів над діелектриком у термінах методу електростатичних зображень. Для виходу з цієї ситуації до теперішнього часу при описі такого роду систем використовується паліативний підхід. А саме, вважається, що окремий заряд (електрон) знаходиться в зовнішньому модельному потенціалі. Даний потенціал є кулонівським потенціалом, модифікованим за допомогою двох підгінних констант. Ці константи зв'язуються з кінцевим значенням поверхневого потенційного бар'єру і кінцевим значенням потенціалу на поверхні діелектрика (див., наприклад, [22–24]). Крім того, теоретичні роботи, пов'язані з вивченням у феноменологічних підходах вігнерівської кристалізації електронів над поверхнею рідкого гелію, переважно

розглядають систему багатьох заряджених частинок поблизу поверхні рідкого діелектрика саме як двовимірну структуру (див., наприклад, [16, 19, 20]). Виходячи ж із викладеного вище стає зрозуміло, що повний опис системи зарядів над поверхнею діелектрика має враховувати їх просторовий розподіл у вакуумі.

Ясно також, що електростатичний потенціал у даній системі є величиною, узгодженою з розподілом зарядів над поверхнею діелектрика (самоузгодженим полем). Іншими словами, у послідовній теорії, яка не містить підгінних параметрів, цей потенціал повинен обчислюватись одночасно з функцією розподілу заряджених частинок над поверхнею діелектрика. Одним із методів теорії самоузгодженого поля є метод Томаса-Фермі, розроблений для опису багатоелектронних атомів в основному стані (див., наприклад, [25]). Цей метод, як відомо, базується на рівнянні Пуассона, що зв'язує електростатичний потенціал із розподілом електронів в атомі. Важливим у цій моделі атома було також уявлення про позитивно заряджене ядро атома, що врівноважує кулонівські сили відштовхування між електронами. У задачі про розподіл зарядів і полів у системі зарядів над поверхнею діелектрика фактором, що врівноважує сили відштовхування між однаково зарядженими частинками, є поляризаційні сили і зовнішнє притискуюче електричне поле. Таке зовнішнє електричне поле, що притягує заряди до поверхні і впливає на їх просторовий розподіл, використовується в експериментах зі спостереження вігнерівської кристалізації над поверхнею рідкого гелію [19, 20]. Остання обставина призводить до думки про опис розподілу зарядів і полів у системі зарядів над поверхнею діелектрика у термінах методу Томаса-Фермі, модифікованого на випадок такого роду систем.

Дисертаційна робота присвячена розвитку підходу до опису розподілів однойменно заряджених частинок і полів над поверхнею рідкого діелектрика у термінах істотно узагальненої автором моделі Томаса-Фермі. В основі узагальнення даної моделі використаний варіаційний принцип, модифікований на випадок, що досліджується. Цей варіаційний принцип

дозволяє отримати рівняння самоузгодження, що зв'язують параметри опису такої системи (потенціал статичного електричного поля, функцію розподілу зарядів і профіль поверхні рідкого діелектрика). В якості застосувань розвиненого підходу розглянуто деякі фазові переходи у зазначеній системі, що пов'язані з трансформацією поверхні рідкого діелектрика і утворенням просторово-періодичних структур. Слід підкреслити, що подібного послідовного підходу в теорії таких фазових переходів дотепер побудовано не було.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Обґрунтування вибору теми дослідження зумовлене науковим інтересом до досліджень у галузі фізики низьких температур і низьковимірних систем. Подана у дисертації теорія має пряме відношення до експериментів, що проводяться з 1979 року, з виявлення критичних явищ у системі електронів над рідким гелієм. На відміну від інших теоретичних підходів до опису цієї та подібних систем, заснованих на уявленні про окремий заряд над поверхнею діелектрика, мікроскопічна теорія, побудована у дисертаційній роботі, не містить модельних потенціалів і підгінних констант, що вводяться в вищезазначених підходах при переході до опису системи великого числа частинок, і дозволяє послідовно, виходячи з перших принципів, досліджувати рівноважний стан розглянутих систем і фазові переходи у них, наслідком яких є утворення просторово-періодичних структур, зокрема, типу лункових кристалів.

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є побудова мікроскопічної теорії, заснованої на перших принципах, для статистичного опису системи заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків у зовнішньому притискуючому електричному полі. Зокрема, в якості реальної фізичної системи, використаної для апробації отриманих результатів, розглянуто систему електронів над поверхнею рідкого гелію.

Для досягнення поставленої у дисертації мети потрібно було вирішити наступні задачі:

- узагальнити варіаційний підхід до опису даної системи, який дозволяє отримати рівняння самоузгодження, що зв'язують основні параметри

опису - функцію розподілу частинок, потенціал електричного поля, профіль поверхні рідкого діелектрика;

- дослідити особливості розв'язків системи рівнянь самоузгодження над плоскою поверхнею діелектрика за різних значень зовнішнього притискуючого поля, товщини плівки рідкого діелектрика, а також виду функції розподілу частинок;
- дослідити критичну «поверхню» фазового переходу до просторово-періодичних станів, тобто рівняння, що зв'язує критичні значення температури, зовнішнього притискуючого поля, кількості частинок над одиницею площі поверхні діелектрика, товщини плівки діелектрика і періоду сформованих просторово-періодичних структур;
- провести аналіз параметра порядку досліджуваного фазового переходу - амплітуди просторово-періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика, який виник у результаті появи несиметричної фази поблизу зазначеної вище критичної «поверхні».

Об'єктом дослідження є газ заряджених частинок, що описуються статистикою Фермі і знаходяться над поверхнею рідкого діелектрика за присутності зовнішнього притискуючого електростатичного поля.

Предметом дослідження є явище просторово-періодичного упорядкування в системі заряджених фермі-частинок над поверхнею рідкого діелектрика при перевищенні зовнішнім притискуючим електричним полем деякого критичного значення.

Методи дослідження. Для виведення рівнянь самоузгодження, що описують систему заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика у зовнішньому полі, використовуються варіаційний принцип і модель Томаса-Фермі, модифіковані для даної системи. Для отримання критичної «поверхні» у багатовимірному просторі величин температури, зовнішнього поля і числа частинок в системі, а також для отримання амплітуди параметра порядку поблизу такої критичної поверхні використовується теорія збурень за малими відхиленнями від рівноважних значень основних параметрів опису системи (функції розподілу часток, потенціалу

електростатичного поля і профілю поверхні рідкого діелектрика).

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше отримані наступні результати:

- уперше побудовано мікроскопічну теорію на основі перших принципів статистичної механіки для опису системи заряджених фермі-частинок над поверхнею рідкого діелектрика у зовнішньому електричному полі без використання модельних уявлень про потенціали сил, діючих на окремий заряд над поверхнею зазначеного діелектрика;
- сформульовано варіаційний принцип, що дозволяє побудувати систему рівнянь самоузгодження, які описують дану систему і пов'язують основні параметри її опису - функцію розподілу заряджених частинок, потенціал електричного поля, профіль поверхні рідкого діелектрика;
- здобуто вирази для розподілу концентрації зарядів, потенціалу й напруженості електричного поля системи у випадку плоскої поверхні рідкого діелектрика, як для невиродженого газу частинок, так і з урахуванням виходу за межі статистики Больцмана;
- уперше одержано у межах запропонованого підходу рівняння для критичної поверхні фазового переходу до просторово-періодичного стану у системі, яке визначає зв'язок між критичними параметрами фазового перетворення – зовнішнім електричним полем, температурою та кількістю частинок над одиницею площі поверхні діелектрика;
- отримано вираз для параметра порядку фазового перетворення – профілю поверхні - поблизу критичної поверхні та показано, що його величина змінюється пропорційно квадратному кореню із напруженості зовнішнього електричного поля;
- проаналізовано залежність характеристик системи в околі фазового перетворення від товщини плівки рідкого діелектрику, величини притискуючого поля й концентрацій зарядів над поверхнею, допустимих із точки зору стійкості системи. Показано, зокрема, що для відносно тонких плівок діелектрика їх ефективна товщина слабо залежить від величини притискуючого поля, а діапазон допустимих концентрацій

зарядів над поверхнею значно розширюється у порівнянні з випадком масивного діелектрика.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, винесені на захист, здобуті здобувачем особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать основні розрахунки, побудова графічних залежностей, активна участь у постановці деяких завдань, обговоренні отриманих результатів та написанні текстів статей.

Особистий внесок дисертанта в опублікованих роботах полягає у наступному. У роботі [1] отримано розв'язок задачі про знаходження розподілу потенціалу поблизу поверхні діелектрика з малими просторово-періодичними неоднорідностями. У роботі [2] здобуто рівняння самоузгодження, що описують систему зарядів над поверхнею рідкого діелектрика в зовнішньому електричному полі. У роботі [3] сформульовано варіаційний принцип для знаходження системи рівнянь самоузгодження, розв'язано задачу про знаходження критичної «поверхні» фазового переходу з утворенням просторово-періодичних структур (мається на увазі рівняння, що пов'язує основні критичні параметри фазового переходу). У роботі [4] розв'язано задачу опису системи зарядів над поверхнею рідкого діелектрика у квазінейтральному випадку, одержано рівноважні функції розподілу концентрації частинок, потенціалу і електричного поля, визначено критичну поверхню фазового переходу до просторово-періодичних станів і визначена амплітуда параметра порядку фазового переходу - просторово-періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика. У роботі [5] досліджено вплив товщини плівки діелектрика на систему, що описується, як у випадку плоскої поверхні діелектрика, так і у випадку просторово-періодичних структур, що виникають в результаті фазового переходу, здійснено вихід за межі статистики Больцмана, визначено критерій застосування квазікласичного наближення. У роботі [6] розв'язано задачу опису фазового переходу з утворенням лункових кристалів у системі електронів над поверхнею рідкого гелію у термінах статистичного квазікласичного підходу, отримано кількісне узгодження з

даними експериментальних робіт [26, 27] критичних параметрів фазового переходу і величини глибини лунки поблизу точки переходу.

Апробація матеріалів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи пройшли апробацію на наукових семінарах ІТФ ННЦ ХФТІ НАНУ, НТК ІМК НАНУ та ІРЕ НАНУ, а також на наступних міжнародних конференціях:

- 3rd Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (23-25 June 2009, Lviv).
- 3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics (QEDSP2011) (29 August – 2 September 2011, Kharkiv).
- 4-th Conference on Statistical Physics. Modern Trends and Applications (3-6 July 2012, Lviv).
- VI International Conference “Physics of Disordered Systems” (14-16 October 2013, Lviv).
- 6th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (23-27 May 2014, Kyiv).
- V International Conference for Young Scientists. “Low Temperature Physics” (2-6 June 2014, Kharkiv).
- VII International Conference for Young Scientists. “Low Temperature Physics” (6-10 June 2015, Kharkiv).
- 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (27-30 May 2016, Kyiv).
- VII International Conference for Young Scientists. “Low Temperature Physics” (6-10 June 2016, Kharkiv).

Публікації. Результати дисертації опубліковані в 15 роботах, з них 6 статей у фахових вітчизняних та міжнародних періодичних виданнях [1–6] і 9 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях [7–15].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та одного додатка. Робота проілюстрована 22 рисунками. Список використаних джерел містить 90 найменувань. Обсяг загального тексту дисертації складає

153 сторінки, з них основна частина складає 127 сторінок, список використаних джерел складає 8 сторінок, додаток займає 3 сторінки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота виконувалася згідно з тематичним планом науково-дослідних робіт з атомної науки і техніки Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України за темами:

- «Теоретичні дослідження у статистичній фізиці конденсованих середовищ зі спонтанно порушеною симетрією і газоподібних систем і теоретико-групових методів в теорії поля», (2006-2010 рр.), номер державної реєстрації 080906UP0010,
- «Розвиток методів статистичної фізики і квантової теорії поля для дослідження проблем конденсованих і газоподібних середовищ і динаміки полів і суперсиметричних подовжених об'єктів», (2011-2015 рр.), номер державної реєстрації 0111U009549,
- «Дослідження класичних і квантових симетрій в теоретико-польових і струнних моделях і проблем статистичної механіки конденсованих середовищ», (2016-2020 рр.), номер державної реєстрації 0116U007065,
- Цільова програма наукових досліджень відділення ядерної фізики та енергетики НАН України «Фундаментальні проблеми в фізиці елементарних частинок, ядерної фізики і ядерної енергетики» на 2009-2010 р., тема «Статистична механіка процесів і явищ, пов'язаних із взаємодією частинок і випромінювання з конденсованою середовищем» грант НАН України для молодих вчених, номер державної реєстрації 0109U006375.

Роль здобувача в усіх роботах за науковими темами та програмами – виконавець.

Практичне значення отриманих результатів. Здобуті у дисертаційній роботі результати можуть бути використані в якості основи для подальшого розвитку досліджень за декількома напрямками. Залучення квантових ефектів, наприклад, урахування обмінної взаємодії між зарядженими частинками, може вдосконалити якість опису системи у

запропонованому підході в області низьких температур і великих концентрацій, що, у свою чергу, може бути застосовано для покращення опису критичних явищ в системі електронів над тонкими гелієвими плівками.

Основні принципи викладеного в дисертації підходу можуть бути використані і для опису інших систем, таких, наприклад, як важкі іони в гравітаційному полі над поверхнею діелектриків. Згадана система може слугувати моделлю для вивчення просторових розподілів «левітуючого» радіаційного пилу над діелектричними поверхнями, що актуально для екологічних досліджень, пов'язаних, наприклад, з проблемами Чорнобиля.

Отримані у дисертації результати, крім наукового (академічного) характеру, носять і методологічний, оскільки вони представляють собою пряме застосування методів статистичної фізики, квантової статистики і математичної фізики. Із цієї причини вони можуть бути застосовані при читанні лекцій студентам старших курсів університетів і аспірантів відповідних спеціальностей.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Літературний огляд

Дослідження явищ, пов'язаних з утворенням просторово-періодичних станів у системі заряджених частинок над поверхнею діелектриків, досі не втратило своєї актуальності, незважаючи на більш ніж сорокарічну історію [28–31].

Сама можливість появи просторово-періодичного упорядкування у тривимірних системах заряджених частинок (електрони в металах) передбачалася ще Е. Вігнером [32]. У цій роботі на прикладі кристалізації тривимірного електронного газу низької концентрації, що знаходиться у полі просторово-однорідного позитивного заряду, була проілюстрована можливість існування періодичних структур у системах із силами відштовхування між частинками. Поле однорідного позитивного заряду якраз і грало роль фактору, що компенсує сили відштовхування. Завдяки цій обставині у науковій літературі з'явився новий термін «вігнерівська кристалізація».

Набагато пізніше було показано, що до передбачення фазового переходу з утворенням тривимірних просторово-періодичних станів електронів у металах і описати їх структуру дає можливість і теорія Фермі-рідини Ландау-Силіна, чому присвячена робота О.С. Пелетмінського, С.В. Пелетмінського та Ю.В. Слюсаренка [33].

Протягом десятків років експериментального підтвердження передбачень Вігнера щодо тривимірних електронних кристалічних структур здійснити не вдалося (див., наприклад [19, 20, 34, 35]). Причиною цього є труднощі з досягненням експериментальних умов для спостереження зазначеного явища.

Однак стійкі просторово-періодичні стани заряджених частинок спромоглися отримати при експериментальному вивченні поведінки електронів поблизу границі розділу двох середовищ. До такого роду систем

можна віднести електрони над поверхнею плівки рідкого гелію у зовнішньому притискуючому електричному полі, зокрема мікроскопічні вігнерівські кристали, зареєстровані у роботі С. Граймса та Дж. Адамса [36] та макроскопічні лункові кристали, які спостерігались П. Лейдерером та М. Уоннером [26], електрони над поверхнею твердого водню і неону [37, 38], дипольні комплекси, що складаються з електрону та додатньо зарядженого іону, і виникають на межі розділу ізотопів гелію He^3 і He^4 [39], а також систему електронів на границі розділу напівпровідникового р-п переходу [40].

Виявлення стійких систем, зручних для експериментального вивчення просторово-періодичних структур заряджених частинок на границях розділу середовищ, значно посилило інтерес до такого роду досліджень. Їх хронологія може бути простежена у монографіях [20, 41, 42] і оглядових роботах [18, 19, 34, 43]. Відзначимо, що наявні роботи присвячені вивченню ефектів, пов'язаних з існуванням як двовимірних вігнерівських кристалів [36, 44, 45], так і макроскопічних лункових ґраток [26, 27, 46–48].

Теоретичні роботи, що описують відповідні експерименти, як правило, виходять з уявлення про окремий або так званий «левітуючий» електрон над поверхнею діелектрика [21]. Первинним поняттям при такому розгляді є опис енергетичного спектру відокремленого заряду над поверхнею діелектрика. Згідно з роботою М. Коула і М. Коена [16] та незалежною від неї роботою В.Б. Шикіна [17], відокремлений заряд над поверхнею діелектрика разом з його електростатичним зображенням в діелектрику трактується, як одновимірний аналог воднеподібного стану атома з відповідним енергетичним спектром. Воднеподібна структура спектру передбачає локалізацію такого квантовомеханічного об'єкту в основному стані на деякій відстані від поверхні діелектрика («перший Борівський радіус»), що зумовлено мінімумом потенціальної енергії заряду (електрона), що складається з притяжної енергії сил електростатичного зображення та енергії відштовхування, що забороняє зарядам проникати вглиб поверхні діелектрика (гелію). Це, зокрема, дозволяє у більшості випадків не

враховувати вплив неоднорідностей поверхні на стан відокремленого заряду [18, 49].

До можливих уточнень зазначеного підходу можна віднести роботу М. Коула [50], яка враховує кінцевість потенційного бар'єру, що забороняє зарядам проникати вглиб діелектрика, та роботу С. Граймса зі співавторами [51], яка враховує кінцевість потенційного бар'єру за допомогою наближення, що містить константи, які якісно враховують реальну поведінку потенційної енергії електрона поблизу поверхні гелію. О. Хіполіто зі співавторами [22] знайшов аналітичний розв'язок рівняння Шредінгера з даною поправкою до потенційної енергії і визначив відповідні константи, узгодивши їх із значеннями, здобутими в роботі [51].

Окремий інтерес являє собою система електронів над тонкою гелієвою плівкою. У роботах В.Б. Шикіна та Ю.П. Монархи [18] і М. Коула [52] були передбачені та експериментально зареєстровані у роботі А. Володіна зі співавторами [53] аналогічні зв'язані стани електрона над поверхнею тонкої гелієвої плівки на твердій металічній або діелектричній підкладці. Особливість такої системи полягає у на декілька порядків більшій величині досяжної кількості електронів, що можуть утримуватися над одиницею площі поверхні тонкої гелієвої плівки у порівнянні з випадком системи електронів над масивною плівкою гелію. Це зумовлено тим, що у випадку тонкої плівки домінуючий внесок у сили, що діють на атоми гелію, дають сили Ван дер Ваальса, енергія яких обернено пропорційна четвертому ступеню товщини плівки [54], на відміну від випадку масивної плівки, де ці сили стають незначними у порівнянні з силами гравітаційного тяжіння.

У випадку тонких плівок поверхня гелію стає більш стійкою відносно кількості електронів, що можуть бути утримані біля неї зовнішнім притискуючим електричним полем. Дана обставина відкриває можливість дослідження виродженого стану електронного газу великої концентрації над поверхнею гелієвої плівки, що було передбачено у теоретичній роботі Х. Ікезі та П. Платсмана [55]. Експериментально така система була зареєстрована у роботі Х. Етза зі співавторами [56].

Можливість спостерігати просторово-періодичні структури у системі електронів над поверхнею рідкого гелію була підтверджена експериментально у роботі С. Граймса та Д. Адамса [36], де були зареєстровані мікроскопічні вігнерівські кристали, та у роботі П. Лейдерера та М. Уоннера [26], де спостерігались макроскопічні кристали лункового типу.

Що стосується результатів роботи [36], то теоретичним підґрунтям для них може слугувати робота Д. Фішера зі співавторами [31], в якій досліджувались фонон-ріплонні моди, що описують зв'язані вібраційні коливання у системі електронів, що формують вігнерівський кристал, та коливання у системі ементарних збурень поверхні рідкого гелію (ріплонів). Саме резонансне згасання амплітуди зовнішнього змінного електромагнітного поля, що подавалось у систему електронів у площині паралельній до поверхні гелію, на частоті зв'язаних фонон-ріплонних мод було підтверженням формування вігнерівського кристалу у системі електронів над поверхнею гелію. Суттєвого розвитку данної теорії та більш точного опису експериментальних даних [36] вдалося досягти у роботі Ю.П. Монархи [57]. До інших методів експериментальної реєстрації вігнерівської кристалізації у системі електронів над поверхнею рідкого гелію можна віднести роботу О.С. Рибалки зі співавторами [44] та роботу Марті зі співавторами [45].

До існуючих статистичних підходів, що можуть бути застосовані для опису вігнерівської кристалізації можна віднести підхід, розвинений Б.І. Левом зі співавторами у роботах [58–61] для опису просторово неоднорідних станів у системах частинок із кулонівською взаємодією (у тому числі і системах електронів над поверхнею рідкого гелію). Методика цих робіт базувалася на використанні методів функціонального інтегрування для обчислення великих статистичних сум.

На відміну від вігнерівської кристалізації у системі електронів над поверхнею рідкого гелію, макроскопічні лункові кристали у такій системі можна спостерігати візуально при перевищенні зовнішнім притискуючим

електричним полем певного критичного значення [26, 27, 62]. У теоретичних роботах Л.П. Горькова та Д.М. Чернікової [63] і К. Міма та Х. Ікезі [64] було записане дисперсійне рівняння коливань зарядженої поверхні рідкого гелію, що дало змогу оцінити величину періоду макроскопічних періодичних збурень у системі електронів над поверхнею рідкого гелію у зовнішньому притискуючому електричному полі. За відсутності поверхневих зарядів цей період є оберненим до капілярної постійної гелію. Слід зазначити, що зазначені статичні деформації поверхні гелію відбуваються на фоні іншої статичної деформації поверхні гелію, а саме прогину поверхні рідкого гелію в області дії на електрони притискуючого електричного поля. У випадку, коли електрони залишають систему, відповідна деформація зникає. Даний ефект був зареєстрований у експериментальній роботі Р. Уільямса та Р. Крендла [65].

Серед досліджень даної області найбільш актуальними на даний момент є роботи, які пов'язані з описом динамічних властивостей розглянутої і подібних систем (див., наприклад, [35, 66–71]).

1.2. Мотивація основних напрямків досліджень

Як було зазначено у попередньому підрозділі, вихідним поняттям при описі систем заряджених частинок над поверхнею діелектриків є потенціал відокремленого заряду, модифікований за допомогою двох констант. Зрозуміло, що коли зарядів над поверхнею багато, з описом системи у термінах таких уявлень виникають труднощі не тільки математичного, а й «філософського» або методологічного характеру. Досить нагадати, що метод електростатичного зображення може трактуватися лише як зручний математичний засіб, що дозволяє у випадку окремого заряду, «закріпленого» над поверхнею металу або діелектрика, уникнути послідовного розв'язання рівняння Пуассона. Згаданих труднощів вдається позбутися, якщо перейти від феноменологічного рівня опису зазначених систем до їх опису в термінах мікроскопічної теорії. Така теорія повинна спочатку виходити з уявлень про об'єкт досліджування як

квантово-механічної системи багатьох частинок [1–6], до того ж враховувати вплив на систему зовнішнього притискуючого електричного поля. Це поле грає важливу роль у процесі формування таких систем, оскільки притискуюче поле, що створюється самими зарядами в діелектрику, для утримання зарядів над його поверхнею недостатньо.

Ясно також, що електростатичний потенціал у даній системі є величиною, узгодженою з розподілом зарядів над поверхнею діелектрика (самоузгодженим полем). Іншими словами, у послідовній теорії, яка не містить підгінних параметрів, цей потенціал повинен бути знайдений одночасно з функцією розподілу заряджених частинок над поверхнею діелектрика. Одним із методів теорії самоузгодженого поля є метод Томаса-Фермі, розроблений для опису багатоелектронних атомів в основному стані (див., наприклад, [72]). Цей метод, як відомо, базується на рівнянні Пуассона, що зв'язує електростатичний потенціал із розподілом електронів в атомі. Важливим у цій моделі атома було також уявлення про позитивно заряджене ядро атома, що врівноважує дію кулонівських сил відштовхування між електронами. У задачі про знаходження розподілу заряджених частинок і полів у системі цих зарядів над поверхнею діелектрика фактором, що врівноважує сили відштовхування між однойменно зарядженими частинками, є поляризаційні сили і зовнішнє притискуюче електричне поле. Таке зовнішнє електричне поле, яке притягує заряди до поверхні і впливає на їх просторовий розподіл, використовується в експериментах зі спостереження вігнерівської кристалізації над поверхнею рідкого гелію (див., наприклад, [36]) та макроскопічних лункових кристалів (див., наприклад, [26]). Остання обставина наводить на думку про опис розподілу зарядів і полів у системі зарядів над поверхнею діелектрика у термінах методу Томаса-Фермі, модифікованого на випадок такого роду систем. Такий підхід був реалізований автором дисертації у роботах [1–6].

До переваг запропонованого автором дисертації підходу можна віднести послідовність опису системи, який виходить із перших принципів статистичної механіки без використання підгінних констат. Результати, що

здобуті у межах даного підходу добре узгоджуються із експериментальними даними із спостереження просторово-періодичних структур лункового типу. Також запропонований квазікласичний підхід може слугувати базою для подальшого вдосконалення на випадок урахування суттєво квантових ефектів, таких як, наприклад, обмінна взаємодія. Також проведені дослідження статичної задачі є необхідними для подальшого розвитку теорії на випадок динамічних ефектів.

До недоліків запропонованого підходу можна віднести не досить добре узгоження здобутих результатів при описі ефектів мікроскопічної вігнерівської кристалізації з експериментальними даними, що, напевне, може бути усунуте шляхом урахування квантових ефектів, як зазначалось вище. Також запропонований підхід може бути розвинений на випадок урахування двох векторів трансляції оберненої ґратки просторово-періодичних структур та опису динамічних ефектів у розглянутій системі.

РОЗДІЛ 2

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСУ ФАЗОВИХ СТАНІВ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ НАД ПОВЕРХНЕЮ РІДКИХ ДІЕЛЕКТРИКІВ

2.1. Геометрія системи та її основні характеристики

Перш ніж перейти до формулювань варіаційного принципу, визначимо геометрію системи та основні її характеристики. Розглянемо систему тотожних частинок із зарядом Q , масою m , спіном S_Q , імпульсом \mathbf{p} та енергією $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. Заряджені частинки знаходяться в вакуумі над поверхнею плівки рідкого діелектрика товщиною d , яка має діелектричну проникність ε (див. рис. 2.1).

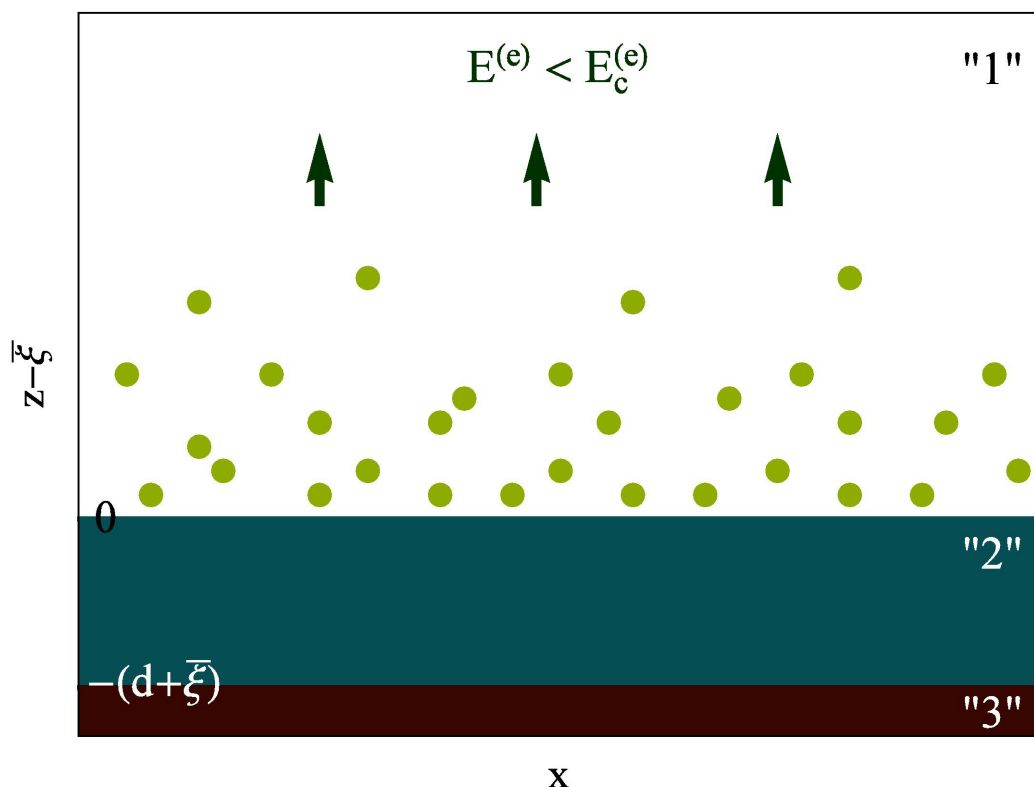


Рис. 2.1. Система заряджених частинок «1» над поверхнею рідкого діелектрика «2» на твердій підкладці «3» у зовнішньому притискуючому полі $E^{(e)}$.

Будемо вважати, що плівка рідкого діелектрика знаходиться на плоскій

твердій діелектричній підкладці з діелектричної проникністю $\varepsilon_d \gg \varepsilon$. Профіль поверхні плівки рідкого діелектрика будемо описувати функцією $\xi(\boldsymbol{\rho}) \equiv \xi(x, y)$, де $\boldsymbol{\rho} \equiv \{x, y\}$ - радіус-вектор в площині $z = 0$ декартової системи координат $\{z, x, y\}$. Поверхні розділу областей «1» - «3» в напрямку координат $\boldsymbol{\rho} \equiv \{x, y\}$ вважатимемо необмеженими. Щоб уникнути питань щодо «розштовхування» зарядів одного знаку вздовж $\boldsymbol{\rho}$, вважатимемо, що система знаходиться в посудині зі стінками при $\rho \rightarrow \infty$, які перешкоджають зарядам залишати систему.

Нехай на частинки діє зовнішнє притискуюче електричне поле $E^{(e)}$, що спрямоване вздовж осі z . Будемо також вважати, що існує потенційний бар'єр, який забороняє проникнення зарядів всередину плівки рідкого діелектрика. Всі фізичні величини, що відносяться до області простору $z > \xi(\boldsymbol{\rho})$, будемо позначати індексом «1» фізичні величини, що відносяться до діелектричної рідкої плівки ($\xi(\boldsymbol{\rho}) > z > -d$) - індексом «2» і фізичні величини, що відносяться до діелектричної твердої підкладки ($z < -d$) - індексом «3».

Уведемо далі параметри опису даної системи. В області «1» система повністю описується функцією розподілу частинок $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, потенціалом електричного поля $\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r})$, що створюється системою заряджених частинок, потенціалом зовнішнього притискуючого електричного поля $\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r})$ і профілем поверхні рідкого діелектрика $\xi(\boldsymbol{\rho})$. В області «2» характеристиками системи вважаються профіль поверхні рідкого діелектрика $\xi(\boldsymbol{\rho})$ і сумарний потенціал електричного поля. Під «сумарним» мається на увазі потенціал зовнішнього електричного поля в рідкому діелектрику і поля, наведеного зарядженими частинками, що знаходяться в області «1». Область «3» характеризується сумарним потенціалом електричного поля у твердій підкладці.

2.2. Основні засади варіаційного принципу при описі системи зарядів над поверхнею рідких діелектриків

В основі варіаційного принципу лежить поняття термодинамічного потенціалу Ω

$$\Omega = -S + Y_0 E + Y_i P_i + Y_4 N, \quad (2.1)$$

де S - ентропія системи

$$S = -\frac{\tilde{g}}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} \left\{ \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \ln \left(\frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right) + \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right) \ln \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right) \right\}, \quad (2.2)$$

P_i - сумарний імпульс системи частинок

$$P_i = \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) p_i, \quad (2.3)$$

N - сумарне число частинок у системі

$$N = \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

та \tilde{g} визначається виразом

$$\tilde{g} = (2S_Q + 1). \quad (2.5)$$

Відзначимо, що при написанні формули (2.2) для ентропії для визначеності заряджені частинки вважалися ферміонами.

Термодинамічні параметри Y_0 , Y_i , Y_4 , що входять в (2.1) пов'язані з температурою T , середньою швидкістю v_i і хімічним потенціалом μ формулами

$$T = \frac{1}{Y_0}, \quad -\frac{Y_i}{Y_0} = v_i, \quad -\frac{Y_4}{Y_0} = \mu. \quad (2.6)$$

Зауважимо, що швидкість у випадку нерухомої системи, як цілого, дорівнює нулю (в подальшому ми будемо розглядати саме випадок $v_i = 0$).

Енергію системи $E = E(f, \varphi, \xi)$, яка функціонально залежить від перерахованих вище параметрів опису системи, запишемо у вигляді:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4, \quad (2.7)$$

де E_1 , E_2 , E_3 - доданки, що визначають енергію системи у всіх перерахованих вище областях «1» - «3», і E_4 - енергія збуреного рідкого діелектрика. У виразі для E_1 з (2.7),

$$E_1 = \int d\rho \int_{\xi(\rho)}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\mathbf{p}} + \frac{Q}{2} \int d\rho \int_{\xi(\rho)}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} \varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) +$$

$$+ Q \int d\rho \int_{\xi(\rho)}^{\infty} dz \int d\mathbf{p} \varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d\rho \int_{\xi(\rho)}^{\infty} dz \left(\nabla \varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) \right)^2, \quad (2.8)$$

перший і другий доданки відповідно є кінетичною енергією системи заряджених частинок і енергією їх кулонівської взаємодії. Третій доданок у виразі (2.8) є енергією заряджених частинок у зовнішньому полі, четвертий є енергією зовнішнього поля у просторі над рідким діелектриком (величини $\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r})$ і $\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r})$ в (2.8) визначені вище).

Вираз для E_2 (див. (2.7)) визначає енергію сумарного електричного поля у плівці рідкого діелектрика

$$E_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int d\rho \int_{-d}^{\xi(\rho)} dz (\nabla \varphi_2(\mathbf{r}))^2, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{(i)} + \varphi_2^{(e)}, \quad (2.9)$$

а вираз для E_3

$$E_3 = \frac{\varepsilon_d}{8\pi} \int d\rho \int_{-\infty}^{-d} dz (\nabla \varphi_3(\mathbf{r}))^2, \quad \varphi_3 = \varphi_3^{(i)} + \varphi_3^{(e)} \quad (2.10)$$

є енергією сумарного електричного поля у твердій підкладці. Величини $\varphi_2^{(i)}$ і $\varphi_3^{(i)}$ у (2.9), (2.10) є потенціалами електричного поля в областях «2» та «3», що наведені зарядами, які знаходяться в області «1». $\varphi_2^{(e)}$ і $\varphi_3^{(e)}$ у цих же формулах позначають потенціали зовнішнього електростатичного поля в областях «2» і «3» відповідно.

Енергія E_4 збуреного рідкого діелектрика в (2.7) дається виразом

$$E_{\xi} = \frac{\alpha}{2} \int dS \left\{ (\nabla_{\rho} \xi(\rho))^2 + \kappa^2 \xi^2(\rho) \right\}, \quad (2.11)$$

$$dS = d^2\rho \sqrt{1 + (\nabla \xi(\rho))^2}, \quad \nabla_{\rho} \equiv \partial/\partial\rho,$$

де в першій формулі перший із двох доданків є енергією збуреної поверхні, а другий характеризує об'ємну енергію діелектрика в полі зовнішніх сил (див., наприклад, [25]). До зовнішніх сил, що діють на плівку рідкого діелектрика товщиною d , відносяться сила тяжіння, а також сили Ван дер Вальса з боку твердої підкладки з діелектричною проникністю $\varepsilon_d \gg \varepsilon$. Відповідно до цього (див., наприклад, [19]) константа κ в (2.11) визначається виразом

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{\alpha} (g + f), \quad (2.12)$$

де g - прискорення сили тяжіння, α - коефіцієнт поверхневого натягу рідкого діелектрика, ρ - його густина, а $f \sim d^{-4}$ - константа Ван дер Вальса, якою у випадку масивного рідкого діелектрика ($d \rightarrow \infty$) можна знехтувати у порівнянні з g . У разі ж тонкої плівки діелектрика, навпаки, сила тяжіння, що діє на атоми рідкого діелектрика, може ставати суттєво малою у порівнянні з силами Ван дер Ваальса.

Відзначимо також наступну обставину. Заради досягнення максимально можливого узагальнення задачі, що розв'язується, до числа фізичних характеристик даної системи не включена умова квазінейтральності. Стосовно даної системи така вимога передбачала б, що максимальне число зарядів над поверхнею діелектрика визначається напруженістю зовнішнього електричного поля в області «1» на рис. 2.1. У великій кількості робіт з даної тематики умова квазінейтральності вважається неодмінною (див., наприклад, [19, 20]). До питання про квазінейтральність системи, що вивчається, ми повернемося трохи нижче, у наступному розділі дисертації.

В основі варіаційного принципу лежить знаходження мінімуму термодинамічного потенціалу Ω (див. (2.1)). Стосовно системи, що аналізується, мінімум термодинамічного потенціалу повинен знаходитися за умови виконання рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.13)$$

в області «1» ($z > \xi(\boldsymbol{\rho})$). В областях «2» і «3» заряди відсутні, отже, для цих областей рівняння (2.13) перетворюється на відоме рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(i)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.14)$$

Відзначимо також, що такі ж рівняння в усіх трьох областях задовольняє потенціал зовнішнього притискуючого електричного поля

$$\Delta \varphi_l^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Оператор Δ у рівняннях (2.13) - (2.15) є оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\rho}, \quad \Delta_{\rho} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.16)$$

Таким чином, задача про знаходження безумовного максимуму ентропії зводиться до знаходження умовного мінімуму термодинамічного потенціалу Ω . Відповідно до загальних правил, для цього до термодинамічного потенціалу Ω , що визначається формулою (2.1), необхідно додати доданок

$$\Omega' = \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \left\{ \Delta \varphi(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (2.17)$$

де $\lambda(\mathbf{r})$ - множник Лагранжа. Крім того, у варіаційній задачі слід врахувати ту обставину, що за відсутності заряджених частинок над плівкою рідкого діелектрика його профіль поверхні не може трансформуватись

$$\xi(\rho)|_{N=0} = 0. \quad (2.18)$$

Із цієї причини до термодинамічного потенціалу ми додамо також доданок

$$\Omega'' = \int d\rho \lambda_{\xi}(\rho) \xi(\rho)|_{N=0}, \quad (2.19)$$

де $\lambda_{\xi}(\rho)$ - відповідний множник Лагранжа.

Тут необхідно зробити наступне зауваження. Якщо плівка діелектрика утворена рідиною, що не можна стиснути, то деформації поверхні цієї плівки повинні відбуватися таким чином, щоб зберігався повний об'єм рідкого діелектрика. Відповідно до цього до термодинамічного потенціалу Ω треба було б додати доданок Ω''' , що забезпечує умову збереження об'єму плівки рідкого діелектрика:

$$\Omega''' = \lambda \left(\int d\rho \int_{-d}^{\xi(\rho)} dz - V \right), \quad (2.20)$$

де V - об'єм плівки з незбуреною поверхнею, λ - деякий множник Лагранжа. Однак, як відомо з експериментів (див. у зв'язку з цим [19, 20]), взаємодія електронів з плівкою рідкого діелектрика за наявності зовнішнього притискуючого електричного поля призводить до прогину плоскої поверхні цієї плівки. Причому, дно цього прогину залишається плоским аж до певного критичного значення зовнішнього притискуючого поля. На перший погляд, ця обставина суперечить умові нестискуваності рідини. Однак таке протиріччя було б можливим в разі реальної необмеженості системи при $\rho \rightarrow \infty$ (див. вище). У реальних експериментах увімкнення зовнішнього електричного поля, що притискує електрони доповехні гелію, досягається підведенням до її поверхні з боку рідкої фази позитивно зарядженої пластинки плоского конденсатора. Лінійні розміри області просідання плоскої поверхні в цих реальних експериментах можна порівняти з лінійними розмірами L пластинки плоского конденсатора [19, 20]. Лінійні розміри поверхні гелію, природно, менші лінійного розміру пластинки конденсатора. Таким чином, зменшення об'єму рідкого гелію над пластиною конденсатора за рахунок просідання поверхні плівки під впливом електронів і зовнішнього електричного поля має компенсуватися збільшенням об'єму гелію за межами пластинки. Будемо вважати, що аналогічна ситуація має місце і для розглянутої в даній роботі системи. Необмеженість системи при $\rho \rightarrow \infty$ (див. початок цього розділу) треба розуміти як її обмеженість при $\rho \rightarrow L \rightarrow \infty$. Таке припущення дозволяє відмовитися від умови (2.18) у варіаційній задачі.

Відповідно до формул (2.13) - (2.19) варіаційна задача зводиться до знаходження мінімуму термодинамічного потенціалу $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \Omega' + \Omega'', \quad (2.21)$$

що визначається виразами (2.1), (2.17) і (2.19). Необхідною умовою існування такого мінімуму є рівність нулю перших варіаційних похідних:

$$\left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta f} \right|_{\xi, \varphi^{(i)}} = 0, \quad \left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta \varphi^{(i)}} \right|_{f, \xi} = 0, \quad \left. \frac{\delta \tilde{\Omega}}{\delta \xi} \right|_{f, \varphi^{(i)}} = 0. \quad (2.22)$$

Друга з цих умов має бути справедливою у всіх трьох областях системи. Нагадаємо при цьому, що під величинами $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}$ і $\varphi_3^{(i)}$ маються на увазі потенціали електричного поля, що створюється у всіх трьох областях зарядами, розподіленими над поверхнею плівки рідкого діелектрика.

Перша умова в (2.22) дає рівняння самоузгодження для функції розподілу зарядів над поверхнею діелектрика

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\boldsymbol{\rho})) \frac{\tilde{g}}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 + \exp \left(Y_0 \frac{\delta E}{\delta f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})} + Y_i p_i + Y_4 \right) \right)^{-1}, \quad (2.23)$$

де $\theta(z)$ - одинична функція Хевісайда. Термодинамічні параметри Y_0 , Y_i , Y_4 , що входять в (2.21), пов'язані з температурою T , середньою швидкістю v_i і хімічним потенціалом μ формулами (2.6). Нагадаємо, що в подальшому ми будемо розглядати випадок $v_i = 0$ і, отже, $Y_i = 0$.

Друга з умов (2.22) дає рівняння для множника Лагранжа $\lambda(\mathbf{r})$ (див. (2.17))

$$\Delta\lambda(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}Y_0Q \int d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.24)$$

у першій області і рівняння

$$\Delta\lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.25)$$

в інших двох областях. Легко бачити, що якщо вибрати множник Лагранжа у вигляді

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{Y_0\varphi^{(i)}(\mathbf{r})}{8\pi}, \quad (2.26)$$

то рівняння (2.24) і (2.25) задовольняються в усіх трьох областях. З цієї причини і будемо вважати, що множник Лагранжа $\lambda(\mathbf{r})$ у варіаційній задачі визначається формулою (2.26). З урахуванням цієї обставини вираз (2.23) для $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ може бути записано у вигляді:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\boldsymbol{\rho})) \frac{\tilde{g}}{(2\pi\hbar)^3} \{1 + \exp Y_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu + Q\varphi)\}^{-1}. \quad (2.27)$$

Відзначимо також, що вибір множника Лагранжа у вигляді (2.26) забезпечує його неперервність на всіх границях трьох визначених вище геометричних областей системи завдяки неперервності на цих границях потенціалів електричного поля.

Нарешті, з третьої умови (2.22) отримаємо рівняння самоузгодження для $\xi(\boldsymbol{\rho})$:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{g}}{Y_0(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right) \Big|_{z=\xi(\boldsymbol{\rho})} = \\ & = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon (\nabla\varphi_2(\mathbf{r}))^2 - \left(\nabla\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) \right)^2 \right)_{z=\xi(\boldsymbol{\rho})} + \lambda_{\xi}(\boldsymbol{\rho}) + \\ & + \alpha \left\{ \kappa^2 \xi \sqrt{1 + (\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi)^2} - \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \left[\frac{\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi \left(1 + \frac{\kappa^2}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}(\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi)^2 \right)}{\sqrt{1 + (\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi)^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для того, щоб визначити множник Лагранжа $\lambda_{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ (див. (2.19)), що входить в рівняння (2.28), до останнього рівняння слід застосувати умову (2.18), тобто покласти одночасно $\xi(\boldsymbol{\rho}) = 0$ і $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0$. При цьому легко отримати такий вираз:

$$\lambda_{\xi}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \left(\nabla\varphi_2^{(e)} \right)^2 - \left(\nabla\varphi_1^{(e)} \right)^2 \right)_{z=\xi(\boldsymbol{\rho})}. \quad (2.29)$$

В результаті прийдемо до остаточного виду рівнянь самоузгодження, які зв'язують параметри опису системи, що досліджується. Рівняння для потенціалів електричного поля, як зовнішнього, так і наведеного зарядами у всіх трьох областях системи, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r}) + 4\pi Q \int d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta\varphi_3^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \\ \Delta\varphi_l^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Рівняння самоузгодження (2.28) для $\xi(\boldsymbol{\rho})$ з урахуванням формули (2.29) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{g}}{Y_0(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right) \Big|_{z=\xi(\boldsymbol{\rho})} = \\ & = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left((\nabla\varphi_2(\mathbf{r}))^2 - \left(\nabla\varphi_2^{(e)}(\mathbf{r}) \right)^2 \right)_{z=\xi(\boldsymbol{\rho})} + \alpha \kappa^2 \xi(\boldsymbol{\rho}) \sqrt{1 + (\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi(\boldsymbol{\rho}))^2} \\ & - \alpha \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi(\boldsymbol{\rho}) \left(1 + \frac{\kappa^2}{2}\xi^2(\boldsymbol{\rho}) + \frac{3}{2}(\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi(\boldsymbol{\rho}))^2 \right) / \sqrt{1 + (\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\xi(\boldsymbol{\rho}))^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

а функція розподілу $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, що входить до цих формул, дається виразом

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \theta(z - \xi(\boldsymbol{\rho})) \frac{\tilde{g}}{(2\pi\hbar)^3} \{1 + \exp Y_0(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu + Q\varphi)\}^{-1}, \quad (2.32)$$

$$Y_0 = T^{-1}, \quad \tilde{g} = 2S_Q + 1.$$

Як легко бачити, здобута система рівнянь самоузгодження (2.30) - (2.32) є замкнутою. Її, однак, необхідно доповнити граничними умовами для потенціалів електричних полів і їх напруженостей на границях $z = \xi(\boldsymbol{\rho})$ і $z = -d$, що буде зроблено у наступному підрозділі дисертаційної роботи.

2.3. Сценарій фазового переходу в системі що приводить до стану з просторово-періодичними структурами і граничні умови для потенціалу електричного поля

Сценарій фазового переходу, що приводить до трансформації поверхні плівки рідкого діелектрика, передбачається наступним. Зовнішнє електричне поле, що притискує заряди до поверхні діелектрика, може призводити до просідання плоскої поверхні плівки рідкого діелектрика в області дії цього поля (див. у зв'язку з цим, наприклад, [3, 19, 20, 34, 42, 43]). Причому, дно цього прогину залишається плоским. Отже, деформація поверхні рідкого діелектрика, що залишає плоским дно прогину, може характеризуватися єдиним параметром $\bar{\xi}$ (глибиною просідання). Якщо плоска поверхня недеформованого діелектрика збігається з площиною $z = 0$, то величина $\bar{\xi}$ повинна бути негативною, $\bar{\xi} < 0$. При подальшому збільшенні напруженості зовнішнього електричного поля глибина $\bar{\xi}$ збільшується, і поверхня дна деформації залишається плоскою аж до певного критичного значення зовнішнього електричного поля $E_c^{(e)}$ на поверхні діелектрика,

$$E_c^{(e)} = \left| \frac{\partial \varphi_1^{(e)}(z, \rho)}{\partial z} \right|_{z=\bar{\xi}}. \quad (2.33)$$

Зауважимо, що при цьому, природньо, повинна виконуватися умова $|\bar{\xi}| < d$ у тому випадку, якщо рідкий діелектрик являє собою плівку завтовшки d на твердій підкладці (див. рис. 2.2).

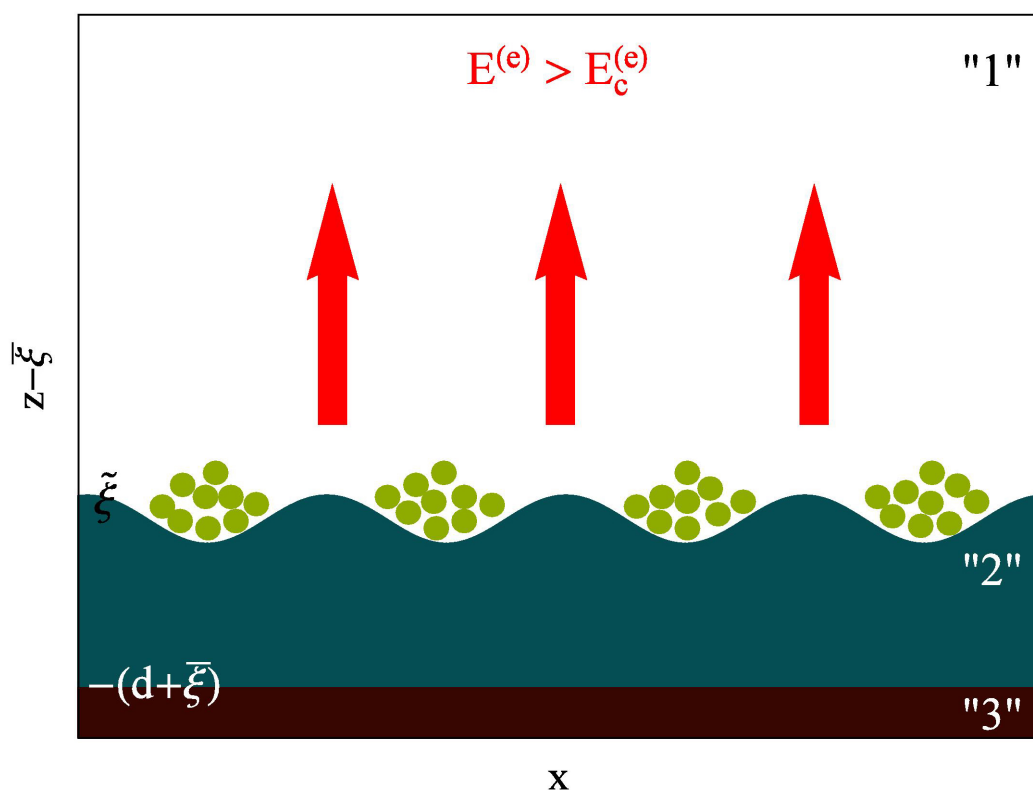


Рис. 2.2. Структура антисиметричної фази при $E^{(e)} > E_c^{(e)}$.

При подальшому збільшенні напруженості притискуючого електричного поля профіль поверхні дна прогину, що утворився, може деформуватися і набувати періодичної структури. Звідси випливає, що фазовий перехід до просторово-періодичних структур в досліджуваній системі відбувається на тлі плоскої структури рідкого діелектрика. Слід також зазначити, що керуючим параметром для подібного фазового переходу може слугувати не тільки зовнішнє електричне поле, а й температура. Описаний сценарій може бути справедливим як для заряджених, так і для квазінейтральних систем. Однак в умовах електронейтральності концентрація зарядів над поверхнею рідкого діелектрика визначається величиною напруженості зовнішнього поля, про що вже згадувалося вище. Тим самим концентрація зарядів над поверхнею діелектрика може бути виключена з числа керуючих параметрів такого фазового переходу (на відміну від випадку «зарядженої» системи, див. [3]). Наслідком такої обставини, як побачимо далі, буде рівняння, що описує певну криву, пов'язуючи температуру і напруженість зовнішнього поля у точці переходу.

Відповідно до описаного вище сценарію фазового переходу профіль поверхні рідкого діелектрика в фазі з меншою симетрією поблизу точки переходу може бути представлений у наступному вигляді [1, 3]:

$$\xi(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\xi} + \tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.34)$$

де $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ позначає просторово-неоднорідний профіль поверхні, що виник в результаті фазового переходу на тлі плоскої поверхні $z = \bar{\xi}$ дна описаної вище однорідної деформації. Таким чином, профіль поверхні $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ є параметром порядку розглянутого фазового переходу. У симетричній фазі ця величина дорівнює нулю, у несиметричній - вона повинна описувати просторово-періодичну структуру поверхні. Звідси випливає, що поблизу критичної точки з боку несиметричної фази повинна мати місце наступна нерівність:

$$|\bar{\xi}| \gg |\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})|. \quad (2.35)$$

Нагадаємо, що у теорії фазових переходів під «несиметричною фазою» прийнято розуміти фазу, утворену в результаті фазового переходу, симетрія якої нижча за симетрію вихідної фази, яка в цьому випадку називається симетричною. Відзначимо також, що у випадку виконання нерівності (2.35) в околі точки фазового переходу, а також рівності нулю параметра порядку у самій точці, має місце фазовий перехід другого роду [73].

Для опису фазових переходів, пов'язаних з трансформацією поверхні рідкого діелектрика й утворенням просторово-періодичних структур, тобто, для визначення величин $\bar{\xi}$, $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, а також розподілів зарядів і полів у досліджуваній системі, що виникли в результаті фазового переходу, використаємо рівняння (2.30) - (2.32), доповнені граничними умовами для характеристик електричного поля на поверхнях розділу трьох середовищ.

Граничні умови для потенціалів φ_j на границі $z = \xi(\boldsymbol{\rho})$ та $z = -d$ запишемо у вигляді (див. [74]):

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, \boldsymbol{\rho}) &= \varphi_2(\xi, \boldsymbol{\rho}), \quad \varphi_2(-d, \boldsymbol{\rho}) = \varphi_3(-d, \boldsymbol{\rho}), \\ ((\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla) \{ \varepsilon \varphi_2(z, \boldsymbol{\rho}) - \varphi_1(z, \boldsymbol{\rho}) \})_{z=\xi} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(e)}(\xi, \boldsymbol{\rho}) &= \varphi_2^{(e)}(\xi, \boldsymbol{\rho}), \quad \varphi_2^{(e)}(-d, \boldsymbol{\rho}) = \varphi_3^{(e)}(-d, \boldsymbol{\rho}), \\
\left((\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla) \left(\varphi_1^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) - \varepsilon \varphi_2^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) \right) \right)_{z=\xi} &= 0, \\
\left\{ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2(z, \boldsymbol{\rho})}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_3(z, \boldsymbol{\rho})}{\partial z} \right\}_{z=-d} &= 0, \\
\left\{ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_3^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})}{\partial z} \right\}_{z=-d} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

де $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho})$ - вектор нормалі до поверхні з профілем $\xi(\boldsymbol{\rho})$ у точці $\boldsymbol{\rho}$.

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}) = \sigma \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right\}, \quad \sigma = \left(1 + (\nabla \xi)^2 \right)^{-1/2}. \tag{2.37}$$

Відзначимо ту обставину, що дані граничні умови відповідають випадку, коли поверхневі заряди на кордонах розділу областей відсутні. Потрібно також доповнити дану систему граничних умов, умовою обмеженості напруженостей полів на нескінченності

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +\infty} < +\infty, & \quad \left| \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} < +\infty, \\
\left| \frac{\partial \varphi_1^{(e)}}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +\infty} < +\infty, & \quad \left| \frac{\partial \varphi_3^{(e)}}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Надалі будемо розглядати випадок, коли профіль поверхні мало відрізняється від плоского, і покажемо, як змінюються рівняння (2.30) - (2.32) при цьому. Також ми будемо вважати, що профіль поверхні повільно змінюється з координатою (див. також [3]):

$$|\partial \xi(\boldsymbol{\rho}) / \partial x| \ll 1, \quad |\partial \xi(\boldsymbol{\rho}) / \partial y| \ll 1. \tag{2.39}$$

За умови справедливості формул (2.35) - (2.39) можна очікувати, що розподіл зарядів і полів в системі буде мало відрізнятися від розподілів, що мають місце у випадку плоскої поверхні діелектрика $z = \bar{\xi}$. Тоді потенціали сумарного φ_j і зовнішнього $\varphi_j^{(e)}$ полів можуть бути представлені у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi_j(z, \boldsymbol{\rho}) &= \bar{\varphi}_j(z) + \tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho}), \\
\varphi_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) &= \bar{\varphi}_j^{(e)}(z) + \tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}), \quad j = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

де $\bar{\varphi}_j(z)$ і $\bar{\varphi}_j^{(e)}(z)$ - потенціали сумарного і зовнішнього електричних полів у всіх описаних вище областях системи (але не на поверхнях їх розділу!) у тому випадку, коли поверхня рідкого діелектрика є плоскою. Потенціалами $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ і $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$ описуються малі збурення полів у всіх цих областях за рахунок неоднорідної поверхні з профілем $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$. У відповідності до зробленого припущення про малі збурення поля внаслідок хвилястого характеру поверхні мають місце нерівності

$$|\bar{\varphi}_j(z)| \gg |\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})|, \quad \left| \bar{\varphi}_j^{(e)}(z) \right| \gg \left| \tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) \right|. \quad (2.41)$$

Будемо вважати далі, що профіль поверхні $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, деформований з плоского у результаті фазового переходу

$$\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \xi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}, \quad \xi_{\mathbf{q}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\rho} \xi(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} \quad (2.42)$$

є просторово-періодичним. У випадку періодичності $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ (див. (2.42)) вираз (2.34) приводить до наступних рівностей:

$$\bar{\xi} \equiv \langle \xi(\boldsymbol{\rho}) \rangle, \quad \tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho}) = \xi(\boldsymbol{\rho}) - \langle \xi(\boldsymbol{\rho}) \rangle. \quad (2.43)$$

Тут $\langle \dots \rangle$ позначає усереднення за періодом.

Періодична структура функції $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$ дозволяє шукати потенціали $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ та $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$ (див. (2.40)) у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho}) &= \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}(z) e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}, & \tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}(z) &= \int \frac{d\boldsymbol{\rho}}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}, \\ \tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) &= \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(e)}(z) e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}, & \tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(e)}(z) &= \int \frac{d\boldsymbol{\rho}}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Беручи до уваги останні рівняння, а також (2.40), неважко помітити, що

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j(z) &\equiv \langle \varphi_j(z, \boldsymbol{\rho}) \rangle, & \langle \tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho}) \rangle &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^{(e)}(z) &\equiv \langle \varphi_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) \rangle, & \langle \tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho}) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Для опису фазового переходу, що відбувається за сценарієм, який описано на початку даного розділу, необхідно визначити параметр порядку $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$. Та

обставина, що даний фазовий перехід є фазовим переходом другого роду, дає можливість визначити параметр порядку $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ у залежності від керуючих параметрів T , $E^{(e)}$, n_s поблизу критичних значень T_c , $E_c^{(e)}$, n_{sc} в межах теорії збурень за малими параметрами $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ і $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$.

Підставляючи рівняння (2.34), (2.40) з урахуванням формул (2.39) - (2.42) в рівняння (2.30) - (2.32) і розкладаючи їх за $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$, а також $T - T_c$, $E^{(e)} - E_c^{(e)}$, $n - n_{sc}$, прийдемо до рівнянь, що описують просторову структуру поверхні рідкого діелектрика, розподілу зарядів і полів у несиметричній фазі поблизу критичної поверхні (див. зауваження вище). Наведемо рівняння, що описують систему над поверхнею рідкої плівки діелектрика $z = \bar{\xi}$, тобто, в області «1». Вони будуть головним наближенням описаної теорії збурень. Вважаючи в подальшому, що заряди над поверхнею рідкого діелектрика є електронами, у відповідних формулах заряд частинок вважається рівним заряду електрона, $Q = -e$. З огляду на періодичність малих величин $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ і $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$ див. (2.42), (2.44), виходить, що головне наближення можна здобути усередненням за періодом рівнянь самоузгодження (2.30) - (2.32). Доданки, що представляють собою середні значення квадратичних за $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ і $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$ доданків, будуть малими у порівнянні з головним наближенням, тому їх можна опустити. Тоді рівняння Пуассона в першій області у головному наближенні буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1''(z) &= 4\pi en(z), \quad n(z) = \int d^3p f_{\mathbf{p}}(z), \\ f_{\mathbf{p}}(z) &= \frac{\theta(z - \bar{\xi})\tilde{g}}{(2\pi\hbar)^3} \left(1 + e^{\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - (e\bar{\varphi}_1(z) + \mu)}{T}}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

У головному наближенні (2.30) за вказаними параметрами отримаємо рівняння для визначення $\bar{\xi}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{g}T}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \ln \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\tilde{g}} f_{\mathbf{p}}(z)\right) \Big|_{z=\bar{\xi}} = \\ &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \left((\bar{\varphi}'_2(z))^2 - (\bar{\varphi}_2^{(e)'}(z))^2 \right)_{z=\bar{\xi}} + \alpha\kappa^2\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Зважаючи на відсутність зарядів в областях «2» і «3», рівняння для

потенціалів $\bar{\varphi}_2(z)$ і $\bar{\varphi}_3(z)$ мають вигляд:

$$\bar{\varphi}_2''(z) = 0, \quad \bar{\varphi}_3''(z) = 0. \quad (2.47)$$

Нагадаємо, що потенціали зовнішніх полів $\bar{\varphi}_j^{(e)}(z)$ в усіх трьох областях задовольняють такі ж рівняння (рівняння Лапласа), внаслідок чого справедливі вирази:

$$\bar{\varphi}_j^{(e)''}(z) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Для того, щоб здобута система рівнянь (2.45) - (2.48) була замкнутою, аналогічну процедуру усереднення за періодами слід виконати з граничними умовами (2.36). У результаті ми отримуємо зв'язок між сумарними потенціалами $\bar{\varphi}_j(z)$, а також потенціалами зовнішнього електричного поля $\bar{\varphi}_j^{(e)}(z)$ на границях розділу трьох областей через посередництво граничних умов:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\bar{\xi}) &= \bar{\varphi}_2(\bar{\xi}), \quad \bar{\varphi}_1'(z = \bar{\xi}) = \varepsilon \bar{\varphi}_2'(z = \bar{\xi}), \\ \bar{\varphi}_2(-d) &= \bar{\varphi}_3(-d), \quad (\varepsilon \bar{\varphi}_2' - \varepsilon_d \bar{\varphi}_3')_{z=-d} = 0, \\ \bar{\varphi}_1^{(e)}(\bar{\xi}) &= \bar{\varphi}_2^{(e)}(\bar{\xi}), \quad (\varepsilon_d \bar{\varphi}_3^{(e)'} - \varepsilon \bar{\varphi}_2^{(e)'})_{z=-d} = 0, \\ \bar{\varphi}_2^{(e)}(-d) &= \bar{\varphi}_3^{(e)}(-d), \quad (\bar{\varphi}_1^{(e)'} - \varepsilon \bar{\varphi}_2^{(e)'})_{z=\bar{\xi}} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Як легко бачити, розв'язок задачі про опис фазового переходу має починатися з розв'язку рівнянь головного наближення (2.45) - (2.48) із граничними умовами (2.49). Тим самим буде визначено розподіл зарядів і полів у системі у випадку плоскої поверхні рідкого діелектрика, яка задається рівнянням $z = \bar{\xi}$. З рівняння (2.46) може бути знайдена сама величина $\bar{\xi}$, що визначає зниження рівня плоскої поверхні за рахунок впливу на цю поверхню розташованих над нею зарядів (електронів).

Для отримання критичних параметрів розглянутого фазового переходу необхідно залучити наступні порядки теорії збурень. Сформулюємо нижче систему рівнянь самоузгодження (2.30) - (2.32) у першому порядку цієї теорії. Будемо шукати $\tilde{\xi}_q$, $\tilde{\varphi}_{jq}(z)$ та $\tilde{\varphi}_{jq}^{(e)}(z)$ у наступному вигляді:

$$\tilde{\xi}_q(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\xi}_q^{(l)}, \quad \tilde{\varphi}_{jq}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{jq}^{(l)}(z), \quad \tilde{\varphi}_{jq}^{(e)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{jq}^{(e)(l)}(z), \quad (2.50)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_q^{(1)} &= \tilde{\xi}_{q_0}^{(1)} (\Delta(q - q_0) + \Delta(q + q_0)), \\ \tilde{\xi}_q^{(2)} &= \tilde{\xi}_{2q_0}^{(2)} (\Delta(q - 2q_0) + \Delta(q + 2q_0)),\end{aligned}\quad (2.51)$$

а величини $\tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(1)}(z)$ і $\tilde{\varphi}_{jq_0}^{(1)}(z)$, $\tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(2)}(z)$ і $\tilde{\varphi}_{j2q_0}^{(2)}(z)$, $\tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(e)(1)}(z)$ і $\tilde{\varphi}_{jq_0}^{(e)(1)}(z)$, $\tilde{\varphi}_{j\mathbf{q}}^{(e)(2)}(z)$ і $\tilde{\varphi}_{j2q_0}^{(e)(2)}(z)$ пов'язані аналогічним до (2.51) чином. У цих формулах $\Delta(q)$ - символ Кронекера

$$\Delta(q) = \begin{cases} 0, & q \neq 0 \\ 1, & q = 0 \end{cases}.$$

Окрім того, в (2.50) для простоти також передбачалось, що виникаюча періодична структура є одновимірною з періодом уздовж осі x рівним a , тому $q = q_x = 2\pi/a$.

Надалі будемо також вважати, що $\tilde{\varphi}_{jq}(z) = \tilde{\varphi}_{j-q}(z)$ та $\tilde{\xi}_q = \tilde{\xi}_{-q}$ беручи до уваги, що фізичні характеристики зарядів і полів є дійсними. Отже,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(x) &= 2 \sum_{l=1}^{+\infty} \tilde{\xi}^{(l)} \cos lq_0x, & \tilde{\varphi}_j(x, z) &= 2 \sum_{l=1}^{+\infty} \tilde{\varphi}_j^{(l)}(z) \cos lq_0x, \\ \tilde{\varphi}_j^{(e)}(x, z) &= 2 \sum_{l=1}^{+\infty} \tilde{\varphi}_j^{(e)(l)}(z) \cos lq_0x.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Тоді у лінійному наближенні за малими величинами перших гармонік $\tilde{\xi}_q$ та $\tilde{\varphi}_{jq}(z)$ рівняння (2.30), (2.32), (2.36) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z^2} - q_0^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)} &= 4\pi e^2 \frac{\partial n}{\partial \mu} \tilde{\varphi}_1^{(1)}, & \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z^2} - q_0^2 \tilde{\varphi}_2^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3^{(1)}}{\partial z^2} - q_0^2 \tilde{\varphi}_3^{(1)} &= 0, & \left((\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'_2) \tilde{\xi}^{(1)} + \tilde{\varphi}_1^{(1)} - \tilde{\varphi}_2^{(1)} \right)_{z=\bar{\xi}} &= 0, \\ \left(\tilde{\varphi}_2^{(1)} - \tilde{\varphi}_3^{(1)} \right)_{z=-d} &= 0, & \left(\bar{\varphi}_1'' \tilde{\xi}^{(1)} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=\bar{\xi}} &= 0, \\ \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \tilde{\varphi}_3^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=-d} &= 0, & \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\bar{\varphi}'_2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} - \bar{\varphi}_2^{(e)'} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} \right)_{z=\bar{\xi}} &= 0, \\ + \left(en \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \bar{\varphi}'_1 \tilde{\xi}^{(1)} \right) \right)_{z=\bar{\xi}} &+ \alpha \tilde{\xi}^{(1)} \left(\kappa^2 + q_0^2 \left(1 + \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{2} \right) \right) &= 0.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Аналогічно, виходячи з рівнянь (2.32) для зовнішніх потенціалів, запишемо для них перше наближення даної теорії збурень, доповнивши їх відповідними граничними умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}}{\partial z^2} &= q_0^2 \tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \left(\tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} - \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)} \right)_{z=-d} = 0, \\ \left(\left(\tilde{\varphi}_1^{(e)'} - \tilde{\varphi}_2^{(e)'} \right) \tilde{\xi}^{(1)} + \tilde{\varphi}_1^{(e)(1)} - \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \right)_{z=\tilde{\xi}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(e)(1)}}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} \right)_{z=\tilde{\xi}} &= 0, \quad \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}}{\partial z} \right)_{z=-d} = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Система рівнянь (2.53) - (2.54) дає можливість опису просторово-періодичних структур, що виникають у системі електронів над поверхнею рідкого діелектрика у результаті фазового переходу. Відзначимо також, що значення T і $E^{(e)}$, що входять у коефіцієнти у розв'язках для малих відхилень $\tilde{\xi}^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$, $\tilde{\varphi}_j^{(1)}$, відповідають їхнім критичним значенням. Доданки, пропорційні $T - T_c$ і $E^{(e)} - E_c^{(e)}$, в лінійне наближення не входять, оскільки матимуть більш високий порядок малості. Ця обставина говорить про те, що для отримання залежності параметра порядку $\tilde{\xi}^{(1)}$ (амплітуд просторово-періодичних структур) від керуючих параметрів $T, E^{(e)}$ поблизу критичної поверхні, необхідно залучення більш високих порядків теорії збурень. До вирішення цього завдання, а також до розв'язання систем рівнянь (2.45) - (2.49) і (2.53) - (2.54) ми приступимо в наступних розділах.

Необхідно зазначити, що пошук розв'язків рішень у вигляді одновимірних просторово-періодичних структур (2.50), (2.51) зумовлений двома обставинами. По-перше, це спрощує процедуру отримання аналітичних розв'язків, оскільки опис двовимірних просторово-періодичних структур стикається з неймовірно громіздкими і ледь контрольованими розрахунками. По-друге, аналогічні одноперіодичні структури були експериментально виявлені в [46]. Однак, у відповідності до результатів цих досліджень, така структура не була стаціонарною, а з часом еволюціонувала до гексагональної. «Виправдання» можливості існування одноперіодичних розв'язків можуть бути засновані на дослідженнях як рівноважної, так і

динамічної стійкості таких структур у даній системі. До речі, те ж саме слід застосувати і до двовимірних періодичних структур. Однак, такі завдання вимагають окремого розв'язку та аналізу через їхню складність.

Слід також спеціально підкреслити, що у даній роботі система зарядів не вважається локалізованою у будь-якій площині, як вважалося, наприклад, в [19, 20, 36, 43]. У зазначених роботах мова йде саме про двовимірні гексагональні кристалічні структури, що створюються електронами над плоскою поверхнею рідкого гелію. Винятки становлять лише ті випадки, коли описуються так звані «лункові» кристали. У дисертаційній же роботі, як видно з поставленої вище задачі, система зарядів тривимірна і має функцію розподілу за координатами у напівпросторі над поверхнею рідкого діелектрика. Таким чином, як побачимо далі, просторово-періодична структура вздовж напрямків, паралельних площині (x, y) , у даній роботі пов'язана з просторово-періодичною деформацією профілю поверхні плівки рідкого діелектрика.

Висновки до розділу 2

У розділі виконано послідовну побудову статистичного підходу до опису системи заряджених Фермі-частинок над поверхнею рідкого діелектрика в зовнішньому полі. Сформульовано варіаційний принцип, який показує, що рівноважний стан такої системи можна описати системою рівнянь самоузгодження, які отримані з умови мінімуму великого термодинамічного потенціалу. Дана умова витікає з вимоги умовного максимуму ентропії системи, що знаходиться у рівновазі, а також законами збереження, енергії, імпульсу і числа частинок системи.

Сформульовано очікуваний сценарій фазового переходу з утворенням просторово-періодичних структур у системі заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика, згідно з яким дані структури з'являються при досягненні зовнішнім електричним полем деякого критичного значення. Подібне формування несиметричної фази у системі відбувається на фоні прогину поверхні діелектрика під дією заряджених частинок, що

притискуються до поверхні зовнішнім електричним полем.

На основі запропонованого сценарію фазового переходу поблизу критичної точки запропонований вид параметра порядку - профілю просторово-періодичного збурення поверхні діелектрика. Використовуючи вид профілю поверхні діелектрика у випадку несиметричної фази системи поблизу точки переходу, виведено рівняння самоузгодження, що описують симетричну фазу системи з незбуреною плоскою поверхнею діелектрика і несиметричну фазу системи поблизу точки фазового переходу. Дані рівняння здобуто у межах теорії збурень за малими відхиленнями від рівноважних значень параметрів опису системи - функції розподілу часток, потенціалу електричного поля і профілю поверхні рідкого діелектрика, ініційованих параметром порядку у несиметричною фазі.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [1–3].

РОЗДІЛ 3

РІВНОВАЖНИЙ СТАН СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ НАД ПЛОСКОЮ ПОВЕРХНЕЮ РІДКОГО ДІЕЛЕКТРИКА

3.1. Невироджений газ зарядів над плоскою поверхнею масивного діелектрика у зовнішньому притискуючому електричному полі

При розв'язанні системи рівнянь (2.45) - (2.49) дотримуватимемося методики роботи [1], де подібна задача розв'язувалася у випадку розподілу зарядів над плоскою поверхнею масивного твердого діелектрика. Зробимо попередньо кілька суттєвих зауважень.

Якщо на основі рівнянь (2.45) розв'язати задачу про просторовий розподіл зарядів і полів над плоскою поверхнею рідкого діелектрика, то розподіл полів як у підкладці, так і в самій плівці рідкого діелектрика однозначно визначаються з рівнянь (2.47) та (2.49). Для цього перше з рівнянь (2.45) зручно переписати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1(z)}{\partial z^2} = 4\pi e\nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \{ \exp \beta (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \psi) + 1 \}^{-1}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}, \quad \beta^{-1} = T, \quad (3.1)$$

де введені позначення

$$\psi(z) \equiv \mu + e\bar{\varphi}_1(z), \quad \nu \equiv (2m)^{3/2}/2\pi^2\hbar^3, \quad (3.2)$$

і враховано, що спин електрона дорівнює $\frac{1}{2}$. Величину ψ зазвичай називають електрохімічним потенціалом.

Відзначимо, що рівняння (3.1) може бути зведене до диференціальних рівнянь першого порядку. Помноживши для цього рівняння (3.1) на $(\partial\bar{\varphi}_1(z)/\partial z)$ і використовуючи тотожну рівність:

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} \right) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \psi)} + 1} = -\frac{1}{\beta Q} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left[e^{-\beta(\varepsilon - \psi)} + 1 \right],$$

після нескладних перетворень прийдемо до наступного звичайного

диференційного рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \{\exp \beta (\varepsilon - \psi) + 1\}^{-1} + C_1, \quad (3.3)$$

де C_1 - деяка довільна стала інтегрування. Таким чином, виникає необхідність розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} = \pm \left\{ \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \{\exp \beta (\varepsilon - \psi) + 1\}^{-1} + C_1 \right\}^{1/2}.$$

Знак перед коренем у цьому рівнянні повинен обиратися з наступних міркувань. Сила, що діє на заряди при $z > \bar{\xi}$, повинна бути притискуючою до поверхні діелектрика по відношенню до цих зарядів. Тому у випадку позитивних зарядів над діелектриком знак перед коренем в останній формулі обирається додатнім, у випадку негативних зарядів - від'ємним. Далі в усіх перетвореннях для визначеності будемо вважати, що у дисертаційній ій роботі вивчається розподіл негативних зарядів над поверхнею діелектрика, $Q = -|Q|$, а відтак, потенціал φ_1 задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} = - \left\{ \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \{\exp \beta (\varepsilon - \psi) + 1\}^{-1} + C_1 \right\}^{1/2}. \quad (3.4)$$

У моделі Томаса-Фермі в її традиційному розумінні вважається, що газ частинок є виродженим [25]. Як показано у роботі [1], у загальному випадку, в залежності від температури, концентрації частинок і зовнішнього притискуючого поля, газ електронів може бути виродженим поблизу поверхні діелектрика і невиродженим на значній відстані від цієї поверхні. Однак, якщо параметри системи такі, що газ електронів є невиродженим поблизу поверхні діелектрика, то він буде невиродженим і у всьому просторі над діелектриком. У цьому розділі ми будемо вважати газ невиродженим. У цьому випадку функція розподілу електронів повинна бути близькою до Больцманівської функції розподілу

$$\{\exp \beta (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \psi) + 1\}^{-1} \sim \exp \beta (\psi - \varepsilon_{\mathbf{p}}) \ll 1, \quad (3.5)$$

відповідно до чого, вираз для концентрації розподілу газу за координатою z (див. (2.45)) набуває вигляду:

$$n(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \nu \beta^{-3/2} \exp(\beta\psi). \quad (3.6)$$

У цьому полягає один з моментів модифікації моделі Томаса-Фермі стосовно піддослідної системи. Критерій невинродженості електронного газу у термінах характерних величин цієї системи буде наведено нижче.

У випадку невинродженого електронного газу над плоскою поверхнею рідкого діелектрика рівняння (3.4) у випадку виконання умов (3.5) має аналітичний розв'язок (докладніше див. у [1]):

$$\frac{\sqrt{(B/C_1) e^{\beta\psi} + 1} - 1}{\sqrt{(B/C_1) e^{\beta\psi} + 1} + 1} = C_2 e^{-e\sqrt{C_1}/T}, \quad B \equiv 4\pi^{3/2} \nu \beta^{-5/2}. \quad (3.7)$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 у виразі (3.7) визначаються з наступних умов. Зважаючи на відсутність частинок на нескінченності і, відтак, рівності нулю функції розподілу, з (3.3) здобудемо $C_1 = \left(\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} \right)^2 \equiv E_\infty^2$, де E_∞ - величина електричного поля на нескінченності. Потрібно також, щоб інтеграл за імпульсами і координатами від функції розподілу $f_{\mathbf{p}}(z)$ в області простору «1» дорівнював повному числу частинок N над поверхнею плівки рідкого діелектрика. Насправді така рівність має бути наближеною, оскільки певна частка зарядів пов'язана з просторово-періодичною структурою поверхні рідкого діелектрика. Однак, відповідно до співвідношень (2.11), (2.34) - (2.41) ми вважаємо, що число таких частинок мале у порівнянні з загальним числом зарядів над поверхнею плівки рідкого діелектрика. Проробивши необхідні перетворення, отримаємо:

$$C_1 = E_\infty^2, \quad C_2 = \frac{2\pi e n_s}{E_\infty + 2\pi e n_s}. \quad (3.8)$$

Розв'язок (3.7) дає можливість визначити залежність напруженості електричного поля $E_1(z) = -\frac{\partial \bar{\varphi}_1(z)}{\partial z}$ від координати z над поверхнею рідкого діелектрика $z = \bar{\xi}$

$$E_1(z) = E_\infty \frac{1 + X(z)}{1 - X(z)} \quad (3.9)$$

і розподіл концентрації електронів $n(z)$:

$$n(z) = \beta \frac{E_\infty^2}{8\pi} \frac{4X(z)}{(1 - X(z))^2}, \quad (3.10)$$

де функція $X(z)$ дається виразами:

$$X(z) \equiv \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 + E_\infty} \exp \left\{ -(z - \bar{\xi})/z_0 \right\}, \quad z_0 \equiv (\beta e E_\infty)^{-1}, \quad \beta^{-1} = T. \quad (3.11)$$

Величина E_0 , що входить у співвідношення (3.11), являє собою напруженість сумарного електричного поля на поверхні рідкого діелектрика з плоским профілем $z = \bar{\xi}$,

$$E_0 = - \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1(z)}{\partial z} \right)_{z=\bar{\xi}} \quad (3.12)$$

і через формулу

$$E_0 - E_\infty = 4\pi e n_s, \quad (3.13)$$

пов'язана з напруженістю електричного поля на нескінченності

$$E_\infty = - \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z}$$

і числом об'ємних зарядів n_s , що припадають на одиницю площі плоскої поверхні діелектрика,

$$n_s = \int_{\xi}^{\infty} dz n(z). \quad (3.14)$$

Звернемо увагу на те, що при $z \rightarrow \infty$ і $E_1 \rightarrow E_\infty$, як це витікає з формул (3.9), (3.11). З урахуванням цієї обставини справедлива формула

$$E_0^2 - E_\infty^2 = \frac{16\pi}{3} \nu \exp(\beta\psi) \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \exp(\beta\varepsilon), \quad (3.15)$$

що виходить з рівняння (3.4) з урахуванням (3.5), (3.12). Підкреслимо, що для рівноважної системи зарядів над діелектриком величина n_s не залежить ні від координат, ні від розподілу полів і визначається тільки загальним числом N зарядів над діелектриком. Нагадаємо, що у цьому

підрозділі число зарядів вважається заданим спочатку, завдяки чому система не обов'язково є квазінейтральною, див. вище. Звернемо увагу також на те, що величина n_s характеризує напруженість додаткового (по відношенню до $E^{(e)}$) поля, яке притискує заряди до поверхні діелектрика. Причому це поле породжується самими цими зарядами. Як легко переконатися, при великих $z \gg z_0$, (див. (3.11)), розподіл зарядів над поверхнею діелектрика наближається до Больцманівського розподілу, а напруженість електричного поля експоненційно наближається до напруженості зовнішнього притискуючого електричного поля.

Потенціали сумарного електричного поля і зовнішнього електричного поля в плівці рідкого діелектрика і твердій підкладці відповідно до формул (2.47) - (2.49), (3.9), (3.11)-(3.14) визначаються виразами:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_2(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0, & \bar{\varphi}_3(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E_0}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0, \\ \bar{\varphi}_1^{(e)}(z) &= -E^{(e)} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, & \bar{\varphi}_2^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, \\ \bar{\varphi}_3^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)},\end{aligned}\quad (3.16)$$

де введено позначення $\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi} \equiv \varphi_0$ та $\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)} \equiv \varphi_0^{(e)}$.

На основі отриманих формул (3.9), (3.11) - (3.16) визначається і зниження рівня поверхні $\bar{\xi}$ у термінах параметрів задачі виходячи з формули (2.46) з урахуванням нерівності (3.5):

$$\bar{\xi} = -\frac{\varepsilon + 1}{8\pi\varepsilon\alpha\kappa^2} \left(E_0^2 - E^{(e)2} \right). \quad (3.17)$$

При отриманні цього виразу необхідно в (2.46) перетворити доданок з логарифмом. Для цього треба підставити в цей доданок явний вираз для незбуреної функції розподілу з урахуванням (3.15) і скористатися формулою (3.2). Відзначимо, що за відсутності зарядів згідно з (3.13) величина $\bar{\xi}$, як і має бути, дорівнює нулю.

У термінах введених вище величин може бути сформульований і критерій невиродженості електронного газу над поверхнею плівки рідкого діелектрика:

$$\nu^{-1} T^{-5/2} e n_s \left(E^{(e)} + 2\pi e n_s \right) \ll 1. \quad (3.18)$$

Видно, що ця нерівність порушується у випадку низьких температур і сильних зовнішніх притискуючих полів (див. у зв'язку з цим [1]).

Виходячи з формули (3.9), неважко отримати вираз для самоузгодженого потенціалу, що визначає розподіл зарядів і полів над поверхнею рідкого діелектрика:

$$\bar{\varphi}_1(z) = \varphi_0 - E_\infty (z - \bar{\xi}) - 2E_\infty z_0 \ln \frac{1 - X(z)}{1 - X(\bar{\xi})}, \quad (3.19)$$

де величини $\chi(z)$, z_0 визначаються формулами (3.11). Нагадаємо, що у дисертаційній роботі вважається, що над поверхнею плівки рідкого діелектрика розташовані негативно заряджені частинки - електрони. З цієї причини напрямок вектору притискуючого поля повинен співпадати з напрямком осі координат Oz .

Отримані вирази (3.9)-(3.19) і є розв'язком задачі про розподіл полів для невідродженого газу заряджених частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика у присутності зовнішнього притискуючого поля або за відсутності останнього. Звернемо увагу на те, що у наведених результатах діелектрична проникність ε рідкого діелектрика присутня тільки у формулі (3.17) для величини $\bar{\xi}$, характеризує зниження рівня плоскої поверхні під дією тиску, створюваного зарядами над цією поверхнею, у тому числі і за рахунок зовнішнього притискуючого електричного поля. Причиною цього є однорідність задачі уздовж поверхні, за координатою ρ . У випадку наявності неоднорідностей ρ розв'язки рівнянь будуть істотно залежати від виду діелектрика, тобто, від його діелектричної проникності ε . Ці неоднорідності можуть бути пов'язані з як з неоднорідностями самої поверхні, так і з неоднорідним розподілом на ній заряду (або того й іншого одночасно, див. у зв'язку з цим [1]). У наступному розділі дисертації буде розглянуто випадок просторово-періодичних неоднорідностей поверхні плівки рідкого діелектрика, що виникли у результаті фазового переходу.

3.2. Екранування зовнішнього поля полем невідродженого газу зарядів. Умова квазінейтральності.

У порівнянні з «зарядженою» системою, рівноважний стан якої над плоским діелектриком вивчено у попередньому підрозділі, і де електричне поле на нескінченності відмінне від нуля, квазінейтральні системи заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика мають ряд особливостей у поведінці (див. у зв'язку з цим [20, 36]).

Деякі з таких особливостей можуть бути передбачені тільки при описі системи в термінах мікроскопічної теорії. Із цієї причини потрібно зробити окремий розгляд випадку квазінейтральної системи над поверхнею рідкого діелектрика у присутності притискуючого зовнішнього електростатичного поля з метою опису просторово-періодичних структур у таких системах. У свою чергу, такий опис вимагає певної модифікації деяких положень теорії, запропонованої в попередньому підрозділі для «заряджених» систем. Щоб уникнути плутанини зі сталим терміном у фізиці плазми відзначимо, що під квазінейтральністю (або електронейтральністю) системи ми розуміємо випадок, коли поле зарядів далеко від поверхні діелектрика компенсує зовнішнє притискуюче поле. Іншими словами, при зміні зовнішнього притискуючого поля змінюється і кількість зарядів, що утримуються над поверхнею діелектрика. Така відмінність між системами ніяк не позначається на формулюваннях варіаційного принципу для них. З цієї причини не будуть відрізнятися і рівняння самоузгодження для заряджених і нейтральних систем, отримані у попередньому розділі.

При розв'язку системи рівнянь (2.45) - (2.49) у квазінейтральній задачі будемо дотримуватися методики, викладеної у попередньому підрозділі, а також роботах [1, 3]. Для розв'язання першого з рівнянь (2.47) його зручно переписати у наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1(z)}{\partial z^2} = 4\pi e\nu \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon \varepsilon^{1/2}}{1 + e^{(\varepsilon - \psi)/T}}, \quad (3.20)$$

де введені позначення:

$$\psi(z) \equiv \mu + e\bar{\varphi}_1(z), \quad \nu = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 a_0^{3/2} e^3}, \quad (3.21)$$

і враховано, що спін електрона дорівнює $1/2$ та $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}$. Нагадаємо, величину ψ зазвичай називають електрохімічним потенціалом, а a_0 - першим Борівським радіусом.

Порядок рівняння (3.20) може бути знижений, див. [3]. У результаті можна прийти до рівняння

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} = - \left\{ \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^\infty \frac{d\varepsilon \varepsilon^{3/2}}{1 + e^{(\varepsilon - \psi)/T}} + C_1 \right\}^{1/2}, \quad (3.22)$$

де C_1 - деяка довільна стала інтегрування. Відзначимо, що знак перед коренем в цьому рівнянні повинен вибиратися з таких міркувань: сила, що діє на негативні заряди при $z > \bar{\xi}$, повинна притискувати ці заряди до поверхні діелектрика. Рівняння (3.22) може бути значно спрощено, якщо врахувати квазінейтральність даної системи. Справді, умова квазінейтральності системи передбачає, що на нескінченності часток немає, звідки (див. (2.32))

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon - \psi)/T}} = 0,$$

з урахуванням чого з (3.22) маємо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z} = -\sqrt{C_1}.$$

Беручи до уваги, що в електронейтральному випадку на нескінченності й електричне поле повинно дорівнювати нулю $E(z) = -\frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z}$, приходимо до висновку, що $C_1 = 0$, і рівняння (3.22) з урахуванням визначень (3.21) може бути приведене до вигляду:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \left(\frac{16\pi e^2 \nu}{3} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon \varepsilon^{3/2}}{1 + e^{(\varepsilon - \psi)/T}} \right)^{1/2}, \quad (3.23)$$

У роботі [3] показано, що в найзагальнішому випадку газ електронів може бути виродженим поблизу поверхні діелектрика і невиродженим на

значній відстані від цієї поверхні. Ситуація з виродженням газу електронів визначається, природно, температурою, концентрацією частинок і напруженістю зовнішнього притискуючого поля. Якщо ж параметри системи такі, що газ електронів є невиродженим поблизу поверхні діелектрика, то він невироджений і у всьому просторі над діелектриком. У цій роботі ми будемо розглядати саме таку ситуацію. У цьому випадку функція розподілу електронів повинна бути близькою до Больцманівської функції розподілу (див. [73]):

$$\frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \psi)/T}} \approx e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \psi)/T}, \quad (3.24)$$

відповідно до чого вираз для розподілу концентрації газу за координатою z набуває вигляду (див. [1, 3]):

$$n(z) \equiv \nu \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon \varepsilon^{1/2}}{1 + e^{(\varepsilon - \psi(z))/T}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \nu T^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\psi}{T}}. \quad (3.25)$$

Слід пояснити, що ліва частина формули (3.25), яка визначає концентрацію числа заряджених частинок над плоскою поверхнею діелектрика, виходить з рівняння (2.45) та вимоги

$$\int d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \int d\boldsymbol{\rho} \int_0^{\infty} dz \int \frac{d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(z)}{(2\pi\hbar)^3} = S \int_0^{\infty} dz n(z) = N, \quad (3.26)$$

з урахуванням (2.45) (N - повне число частинок у системі, S - площа плоскої поверхні діелектрика). Насправді рівність (3.26) є наближеною, оскільки певна частина зарядів пов'язана з просторово-періодичною структурою поверхні рідкого діелектрика. Однак, відповідно до (2.34)-(2.41) ми вважаємо, що число таких частинок мале у порівнянні з загальним числом зарядів над поверхнею плівки рідкого діелектрика.

Використовуючи формули (3.24), (3.25), не складає труднощів переконатися в тому, що рівняння (3.23) у випадку невиродженого газу електронів над поверхнею діелектрика має аналітичний розв'язок, який можна записати у вигляді:

$$e^{\frac{\psi}{T}} = \frac{4T^2 B^{-1}}{(z - \bar{\xi} + C_2)^2}, \quad B \equiv 4\pi^{\frac{3}{2}} T^{\frac{5}{2}} e^2 \nu. \quad (3.27)$$

Для визначення константи інтегрування C_2 в (3.27) використаємо рівняння (3.26). Підставляючи в нього формулу (3.25) з урахуванням виразу (3.27) після нескладних перетворень отримаємо:

$$n_s = \int_{\xi}^{\infty} dz n(z) = \frac{T}{2\pi e^2 C_2}, \quad (3.28)$$

де $n_s \equiv \frac{N}{S}$ - число об'ємних зарядів, що припадають на одиницю площі плоскої поверхні діелектрика. Розв'язок (3.27), (3.28) дає можливість визначити і залежність напруженості електричного поля $E_1(z) = -\frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z}$ від координати z над поверхнею рідкого діелектрика $z = \bar{\xi}$

$$E_1(z) = \frac{E_0}{1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_0}}, \quad E_0 = 4\pi e n_s, \quad z_0 = \frac{T}{4\pi e^2 n_s}, \quad (3.29)$$

а також розподіл концентрації електронів $n(z)$:

$$n(z) = \frac{n_s}{2z_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_0}\right)^2}. \quad (3.30)$$

Останній результат узгоджується з виразом для концентрації зарядів, отриманим у роботі [75].

Вираз для концентрації (3.30) дозволяє дати фізичне трактування параметру z_0 . З цією метою наведемо залежність величини $\Delta(z) = \frac{1}{n_s} \int_{\bar{\xi}}^z n(x) dx$ від відстані до поверхні z . Дана величина характеризує частку частинок, що знаходяться на висоті не вище z від поверхні (див. рис. 3.1) від повного числа частинок над поверхнею діелектрика.

Із залежності (3.30) витікає, що величина $\Delta(\bar{\xi} + 2z_0) = 0,5$ (див. рис. 3.1). Іншими словами, на відстані $2z_0$ від поверхні діелектрика міститься половина всіх частинок системи. Значення $\Delta(\bar{\xi} + 20z_0) \approx 0,9$ та $\Delta(\bar{\xi} + 200z_0) \approx 0,99$, дають можливість вважати, що на відстані $\bar{\xi} + 20z_0$ від поверхні діелектрика (не кажучи вже про $\bar{\xi} + 200z_0$) частинки практично відсутні (з точністю 10 і 1 відсотків відповідно). В області електричних полів і температур, які відповідають умові невинороженості газу зарядів (3.24), величина $2z_0$ має порядок 10 ангстрем.

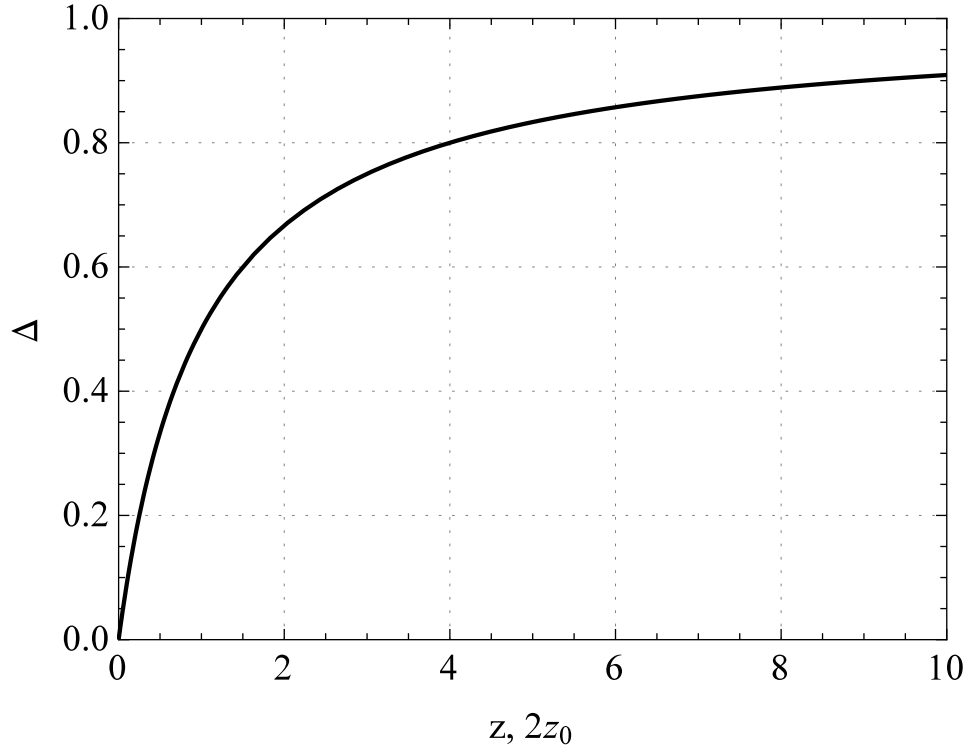


Рис. 3.1. Частка зарядів, що знаходяться на висоті не вище z від поверхні діелектрика.

Потенціали сумарного електричного поля і зовнішнього електричного поля в плівці рідкого діелектрика і твердій підкладці відповідно до формул (2.45), (2.47)-(2.49), (3.29) визначаються виразами:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_1(z) &= \varphi_0 - 2E_0z_0 \ln(1 + (z - \bar{\xi})/2z_0), & \bar{\varphi}_2(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0, \\
 \bar{\varphi}_3(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E_0}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0, & \bar{\varphi}_1^{(e)}(z) &= -E^{(e)} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, \\
 \bar{\varphi}_2^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, & \bar{\varphi}_3^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

де введено позначення $\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi} \equiv \varphi_0$, $\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)} \equiv \varphi_0^{(e)}$.

На основі отриманих формул (3.29), (3.31) визначається і зниження рівня поверхні $\bar{\xi}$ у термінах параметрів задачі, виходячи з формули (2.46) з урахуванням нерівності (3.24):

$$\bar{\xi} = -\frac{E_0^2}{8\pi\alpha\kappa^2}. \tag{3.32}$$

Відзначимо, що за відсутності зарядів відповідно до рівняння (3.32)

величина $\bar{\xi}$, як і має бути, дорівнює нулю. Рівняння (3.32) дозволяє накласти природне обмеження на величину притискуючого електричного поля, і як наслідок - на допустиму поверхневу концентрацію електронів. Дійсно, у рівноважному стані системи, що описується рівняннями самоузгодження (2.30)-(2.32), глибина просідання поверхні плівки рідкого діелектрика повинна бути істотно меншою за абсолютною величиною, ніж товщина плівки:

$$|\bar{\xi}| \ll d. \quad (3.33)$$

Ця умова дозволяє визначити певне максимальне значення притискуючого поля, що значно перевищує значення полів, які ми будемо розглядати

$$E_0 \ll E_0^m, \quad E_0^m = 2\kappa\sqrt{2\pi\alpha d}. \quad (3.34)$$

Наприклад для плівки рідкого гелію товщиною $d = 0,1$ см, величина $E_0^m \approx 5,4 \cdot 10^3$ В/см, або у перерахунку на поверхневу концентрацію електронів (див. (3.12)) $n_s^m \approx 2,85 \cdot 10^9$ см⁻². Остання величина добре узгоджується з відомим значенням поверхневої концентрації електронів $n_s^{cr} \approx 2 \cdot 10^9$ см⁻², вище якої електрони починають провалюватися в гелій, утворюючи так звані бульбашки [27]. Іншими словами, для виконання нерівності (3.33) необхідні такі значення притискуючих полів, при яких $n_s \leq 10^9$ см⁻².

У термінах введених вище величин може бути сформульований і критерій невідродженості електронного газу над поверхнею плівки рідкого діелектрика (див. (3.24), (3.27)):

$$2^{3/2} n_s^2 a_0^4 \left(\frac{\pi e^2}{T a_0} \right)^{5/2} \ll 1. \quad (3.35)$$

Видно, що ця нерівність порушується у випадку низьких температур і сильних зовнішніх притискуючих полів (див. у зв'язку з цим [1]).

Отримані вирази (3.29) - (3.35) і є розв'язком задачі про розподіл невідродженого газу електронів і полів над плоскою поверхнею рідкого діелектрика за присутності зовнішнього притискуючого поля в електронейтральному випадку. У наступному розділі отримані вирази і нерівності будуть використані для вивчення умов формування

просторово-періодичних станів у розглянутій системі, що виникли в результаті фазового переходу.

3.3. Квазінейтральна система зарядів над плоскою поверхнею плівки рідкого діелектрика. Вихід за межі статистики Больцмана.

Розгляд квазінейтральних систем у дисертаційній роботі зумовлений досить частою реалізацією таких умов в експерименті [19, 20, 34, 42, 43], що дозволяє встановити чіткий зв'язок між зовнішнім притискуючим полем і числом частинок. Задачу «зарядженої» системи зручніше розглядати у випадку масивних плівок рідкого діелектрика, де є обмеження на максимально припустиме значення концентрації частинок. У таких випадках варто розглядати притискуюче поле як незалежний параметр і досліджувати фазовий перехід за ним, зафіксувавши число частинок. У випадку тонких плівок діелектрика таке обмеження значно слабкіше [76]. Однак, зважаючи на збільшення концентрації частинок при цьому, може виникнути потреба виходу за межі Больцманівської статистики і деякого ускладнення теорії. Відзначимо, що більш коректне дослідження таких систем в області великих концентрацій і малих температур може викликати потребу врахування квантових ефектів, наприклад, обмінної взаємодії частинок. Однак розгляд цього питання виходить за межі дисертаційної роботи.

При розв'язку системи рівнянь (2.45) - (2.48) будемо дотримуватись методики попередніх підрозділів і роботи [1], де подібна задача розглядалася для випадку розподілу невиродженого газу зарядів над плоскою поверхнею твердого діелектрика. Різниця в описі системи зарядів над плоскою поверхнею твердого та рідкого діелектрика полягає в тому, що у випадку твердого діелектрика координата z плоскої поверхні залишається фіксованою, а як буде показано нижче, поверхня рідкого діелектрика буде «просідати» під дією додаткового тиску, що створюється системою зарядів. Схожа задача про розподіл невиродженого електронного газу всередині

плоского конденсатора, обкладки якого вкриті плоским діелектричним шаром, була розв'язана у роботі [77], де автори отримали розподіл невродженого електронного газу всередині плоского конденсатора з пластинами, вкритими плоским шаром діелектрика. Однак у цій роботі розглядається випадок не тільки електронної системи, але загальної статистики фермі-частинок.

Щоб розв'язати перше рівняння у (2.45), його зручно переписати у наступному вигляді:

$$\bar{\varphi}_1''(z) = 4\pi e\nu \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \psi}{T}\right)^{-1}, \quad (3.36)$$

де введені позначення:

Порядок рівняння (3.36) може бути знижений, див. [3]. В результаті можна прийти до рівняння

$$\bar{\varphi}_1'(z) = - \left\{ \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon \varepsilon^{3/2}}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \psi}{T}}} + C_1 \right\}^{1/2}, \quad (3.37)$$

де C_1 - деяка довільна стала інтегрування. Відзначимо, що знак перед коренем в цьому рівнянні, як і в попередніх розглянутих випадках, повинен обиратися з таких міркувань: сила, що діє на негативні заряди при $z > \bar{\xi}$, повинна притискувати ці заряди до поверхні діелектрика. Рівняння (3.37) може бути значно спрощено, якщо врахувати квазінейтральність даної системи. Справді, умова квазінейтральності системи передбачає, що на нескінченності часток немає, звідки (див. (2.45))

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} (\exp \beta(\varepsilon - \psi) + 1)^{-1} = 0.$$

з урахуванням чого з (3.37) отримаємо

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}_1'(z) = -\sqrt{C_1}.$$

Беручи до уваги, що у квазінейтральному випадку на нескінченності повне електричне поле E_{∞} має дорівнювати нулю, приходимо до висновку, що

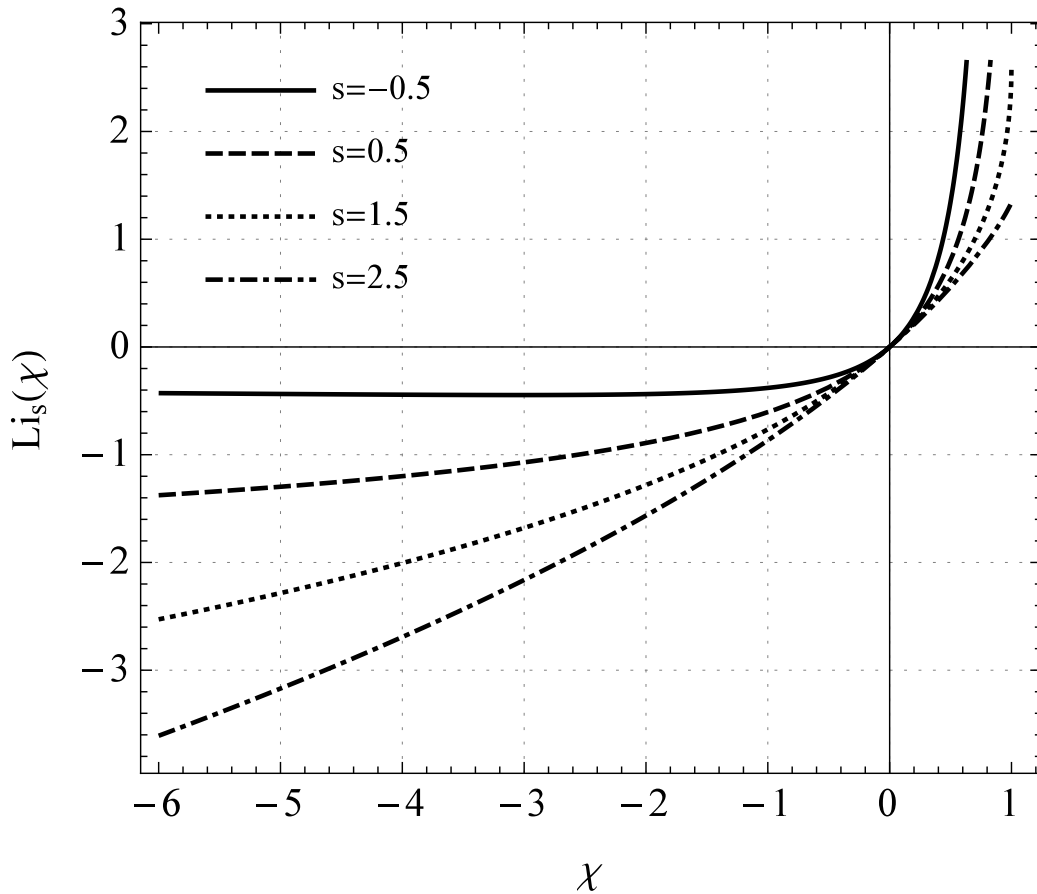


Рис. 3.2. Полілогарифмічні функції $Li_s(\chi)$ при різних значеннях порядку s .

константа $C_1 = 0$, і рівняння (3.37) може бути приведенне до вигляду:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\frac{2^{5/4}}{a_0} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/4} (-Li_{5/2}(-e^\chi))^{1/2}, \quad \chi = \psi/T. \quad (3.38)$$

де використана спеціальна функція полілогарифм $Li_s(\chi)$, пов'язана з інтегралом Фермі-Дірака $I_s(\chi)$ таким співвідношенням:

$$I_s(\chi) = -Li_{s+1}(-e^\chi), \quad I_s(\chi) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty \frac{x^s dx}{1 + e^{x-\chi}}. \quad (3.39)$$

Характер залежності полілогарифма від аргументу при різних значеннях параметра s проілюстрований на рис. 3.2. Інтегрування рівняння (3.38) вимагає залучення чисельних методів. В окремих необхідних випадках вони будуть задіяні нижче. Однак, як побачимо далі, ряд важливих результатів,

таких, наприклад, як зв'язок між критичними параметрами фазового переходу, умова квазінейтральності і т.д. може бути отримано в аналітичному вигляді без обчислення явної залежності від z величин, що до них входять. До питання обчислення цієї залежності таких важливих параметрів як електричне поле, концентрація $n(z)$ і потенціал $\chi(z)$ електричного поля $E_1(z)$ ми повернемося трохи нижче.

У роботі [1] показано, що в найзагальнішому випадку газ електронів може бути виродженим поблизу поверхні діелектрика і невиродженим на значній відстані від цієї поверхні. Ситуація з виродженням газу електронів визначається, природно, температурою, концентрацією частинок і напруженістю зовнішнього притискуючого поля. У данному підрозділі (на відміну від [3, 4]) ми проаналізуємо ситуацію з фазовим переходом у більш загальному випадку, коли газ описується функцією розподілу (2.32).

Вираз для розподілу концентрації газу зарядів як функції χ згідно з (2.45), (3.39) може бути представлений у вигляді (див. [1, 3]):

$$n(z) = -\left(\frac{Ta_0}{\pi e^2}\right)^{3/2} \frac{Li_{3/2}(-e^{\chi(z)})}{\sqrt{2}a_0^3}. \quad (3.40)$$

Відзначимо, що вираз (3.40) також є наслідком нормування функції розподілу (2.45) на повне число зарядів над поверхнею:

$$\int d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \int d\boldsymbol{\rho} \int_0^{\infty} dz \int \frac{d\mathbf{p} f_{\mathbf{p}}(z)}{(2\pi\hbar)^3} = S \int_0^{\infty} dz n(z) = N. \quad (3.41)$$

з урахуванням (2.45) (N - повне число зарядів в системі, S - площа плоскої поверхні діелектрика). Насправді рівність (3.41) є наближеним, оскільки певна частина зарядів пов'язана з просторово-періодичною структурою поверхні рідкого діелектрика. Однак, відповідно до (2.35), (2.41) вважається, що число таких частинок мале у порівнянні із загальним числом зарядів N над поверхнею плівки рідкого діелектрика.

Пов'яжемо значення хімічного потенціалу μ , що входить в $\psi(z)$ з повним числом зарядів у системі, що припадають на одиницю площі плоскої поверхні

діелектрика. Згідно з (3.41) маємо:

$$n_s = \int_{\xi}^{\infty} dz n(z) = \frac{N}{S}. \quad (3.42)$$

Використовуючи (3.39), перейдемо в (3.42) від інтегрування за z до інтегрування за χ . Тоді враховуючи (3.40), після нескладних перетворень отримаємо:

$$n_s = \left(\frac{Ta_0}{\pi e^2} \right)^{5/4} \frac{(-Li_{5/2}(-e^{\chi_0}))^{1/2}}{2^{3/4} a_0^2}, \quad (3.43)$$

де враховане наступне співвідношення

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \chi = -\infty, \quad (3.44)$$

справедливе завдяки тому, що інакше величина $\sqrt{|Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi(\infty)})|}$, а отже і функція розподілу зарядів на нескінченності буде відмінною від нуля. А це означало б наявність заряджених частинок на нескінченності і суперечило б зробленому нами раніше припущенню про їхню там відсутність. Тим самим порушувалася б сама умова квазінейтральності.

Рівняння (3.43) дозволяє чисельно визначити залежність $\chi(z = \bar{\xi}) = \chi_0$ від температури T і від числа зарядів над одиницею площі поверхні діелектрика n_s . Графічно ця залежність представлена на рис. 3.3.

Враховуючи, що $E_1(z) = -\bar{\varphi}'_1(z)$, а також співвідношення (3.38), отримаємо

$$4\pi e n_s = E_1(z = \bar{\xi}) \equiv E_0. \quad (3.45)$$

Таким чином, поле на поверхні діелектрика еквівалентно значенню електричного поля всередині плоского конденсатора з поверхневою густиною заряду обкладок σ , що дорівнює за модулем $\sigma = e n_s$.

Для розв'язку рівнянь (2.45) - (2.48) з граничними умовами (2.49) необхідно встановити зв'язок між значеннями зовнішнього $E_1^{(e)}(z) = -\bar{\varphi}_1^{(e)'}(z)$ і повного електричного поля $E_1(z) = -\bar{\varphi}'_1(z)$. У

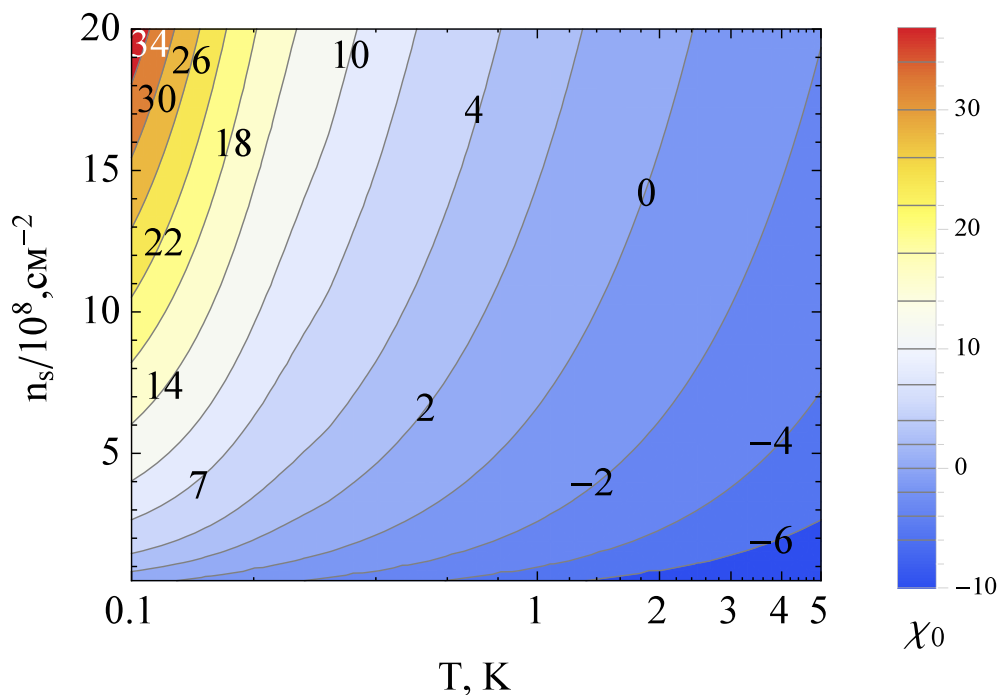


Рис. 3.3. Залежність величини безрозмірного електрохімічного потенціалу на поверхні діелектрика $\chi_0 = \chi(z = \bar{\xi})$ від кількості зарядів над одиницею площі поверхні діелектрика n_s і температури T .

випадку присутності заряджених частинок над поверхнею діелектрика, вони вносять вклад в повне поле $E_1(z) = E_1^{(i)}(z) + E_1^{(e)}(z)$ за допомогою створюваного ними поля $E_1^{(i)}(z) = -\bar{\varphi}_1^{(i)'}(z)$ і встановити зв'язок між $E_1^{(i)}(z)$ і зовнішнім притискаючим полем $E_1^{(e)}(z)$. Знаючи розподіл частинок над поверхнею діелектрика (3.40), неважко обчислити поле, створюване ними на відстані h від поверхні діелектрика. Отже, z -компонента електричного поля у точці $(x, y, z - \bar{\xi})$, що створюється елементарним об'ємом частинок $dx'dy'dz'$ у точці з координатами (x', y', z') , дорівнює:

$$dE_{1z}^{(i)}(z) = -\frac{(z - z') en(z') dx'dy'dz'}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{3/2}}. \quad (3.46)$$

Знак мінус у рівнянні (3.46) відображає негативну величину заряду частинки (електрона). З огляду на нескінченність протяжності системи уздовж координат (x, y) , відповідні їм проекції електричного поля

$dE_{1x}^{(i)}, dE_{1y}^{(i)}$, при інтегруванні по всьому об'єму над поверхнею діелектрика дадуть нуль. Тому поле, створюване частинками над поверхнею діелектрика, має тільки z -компоненту і може бути обчислено інтеграцією рівняння (3.46) по всьому об'єму над поверхнею діелектрика

$$E_{1z}^{(i)}(z) = \int_{V_1} dE_{1z}^{(i)}(z). \quad (3.47)$$

Переходячи в (3.47) від інтегрування за декартовими координатами (x, y) до інтегрування за полярними (ρ, φ) , і виконуючи інтегрування за ними, ми отримаємо

$$E_{1z}^{(i)}(z) = -2\pi e \left(\int_{\bar{\xi}}^z dz' n(z') - \int_z^{\infty} dz' n(z') \right). \quad (3.48)$$

Обчислення інтегралів в (3.48) вимагає залучення чисельних методів, в результаті чого може бути побудовано рис. 3.4. На цьому рисунку зображена залежність електричного поля $E^{(i)}(z)$ (див. (3.48)), що створюється зарядами над поверхнею діелектрика в трьох випадках пар значень T та n_s , вибір яких буде пояснений нижче у даному розділі. Дамо просту фізичну інтерпретацію здобутого виразу (3.48), розглянувши його граничні випадки. Згідно з визначенням величини n_s в (3.42) ми отримуємо два граничних випадки. У першому, на поверхні діелектрика $z \rightarrow \bar{\xi}$ або $h \rightarrow 0$, ми отримуємо $E_{1z}^{(i)}(z = \bar{\xi}) = 2\pi e n_s$. У другому випадку $h, z \rightarrow +\infty$ та $E_{1z}^{(i)}(h, z \rightarrow +\infty) = -2\pi e n_s$. У цьому сенсі поля, що створюються зарядами по обидві сторони від їх локалізації (тобто в першому випадку всі заряди знаходяться вище точки спостереження, у другому - нижче), еквівалентні полю зарядженої пластинки з поверхневою густиною заряду $\sigma = e n_s$. Як і в разі стрибка електричного поля на величину $4\pi\sigma$ при переході через заряджену поверхню, так і абсолютна величина різниці між значеннями поля $E_1^{(i)}(z)$ на поверхні діелектрика $z = \bar{\xi}$ і на нескінченності $z \rightarrow +\infty$ складає $4\pi e n_s$. Те ж саме можна сказати і про зміну значення повного поля $E_1(z)$ в зазначених точках (див. (3.40)), оскільки поля $E_1^{(i)}(z)$

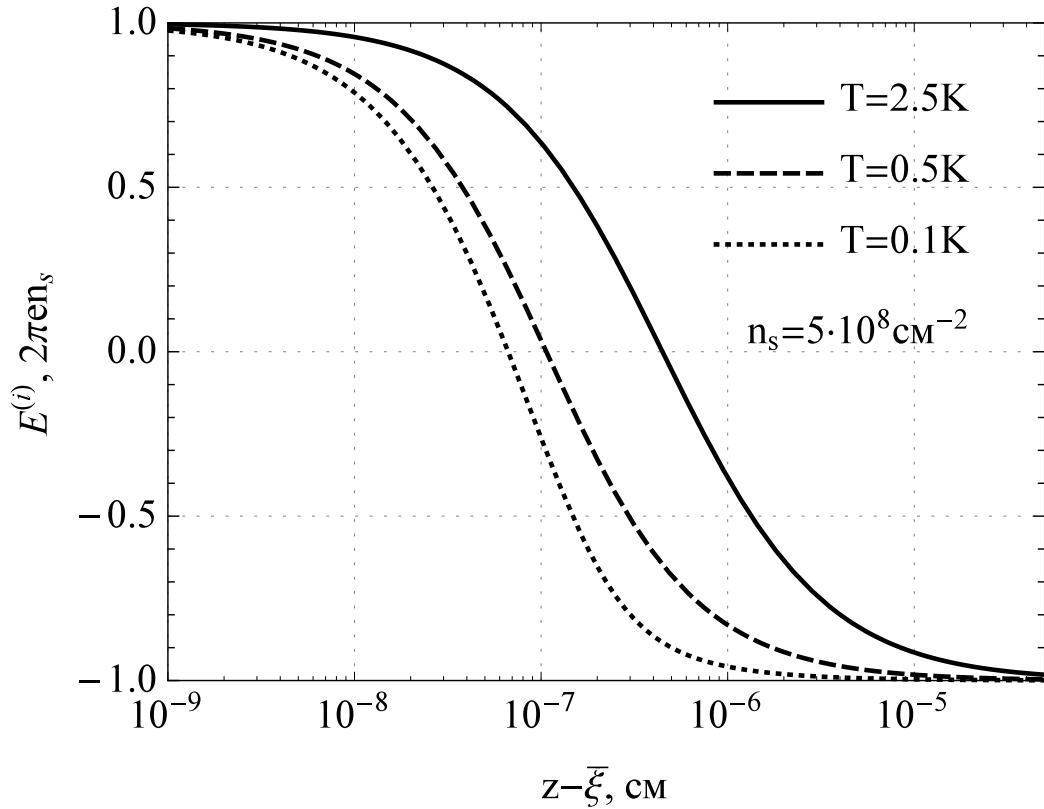


Рис. 3.4. Електричне поле, що створюється зарядженими частинками $E^{(i)}(z)$, при різних парах значень температури T і числа частинок на одиницю поверхні діелектрика n_s .

та $E_1(z)$ відрізняються на постійну величину зовнішнього поля $E_1^{(e)} = E_1(z) - E_1^{(i)}(z) \equiv E^{(e)}$. Останнє дійсно постійне, так як $\Delta\varphi_1^{(e)}(\mathbf{r}) = 0$ (див. (2.30)). Можна також чисельно визначити точку z_σ над поверхнею діелектрика, в якій $E_1^{(i)}(z_\sigma) = 0$ і $E_1^{(e)} = E_1(z_\sigma)$ (див. рис. 3.5). При фіксованому значенні $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2}$, $z_\sigma \approx 4,47 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ для $T = 2,5 \text{ K}$, $z_\sigma \approx 1,07 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ для $T = 0,5 \text{ K}$, $z_\sigma \approx 6,66 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ для $T = 0,1 \text{ K}$. Однак простіше визначити величину зовнішнього поля, як різницю повного поля і поля, що створюється зарядами, на нескінченності:

$$E^{(e)} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(E_1(z) - E_1^{(i)}(z) \right) = E_\infty + 2\pi e n_s, \quad (3.49)$$

У розглянутому нами електронейтральному випадку $E_\infty = 0$, отже рівняння (3.49) набуває вигляду:

$$E^{(e)} = 2\pi e n_s. \quad (3.50)$$

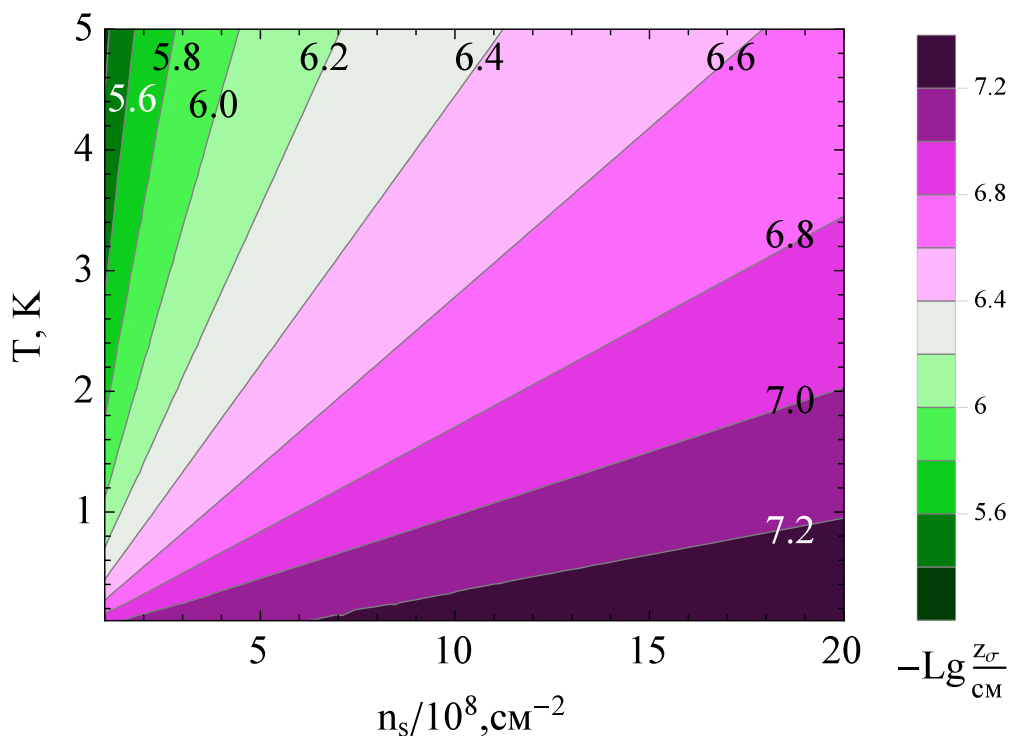


Рис. 3.5. Відстань від поверхні діелектрика z_σ , де поля, що створюються всіма частинками взаємокомпенсуються $E_1^{(i)}(z_\sigma) = 0$.

Тут доречно зробити наступне важливе зауваження. Отримані вирази для електричних полів (3.45) та (3.50) використовуються у запропонованій теорії даної статті, однак при порівнянні з експериментальними даними інших робіт [19, 20, 34, 43] вони можуть привести до деякої кількісної розбіжності чисельних оцінок. Це пов'язано з тим, що на практиці вимірюваною величиною є різниця потенціалів на обкладинках конденсатора, яке створюється зовнішнім полем, що притискує заряди, а не величина цього поля всередині конденсатора. Проаналізуємо зв'язок між різницею потенціалів на обкладках конденсатора і параметром n_s в умовах квазінейтральності системи. За відсутності зарядів всередині плоского горизонтального конденсатора, нижня з обкладок якого опущена у рідкий діелектрик на глибину d , а верхня знаходиться на нескінченній відстані від поверхні діелектрика, подається різниця потенціалів $\Delta U^{(e)} = \bar{\varphi}_1^{(e)}(+\infty) - \bar{\varphi}_2^{(e)}(-d)$. Ця різниця потенціалів створює електричне поле $E_1^{(e)}$ над діелектриком і $E_1^{(e)}/\epsilon$ всередині нього. Далі у простір над

діелектриком інjektується така кількість зарядів, яка нейтралізує початкове поле $E^{(e)}$ всередині конденсатора біля його верхньої обкладки. Як показано вище, $E^{(e)}$ і n_s пов'язані співвідношенням (3.50). Поява зарядів також збільшує величину електричного поля на поверхні діелектрика і всередині нього до величин E_0 та E_0/ε відповідно (див. (3.45)). Різниця потенціалів на обкладках конденсатора тепер стає рівною $\Delta U = \bar{\varphi}_1(+\infty) - \bar{\varphi}_2(-d)$. Як правило у роботах (див. [34, 36, 75]) вважається, що електричне над діелектриком дорівнює нулю, а отже падіння напруги ΔU припадає на рідкий діелектрик (тому що, якщо поле над діелектриком дорівнює нулю, то потенціали верхньої обкладки і поверхні рідкого діелектрика співпадають). Отже, електричне поле у діелектрику буде рівним $\Delta U/d$. З іншого боку, як показано раніше, це поле дорівнює E_0/ε . Тоді згідно з (3.45), матимемо:

$$\Delta U/d = 4\pi en_s/\varepsilon. \quad (3.51)$$

Якщо врахувати, що роль рідкого діелектрика грає гелій, діелектрична проникність якого близька до одиниці, то нерідко у літературі [36, 75] можна зустріти вираз для притискуючого поля у конденсаторі, що дорівнює $E^{(e)} = 4\pi en_s$. У подібних випадках для порівняння здобутих нами результатів з експериментальними, ми будемо порівнювати n_s з експериментальним значенням $n_s = E^{(e)}/(4\pi e)$. Що ж стосується твердження про те, що електричне поле дорівнює нулю у всій області над діелектриком і, отже, падіння напруги в ній дорівнює нулю, то воно може бути наближено справедливим. Дійсно, $\Delta U = T(\chi(+\infty) - \chi_0)/e + 4\pi en_s d/\varepsilon$, де другий доданок визначає падіння напруги між поверхнею діелектрика і верхньої обкладкою конденсатора. При $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ і $T = 2,5 \text{ K}$ ми одержуємо $4\pi en_s d/\varepsilon \approx 10^{-3} \text{ V}$, а падіння напруги на макроскопічній відстані від поверхні діелектрика, наприклад $z = 10 \text{ см}$, складає $7,9 \cdot 10^{-8} \text{ V}$. Дана обставина дозволяє використовувати (3.51) з високим ступенем точності.

Потенціали сумарного електричного поля і зовнішнього електричного поля у плівці рідкого діелектрика і твердій підкладці відповідно до

формул (2.47) - (2.49), (3.45), (3.50) - (3.58) визначаються виразами:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_2(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0, & \bar{\varphi}_3(z) &= -\frac{E_0}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E_0}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0, \\ \bar{\varphi}_1^{(e)}(z) &= -E^{(e)} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, & \bar{\varphi}_2^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, \\ \bar{\varphi}_3^{(e)}(z) &= -\frac{E^{(e)}}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E^{(e)}}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)},\end{aligned}\quad (3.52)$$

де введено позначення $\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi} \equiv \varphi_0$, $\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)} \equiv \varphi_0^{(e)}$.

На основі отриманих формул (3.45), (3.50), (3.52) визначається і зниження рівня поверхні $\bar{\xi}$ в термінах параметрів задачі, виходячи з формули (2.46) з урахуванням нерівності (3.39):

$$\bar{\xi} = -\frac{(4\pi en_s)^2}{8\pi\alpha(\kappa(d))^2} \left(1 + \frac{3}{4\varepsilon}\right). \quad (3.53)$$

Відзначимо, що за відсутності зарядів відповідно до (3.53) величина $\bar{\xi}$, як і має бути, дорівнює нулю. Величина подібного просідання поверхні добре узгоджується з експериментом [65]. Рівняння (3.53) дозволяє накласти природне обмеження на величину притискуючого електричного поля, і як наслідок - на припустиму поверхневу концентрацію електронів. Дійсно, у рівноважному стані системи, що описується рівняннями самоузгодження (2.30) - (2.32), глибина просідання поверхні плівки рідкого діелектрика повинна бути істотно меншою за абсолютною величиною, ніж товщина плівки (або принаймні меншою в кілька разів):

$$|\bar{\xi}| \ll d. \quad (3.54)$$

Ця умова дозволяє визначити деяке максимальне значення притискуючого поля (або згідно з (3.50), відповідне йому значення n_s в електронейтральному випадку), що значно перевищує значення полів, які ми будемо розглядати. З огляду на рівняння (3.50), визначимо гранично припустиме значення n_s^m , відповідне максимально припустимому значенню притискуючого поля:

$$n_s \ll n_s^m, \quad n_s^m < \frac{\kappa(d) \sqrt{\alpha d / (2\pi)}}{e \sqrt{1 + 3/(4\varepsilon)}}. \quad (3.55)$$

У разі макроскопічних розмірів товщини плівки або, як прийнято говорити, масивного гелію величина κ практично не залежить від d , що дозволяє оцінити значення n_s^m . Наприклад, для плівки рідкого гелію товщиною $d = 0,1$ см, величина $n_s^m \approx 2,18 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$, що можна порівняти з величиною $n_s^{cr} \approx 2,2 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$ [63], що визначає умову нестійкості однорідної системи електронів над плоскою поверхнею рідкого гелію. Під нестійкістю у такій системі розуміється поява статичної деформації поверхні рідкого гелію періодичного характеру в результаті утворення стоячих гравітаційних хвиль (див. також [64]). Слід, однак, врахувати, що величина κ може сильно залежати від товщини плівки d , Наприклад, для рідкого гелію ця залежність має вигляд [78]:

$$\kappa(d) = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha} \left(g + \frac{g_0 d_v}{d^4 (d + d_v)} \left(3 + \frac{d}{d + d_v} \right) \right)}, \quad (3.56)$$

де $d_v = 1,65 \cdot 10^{-5}$ см, а $g_0 = 2,2 \cdot 10^{-14} \text{см}^5 \cdot \text{с}^{-2}$. Звідси витікає, що у ряді випадків така залежність згідно з (3.53) повинна враховуватися при аналізі умови стійкості (3.53). Діаграми, які ілюструють виконання умови (3.54) стійкості системи, наведені на рис. 3.6, у площині $\{d, n_s\}$ у випадку масивного гелію (рис. 3.6) і тонких плівок, які враховують ефекти (3.56). На діаграмах сірим кольором відзначені області, де співвідношення $|\xi|/d < 1$ в обох випадках менше за одиницю. Іншими словами, відповідно до нашої теорії, ці області і є областями стійкості системи по відношенню до деформацій поверхні під тиском газу зарядів. Лінія, що розділяє сіру і білу області, відповідає рівності $|\bar{\xi}| = d$. На рис. 3.7 збережено лінію $|\bar{\xi}| = d$ із рис. 3.6 для ілюстрації зміщення області стійкості для тонких плівок у порівнянні з випадком масивного гелію. Рис. 3.6 показує, що гелій може вважатися «масивним» при товщині плівок більше, ніж $5 \cdot 10^{-2}$ см. Як легко бачити, в цьому випадку запропонований розгляд справедливий (умова (3.54) дотримується) в інтервалі $n_s \sim 10^8 \div 2 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$. Відзначимо також, що графік на рис. 3.6 добре узгоджується з даними роботи [79]. У цій роботі здобуто зв'язок між максимально припустимою величиною n_s , при якій поверхня діелектричної плівки залишається плоскою, і її товщиною d

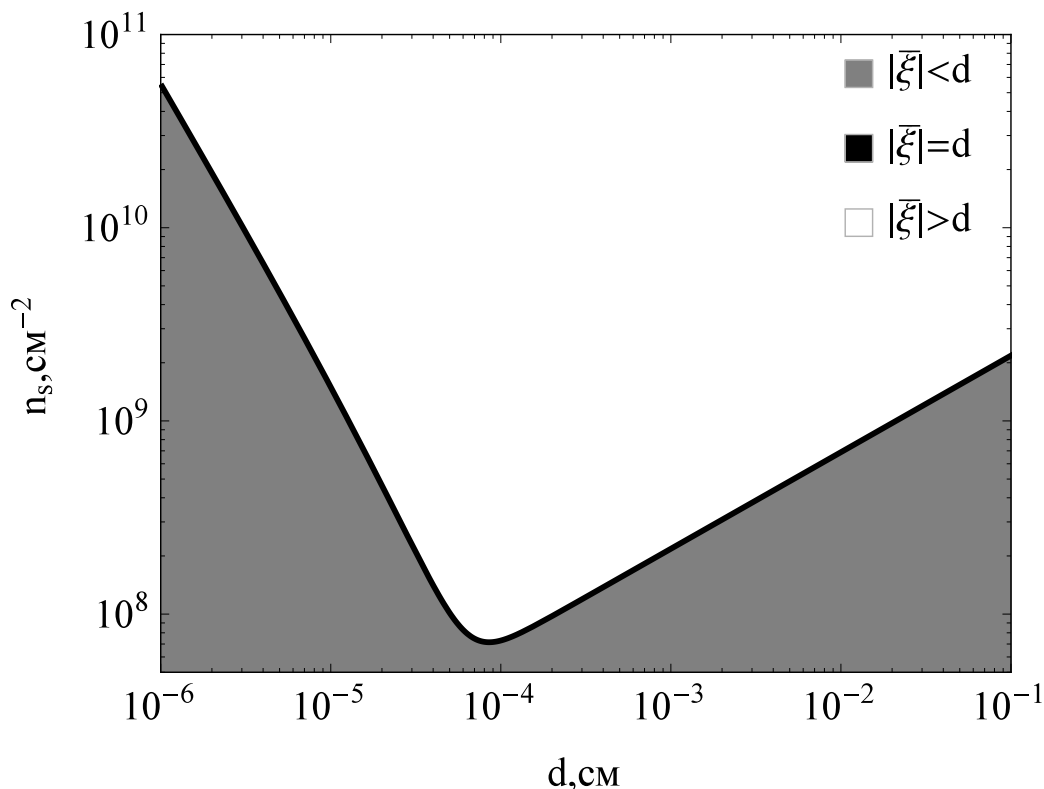


Рис. 3.6. Діаграма стійкості плоскої поверхні гелієвої плівки до деформацій, що порушують її рівновагу в площині $\{d, n_s\}$.

на підставі розв'язку задачі про стійкість малих коливань у такій системі.

Зі зменшенням товщини плівки внесок в κ від гравітаційних сил зменшується і зростає внесок сил Ван дер Ваальса. Цей процес конкуренції закінчується при $d \sim d_v$, коли гравітаційні сили, що діють на атоми рідкого діелектрика, стають нехтовно малими у порівнянні з силами Ван дер Ваальса (див. рис. 3.7).

Відповідно до рівняння (3.56) залежність $\bar{\xi}$ від d у виразі (3.53) зумовлена залежністю $\kappa(d)$. Рівняння (3.53) визначає зниження рівня поверхні гелію, тобто, товщина плівки d зменшується на величину $\bar{\xi}$. Фактично реальна товщина плівки стає рівною $d - |\bar{\xi}|$. При виконанні умови (3.54) рівняння (3.53) є справедливим. Однак, коли величина d стає одного порядку з величиною $|\bar{\xi}|$, що обчислена відповідно до (3.53), умова (3.54) порушується, і ми повинні замінити товщину плівки d в (3.53) (без урахування зовнішнього електричного поля і поля зарядів) на її

реальне значення $d - |\xi|$. Тому у такому випадку рівень поверхні $\bar{\xi}$ повинен бути розрахований виходячи з модифікації рівняння (3.53), яке враховує «ефективну» товщину плівки $d - |\xi|$:

$$\bar{\xi} = -\frac{(4\pi en_s)^2}{8\pi\alpha(\kappa(d - |\bar{\xi}|))^2} \left(1 + \frac{3}{4\varepsilon}\right). \quad (3.57)$$

Дане рівняння завдяки справедливості виразу (3.56) аналітичного розв'язку відносно $\bar{\xi}$ не має. Чисельний його розв'язок $\bar{\xi}_n$ дає область виконання природньої умови $|\bar{\xi}_n| < d$, за якої задача, що розглядається в цій роботі, зберігає сенс (система стійка щодо деформацій поверхні рідкого гелію). Ця область $|\bar{\xi}_n| < d$ зображена на рис. 3.7 нижче суцільною кривою, а область нижче пунктирної кривої відповідає випадку $d > |\bar{\xi}|$. Як видно, врахування ефективної товщини плівки рідкого діелектрика виявляється істотним в області $d < 5 \cdot 10^{-4}$ см і дещо розширює область припустимих значень у площині $\{n_s, d\}$ у порівнянні з випадком, коли цей ефект не враховувався. (див. рис. 3.6).

Відзначимо також ще одну важливу обставину. Для досить тонких плівок, товщиною $d \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ см (за відсутності притискуючого поля), при досить великих значеннях $n_s > 5 \cdot 10^{10}$ см⁻² ефективна товщина плівки $d - |\bar{\xi}_n|$ слабо залежить від d . Ця обставина відображена на рис. 3.8 і добре узгоджується з даними робіт [56, 80]. При подальшому збільшенні $n_s > 4 \cdot 10^{11}$ см⁻² значення ефективної товщини плівки діелектрика досягає величини близько 50 ангстрем, що згідно з [80] може призводити до тунелювання електронів до металевій підкладці. Однак дослідження даного ефекту виходить за межі цієї роботи. Справді, дисертаційна робота, як вказувалося вже на її початку, присвячена квазікласичному опису системи заряджених частинок у термінах функції розподілу Вігнера (2.32), що залежить одночасно від \mathbf{r} і \mathbf{p} . Із цієї причини у даному підході опис квантовомеханічного ефекту тунелювання не є можливим. Зазначимо також, що користуючись формулою (3.57) можна отримати чисельні оцінки, співставні з результатами роботи [56]. Наприклад, для плівки гелію товщиною $d < 10^{-6}$ см на металевій підкладці отримаємо значення величини

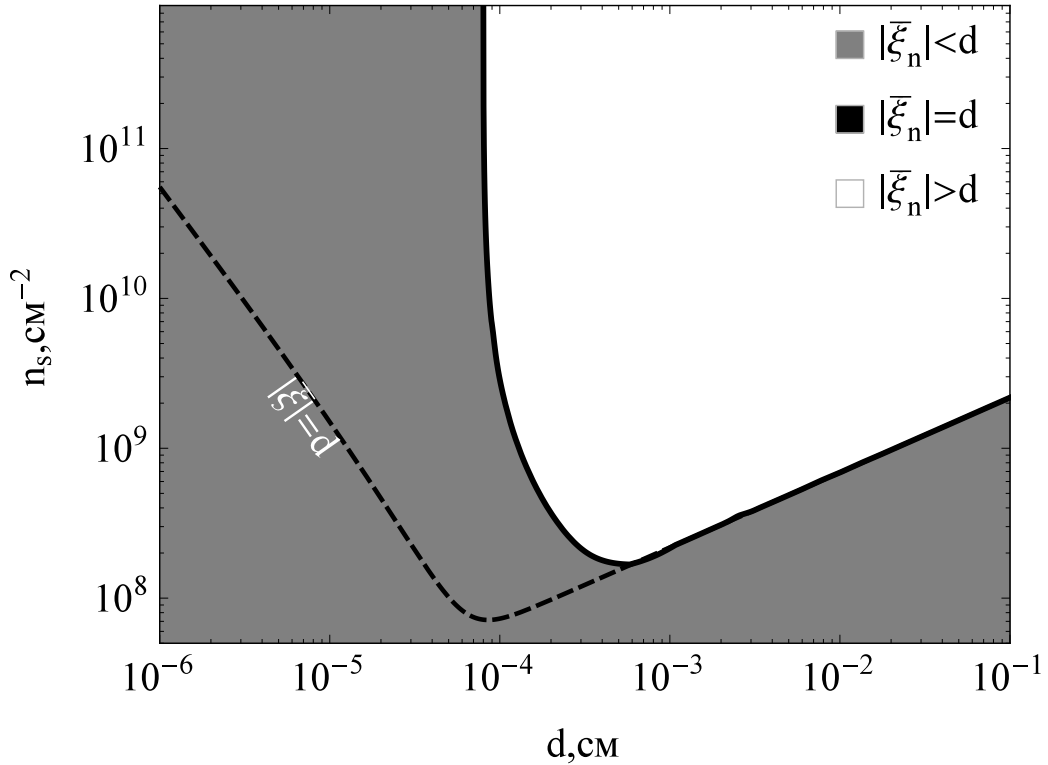


Рис. 3.7. Діаграма стійкості плоскої поверхні гелієвої плівки до деформацій, що порушують її рівновагу у площині $\{d, n_s\}$ з урахуванням «ефективної» товщини плівки (3.57).

$$n_s^m \approx 0,7 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}.$$

Що ж стосується залежності $\chi(z)$, пов'язаної з $\bar{\varphi}_1(z)$ співвідношенням (3.38), то вона визначається чисельним інтегруванням рівняння (3.38), або

$$\frac{a_0}{2^{5/4}} \left(\frac{\pi e^2}{T a_0} \right)^{1/4} \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{d\chi'}{\sqrt{-Li_{5/2}(-e^{\chi'})}} = \bar{\xi} - z. \quad (3.58)$$

Для конкретних значень T і n_s на рис. 3.9 $\chi(z)$

$$\begin{aligned} \chi_n(z) &= \chi_{n0} - 2 \ln \left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_0} \right), \\ \chi_{n0} &= \ln \left(\frac{n_s a_0^3}{\sqrt{2} z_0} \left(\frac{\pi e^2}{T a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right), \quad z_0 = \frac{T}{e E_0}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

При виборі конкретних значень пари параметрів T і n_s розглянуто три випадки, обраних за принципом їх задоволення умови невідродженості

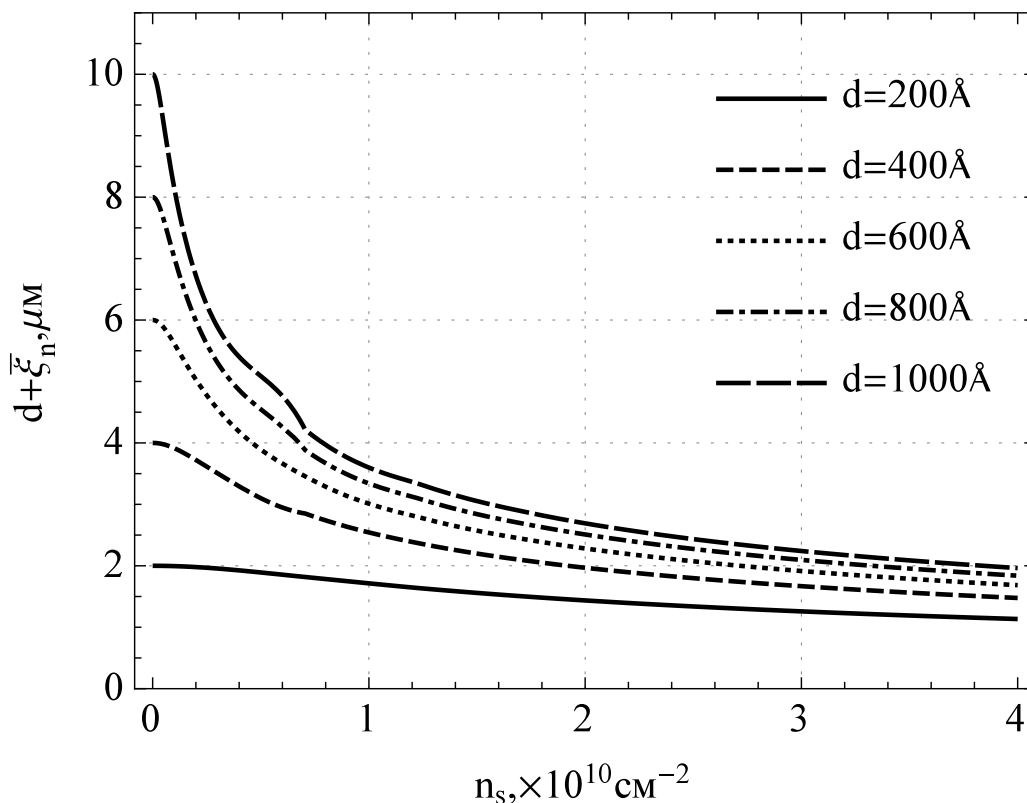


Рис. 3.8. Залежність ефективної товщини гелієвої плівки від n_s .

електронного газу [4]:

$$2^{3/2} n_s^2 a_0^4 \left(\frac{\pi e^2}{T a_0} \right)^{5/2} \ll 1. \quad (3.60)$$

У першому випадку $T = 2,5K$ і $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$, газ зарядів є невідродженим, оскільки $2^{3/2} n_s^2 a_0^4 (\pi e^2 / (T a_0))^{5/2} \approx 0.05$ і криві $\chi(z)$, $\chi_n(z)$ практично збігаються.

У другому випадку оберемо $T = 0,5K$ та $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$. При цих значеннях умова невідродженості (3.60) порушується ($2^{3/2} n_s^2 a_0^4 (\pi e^2 / (T a_0))^{5/2} \approx 2,79$), що видно на рис. 3.9. З віддаленням від поверхні концентрація газу (3.40) зменшується (див. рис. 3.11) і криві $\chi(z)$ та $\chi_n(z)$ зближуються. При $z - \bar{\xi} = 10z_0 \approx 4,45 \cdot 10^{-7} \text{см}$ відношення $\chi/\chi_n \approx 0,95$ і далі з ростом z з точністю більш ніж 95 відсотків газ зарядів може вважатися невідродженим, що виражається у фактичному збігу відповідних кривих $\chi(z)$ і $\chi_n(z)$. У третьому випадку $T = 0,1K$ і $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$ умова (3.60) сильно порушується

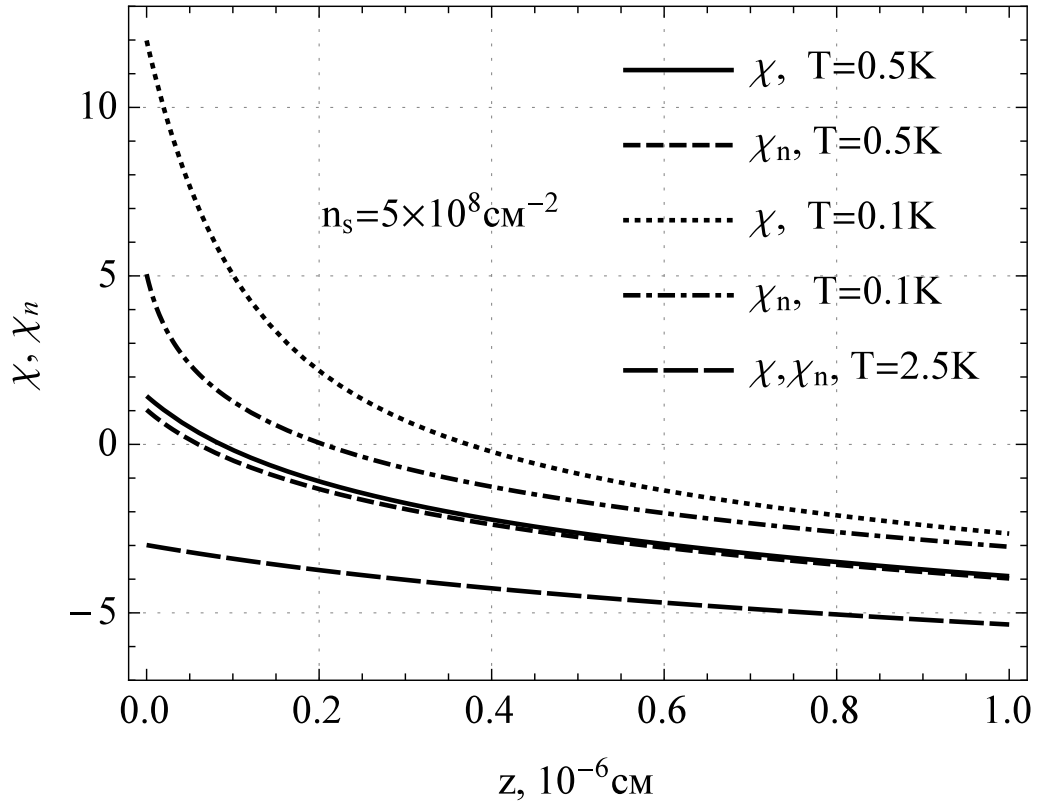


Рис. 3.9. Безрозмірний електрохімічний потенціал $\chi(z)$ у випадку загальної статистики Фермі і бoльцманівської статистики для трьох пар значень T і n_s .

$(2^{3/2}n_s^2a_0^4(\pi e^2/(Ta_0))^{5/2} \approx 156,18)$ і газ зарядів не є неvirодженим (див. рис. 3.9). Однак на відміну від попереднього випадку, газ зарядів може вважатися неvirодженим на відстані більш ніж $z - \bar{\xi} = 200z_0 \approx 1,78 \cdot 10^{-6}$ см з точністю не менше ніж 95 відсотків.

Зробимо також коментар щодо залежності електричного поля, напруженість якого $E_1(z)$ може бути отримана на основі знайденої функції $\chi(z)$ та рівняння (3.58), або дифференціюванням $E_1(z) = -\chi'(z)T/e$. Такі залежності наведені на рис. 3.10 для трьох згаданих вище випадків, поряд з залежностями $E_n(z)$ для неvirодженого газу, здобутих у роботі [4]:

$$E_n(z) = E_0 / (1 + (z - \bar{\xi}) / (2z_0)). \quad (3.61)$$

Відзначимо тут ту обставину, що швидкість зменшення електричного поля зі збільшенням відстані від поверхні діелектрика $z - \bar{\xi}$ визначається

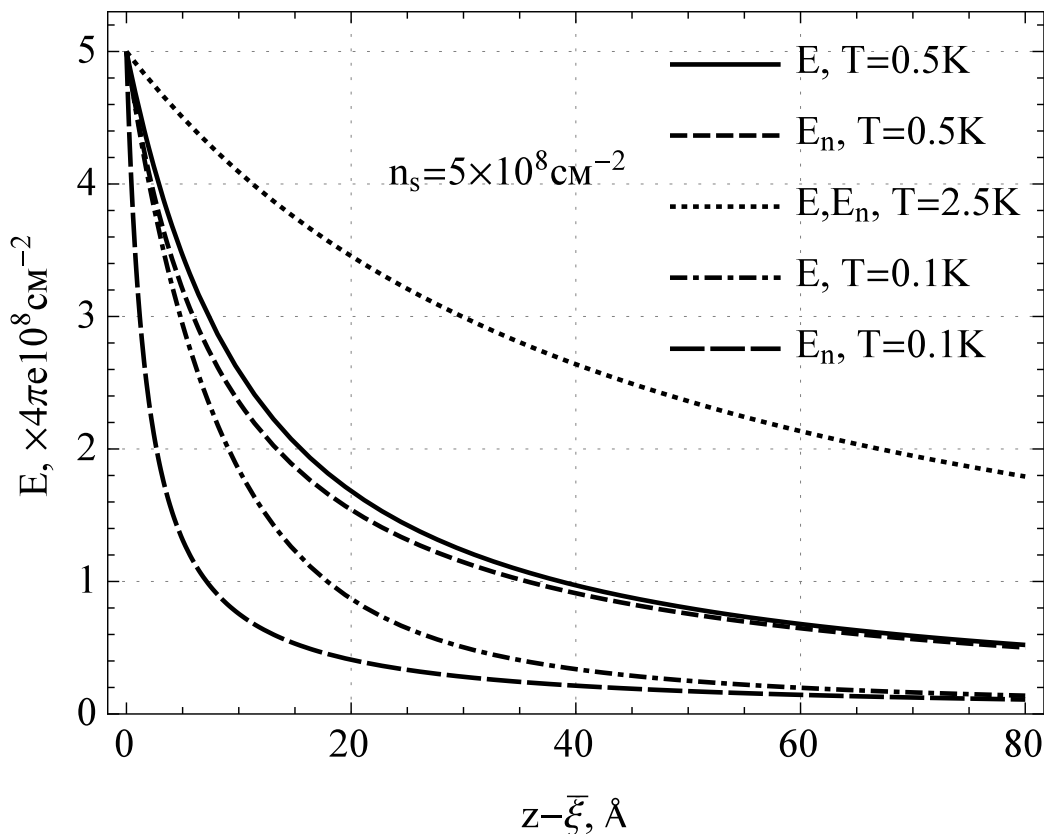


Рис. 3.10. Електричне поле в області над поверхнею діелектрика $E_1(z)$ у випадку загальної статистики Фермі і Больцманівської статистики для трьох пар значень T і n_s .

ступенем невиродження газу. Чим ближче газ до стану невиродженості, тим повільніше спадає поле зі збільшенням відстані від поверхні діелектрика. На рис. 3.10 усі криві виходять з однієї точки при $z - \bar{\xi}$, оскільки для всіх них n_s однакове і дорівнює $5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2}$, що відповідає значенню електричного поля, яке визначається співвідношенням (3.45).

Одержана на основі розв'язку (3.58) залежність $\chi(z)$ дозволяє визначити $n(z)$ за допомогою (3.40). На рис. 3.11 зображена залежність $n(z)$ для трьох вищезазначених випадків значень параметрів T і n_s .

Відзначимо, що у першому випадку, $T = 2,5\text{K}$ та $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2}$, газ зарядів близький до стану невиродженості, тому крива $n(z)$ практично збігається з кривою $n_n(z)$ для невиродженого газу, здобутої у роботах [4, 75]:

$$n_n(z) = \frac{n_s}{2z_0} \left(1 + (z - \bar{\xi})/(2z_0)\right)^{-2}. \quad (3.62)$$

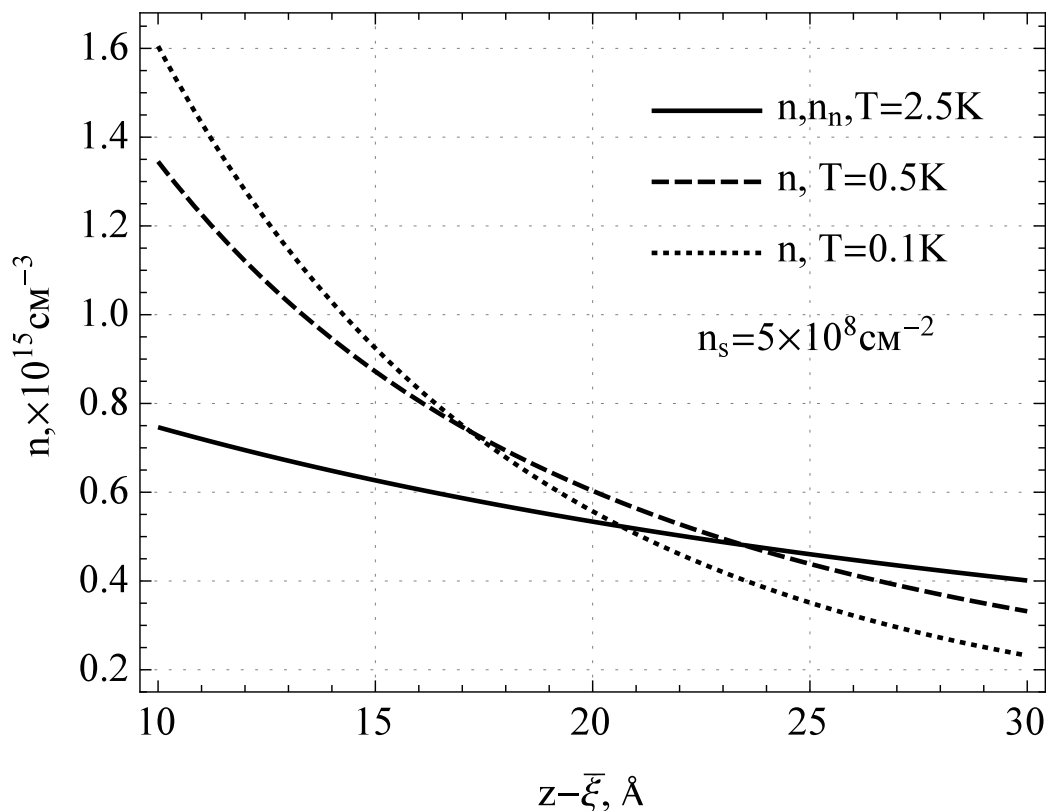


Рис. 3.11. Концентрація частинок над поверхнею діелектрика $n(z)$ у випадку загальної статистики Фермі і бoльцманівської статистики для трьох пар значень T і n_s .

Відзначимо ту обставину, що чим ближче газ до стану неvirодженості, тим повільніше спадає його концентрація з відстанню від поверхні діелектрика. Особливий інтерес представляє стан газу, близький до virодження, що досягається при досить високих концентраціях і низьких температурах. Це пов'язано з можливим внеском у взаємодію між частинками обмінних процесів, однак детальний розгляд цієї ситуації виходить за межі дисертаційної роботи за вказаною вище причиною.

Використовуючи залежність концентрації числа частинок $n(z)$ від відстані, можна визначити деякі характерні просторові розміри, властиві системі, що досліджується. Для початку введемо поняття відстані від поверхні діелектрика, що характеризує рівень, нижче якого знаходиться переважна кількість частинок з загальної їх кількості над поверхнею

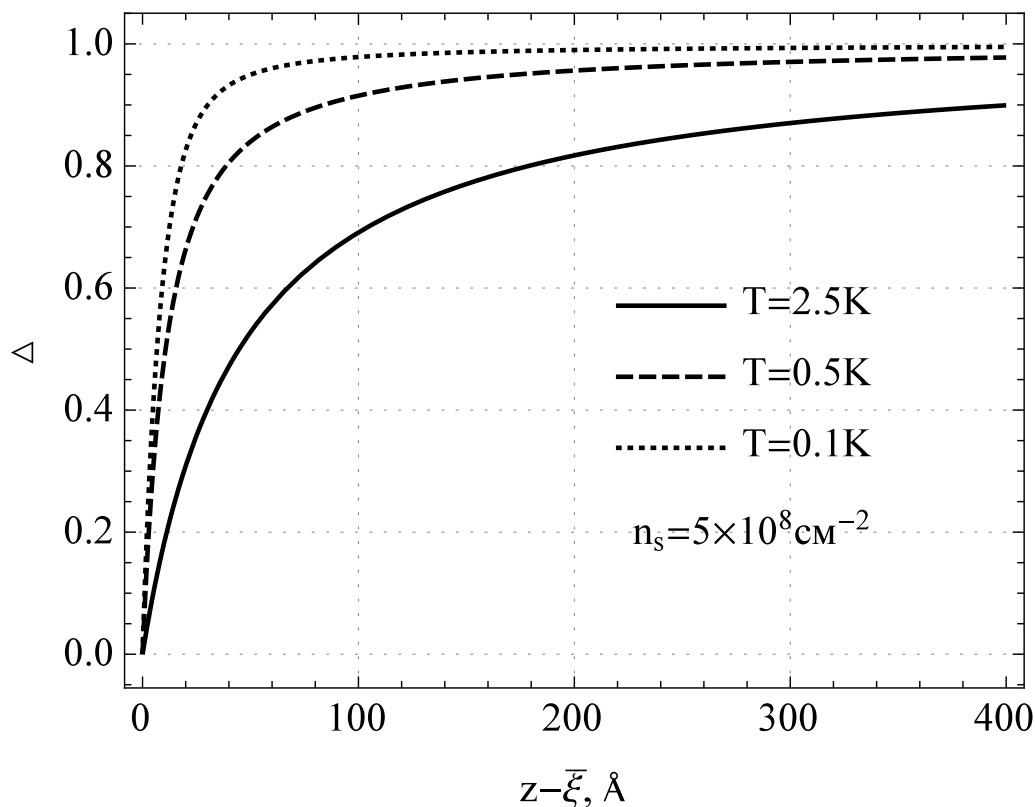


Рис. 3.12. Частина зарядів $\Delta(z)$, що знаходяться нижче рівня z від поверхні діелектрика для різних значень температури.

діелектрика. Із цією метою введемо до розгляду функцію $\Delta(z)$:

$$\Delta(z) = \frac{1}{n_s} \int_{\bar{\xi}}^z n(x) dx, \quad (3.63)$$

що характеризує частку зарядів від повного їх числа, які перебувають на відстані від поверхні діелектрика нижче ніж z . На рис. 3.12 зображені графіки цієї функції при різних температурах і однаковому значенні концентрації $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$. Для визначеності будемо вважати, що відстань z_m є характерною для даного випадку, якщо частина зарядів в інтервалі $z_m \geq z \geq \bar{\xi}$ відповідає, наприклад, значенню $\Delta \approx 0,95$. Тоді для температури $T = 2,5 \text{ K}$ знайдемо $z_m = 40z_0 \approx 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, у випадку температури $T = 0,5 \text{ K}$ - $z_m = 40z_0 \approx 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ і при температурі $T = 0,1 \text{ K}$ - $z_m = 57z_0 \approx 5,1 \cdot 10^{-7} \text{ см}$. Як і слід було очікувати, з наведених оцінок можна зробити висновок, що при фіксованому числі частинок відстань, яка може розглядатися як якась ефективна межа газу частинок

над поверхнею діелектрика, падає зі спаданням температури.

Підкреслимо при цьому, що відстань z_m від поверхні діелектрика, вище якої зарядів практично немає, за порядком величини можна порівняти з характерною відстанню локалізації окремого електрона в основному стані над поверхнею гелію [17, 22]. Задача знаходження такої характерної відстані локалізації може бути зведена до задачі про знаходження середньої відстані електрона від ядра в атомі водню, що знаходиться в основному стані. В роботі [63] відзначається, що при $n_s \sim 10^8 \div 10^9 \text{см}^{-2}$ середня відстань між частинками на один-два порядки більша за характерну відстань локалізації електрона над поверхнею гелію, внаслідок чого газ зарядів можна вважати двовимірним.

У досліджуваному нами випадку характерна відстань від поверхні z_m , введена вище, також як мінімум на порядок менша за $n_s^{-1/2}$. На перший погляд, ця обставина дозволяє вважати досліджувану систему «квазі-двовимірною». Справді, при певних значеннях T і n_s середня відстань між проекціями зарядів на площину, паралельну поверхні діелектрика, пропорційна $n_s^{-1/2}$, може ставати навіть на два порядки більше ніж характерна відстань z_m . Із цієї причини, маючи на увазі мале значення величини $z_m n_s^{1/2} \ll 1$, можна було б вважати, що заряди практично знаходяться в одній площині. Але, по-перше, це не так в найзагальнішому випадку, оскільки величина $z_m n_s^{1/2}$ може бути і не малою. З іншого боку, навіть справедливність нерівності $z_m n_s^{1/2} \ll 1$ не може слугувати виправданням для того, щоб вважати систему квазі-двовимірною. Для доказу цього твердження обчислимо середню відстань зарядів від плоскої поверхні діелектрика усередині об'єму, обмеженого площинами $z = \bar{\xi}$ і $z = z_m$ (нагадаємо, що ми домовилися знаходити величину z_m з умови $\Delta(z_m) = 0.95$, див. (3.63)). Імовірність окремо взятого заряду перебувати в інтервалі відстаней $(z, z + dz)$ від поверхні діелектрика дорівнює $n(z) dz / n_s$. Тоді середня відстань $\langle z - \bar{\xi} \rangle$ заряду від поверхні діелектрика відповідно до (3.38), (3.40) і (3.43) має визначатися формулою:

$$\langle z - \bar{\xi} \rangle = n_s^{-1} \int_{\bar{\xi}}^{z_m} dz n(z) (z - \bar{\xi}) = z_0 \chi|_{z_m}^{\bar{\xi}}. \quad (3.64)$$

При розглянутих вище ілюстративних значеннях концентрації $n_s = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$ в результаті чисельних розрахунків ми отримуємо такі середні відстані зарядів від поверхні діелектрика: $\langle z - \bar{\xi} \rangle \approx 4z_0 = 0,11 \cdot z_m \approx 0,9 \cdot 10^{-6} \text{см}$ при температурі $T = 2,5 \text{K}$, при $T = 0,5 \text{K}$ - $\langle z - \bar{\xi} \rangle \approx 4,5z_0 = 0,15z_m \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{см}$ і для температури $T = 0,1 \text{K}$ - $\langle z - \bar{\xi} \rangle \approx 10z_0 = 0,18z_m \approx 0,9 \cdot 10^{-7} \text{см}$. Таким чином, в даній області $\{T, n_s\}$ в об'ємі над плоскою поверхнею діелектрика, обмеженого площинами $z = \bar{\xi}$ та $z = z_m$ середня відстань частинок від поверхні діелектрика $z = \bar{\xi}$ в 5-10 раз менше характерної висоти z_m локалізації електронів над поверхнею діелектричної плівки. Саме ця обставина є основною перешкодою для того, щоб вважати досліджувані квазінейтральні системи зарядів над поверхнями рідких діелектриків близькими до двовимірних систем. Відзначимо, що в силу нерівності $z_m n_s^{1/2} \ll 1$ і наведених вище оцінок середня відстань $\langle z \rangle$ між зарядами вздовж осі Oz мала у порівнянні з середньою відстанню $\sqrt{n_s^{-1}}$ між частинками вздовж осей Ox та Oy , $\langle z \rangle \ll \sqrt{n_s^{-1}}$. З цієї причини середня відстань l між зарядами всередині згаданого об'єму також має порядок $\sqrt{n_s^{-1}}$ згідно з оцінкою $l \sim \sqrt{n_s^{-1} + \langle z \rangle^2} \approx \sqrt{n_s^{-1}}$. Дана обставина дозволяє встановити межі застосування квазікласичного наближення, яке використовується у дисертаційній роботі.

Для проведення відповідних оцінок обчислимо середню довжину теплової хвилі де Бройля $\langle \lambda \rangle \sim \hbar / \sqrt{\langle p^2 \rangle}$ для заряджених частинок над поверхнею діелектрика. Середнє значення квадрата імпульсу може бути знайдено з використанням формул (2.32), (3.38) - (3.40):

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int d^3r d^3p f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) p^2}{\int d^3r d^3p f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})} = \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{5/4} \frac{3mT}{2^{7/4} a_0^2 n_s} \int_{-\infty}^{\chi_0} d\chi (-Li_{5/2}(-e^\chi))^{1/2}.$$

Звідси приходимо до наступного виразу для теплової хвилі де Бройля $\langle \lambda \rangle$:

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{\hbar}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} = a_0^2 \sqrt{n_s} \left(\frac{\pi e^2}{T a_0} \right)^{9/8} \sqrt{\frac{27/4}{3\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\chi_0} d\chi (-Li_{5/2}(-e^\chi))^{1/2} \right)^{-1/2}.$$

Чисельні оцінки останнього виразу показують, що в інтервалі значень концентрації n_s від 10^8см^{-2} до $2 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$ і температури T від 0.1K до 5K , середня довжина теплової хвилі де Бройля має порядок $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-6} \text{см}$, що на два порядки менше за середню відстань між частинками $\sim n_s^{-1/2}$, див. вище. Така обставина і дозволяє розв'язувати поставлені у дисертаційній роботі задачі у межах квазікласичного наближення, виключаючи з розгляду наявність таких квантових видів взаємодії частинок, як обмінна. Вплив обмінної взаємодії може виявитися істотним для газу частинок, близького до стану виродження. Досягненню виродженого стану сприяє зниження температури і підвищення концентрації частинок. У свою чергу, говорячи про можливість експериментального виявлення таких вироджених станів розглянутої системи, слід зазначити, що область низьких температур є важкодосяжною, а область високих концентрацій обмежується зверху критерієм стійкості, див. (3.54), (3.55) та рис. 3.7. Однак при зменшенні товщини плівки діелектрика область припустимих концентрацій зростає на кілька порядків у порівнянні з «масивним» аналогом плівки. Опис такої ситуації виведено за межі дисертаційної роботи, однак попередні розрахунки показують можливість такої модифікації теорії стосовно систем з виродженим газом зарядів над поверхнею рідкого діелектрика, використовуючи терію функціоналу концентрації $n(\mathbf{r})$ (див., наприклад, [81]). Потреба ж у такому описі виникає як у зв'язку з експериментами, реалізованими над тонкими плівками [56], так і з-за наявності теоретичних робіт (див., наприклад, [55, 79, 82]), заснованих на підходах, відмінних від запропонованного автором дисертаційної роботи.

Отримані вирази (3.45) - (3.58) і є розв'язком задачі про розподіл невиродженого газу електронів і полів у системі заряджених частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика за присутності зовнішнього притискуючого поля у квазінейтральному випадку. У наступному розділі

отримані в цьому підрозділі рівняння, вирази і нерівності будуть використані для вивчення умов формування просторово-періодичних станів у досліджуваній системі, що виникли у результаті фазового переходу.

3.4. Заряджена система фермі-частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика у зовнішньому притискуючому електричному полі. Вихід за межі статистики Больцмана.

У цьому підрозділі розглядається найбільш загальна ситуація системи фермі-частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика, яка не перебуває у стані невинодженості, а також не знаходиться в умовах квазінейтральності. Тому співвідношення, отримані в підрозділі, будуть мати найбільш широкий спектр застосування, а співвідношення для невинодженої і квазінейтральної систем можуть бути отримані в якості граничного випадку.

При розв'язку системи рівнянь (2.45)-(2.48), будемо дотримуватись методики попередніх підрозділів дисертації і робіт [1, 3, 4]. Для розв'язку першого з рівнянь (2.45), його зручно переписати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1''(z) &= 4\pi e\nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \psi}{T}\right)^{-1}, \\ \psi(z) &\equiv \mu + e\bar{\varphi}_1(z), \quad \nu = \sqrt{2}\pi^{-2} a_0^{-3/2} e^{-3}.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Порядок рівняння (3.65) може бути знижений, див. [3]. В результаті можна прийти до рівняння:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} = - \left\{ \frac{16\pi}{3} \nu \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \psi}{T}\right)^{-1} + C_1 \right\}^{1/2}.\tag{3.66}$$

Беручи до уваги ту обставину, що на нескінченній відстані від поверхні заряди відсутні і, отже, в цій області функція розподілу наближається до 0, неважко визначити константу інтегрування $C_1 = E_\infty^2$, де

$$E_\infty = - \lim_{z \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}_1'(z).\tag{3.67}$$

У цьому випадку, рівняння (3.66) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\frac{1}{z_0} \left\{ 1 - 2^{5/2} Li_{5/2}(-e^\chi) \frac{z_0^2}{a_0^2} \left(\frac{a_0 T}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (3.68)$$

$$z_0 = T/eE_\infty, \quad \chi(z) = (\mu + e\bar{\varphi}_1(z))/T.$$

Або у термінах електричних полів $E_1(z) = -\bar{\varphi}'_1(z)$ і (3.67):

$$E_1(z) = E_\infty \left\{ 1 - 2^{5/2} Li_{5/2}(-e^{\chi(z)}) \frac{z_0^2}{a_0^2} \left(\frac{a_0 T}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (3.69)$$

У рівняннях (3.68), (3.69) введена спеціальна функція $Li_{s+1}(t)$ називається полілогарифмом (див. також попередній підрозділ) і пов'язана з інтегралом Фермі-Дірака $I_s(t)$ співвідношенням:

$$I_s(\chi) = -Li_{s+1}(-e^\chi), \quad I_s(\chi) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty \frac{x^s dx}{1+e^{x-\chi}}. \quad (3.70)$$

Використовуючи (3.70), перетворимо вираз для концентрації частинок в (2.30) у наступний:

$$n(z) = -\left(\frac{Ta_0}{\pi e^2} \right)^{3/2} \frac{Li_{3/2}(-e^{\chi(z)})}{\sqrt{2}a_0^3}. \quad (3.71)$$

Інтегруючи рівняння (3.71) за змінною z від $\bar{\xi}$ до $+\infty$, отримаємо:

$$4\pi en_s = E_0 - E_\infty, \quad n_s = \int_{\bar{\xi}}^\infty dz n(z), \quad (3.72)$$

де $E_0 = -\bar{\varphi}'_1(z)|_{z=\bar{\xi}}$ - значення електричного поля на поверхні рідкого діелектрика, а n_s - повне число частинок у системі, що знаходяться над одиницею поверхні рідкого діелектрика. Рівняння (3.72) разом з рівнянням (3.69) при $z = \bar{\xi}$

$$E_0 = E_\infty \left\{ 1 - 2^{5/2} Li_{5/2}(-e^{\chi_s}) \frac{z_0^2}{a_0^2} \left(\frac{a_0 T}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (3.73)$$

дають неявне рівняння для визначення безрозмірного електрохімічного потенціалу на поверхні рідкого діелектрика $\chi_\xi = \chi(z = \bar{\xi})$ як функції T , $E^{(e)}$ і n_s :

$$\frac{E_\infty}{4\pi e} \left(\left\{ 1 - 2^{5/2} \frac{z_0^2}{a_0^2} \left(\frac{Ta_0}{\pi e^2} \right)^{1/2} Li_{5/2}(-e^{\chi_\xi}) \right\}^{1/2} - 1 \right) = n_s. \quad (3.74)$$

З іншого боку, рівняння (3.74) також є умовою нормування електрохімічного потенціалу при фіксованих значеннях параметрів системи T , $E^{(e)}$ і n_s , у випадку виконання умови $Li_{5/2}(-e^{\chi_\infty}) = 0$, що відображає факт відсутності частинок на нескінченності. По суті, ця обставина була використана при визначенні константи інтегрування C_1 у рівнянні (3.66).

Для розв'язку рівнянь (2.45)-(2.48) із граничними умовами (2.49), необхідно встановити зв'язок між значеннями зовнішнього $E_1^{(e)}$ і повного електричного поля $E_1(z) = -\bar{\varphi}'_1(z)$. Цей зв'язок був знайдений у попередньому підрозділі дисертації у загальному випадку $E_\infty \neq 0$ і згодом поклавши $E_\infty = 0$ було здобуто необхідні співвідношення у квазінейтральному випадку.

Отже, диференціюючи потенціал електричного поля $\varphi_j = \varphi_j^{(i)} + \varphi_j^{(e)}$ за z і змінюючи знак по обидві сторони отриманої рівності, ми прийдемо до виразу:

$$E_1(z) = E_1^{(i)}(z) + E_1^{(e)}, \quad (3.75)$$

де величина $E_1^{(e)}$ визначається співвідношенням (3.49).

Тут потрібно зробити зауваження щодо діапазону величини n_s , для яких може бути застосовано опис, викладений у данному підрозділі дисертаційної роботи. Згідно зробленим вище припущенням, потенціал $\bar{\varphi}_1(z)$ спадає з ростом z (див. (3.66)), або $E_1(z > \bar{\xi}) > 0$. Така ситуація реалізується, якщо

$$E_1^{(e)} \geq 2\pi e n_s. \quad (3.76)$$

У граничному випадку $E_1^{(e)} = 2\pi e n_s$ повне поле $E_1(z)$ при $z \rightarrow +\infty$, згідно з (3.69) стає рівним нулю, відповідає випадку квазінейтральної системи, розглянутої в роботі [5]. Подальше інжектування частинок у систему буде

приводити до їх покидання конденсатора, якщо його торці відкриті, оскільки системі недостатньо електричного поля, здатного утримувати цей надлишок. Якщо торці конденсатора щільно закриті стінками, що перешкоджають покидання зарядів конденсатора, ці заряди почнуть спрямовуватися до верхньої обкладки конденсатора. На практиці часто замість стінок використовується торцевий електрод, на який подається замикаючий потенціал, що відштовхує електрони [27]. Однак, в такому випадку розподіли (3.69), (3.71) непридатні до застосування у всій області $z > \bar{\xi}$, і задача вимагає окремого розгляду, що виходить за межі дисертаційної роботи. Проте відзначимо, що подібна задача була розв'язана у роботі [77].

Потенціали сумарного електричного поля і зовнішнього електричного поля у всіх трьох областях відповідно до формул (2.47)-(2.49), (3.65), (3.74) визначаються виразами:

$$\int_{\chi_0}^{\chi} d\chi' \left\{ 1 - 2^{5/2} Li_{5/2} \left(-e^{\chi'} \right) \frac{z_0^2}{a_0^2} \left(\frac{a_0 T}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right\}^{-1/2} = \frac{\bar{\xi} - z}{z_0}, \quad z_0 = T/eE_{\infty},$$

$$\bar{\varphi}_2(z) = -\frac{E_0}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0, \quad \bar{\varphi}_3(z) = -\frac{E_0}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E_0}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0,$$

$$\bar{\varphi}_1^{(e)}(z) = -E_1^{(e)} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)}, \quad \bar{\varphi}_2^{(e)}(z) = -\frac{E_1^{(e)}}{\varepsilon} (z - \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)},$$

$$\bar{\varphi}_3^{(e)}(z) = -\frac{E_1^{(e)}}{\varepsilon_d} (z + d) + \frac{E_1^{(e)}}{\varepsilon} (d + \bar{\xi}) + \varphi_0^{(e)},$$
(3.77)

де введено позначення $\bar{\varphi}_{1\xi} = \bar{\varphi}_{2\xi} \equiv \varphi_0$ і $\bar{\varphi}_{1\xi}^{(e)} = \bar{\varphi}_{2\xi}^{(e)} \equiv \varphi_0^{(e)}$. Як уже було зазначено, перше рівняння в (3.77) здобуває інтегруванням рівняння (3.68)), однак для знаходження залежності $\chi(z)$ потрібне залучення чисельних методів. Нижче будуть наведені результати таких обчислень для фіксованих значень T , n_s і $E^{(e)}$.

На основі одержаних формул (2.46), (3.74), (3.77) визначається і зниження рівня поверхні $\bar{\xi}$ у термінах параметрів задачі, виходячи з формули:

$$\bar{\xi} = -\frac{(4\pi en_s)^2}{8\pi\alpha\kappa^2} \left(\frac{E^{(e)}}{2\pi en_s} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right) + \frac{1}{4\varepsilon} \right). \quad (3.78)$$

Як видно з виразу (3.78)), збільшення значень параметрів $E^{(e)}$ і n_s може спричинити порушення природної умови:

$$|\bar{\xi}| < d. \quad (3.79)$$

Слід зауважити, що величина κ , що враховує внесок в енергію рідкого діелектрика, як об'ємних так і поверхневих ефектів, має залежати від товщини плівки d . Наприклад, для рідкого гелію дана залежність має такий вигляд [78]:

$$\kappa(d) = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha} \left(g + \frac{g_0 d_v}{d^4 (d + d_v)} \left(3 + \frac{d}{d + d_v} \right) \right)}, \quad (3.80)$$

де $d_v = 1,65 \cdot 10^{-5}$ см і $g_0 = 2,2 \cdot 10^{-14}$ см⁵ · с⁻². Вочевидь, зниження рівня поверхні діелектрика на величину $|\bar{\xi}|$ призводить до того, що товщина плівки стає рівною $d - |\bar{\xi}|$. Таким чином, при обчисленні виразу (3.78) слід замінити значення $\kappa(d)$ на $\kappa(d - |\bar{\xi}|)$:

$$\bar{\xi} = -\frac{(4\pi e n_s)^2}{8\pi\alpha(\kappa(d - |\bar{\xi}|))^2} \left(\frac{E^{(e)}}{2\pi e n_s} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right) + \frac{1}{4\varepsilon} \right). \quad (3.81)$$

Розв'язок даного рівняння $\bar{\xi}(d, n_s, E^{(e)})$ коректно враховує ефект зниження рівня поверхні рідкого діелектрика, проте його знаходження вимагає залучення чисельних методів на відміну від рівняння (3.78). Чисельні оцінки рівняння (3.78) показують, що для $E^{(e)} = 5000$ В/см, $n_s = 5 \cdot 10^8$ см⁻², $T = 5$ К і $d = 0,1$ см умова (3.79) виконується дуже добре навіть у випадку сильної нерівності $|\bar{\xi}| \ll d$. З огляду на ту обставину, що в експериментальних даних робіт [26, 27, 62], значення $E^{(e)}$, n_s в яких менші за $E^{(e)} = 5000$ В/см і $n_s = 5 \cdot 10^8$ см⁻² відповідно, а величина $d > 0,1$ см, то проведення порівняння отриманих результатів з експериментальними можна проводити використовуючи (3.78). У випадку більш тонких плівок і більш високих $E^{(e)}$ і n_s для перевірки умови (3.79) доведеться використовувати рівняння (3.81). Відзначимо, що обчислення $\bar{\xi}$ згідно з формулою, аналогічною (3.81), проводилось у роботі [5] і це призводило до ряду цікавих ефектів для тонких плівок гелію $d < 10^{-4}$ см, коли внесок сил Ван дер Вальса у вираз (3.80) домінує над внеском гравітаційних сил.

Метою даного підрозділу дисертаційної роботи не є розгляд ефектів над тонкими плівками діелектрика, тому, як вже зазначалося вище, виправданим буде використання співвідношення (3.78).

У роботі [5] було розглянуто задачу опису розподілу заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика у квазінейтральному випадку ($E^{(e)} = 2\pi en_s$). А у роботі [3] розглядалася система невиродженого газу зарядів над поверхнею рідкого діелектрика у «зарядженому» випадку ($E^{(e)} > 2\pi en_s$). У цьому сенсі даний підрозділ дисертаційної роботи може розглядатися як узагальнення двох попередніх підрозділів, та результатів, отриманих у роботах [3, 5]. Тому результати зазначених робіт можна здубити як граничні випадки співвідношень (3.69), (3.71), (3.77) та (3.78). Дійсно, до результатів квазінейтральної задачі [5] ми прийдемо, поклавши $E^{(e)} = 2\pi en_s$:

$$E_1(z) = \frac{T2^{5/4}}{ea_0} \left(\frac{Ta_0}{\pi e^2} \right)^{1/4} \left(-Li_{5/2}(-e^{\chi(z)}) \right)^{1/2},$$

$$n = - \left(\frac{Ta_0}{\pi e^2} \right)^{3/2} \frac{Li_{3/2}(-e^\chi)}{\sqrt{2}a_0^3}, \quad \bar{\xi} = - \frac{(4\pi en_s)^2}{8\pi\alpha(\kappa(d))^2} \left(1 + \frac{3}{4\varepsilon} \right). \quad (3.82)$$

Щоб виконати граничний перехід до випадку невиродженого газу частинок, слід розглянути область значень параметрів T , $E^{(e)}$ і n_s , де функція розподілу частинок (2.32) близька до больцманівської:

$$e^{\frac{\varepsilon - \psi}{T}} \gg 1. \quad (3.83)$$

Ця нерівність дозволяє виділити головне наближення полілогарифмічної функції (3.70) довільного порядку $Li_s(-e^{\chi(z)}) \approx -e^\chi$ і проінтегрувати перше рівняння в (3.77) у відповідному наближенні:

$$\begin{aligned} \chi_n(z) &= \chi(\bar{\xi}) - 2 \ln \left(\frac{E_0}{E_\infty} sh \left(\frac{z - \bar{\xi}}{2z_0} \right) + ch \left(\frac{z - \bar{\xi}}{2z_0} \right) \right) = \\ &= \chi(\bar{\xi}) - \frac{z - \bar{\xi}}{z_0} - 2 \ln \left(\frac{1 - X(z)}{1 - X(\bar{\xi})} \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Нижній індекс «n» у даному виразі означає наближення, в якому газ частинок може вважатися невиродженим. Останній вираз також дає

можливість визначити область невиродженості газу зарядів в просторі $\{T, E, n_s\}$, згідно з (3.83), (3.84), (3.74):

$$\frac{T^{5/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}n_s e^4 E^{(e)} a_0^{3/2}} \gg 1. \quad (3.85)$$

Насправді умова (3.85) більш жорстка, ніж (3.83), оскільки її обчислено при $z = \bar{\xi}$. Однак, зважаючи на спадання функції (3.84)), якщо умова (3.83) виконується при $z = \bar{\xi}$, то вона тим більш справедлива при $z > \bar{\xi}$. Використовуючи наближення (3.85), а також формули (3.69), (3.71), (3.78) і (3.84), обчислимо основні величини, що характеризують невироджену систему зарядів над поверхнею діелектрика:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{1n}(z) &= \varphi_{0n} - E_\infty (z - \bar{\xi}) - 2E_\infty z_0 \ln \frac{1 - X(z)}{1 - X(\bar{\xi})}, \quad E_{1n}(z) = E_\infty \frac{1 + X(z)}{1 - X(z)}, \\ n_n(z) &= \frac{E_\infty^2}{8\pi T} \frac{4X(z)}{(1 - X(z))^2}, \quad X(z) \equiv \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 + E_\infty} \exp\left(\frac{\bar{\xi} - z}{z_0}\right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ці формули відповідають результатам роботи [3]. Якщо в них здійснити граничний перехід до квазінейтрального випадку ($E^{(e)} \rightarrow 2\pi e n_s$), то ми прийдемо до результатів роботи [4], де розглядався невироджений газ зарядів у квазінейтральному випадку (позначимо такі величини індексами « nq »):

$$\begin{aligned} \chi_{1nq}(z) &= \chi_{0n} - 2 \ln \left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_{0n}}\right), \quad E_{1nq}(z) = \frac{4\pi e n_s}{1 + (z - \bar{\xi})/(2z_{0n})}, \\ n_{nq}(z) &= \frac{n_s}{2z_{0n}} \left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_{0n}}\right)^{-2}, \quad z_{0n} = \frac{T}{4\pi e^2 n_s}, \quad \chi_0 = \ln \frac{2^{3/2} \pi e^2 n_s^2 a_0^3}{T}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Проілюструємо залежності $\chi(z)$, $E_1(z)$ і $n(z)$, здобуті у даному підрозділі у порівнянні з відповідними залежностями $\chi_n(z)$, $E_{1n}(z)$ та $n_n(z)$, знайденими у роботі [3]. Також проведемо порівняння з відповідними залежностями $\chi_q(z)$, $E_{1q}(z)$ і $n_q(z)$ отриманими в роботі [5] і відповідними до квазінейтрального випадку ($E^{(e)} = 2\pi e n_s$) і залежностями $\chi_{nq}(z)$, $E_{1nq}(z)$ і $n_{nq}(z)$, наведеними у роботі [4], що описують характеристики невиродженого газу у квазінейтральному випадку. Розглянемо наступні

значення параметрів $T_n = 2,5K$, $n_{sn} = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$ та $E_n^{(e)} = 2\pi en_{sn}$, за яких умова невинродженості (3.85) виконується дуже добре $2^{1/2}\pi^{3/2}n_{sn}e^4 E_n^{(e)} a_0^{3/2} T_n^{-5/2} \approx 0,05$. Цією обставиною зумовлене маркування індексом «n» відповідних параметрів. Неважко помітити, що величина зовнішнього поля $E_n^{(e)} = 2\pi en_{sn}$ відповідає квазінейтральному випадку. Однак і за вдвічі більшого значення $E_n^{(e)} = 2\pi en_{sn}$ і при тому ж $n_{sn} = 5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$ умова невинродженості (3.85) виконується достатньо добре $2^{1/2}\pi^{3/2}n_{sn}e^4 E_n^{(e)} a_0^{3/2} T_n^{-5/2} \approx 0,099$. Оскільки у цій ситуації $E_n^{(e)} > 2\pi en_{sn}$, ми будемо мати справу з «зарядженою» системою, що розглядається у даному підрозділі диертаційної роботи. Позначимо індексом «m» значення параметрів T , n_s і $E^{(e)}$, за яких умова невинродженості буде порушуватися у квазінейтральному випадку: $T_m = 1,5K$, $n_{sm} = 10^9 \text{см}^{-2}$ і $E_m^{(e)} = 2\pi en_{sm}$: $2^{1/2}\pi^{3/2}n_{sm}e^4 E_m^{(e)} a_0^{3/2} T_m^{-5/2} \approx 0,72$. Збільшивши зовнішнє поле у два рази при фіксованому n_{sm} , ми отримаємо «заряджений» випадок, в якому умова невинродженості також не виконується: $2^{1/2}\pi^{3/2}n_{sm}e^4 E_m^{(e)} a_0^{3/2} T_m^{-5/2} \approx 1,44$.

Залежності електричного поля $E_1(z)$ від z наведені на рис. 3.13 і відповідають квазінейтральному випадку $E^{(e)} = 2\pi en_s$. Причому, як і слід було очікувати, далеко від поверхні діелектрика поле зарядів $E_1^{(i)}(z)$ екранує зовнішнє поле $E^{(e)}$. Із цієї причини повне поле $E_1(z)$ у цій області прямує до нуля. Співпадіння кривих $E_1(z)$, $E_{1n}(z)$, $E_{1q}(z)$ і $E_{1qn}(z)$ при $T = T_n$, $n_s = n_{sn}$ і $E^{(e)} = E_n^{(e)}$ зумовлене невинродженістю газу зарядів і його квазінейтральністю, за яких криві $E_1(z)$, $E_{1n}(z)$ і $E_{1q}(z)$ переходять до свого граничного випадку $E_{1qn}(z)$. З порушенням умови невинродженості газу, при $T = T_m$, $n_s = n_{sm}$ та $E^{(e)} = E_m^{(e)}$ за малих відстаней від поверхні діелектрика співпадаючі криві $E_1(z)$, $E_{1q}(z)$ перестають збігатися з кривими $E_{1n}(z)$, $E_{1qn}(z)$, проте по мірі віддалення від поверхні газ зарядів стає невинродженим і всі чотири криві знову збігаються. Відзначимо також, що згідно з (3.87) у квазінейтральному випадку значення повного поля на поверхні діелектрика дорівнює $E_1(z = \bar{\xi}) = 4\pi en_s$, що можна спостерігати для відповідних кривих при різних значеннях n_s , рівних n_{sn} і n_{sm} .

Рис. 3.14 відповідає випадку зарядженої системи $E^{(e)} = 4\pi en_s > 2\pi en_s$.

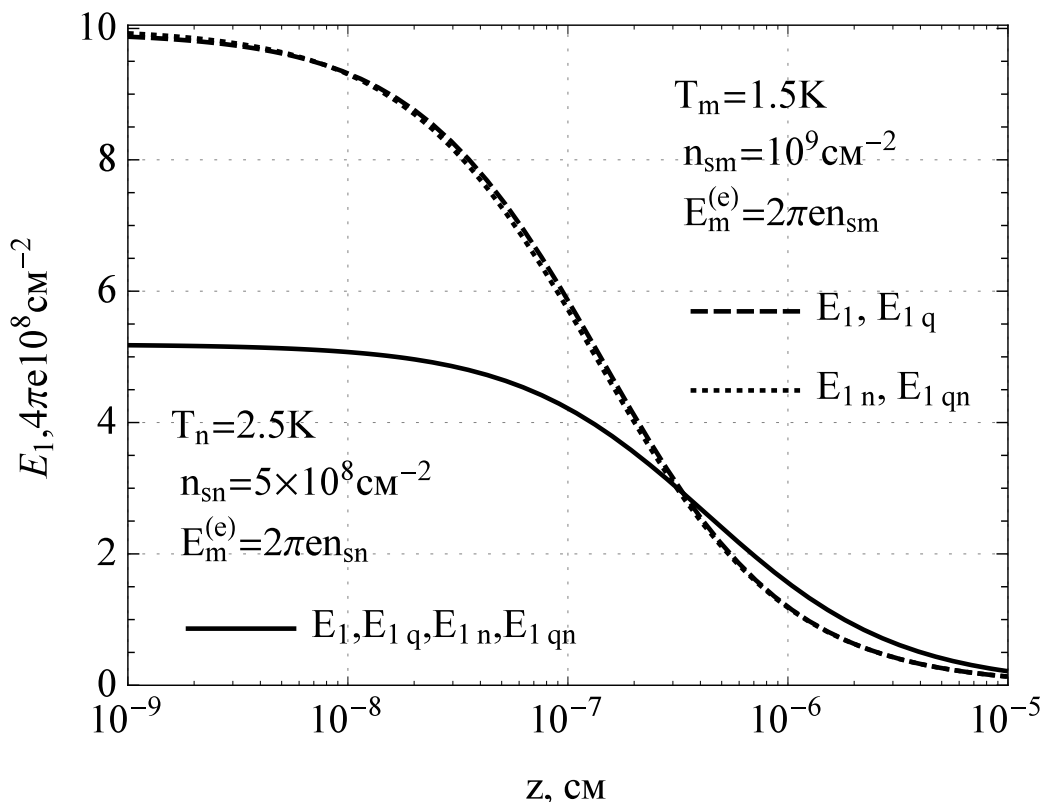


Рис. 3.13. Електричне поле над поверхнею діелектрика $E_1(z)$ для різних наборів значень параметрів T , $E^{(e)}$ і n_s у квазінейтральному випадку.

При $T = T_n$, $n_s = n_{sn}$ і $E^{(e)} = E_n^{(e)}$ газ зарядів є невідродженим у всьому просторі над діелектриком, тому криві $E_1(z)$ і $E_{1n}(z)$ у цьому випадку збігаються. При $T = T_m$, $n_s = n_{sm}$ і $E^{(e)} = E_m^{(e)}$ газ зарядів перестає бути невідродженим поблизу поверхні діелектрика, тому у цій області криві $E_1(z)$ і $E_{1n}(z)$ не збігаються. У міру віддалення від поверхні діелектрика газ стає невідродженим, і крива $E_1(z)$ наближається до $E_{1n}(z)$. Так як на цьому графіку зображено ситуацію «зарядженої» задачі, значення повного поля $E_1(z)$ на поверхні діелектрика і далеко від неї дорівнюють відповідно $E_1(z = \bar{\xi}) = E^{(e)} + 2\pi en_s$ і $E_1(z \rightarrow +\infty) \rightarrow E^{(e)} - 2\pi en_s$. Дійсно, згідно з кривою, що відповідає невідродженому випадку ($n_{sn} = 5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ і $E_n^{(e)} = 4\pi en_{sn}$), $E_1(z \approx \bar{\xi}) \approx 7,5 \cdot 4\pi e 10^8 \text{ см}^{-2}$ і $E_1(z > 10^{-5} \text{ см}) \approx 2,5 \cdot 4\pi e 10^8 \text{ см}^{-2}$. Ці співвідношення добре узгоджуються з кривими, що відповідають випадку $n_{sm} = 10^9 \text{ см}^{-2}$ і $E_m^{(e)} = 4\pi en_{sm}$, для яких відповідні величини дорівнюють $E_1(z \approx \bar{\xi}) \approx 15 \cdot 4\pi e 10^8 \text{ см}^{-2}$ і $E_1(z > 10^{-5} \text{ см})$

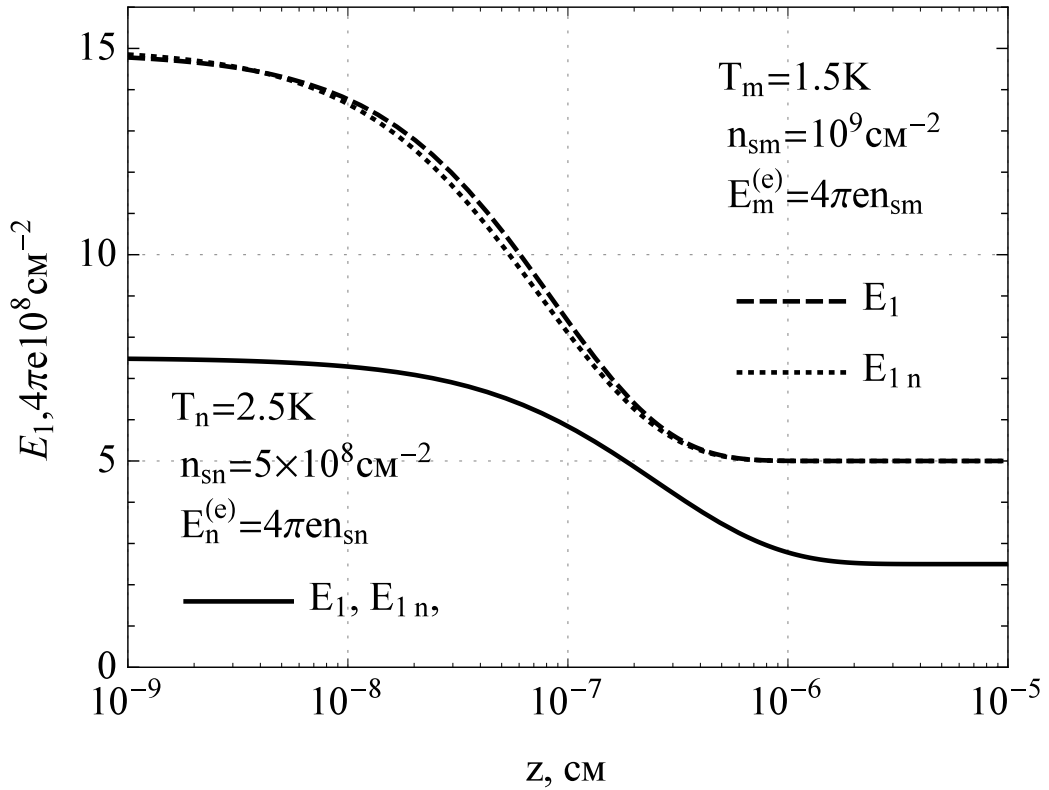


Рис. 3.14. Електричне поле над поверхнею діелектрика $E_1(z)$ для різних наборів значень параметрів T , $E^{(e)}$ і n_s у зарядженому випадку.

$\approx 5 \cdot 4\pi e 10^8 \text{cm}^{-2}$.

Повертаючись до питання появи межі розділу між системою зарядів над рідким діелектриком і вакуумом, дамо більш чітке визначення цієї величини. Для цього розглянемо наступну функцію:

$$\Delta(z) = \frac{1}{n_s} \int_{\bar{\xi}}^z n(z') dz', \quad (3.88)$$

що характеризує частку зарядів, що знаходяться нижче рівня від поверхні діелектрика, від всіх частинок у системі. Домовимося вважати межею поділу системи зарядів і вакууму таку відстань z_m від поверхні діелектрика, при якій $\Delta(z_m) = 0,95$. Як було відмічено раніше, збільшення зовнішнього притискуючого поля призводить до ущільнення частинок біля поверхні діелектрика і зниження межі z_m .

На закінчення цього підрозділу визначимо область застосовності квазікласичного наближення, у якому проводиться розгляд системи

заряджених частинок у дисертаційній роботі. Для проведення відповідних оцінок обчислимо середню довжину теплової хвилі де Бройля $\langle \lambda \rangle \sim \hbar / \sqrt{\langle p^2 \rangle}$ для заряджених частинок над поверхнею діелектрика. Середнє значення квадрата імпульсу може бути знайдено з використанням формул (2.32), (3.68) - (3.71):

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int d^3r d^3p f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) p^2}{\int d^3r d^3p f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})} = -\frac{6mT^2}{ea_0^2 E_0} \left(\frac{2a_0 T}{\pi e^2} \right)^{1/2} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} dz Li_{5/2} \left(-e^{\chi(z)} \right). \quad (3.89)$$

Звідси приходимо до наступного виразу для теплової хвилі де Бройля $\langle \lambda \rangle$:

$$\langle \lambda \rangle \sim \hbar / \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \frac{2^{1/4} a_0^{3/2} e^2 \sqrt{n_s \pi}}{T \sqrt{3} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/4} \left(\int_{\bar{\xi}}^{\infty} dz \left(-Li_{5/2} \left(-e^{\chi(z)} \right) \right) \right)^{1/2}}. \quad (3.90)$$

Чисельні оцінки останнього виразу показують, що в інтервалі значень параметрів $0,1K < T < 4,6K$, $0,5 \cdot 10^8 \text{см}^{-2} < n_s < 2 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$ і $0 < E^{(e)} < 19V \cdot \text{см}^{-1}$ тепла довжина хвилі де Бройля має порядок $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-6} \text{см}$. Із цієї причини, якщо відстань між частинками значно менша ніж $\langle \lambda \rangle$, квазікласичне наближення перестає бути коректним. Очевидно, що максимальне значення концентрації $n(z)$ досягається при $z = \bar{\xi}$. Вважаючи, що середня відстань між частинками поблизу поверхні діелектрика має один порядок з величиною $n(\bar{\xi})^{-1/3}$, ми отримуємо умову застосовності квазікласичного наближення:

$$\langle \lambda \rangle \ll n(\bar{\xi})^{-1/3}. \quad (3.91)$$

У розглянутих у цьому підрозділі прикладах ця нерівність виконується. І виконується вона тим краще, чим вище T і нижче $E^{(e)}$ і n_s . У цьому можна переконатися, переписавши умову (3.90) з використанням рівнянь (3.68), (3.71):

$$1 \gg \frac{e^2 a_0^{1/2} 2^{1/12} (\pi n_s)^{1/2} \left(-Li_{3/2} \left(-e^{\chi(\bar{\xi})} \right) \right)^{1/3}}{T^{3/2} \left(\int_{\bar{\xi}}^{\infty} dz \left(-Li_{5/2} \left(-e^{\chi(z)} \right) \right) \right)^{1/2} \left(\frac{\pi e^2}{a_0 T} \right)^{1/4}}. \quad (3.92)$$

Здобуті вирази (3.69), (3.71), (3.77) і (3.81) є розв'язком задачі про розподіл невиродженого газу електронів і полів у системі заряджених частинок над плоскою поверхнею рідкого діелектрика у присутності зовнішнього притискуючого поля у випадку $E^{(e)} \geq 2\pi en_s$. У наступному розділі дані результати будуть використані для вивчення умов формування просторово-періодичних станів у досліджуваній системі, що виникли у результаті фазового переходу.

Висновки до розділу 3

У даному розділі продемонстровані можливості мікроскопічного підходу, побудованого у розділі 2, на прикладі системи електронів над поверхнею рідкого гелію. Зокрема отримано вираз для глибини прогину поверхні рідкого гелію під впливом зовнішнього електричного поля, що притискує електрони до поверхні гелію.

Здобуто вирази для розподілів концентрації, електричного поля і потенціалу, як для невиродженого газу зарядів, так і з виходом за межі статистики Больцмана. Визначено умову застосовності квазікласичного опису даної системи, при якому справедливим є застосування виходу за межі статистики Больцмана.

Знайдені розподіли також досліджено у випадку квазінейтральності, коли поле частинок компенсує зовнішнє поле на нескінченності і показано, що розподіли відрізняються від зарядженого випадку, коли поля зарядів недостатньо, щоб компенсувати зовнішнє поле на нескінченності. Так, для невиродженого газу електричне поле спадає за експоненційним законом до фіксованого значення у випадку зарядженої системи і зменшується обернено пропорційно відстані від поверхні діелектрика у випадку квазінейтральності.

Досліджено здобутий розподіл концентрації і показано, що відстань від поверхні гелію, нижче якої знаходиться переважна кількість електронів за порядком величини можна порівняти з характерною відстанню локалізації окремого електрона в основному стані над поверхнею гелію.

Уведено поняття ефективної товщини плівки діелектрика, як різниці товщини діелектричної плівки за відсутності заряджених частинок і зовнішнього електричного поля над нею та модуля профілю прогину поверхні діелектричної плівки, що утворюється під впливом заряджених частинок, що притискуються до поверхні зовнішнім електричним полем.

Використовуючи отримані рівняння самоузгодження для опису симетричної фази показано, що у випадку квазінейтральності системи при досить тонких плівках гелію і досить великій кількості електронів над одиницею площі поверхні ефективна товщина плівки гелію слабо залежить від кількості електронів над одиницею площі поверхні і при подальшому збільшенні цієї кількості.

Показана можливість досягнення великої кількості електронів, стабільно утримуваних над одиницею площі поверхні плівки гелію при досить малій її товщині, що зумовлено домінуючим внеском сил Ван дер Ваальса у порівнянні з гравітаційними силами, що діють на атоми гелію з боку твердої підкладки.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікаціях [3–6].

РОЗДІЛ 4
ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ ДО СТАНУ З
ПРОСТОРОВО-ПЕРІОДИЧНИМ УПОРЯДКУВАННЯМ

4.1. Критичні параметри фазового переходу до станів з просторово-періодичним упорядкуванням у невідродженій системі зарядів над поверхнею рідкого масивного діелектрика у зовнішньому притискному полі

Вихідними рівняннями для дослідження критичних параметрів такого фазового переходу будуть слугувати рівняння і граничні умови (2.53). Звернімося поки до першого з рівнянь (2.53). Це рівняння з урахуванням формул (3.6), (3.9) і (3.11) може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q})}{\partial z^2} - q^2 \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) = 2z_0^2 X(z) (1 - X(z))^{-2} \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}), \quad (4.1)$$

де функція $X(z)$ дається виразом (3.11). У результаті заміни

$$\tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) = e^{-zq} \eta(\zeta), \quad \zeta = (X(z) + 1) (1 - X(z))^{-1} \quad (4.2)$$

рівняння (4.1) набуде такого вигляду:

$$(\zeta^2 - 1) \eta'' + 2(\zeta + 2qz_0) \eta' - 2\eta = 0. \quad (4.3)$$

Розв'язок рівняння (4.3) дається виразом [83, 84]:

$$\eta(\zeta) = C_1 \eta_1(\zeta) + C_2 \eta_2(\zeta), \quad (4.4)$$

де

$$\eta_1(\zeta) = \zeta + 2qz_0, \quad \eta_2(\zeta) = (\zeta + 2qz_0) \int d\zeta \frac{(\zeta + 1)^{2qz_0-1}}{(\zeta - 1)^{2qz_0+1} (\zeta + 2qz_0)^2}. \quad (4.5)$$

Функція $\eta_2(\zeta)$, як неважко переконатися, не задовольняє умову (2.38) обмеженості напруженостей електричного поля в області «1» при $z \rightarrow +\infty$. Із цієї причини у розв'язку (4.5) необхідно покласти $C_2 = 0$. Відзначимо, що

функція $\eta_1(\zeta)$ є поліномом Якобі [83, 84]. Таким чином, приходимо до наступного виразу для потенціалу $\tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q})$:

$$\tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) = C_1^{(1)}(\mathbf{q}) e^{-zq} \left(\frac{1 + X(z)}{1 - X(z)} + 2qz_0 \right). \quad (4.6)$$

Розв'язки другого і третього з рівнянь (2.53) у загальному випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q}) &= C_1^{(2)}(\mathbf{q}) e^{qz} + C_2^{(2)}(\mathbf{q}) e^{-qz}, \\ \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q}) &= C_1^{(3)}(\mathbf{q}) e^{qz} + C_2^{(3)}(\mathbf{q}) e^{-qz}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

З урахуванням тієї обставини, що напруженості полів при $z \rightarrow -\infty$ повинні залишатися обмеженими, константу $C_2^{(3)}(\mathbf{q})$ в (4.7) необхідно покласти рівною нулю, $C_2^{(3)}(\mathbf{q}) \equiv 0$. Константи ж $C_1^{(1)}(\mathbf{q})$, $C_1^{(2)}(\mathbf{q})$, $C_2^{(2)}(\mathbf{q})$ і $C_1^{(3)}(\mathbf{q})$ повинні бути знайдені з граничних умов (2.53). Як легко переконатися, ці константи будуть виражені через величину $\tilde{\xi}(\mathbf{q})$, що є відповідно до (2.34), (2.42) і (2.43) Фур'є-образом профілю просторово-періодичної поверхні плівки рідкого діелектрика на твердій підкладці:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(z, \mathbf{q}) &= \frac{\tilde{\xi}(\mathbf{q}) e^{q(\bar{\xi}-z)}}{aB - Ab} \left(\frac{1 + X(z)}{1 - X(z)} + 2qz_0 \right) (E_0 B (1 - \varepsilon^{-1}) - 4\pi en A), \\ \tilde{\varphi}_2(z, \mathbf{q}) &= \tilde{\xi}(\mathbf{q}) \left(e^{q(\bar{\xi}-z)} (A + 1) - e^{q(z-\bar{\xi})} \right) \frac{4\pi en - bE_0 (1 - \varepsilon^{-1})}{Ab - aB}, \\ \tilde{\varphi}_3(z, \mathbf{q}) &= -\tilde{\xi}(\mathbf{q}) e^{q(\bar{\xi}-z)} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_d} (\delta + 1) \frac{4\pi en a - bE_0 (1 - \varepsilon^{-1})}{Ab - aB}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

де для спрощення запису введені такі позначення:

$$\begin{aligned} a &= 2qz_0 + E_0 / E^{(e)}, \quad b = aq + 4\pi en / E^{(e)}, \quad n = \frac{E_0^2 - E_\infty^2}{8\pi T}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon_d - \varepsilon}{\varepsilon_d + \varepsilon}, \\ A &= C - 1, \quad B = \varepsilon q (C + 1), \quad C = \delta e^{-2q(d+\bar{\xi})}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Розв'язки рівнянь (2.54) для потенціалів $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{q})$, $\alpha = 1, 2, 3$ даються формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= C_2^{(e1)}(\mathbf{q}) e^{-qz}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= C_1^{(e2)}(\mathbf{q}) e^{qz} + C_2^{(e2)}(\mathbf{q}) e^{-qz}, \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= C_1^{(e3)}(\mathbf{q}) e^{qz}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Вид цих рішень обраний таким чином, щоб напруженості зовнішніх полів при $z \rightarrow \pm\infty$ залишалися обмеженими. Константи у виразах (4.10) також можуть бути знайдені з відповідних граничних умов (2.54), у результаті чого потенціали $\tilde{\varphi}_\alpha^{(e)}(z, \mathbf{q})$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= \tilde{\xi}(\mathbf{q}) e^{q(\bar{\xi}-z)} E^{(e)} B \frac{1 - \varepsilon^{-1}}{B - qA}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= \tilde{\xi}(\mathbf{q}) \left\{ e^{q(\bar{\xi}-z)} (A + 1) - e^{q(z-\bar{\xi})} \right\} q E^{(e)} \frac{1 - \varepsilon^{-1}}{B - qA}, \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)}(z, \mathbf{q}) &= \tilde{\xi}(\mathbf{q}) e^{q(z-\bar{\xi})} E^{(e)} q (1 - \delta) \frac{1 - \varepsilon^{-1}}{B - qA},\end{aligned}\quad (4.11)$$

де всі константи, як і раніше, визначаються формулами (4.9).

Звернемось тепер до останнього з рівнянь (2.53). Підставляючи до нього знайдені розв'язки (4.8), (4.11) матимемо:

$$\Phi(\mathbf{q}_0) \tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad (4.12)$$

де функція $\Phi(\mathbf{q}_0)$ має вигляд:

$$\Phi(\mathbf{q}_0) = \frac{q_0 \left(E_0^2 - E^{(e)2} \right)}{4\pi\varepsilon} \frac{C^2 f_1 + C f_2 + f_3}{C^2 g_1 + C g_2 + g_3} - \alpha \left(\kappa^2 + q_0^2 \right). \quad (4.13)$$

У (4.13) величини f_1 , f_2 , f_3 та g_1 , g_2 , g_3 мають досить громіздку і складну залежність від q_0 , T , n_s і $E^{(e)}$:

$$\begin{aligned}f_1 &\equiv (\varepsilon - 1) \left(-(\varepsilon - 1) (2x)^2 + 2x + (\varepsilon + 1) y \right), \\ f_2 &\equiv 2\varepsilon \left(-(\varepsilon - 1) (2x)^2 + \varepsilon (2x + 1) + y \right), \\ f_3 &\equiv \left[-(\varepsilon^2 - 1) (2x)^2 + 2x (2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1) + 2\varepsilon (\varepsilon + 2) - y (\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1) \right], \\ g_1 &\equiv (\varepsilon - 1) ((\varepsilon - 1) 2x (2x + 1) - y), \quad g_2 \equiv 2 \left((\varepsilon^2 - 1) 2x (2x + 1) - y \right), \\ g_3 &\equiv (1 + \varepsilon) ((1 + \varepsilon) 2x (2x + 1) + y), \quad x \equiv \frac{q_0 T}{e E_0}, \quad y \equiv \frac{E_0^2 - E^{(e)2}}{E_0^2}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Як легко бачити, рівняння (4.12) передбачає два розв'язки: $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0$ і $\Phi(\mathbf{q}_0) = 0$. Перший із цих розв'язків тривіальний. Рівність $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) = 0$ означає, що просторово-періодичні структури на поверхні рідкого

діелектрика відсутні. Іншими словами, поверхня рідкого діелектрика залишається плоскою. Сам факт наявності фазового переходу до просторово-періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика передбачає, що $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0) \neq 0$, див. (2.34), (2.42) і (2.43). Таким чином, у цьому випадку ми повинні звернутися до другого розв'язку $\Phi(\mathbf{q}_0) = 0$, з якого випливає рівняння:

$$\frac{q_0 \left(E_0^2 - E^{(e)2} \right)}{4\pi\epsilon} \frac{C^2 f_1 + C f_2 + f_3}{C^2 g_1 + C g_2 + g_3} - \alpha (\kappa^2 + q_0^2) = 0. \quad (4.15)$$

Це рівняння визначає тільки модуль вектора \mathbf{q}_0 як функцію фізичних параметрів задачі - температури T , числа електронів n_s над одиницею площі плоскої поверхні рідкого діелектрика, густини цього діелектрика ρ , його коефіцієнта поверхневого натягу α і діелектричної проникності ϵ , а також діелектричної проникності твердої підкладки ϵ_d . Це спричинене тією обставиною, що у лінійному наближенні теорії збурень за $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$ система ізотропна відносно \mathbf{q}_0 . Нагадаємо, що сам вектор \mathbf{q}_0 характеризує обернену ґратку двовимірної періодичної структури всередині її елементарної комірки, $\exp(i\mathbf{q}_0\boldsymbol{\rho}) = \cos(q_{0x}x) + i \sin(q_{0y}y)$. Як уже згадувалося вище, для простоти можна вважати, що поверхня рідкого діелектрика є просторово-однорідною вздовж осі $0y$ і періодичною вздовж осі $0x$. Тоді вектор \mathbf{q}_0 паралельний осі x , а його модуль q_0 є постійною оберненої ґратки такої періодичної структури. У цьому випадку профіль поверхні рідкого діелектрика, що утворився у результаті фазового переходу, нагадує профіль листа шиферу. Вище також зазначалося, що лінійне наближення не визначає саму амплітуду $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$. У цьому ми безпосередньо переконалися при аналізі формули (4.12).

Як зазначалося вище, величини C , f_1 , f_2 , f_3 та g_1 , g_2 , g_3 , що входять до (4.15), мають досить складну залежність від q_0 , T , n_s і $E^{(e)}$, із цієї причини виникає необхідність застосування чисельних методів до рівняння (4.15). Такі чисельні розрахунки проводилися на основі експериментальних даних, опублікованих у роботі [26]. У цій роботі описується експеримент, у якому спостерігалася поява макроскопічних

лунок на поверхні рідкого ${}^4\text{He}$, коли зовнішнє електричне поле перевищує деяке критичне значення. Встановлено, що при зовнішньому полі у 1820 В/см і температурі $4,2 \text{ К}$ на поверхні рідкого ${}^4\text{He}$ чітко спостерігалася двовимірною гексагональна лункова ґратка з періодом $a \approx 1,76 \text{ мм}$ ($a = 2\pi/q_0$) з числом електронів близько 10^7 у кожній лунці при товщині гелієвої плівки від $0,2$ до $1,9 \text{ см}$. Середня кількість електронів n_s (див. (3.11)), які знаходяться над одиницею площі поверхні рідкого гелію у цьому експерименті можна оцінити таким чином. Можна обчислити відношення кількості електронів в одній лунці до площі елементарної комірки. Площа елементарної комірки у гексагональній ґратці дорівнює площі ромба з ребром $a \approx 1,76 \text{ мм}$ і кутом при вершині, рівним $\pi/3$. Таким чином, матимемо, що $n_s \approx 0,37 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$. Покладаючи у формулі (4.15) $\varepsilon \ll \varepsilon_d$ і $q_0 = 2\pi/a$, і підставляючи значення параметрів $E^{(e)} = 1820 \text{ В/см}$, $a \approx 1,76 \text{ мм}$, $d = 1 \text{ см}$, $T = 4,2 \text{ К}$, одержуємо $n_s \approx 0,84 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$. Як легко бачити, збіг розрахункових і експериментальних значень величини n_s задовільний, особливо якщо врахувати наближеність оцінки цієї величини, виходячи з експериментальних даних [26]. Природно, порівняння наших результатів з експериментальними даними може здаватися не цілком коректним. Причиною може слугувати кілька обставин. По-перше, в експерименті [26] мова, скоріш за все, йде про розвинутий просторово-періодичний рельєф поверхні плівки рідкого гелію. У дисертаційній роботі розглядається просторово-періодичний профіль поверхні у несиметричній фазі поблизу точки фазового переходу. По-друге, як уже зазначалося, на основі лінійного наближення теорії збурень не можна визначити амплітуду профілю поверхні $\tilde{\xi}(\mathbf{q}_0)$ через фізичні параметри системи. Тому неможливо і вказати, який саме вид має просторово-періодичний рельєф поверхні плівки рідкого діелектрика, що описується у дисертаційній роботі. Найбільш простим видом просторово-періодичної структури поверхні, що виникла у результаті фазового переходу, може бути рельєф типу поверхні листа шиферу. Тому порівняння результатів цього підрозділу дисертаційної роботи з

експериментальними результатами може мати тільки якісний характер.

4.2. Параметр порядку фазового переходу у невідродженій квазінейтральній системі зарядів над поверхнею рідкого діелектрика

Вихідними рівняннями для дослідження критичних параметрів такого фазового переходу будуть слугувати рівняння (2.53) і граничні умови до них. Звернемось спочатку до першого з рівнянь (2.53). Це рівняння з урахуванням формул (3.25) і (3.30) може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z^2} = \left(q_0^2 + \frac{1}{2z_0^2} \left(1 + \frac{z - \bar{\xi}}{2z_0} \right)^{-2} \right) \tilde{\varphi}_1^{(1)}, \quad (4.16)$$

де з огляду на (3.21), (3.25) враховано, що $\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\partial n}{\partial \psi} = \frac{n}{T}$. У результаті заміни:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(z) = y^{\frac{1}{2}} \eta(y), \quad y = 2q_0 z_0 + q_0 (z - \bar{\xi}), \quad (4.17)$$

рівняння (4.16) набуде такого вигляду:

$$y^2 \eta'' + y \eta' - \eta \left(y^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.18)$$

Останнє рівняння є модифікованим рівнянням Бесселя. Його розв'язок дається виразом [83]:

$$\eta(y) = C_1 I_{\frac{3}{2}}(y) + C_2 K_{\frac{3}{2}}(y), \quad (4.19)$$

де $I_\nu(y)$ і $K_\nu(y)$ модифіковані функції Бесселя першого і другого роду відповідно:

$$I_\nu(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2} \right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad K_\nu(y) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(y) - I_\nu(y)}{\sin \pi \nu}. \quad (4.20)$$

Неважко переконатися, що при $\nu = 3/2$, модифіковані функції Бесселя (4.20) виражаються через елементарні функції:

$$K_{\frac{3}{2}}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \left(1 + \frac{1}{y} \right), \quad I_{\frac{3}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \left(chy - \frac{shy}{y} \right). \quad (4.21)$$

Функція $I_{\frac{3}{2}}(y)$, як легко бачити, не задовольняє умову (2.38) обмеженості напруженостей електричного поля у області «1» при $z \rightarrow +\infty$. З цієї причини у розв'язку (4.20) необхідно покласти $C_1 = 0$. Таким чином, приходимо до наступного виразу для потенціалу $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(z)$:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(z) = C_2^{(1)} e^{-y(z)} \left(1 + \frac{1}{y(z)} \right). \quad (4.22)$$

Розв'язки другого і третього з рівнянь (2.53) у загальному випадку мають вигляд:

$$\tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) = C_1^{(2)} e^{q_0 z} + C_2^{(2)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) = C_1^{(3)} e^{q_0 z} + C_2^{(3)} e^{-q_0 z}. \quad (4.23)$$

З урахуванням тієї обставини, що напруженості полів при $z \rightarrow -\infty$ повинні залишатися обмеженими, константу $C_2^{(3)}$ в (4.23) необхідно покласти рівною нулю, $C_2^{(3)} \equiv 0$. Величини ж $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ повинні бути знайдені з граничних умов у (2.53). Як легко переконатися, ці константи будуть виражені через величину $\tilde{\xi}^{(1)}$, що відповідно до (2.42), (2.50) і (2.51) є першою гармонікою Фур'є-образу профілю просторово-періодичної поверхні плівки рідкого діелектрика на твердій підкладці:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(1)}(z) &= E_0 \tilde{\xi}^{(1)} e^{q_0(\bar{\xi}-z)} \left(1 + \frac{1}{y_0 + q_0(z - \bar{\xi})} \right) G(q_0), \\ \tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} \left(e^{q(z-\bar{\xi})} - C e^{q(\bar{\xi}-z)} \right) E_0 F(q), \\ \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} e^{q(z-\bar{\xi})} E_0 F(q) (1 - \delta), \end{aligned} \quad (4.24)$$

де для спрощення запису введені такі позначення:

$$\begin{aligned} G(q_0) &= \frac{y_0(1 - C + (\varepsilon - 1)(C + 1)y_0)}{(1 - C)(1 + y_0 + y_0^2) + y_0\varepsilon(1 + C)(1 + y_0)}, \\ F(q_0) &= \frac{1 + y_0 + (\varepsilon^{-1} - 1)(1 + y_0 + y_0^2)}{(1 - C)(1 + y_0 + y_0^2) + y_0\varepsilon(1 + C)(1 + y_0)}, \\ C &= \delta e^{-2q(d+\bar{\xi})}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon_d - \varepsilon}{\varepsilon_d + \varepsilon}, \quad y_0 \equiv y(z = \bar{\xi}) = 2q_0 z_0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Розв'язки рівнянь (2.53) у аналогічному наближенні для потенціалів $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$, $j = 1, 2, 3$ даються формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z) &= C_2^{(e1)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) = C_1^{(e2)} e^{q_0 z} + C_2^{(e2)} e^{-q_0 z}, \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) &= C_1^{(e3)} e^{q_0 z}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Вид цих рішень обраний таким чином, щоб напруженості зовнішніх полів при $z \rightarrow \pm\infty$ залишалися обмеженими. Константи у виразах (4.26) також можуть бути знайдені з відповідних граничних умов (2.54), записаних у лінійному наближенні, у результаті чого потенціали $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^{(e)(1)}(z) &= (\varepsilon + 1) C E^{(e)} \tilde{\xi}^{(1)} F^{(e)}(q) e^{q(\bar{\xi}-z)}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} E^{(e)} F^{(e)}(q_0) \left(C e^{q_0(\bar{\xi}-z)} - e^{q_0(z-\bar{\xi})} \right), \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) &= (1 - \delta) \tilde{\xi}^{(1)} E^{(e)} F^{(e)}(q_0) e^{q_0(z-\bar{\xi})},\end{aligned}\quad (4.27)$$

де

$$F^{(e)}(q) = \frac{(1 - \varepsilon^{-1})}{(\varepsilon(1 + C) + 1 - C)}.$$

Звернемось тепер до останнього з рівнянь (2.53). Підставляючи у нього знайдені розв'язки (4.24), (4.27), з урахуванням (2.43) матимемо:

$$\Phi(q_0) \tilde{\xi}^{(1)} = 0, \quad (4.28)$$

де функція $\Phi(q_0)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}\Phi(q_0) &\equiv \frac{E^{(e)2}}{8\pi z_0} \left((1 + y_0) G(q_0) - 1 - y_0(1 + C) \left(F(q_0) + F^{(e)}(q_0) \right) \right) + \\ &+ \alpha \left(\kappa^2 + q_0^2 \tilde{\beta} \right), \quad \tilde{\beta} = \left(1 + \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{2} \right).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Як легко бачити, рівняння (4.28) передбачає два розв'язки: $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ і $\Phi(q_0) = 0$. Перше з цих рішень тривіальне. Рівність $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ означає, що просторово-періодичні структури на поверхні рідкого діелектрика відсутні. Іншими словами, поверхня рідкого діелектрика залишається плоскою. Сам факт наявності фазового переходу до просторово-періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика передбачає, що $\tilde{\xi}^{(1)} \neq 0$, див. (2.34), (2.42), (2.43). Таким чином, у цьому випадку ми повинні звернутися до другого розв'язку:

$$\Phi(q_0) = 0. \quad (4.30)$$

Це рівняння визначає тільки модуль вектора \mathbf{q}_0 (див. (4.25)) як функцію параметрів фазового переходу задачі - температури T_c , зовнішнього

притискуючого поля $E_c^{(e)}$ (або концентрації числа електронів n_{sc} , див. (3.50)), а також густини цього діелектрика ρ , його коефіцієнта поверхневого натягу α і діелектричної проникності ε , а також діелектричної проникності твердої підкладки ε_d . Зафіксувавши q_0 (Наприклад, при відомих значеннях періоду ґратки), ми матимемо криву, яка пов'язує області критичних параметрів T_c і $E_c^{(e)}$.

Проаналізуємо отримане співвідношення (4.30). Попередні чисельні оцінки показують, що q_0 практично не залежить від T_c . Дійсно, T_c входить у (4.30) тільки через посередництво величини y_0 (див. (4.25), (3.29)), яка, як стане видно трохи нижче, є малою у даній області температур і притискуючих полів. Фактично це означає, що згідно з передбаченим вище сценарієм фазового переходу, при постійному полі він буде відбуватися при більш низьких температурах, ніж ті, які задовольняють умову невиродженості газу частинок (3.35). Отже, співвідношення, отримані у даному підрозділі, непридатні для опису фазового переходу за температурою при фіксованому притискуючому полі.

Зауважимо також, що у випадку малих періодів виникаючих періодичних структур у порівнянні з товщиною плівки рідкого діелектрика і тим більше у порівнянні з лінійними розмірами площадки, на якій цей ефект може спостерігатися:

$$q_0 d \gg 1, \quad (4.31)$$

можна покласти $C = 0$ (див. (4.25)). В області $E_c^{(e)}$ і T_c , задовольняють співвідношення (3.35), але таких, що T_c досить низька, щоб діелектрик (у нашому випадку це HeII) залишався рідким, газ зарядів - невиродженим, а $E_c^{(e)}$ не надто малим, щоб виконувалася нерівність:

$$qz_0 \ll 1, \quad (4.32)$$

рівняння (4.30) з урахуванням умов (4.31) і (4.32) набуває наступного вигляду:

$$\kappa^2 + q_0^2 \tilde{\beta} = \frac{q_0 E_c^2 \varepsilon + 3}{4\pi\alpha \varepsilon + 1}. \quad (4.33)$$

Рівняння (4.33) не залежить від температури, що забезпечується умовою (4.32). Слід зазначити, що наближення (4.31), (4.32) зроблені лише для

більш наочної ілюстрації отриманих результатів, і відсутність температурної залежності не є їх наслідком. Чисельні розрахунки поведінки рівняння (4.30) у залежності від температури також показують, що ця залежність практично відсутня, що відповідає зробленому припущенню.

Рівняння (4.33) для визначення q_0 має два кореня, обидва позитивних у силу (3.34):

$$q_0 = \frac{E_c^{(e)2}}{8\pi\alpha\tilde{\beta}} \frac{\varepsilon + 3}{\varepsilon + 1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \tilde{\beta} \left(\frac{8\pi\alpha\kappa}{E_c^{(e)2}} \left(\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3} \right) \right)^2} \right). \quad (4.34)$$

Для станів, що описуються, природно вибрати корінь зі знаком «+», оскільки логічно припустити, що зі збільшенням притискуючого поля (але з урахуванням (3.34), (3.35)), а отже і числа частинок, відстань між ними має зменшуватися. На рис. 4.1 наведений «+» розв'язок (4.34) у вигляді суцільної лінії. Даний розв'язок показує, що періодичні структури у системі невиродженого газу зарядів над поверхнею рідкого діелектрика мають місце, починаючи з величини притискуючого поля, що відповідає (згідно з (3.50)) величині поверхневої концентрації частинок $n_s \approx 1,153 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$. При цьому період прямої ґратки виникаючої структури дорівнює $a = 2\pi/q_0 \approx 0,23 \text{см}$. При подальшому збільшенні n_s період прямої ґратки буде зменшуватися, наближаючись до значення $0,074 \text{см}$. Подальше збільшення n_s практично не змінює періоду ґратки. При досягненні ж критичного значення притискуючого поля (3.34) розглянута періодична структура руйнується. Відзначимо також таку обставину. Перша гармоніка Фур'є-образу відхилення концентрації газу частинок від рівноважного значення, що виникає внаслідок появи періодичних структур, на поверхні рідкого діелектрика $z = \xi$ має вигляд:

$$\tilde{n}^{(1)} \approx \frac{\partial n}{\partial \bar{\varphi}_1} \tilde{\varphi}_1^{(1)} + \frac{\partial n}{\partial \bar{\xi}} \tilde{\xi}^{(1)}. \quad (4.35)$$

Виходячи з (3.25), (4.24) у наближенні (4.31), (4.32) матимемо:

$$\tilde{n}^{(1)} \approx -2q_0 n(\bar{\xi}) \tilde{\xi}^{(1)}. \quad (4.36)$$

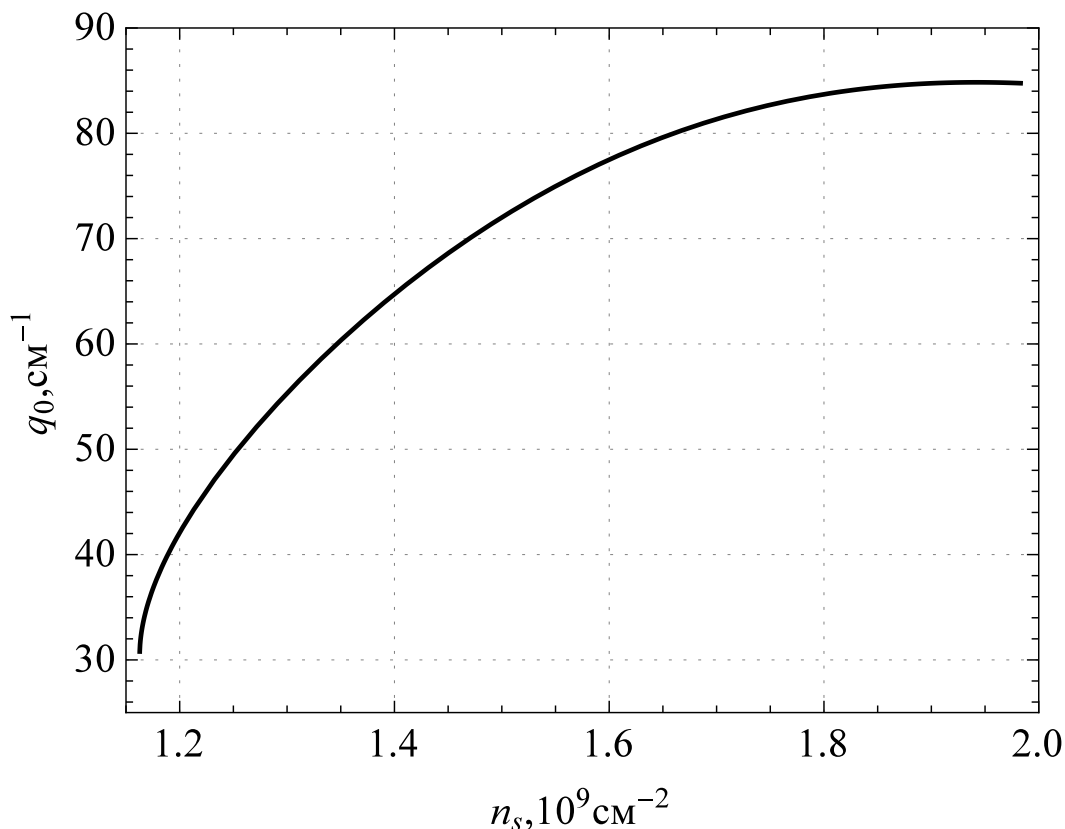


Рис. 4.1. Залежність модуля q_0 вектора трансляції оберненої ґратки від кількості частинок над одиницею поверхні діелектрика n_s .

Оскільки відхилення концентрації і профілю поверхні рідкого діелектрика мають різний знак, ми можемо зробити висновок, що збільшення концентрації частинок відбувається в області над зниженням профілю діелектрика або у так званій лунці, а над так званими горбами на поверхні діелектрика має місце розрідження концентрації. Схематично ця особливість відображена на рис. 2.2.

Знайдемо тепер вираз для параметра порядку $\tilde{\xi}^{(1)}$ поблизу критичних значень керуючого параметра $E_c^{(e)}$. Як видно з даного підрозділу, для цієї мети недостатньо лінійного наближення даної теорії збурень. Помічаючи, що:

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi})_{\mathbf{q}} &= \tilde{\xi}_{\mathbf{q}}, \\ (\tilde{\xi}^2)_{\mathbf{q}} &= \sum_{q', q''} \tilde{\xi}_{q'} \tilde{\xi}_{q''} \Delta(q' + q'' - q), \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\xi}^3\right)_{\mathbf{q}} = \sum_{q', q'', q'''} \tilde{\xi}_{q'} \tilde{\xi}_{q''} \tilde{\xi}_{q'''} \Delta(q' + q'' + q''' - q), \quad (4.37)$$

а також з огляду на те, що у головному незникаючому наближенні справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\xi}^2\right)_{q_0} &\approx 2\tilde{\xi}^{(1)}\tilde{\xi}^{(2)}, & \left(\tilde{\xi}^3\right)_{q_0} &\approx 3\left(\tilde{\xi}^{(1)}\right)^3, \\ \left(\tilde{\xi}\tilde{\varphi}_j\right)_{q_0} &\approx \tilde{\varphi}_j^{(1)}\tilde{\xi}^{(2)} + \tilde{\xi}^{(1)}\tilde{\varphi}_j^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

перепишемо рівняння (2.31) у третьому порядку теорії збурень за малими параметрами $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$ і $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$, а також $E^{(e)} - E_c^{(e)}$. З огляду на зроблені вище зауваження з приводу відсутності фазового переходу за температурою для невиродженого газу частинок, у подальших викладках вважається $T = T_c$. Далі, згідно з (2.42), (2.44), (2.50) і (2.51), переходячи до рівнянь для Фур'є образів $\tilde{\xi}_q$, $\tilde{\varphi}_{jq}(z)$ і $\tilde{\varphi}_{jq}^{(e)}(z)$ при $q = q_0$ з урахуванням четвертого рівняння у (2.53) матимемо при $z = \bar{\xi}$:

$$\begin{aligned} & ne \left(\left(\bar{\varphi}_1'' \tilde{\xi}^{(1)} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z} \right) \tilde{\xi}^{(2)} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(2)}}{\partial z} \tilde{\xi}^{(1)} + \frac{\bar{\varphi}_1'''}{2} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z^2} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \right) \\ & + \frac{3e^2 n}{2T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(1)} \right) \left(\tilde{\xi}^{(1)} \left(\bar{\varphi}_1'' \tilde{\xi}^{(1)} + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z} \right) + \frac{e}{T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \right) \\ & + \frac{ne^2}{T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(1)} \right) \left(\tilde{\varphi}_1^{(2)} + \bar{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(2)} \right) + e \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(1)} \right) \frac{\partial n}{\partial E^{(e)}} \left(E^{(e)} - E_c^{(e)} \right) \\ & + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\bar{\varphi}_2' q_0^2 \left(\tilde{\varphi}_2^{(1)} \tilde{\xi}^{(2)} + 4 \tilde{\varphi}_2^{(2)} \tilde{\xi}^{(1)} \right) + q_0^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} \tilde{\xi}^{(1)} \left(\frac{3\bar{\varphi}_2'}{2} \tilde{\xi}^{(1)} + 8 \tilde{\varphi}_2^{(1)} \right) \right) \\ & + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(2)}}{\partial z} - q_0^2 \left(4 \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \tilde{\varphi}_2^{(e)(2)} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} \tilde{\xi}^{(1)} \left(\frac{3\bar{\varphi}_2^{(e)'}}{2} \tilde{\xi}^{(1)} + 8 \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \right) \right) \\ & + q_0^2 4 \tilde{\varphi}_2^{(1)} \tilde{\varphi}_2^{(2)} - \bar{\varphi}_2^{(e)'} q_0^2 \left(4 \tilde{\varphi}_2^{(e)(2)} \tilde{\xi}^{(1)} + \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \tilde{\xi}^{(2)} \right) - 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(2)}}{\partial z} \\ & - \kappa^2 \alpha q_0^2 \tilde{\xi}^{(1)} \left(\bar{\xi} \tilde{\xi}^{(2)} - \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \left(4 + 3q_0^2 \kappa^{-2} \left(1 - \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{4} \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Легко бачити, що для визначення $\tilde{\xi}^{(1)}$ необхідно записати рівняння для знаходження зв'язку між другими гармоніками $\tilde{\varphi}_j^{(2)}$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)(2)}$, $\tilde{\xi}^{(2)}$ і власне

першої $\tilde{\xi}^{(1)}$. З цією метою виконаємо аналогічну процедуру з рівняннями (2.30), (2.31) при $q = 2q_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(2)}}{\partial z^2} - 4q_0^2 \tilde{\varphi}_1^{(2)} &= \frac{4\pi e^2 n}{T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(2)} + \frac{e}{2T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} \right)^2 \right), \\
\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2^{(2)}}{\partial z^2} - 4q_0^2 \tilde{\varphi}_2^{(2)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3^{(2)}}{\partial z^2} - 4q_0^2 \tilde{\varphi}_3^{(2)} = 0, \\
\left(en \left(\tilde{\varphi}_1^{(2)} + \tilde{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(2)} + \left(\frac{\tilde{\varphi}_1''}{2} \tilde{\xi}^{(1)} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z} \right) \tilde{\xi}^{(1)} + \frac{e}{2T} \left(\tilde{\varphi}_1^{(1)} + \tilde{\varphi}_1' \tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \right) \right. \\
&+ \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\tilde{\varphi}_2' \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(2)}}{\partial z} + q_0^2 \tilde{\varphi}_2^{(1)} \tilde{\xi}^{(1)} \right) - \tilde{\varphi}_2^{(e)'} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(2)}}{\partial z} + q_0^2 \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \tilde{\xi}^{(1)} \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}}{\partial z} \right)^2 + q_0^2 \left(\left(\tilde{\varphi}_2^{(e)(1)} \right)^2 - \left(\tilde{\varphi}_2^{(1)} \right)^2 \right) \right) \\
&+ \alpha \left(\tilde{\xi}^{(2)} \left(\kappa^2 + 4q^2 \left(1 + \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{2} \right) \right) + \bar{\xi} q^2 \kappa^2 \frac{5}{2} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Зауважимо, що в останній формулі покладено $z = \bar{\xi}$. З огляду на ту обставину, що залежність $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(z)$ нам відома (див. (4.24)), загальний розв'язок першого рівняння у (4.40) можна знайти методом варіації довільних сталих. Тоді після нескладних перетворень матимемо:

$$\tilde{\varphi}_1^{(2)}(z) = C_1 K_{\frac{3}{2}}(2y(z)) + C_2 I_{\frac{3}{2}}(y)(2y(z)) + \frac{E_0}{z_0} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 G_1(y(z)), \tag{4.41}$$

де введене наступне позначення (див. також (4.25)):

$$G_1(x) = e^{2(y_0-x)} \frac{(1+x)G(q_0)^2}{x^2} \frac{1}{8}. \tag{4.42}$$

Друге і третє рівняння у (4.40) мають розв'язок:

$$\tilde{\varphi}_2^{(2)} = B_1 e^{2q_0(\bar{\xi}-z)} + B_2 e^{2q_0(z-\bar{\xi})}, \quad \tilde{\varphi}_3^{(2)} = C_3 e^{2q_0(z-\bar{\xi})} + C_4 e^{2q_0(\bar{\xi}-z)}. \tag{4.43}$$

Приймаючи до уваги (4.17), (4.41) й умову обмеженості (2.38) слід покласти $C_2 = 0$ і $C_4 = 0$ у здобутих розв'язках (4.41), (4.43).

Для визначення констант C_2, B_1, B_2, C_3 необхідно підставити (4.41), (4.43) Фур'є-образів рівнянь (2.36) при $q = 2q_0$, у результаті чого ми матимемо:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^{(2)}(z) &= E_0 e^{-2q_0(z-\bar{\xi})} \left(1 + \frac{1}{2y(z)}\right) \left(G(2q_0) \tilde{\xi}^{(2)} + G^{(2)} \frac{(\tilde{\xi}^{(1)})^2}{z_0}\right) + \\ &\quad + \frac{E_0}{z_0} (\tilde{\xi}^{(1)})^2 G_1(y(z)), \\ \tilde{\varphi}_2^{(2)}(z) &= E_0 \left(e^{2q_0(z-\bar{\xi})} - \delta^{-1} C^2 e^{2q_0(\bar{\xi}-z)}\right) \left(F(2q_0) \tilde{\xi}^{(2)} + z_0^{-1} (\tilde{\xi}^{(1)})^2 F^{(2)}\right), \\ \tilde{\varphi}_3^{(2)}(z) &= E_0 e^{2q_0(z-\bar{\xi})} (1-\delta) \left(F(2q_0) \tilde{\xi}^{(2)} + z_0^{-1} (\tilde{\xi}^{(1)})^2 F^{(2)}\right),\end{aligned}\tag{4.44}$$

де введені такі позначення

$$\begin{aligned}F^{(2)} &= \frac{H_2 (1 + 2y_0 + 4y_0^2) - H_1 2y_0 (1 + 2y_0)}{(1 - C^2/\delta) (1 + 2y_0 + 4y_0^2) + 2y_0 \varepsilon (1 + C^2/\delta) (1 + 2y_0)}, \\ G^{(2)} &= -\frac{4y_0^2 (H_1 (1 - C^2/\delta) + H_2 \varepsilon (1 + C^2/\delta))}{(1 - C^2/\delta) (1 + 2y_0 + 4y_0^2) + 2y_0 \varepsilon (1 + C^2/\delta) (1 + 2y_0)}, \\ H_1 &= \frac{1 - 2y_0 G'_1(y_0) - 2y_0^2 \left(\left(1 + \frac{1}{y_0}\right) \left(1 + \frac{1}{y_0^2}\right) G(q_0) - \varepsilon (1 - C) F(q_0)\right)}{4y_0}, \\ H_2 &= \frac{1 + 4G_1(y_0) - 2y_0 \left(\left(1 + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0^2}\right) G(q_0) + (1 + C) F(q_0)\right)}{4}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Визначимо також величини $\tilde{\varphi}_j^{(e)(2)}$. Для цього написавши систему рівнянь і граничних умов (2.54) для Фур'є образів потенціалу зовнішнього поля при $q = 2q_0$ і з огляду на ту обставину, що з зовнішніх потенціалів $\tilde{\varphi}_2^{(e)(2)}$ система (4.40) містить лише $\tilde{\varphi}_j^{(e)(2)}$, ми наведемо розв'язок тільки для цієї величини:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2^{(e)(2)} &= E^{(e)} \left(\frac{C^2}{\delta} e^{2q(\bar{\xi}-z)} - e^{2q(z-\bar{\xi})}\right) \left(F^{(e)}(2q) \tilde{\xi}^{(2)} + F_2^{(e)} \frac{(\tilde{\xi}^{(1)})^2}{z_0}\right), \\ F_2^{(e)} &= F^{(e)}(q) F^{(e)}(2q) \frac{y_0}{2} \frac{1 + C + \varepsilon(1 - C)}{1 - \varepsilon^{-1}}.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Звернемося тепер до останнього рівняння у (4.40). Підставляючи у нього отримані вирази (4.24), (4.27), (4.44), (4.46) у наближенні (4.31), (4.32), матимемо:

$$\tilde{\xi}^{(2)} = \frac{\gamma}{z_0} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2, \quad \gamma = \frac{\bar{\xi}}{8z_0 (1 + 2q^2 (2\kappa^{-2} + \bar{\xi}^2))}. \quad (4.47)$$

Рівність (4.47) говорить про те, що всі Фур'є образи других гармонік $\tilde{\varphi}_j^{(2)}$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)(2)}$ і $\tilde{\xi}^{(2)}$ квадратичні за Фур'є-образом першої гармоніки збурення профілю поверхні рідкого діелектрика $\tilde{\xi}^{(1)}$, який є параметром порядку у розглянутій задачі. Встановимо його залежність від керуючих параметрів фазового переходу - температури T і зовнішнього притискуючого поля $E^{(e)}$. Із цією метою підставимо (4.24), (4.27), (4.44), (4.46) і (4.47) у рівняння (4.39) і після досить громіздких перетворень прийдемо до рівності:

$$\tilde{\xi}^{(1)} \Psi \left(\tilde{\xi}^{(1)}, T, E^{(e)} \right) = 0, \quad (4.48)$$

де з урахуванням нерівностей (4.31), (4.32) введене позначення

$$\Psi \left(\tilde{\xi}^{(1)}, T, E^{(e)} \right) = E_c^{(e)} e y_0 \frac{\partial n_{\bar{\xi}}}{\partial E^{(e)}} \left(E^{(e)} - E_c^{(e)} \right) - E_c^{(e)2} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2 \frac{U \left(T_c, E_c^{(e)}, q_0 \right)}{32\pi z_{0c}^3},$$

$$U \left(T_c, E_c^{(e)}, q_0 \right) = (1 - 2\gamma) + y_{0c}^2 \left(\gamma + \frac{z_{0c}}{|\bar{\xi}|} \left(4 + 3q_0^2 \left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{\bar{\xi}^2}{4} \right) \right) \right). \quad (4.49)$$

Рівняння (4.48) має два розв'язки. Перший розв'язок $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ тривіальний й інтересу не представляє, оскільки у такому випадку фазовий перехід відсутній. У випадку наявності відмінної від нуля деформації профілю поверхні рідкого діелектрика, що утворилася у результаті фазового переходу, наступний розв'язок рівняння (4.48)

$$\Psi \left(\tilde{\xi}^{(1)}, T, E^{(e)} \right) = 0 \quad (4.50)$$

дає зв'язок між першою гармонікою Фур'є образу збурення профілю поверхні діелектрика і параметром фазового переходу $E^{(e)}$. Беручи до уваги позначення (4.49), (3.29), (3.30) рівняння (4.50) можна переписати у

наступному вигляді:

$$\tilde{\xi}^{(1)} = 4z_{0c} \left(\frac{q_0 z_{0c}}{U(T_c, E_c^{(e)}, q_0)} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{E^{(e)}}{E_c^{(e)}} - 1}. \quad (4.51)$$

Останнє співвідношення визначає періодичну структуру поверхні рідкого діелектрика поблизу $E^{(e)}$ і здобує у припущенні про справедливість наближень (4.31), (4.32) або:

$$d^{-1} \ll q_0 \ll z_0^{-1}. \quad (4.52)$$

До рівнянь (4.51) і (4.47) також входять такі параметри, як κ і $\bar{\xi}^{-1}$, що мають розмірність оберненої довжини. Для того, щоб оцінити їх, досить скористатися рівняннями (2.12), (3.32), а також конкретними значеннями притискуючого поля $E^{(e)}$ й температури T .

Розглянемо випадок макроскопічних структур, коли періоди виникаючих періодичних структур a одного порядку з товщиною d рідкого діелектрика (ситуація, яка спостерігається у [26]):

$$d > a. \quad (4.53)$$

У цьому випадку формули, отримані у наближенні (4.31), як і раніше справедливі, оскільки умова (4.54) дозволяє з досить високим ступенем точності покласти $C = 0$. Вважаючи рідкий діелектрик гелієм, завтовшки $d = 1\text{см}$ і зовнішнє притискуюче поле здатним утримувати до $n_s = 1,4 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$ електронів над одиницею площі гелію, ми матимемо наступне співвідношення між зворотніми просторовими масштабами:

$$d^{-1} < q_0, \kappa, \bar{\xi}^{-1} \ll z_0^{-1}. \quad (4.54)$$

Відзначимо, що величина z_0 обчислена для таких значень температур, за яких умова невинодженості (3.35) добре виконується. Використовуючи співвідношення (4.54), спростимо (4.51):

$$\tilde{\xi}^{(1)} = 8z_{0c}^2 \left(\frac{q_0}{|\bar{\xi}|} \left(1 + 2q_0^2 \left(\frac{2}{\kappa^2} + \bar{\xi}^2 \right) \right) \right)^{1/2} \sqrt{\frac{E^{(e)}}{E_c^{(e)}} - 1}. \quad (4.55)$$

Здобуті вирази (4.44), (4.47), (4.51), (4.55) дозволяють знайти вирази і для амплітуд перших гармонік всіх електростатичних потенціалів системи, а також, у межах розвиненої теорії збурень, при необхідності, і вирази для амплітуд других гармонік параметрів опису системи. Ми, однак, у даному підрозділі дисертаційної роботи наводимо вирази для цих величин не будемо через їхній громіздкий вигляд і малу інформативність з точки зору поставлених нами завдань.

4.3. Особливості фазового переходу у квазінейтральній системі зарядів над поверхнею рідких діелектричних плівок.

Вихідними рівняннями для дослідження критичних параметрів фазового переходу з утворенням просторово-періодичних структур будуть рівняння з граничними умовами (2.53), (2.54). Підкреслимо ще раз, що у дисертаційній роботі мова йде саме про просторово-періодичні структури типу лункових періодичних утворень. Звернемося насамперед до першого з рівнянь (2.53). Це рівняння може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z^2} = \left(q_0^2 - 2\sqrt{2} \frac{Li_{1/2}(-e^\chi)}{a_0^2} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right) \tilde{\varphi}_1^{(1)}, \quad (4.56)$$

в якому відповідно до (3.38)-(3.40) враховане співвідношення:

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = - \frac{Li_{1/2}(-e^\chi)}{\sqrt{2} \pi a_0^2 e^2} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.57)$$

Приймаючи до уваги (3.38), перейдемо в рівнянні (4.56) від похідних за змінною z до похідних за змінною χ і розглянемо випадок:

$$\frac{2\sqrt{2}}{q_0^2 a_0^2} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2} |Li_{1/2}(-e^\chi)| \gg 1, \quad (4.58)$$

який дозволить значно спростити знаходження розв'язку (4.56). Оцінимо відстань від поверхні діелектрика, на якій нерівність (4.58) починає порушуватися. При $T = 5K$ і $n_s = 10^8 \text{см}^{-2}$ і максимально можливого $q_0 \approx 3 \cdot 10^4 \text{см}^{-1}$ за даного n_s (що відповідає випадку, коли у вузлі ґратки

знаходиться один заряд) умова (4.58) виконується в інтервалі $z - \bar{\xi} < 10^{-5}$ см. Зі збільшенням z умова (4.58) перестане виконуватись. Однак, зі збільшенням z об'ємна концентрація газу зарядів зменшується і стан газу стає близьким до невиродженого [4]. Нам, однак, розв'язок рівняння (4.56) знадобиться поблизу точки $z = \bar{\xi}$, де умова (4.58) виконується дуже добре. Із цієї причини і зосередимося на розв'язанні рівняння (4.56) в околі $z = \bar{\xi}$. Дійсно, як видно з останнього рівняння в (2.53), для визначення критичних параметрів фазового переходу необхідно отримати розв'язок рівняння (4.56) при $z = \bar{\xi}$, а також його першої похідної за z при $z = \bar{\xi}$.

На рис. 4.2 наведена залежність від температури T і кількості зарядів над одиницею площі поверхні діелектрика n_s характерного значення параметра оберненої ґратки $q_0(T, n_s)$, нижче якого виконується нерівність (4.58) для векторів оберненої ґратки q_0 і $2q_0$:

$$q_0(T, n_s) = \frac{\sqrt{|Li_{1/2}(-e^{\chi_0})|}}{2^{3/4} 5^{1/2} a_0} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/4}. \quad (4.59)$$

Необхідність виконання нерівності, аналогічної (4.58) з удвічі більшим значенням q_0 виникне при обчисленні амплітуди параметра порядку $\tilde{\xi}^{(1)}$, однак більш детальний виклад даного питання піде нижче. Тут важливо лише зазначити, що на малюнку відображена область більш ніж достатня для виконання умови (4.58) і достатня для вдвічі більших значень q_0 .

Після ряду нескладних перетворень і спрощень, у наближенні (4.58) рівняння (4.56) набуде вигляду:

$$2Li_{5/2}(-e^{\chi}) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi^2} + Li_{3/2}(-e^{\chi}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi} - Li_{1/2}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} = 0. \quad (4.60)$$

Беручи до уваги наступну властивість полілогарифма:

$$Li_{s-1}(-e^{\chi}) = \frac{d}{d\chi} Li_s(-e^{\chi}), \quad (4.61)$$

зведемо рівняння (4.60) до вигляду:

$$\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \left(Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} \right) = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(Li_{\frac{3}{2}}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} \right). \quad (4.62)$$

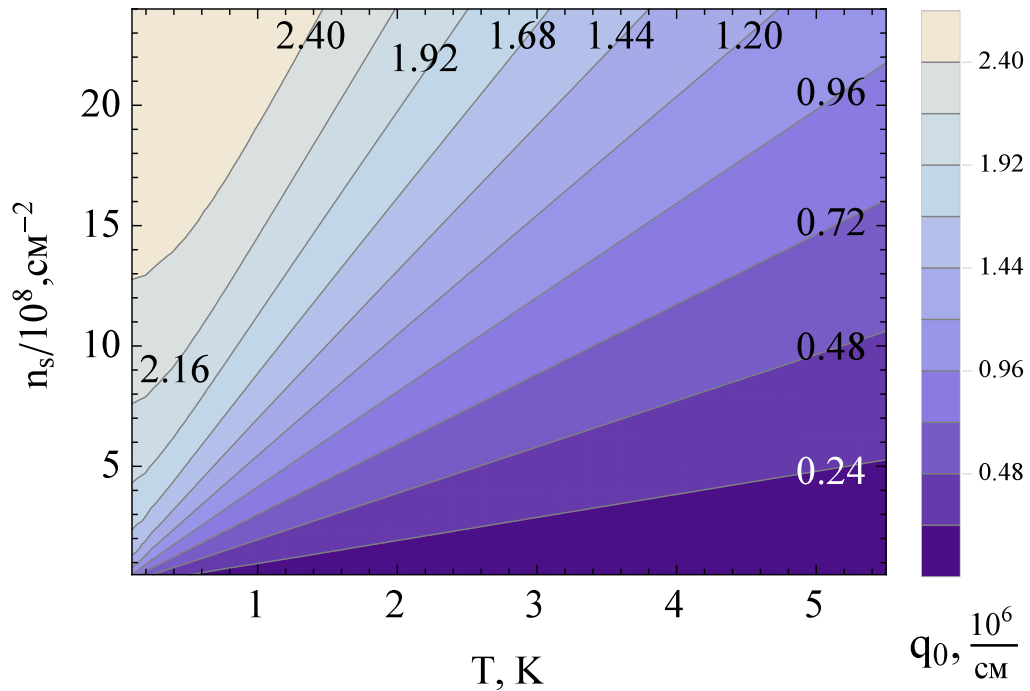


Рис. 4.2. Залежність величини максимально припустимого значення вектора трансляції оберненої ґратки q_0 від температури T і кількості частинок над одиницею поверхні діелектрика n_s .

Інтегруючи праву і ліву сторону рівняння (4.62) після нескладних перетворень отримаємо:

$$Li_{5/2}(-e^x) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi} = \frac{1}{2} Li_{3/2}(-e^x) \tilde{\varphi}_1^{(1)} + C, \quad (4.63)$$

де C - постійна інтегрування. Рівняння (4.63) є лінійним неоднорідним рівнянням і розв'язується методом варіації довільної сталої. У такому випадку загальний розв'язок рівнянь (4.60), (4.63) має вигляд:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(\chi) = C_1^{(1)} \sqrt{-Li_{\frac{5}{2}}(-e^x)} + C_2^{(1)} \sqrt{-Li_{\frac{5}{2}}(-e^x)} \int \frac{d\chi}{\left(-Li_{\frac{5}{2}}(-e^x)\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.64)$$

де $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ - довільні постійні інтегрування. Другий частинний розв'язок у (4.64) зростає за абсолютною величиною зі зростанням z . Починаючи з певних z це буде призводити до порушення умови (2.41), за якої описана у дисертаційній роботі теорія збурень є застосовною. Із цієї причини константу $C_2^{(1)}$ слід покласти рівною нулю.

Таким чином, приходимо до наступного виразу для потенціалу $\tilde{\varphi}_1^{(1)}$:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(\chi) = C_1^{(1)} \sqrt{-Li_{5/2}(-e^\chi)}. \quad (4.65)$$

Розв'язки другого і третього рівнянь в (2.51) у загальному випадку мають вигляд:

$$\tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) = C_1^{(2)} e^{q_0 z} + C_2^{(2)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) = C_1^{(3)} e^{q_0 z} + C_2^{(3)} e^{-q_0 z}. \quad (4.66)$$

З урахуванням тієї обставини, що величини напруженостей полів при $z \rightarrow -\infty$, повинні залишатися обмеженими, константу $C_2^{(3)}$ у (4.66) необхідно покласти рівною нулю, $C_2^{(3)} \equiv 0$. Величини ж $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ і $C_1^{(3)}$ повинні бути знайдені з граничних умов (2.53). Як легко переконатися, ці константи будуть виражені через величину $\tilde{\xi}^{(1)}$, що відповідно до (2.42), (2.50) і (2.51), є першою гармонікою $\tilde{\xi}^{(1)}$ Фур'є-образу профілю просторово-періодичної поверхні плівки рідкого діелектрика на твердій підкладці:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(1)}(\chi) &= E_0 \tilde{\xi}^{(1)} \sqrt{Li_{5/2}(-e^\chi) / Li_{5/2}(-e^{\chi_0})} G(q_0), \\ \tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} \left(e^{q(z-\bar{\xi})} - C e^{q(\bar{\xi}-z)} \right) E_0 F(q), \\ \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} e^{q(z-\bar{\xi})} E_0 F(q) (1 - \delta), \end{aligned} \quad (4.67)$$

де для спрощення запису введені такі позначення:

$$\begin{aligned} G(q_0) &= \frac{Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi_0}) \left(2bz_0 \frac{n}{n_s} + y_0(\varepsilon - 1) \right)}{Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi_0}) \varepsilon y_0 + b Li_{\frac{3}{2}}(-e^{\chi_0})}, \\ F(q_0) &= \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) Li_{\frac{3}{2}}(-e^{\chi_0}) + Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi_0}) 2z_0 \frac{n}{n_s}}{(1 + C) \left(Li_{\frac{5}{2}}(-e^{\chi_0}) \varepsilon y_0 + b Li_{\frac{3}{2}}(-e^{\chi_0}) \right)}, \\ y_0 = 2q_0 z_0, \quad b &\equiv \frac{1 - C}{1 + C}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon_d - \varepsilon}{\varepsilon_d + \varepsilon}, \quad C = \delta e^{-2q_0(d+\bar{\xi})}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Розв'язки рівнянь (2.53) у аналогічному наближенні для потенціалів $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$, $j = 1, 2, 3$ даються формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z) &= C_2^{(e1)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) = C_1^{(e3)} e^{q_0 z}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) &= C_1^{(e2)} e^{q_0 z} + C_2^{(e2)} e^{-q_0 z}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Вид цих розв'язків (4.69) обраний таким чином, щоб напруженості зовнішніх полів при $z \rightarrow \pm\infty$ лишалися обмеженими. Константи у виразах (4.69) також можуть бути знайдені з відповідних граничних умов (2.54), записаних у лінійному наближенні, у результаті чого потенціали $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1^{(e)(1)}(z) &= (\varepsilon + 1) C E \tilde{\xi}^{(1)} F^{(e)}(q) e^{q(\bar{\xi}-z)}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} E F^{(e)}(q_0) \left(C e^{q_0(\bar{\xi}-z)} - e^{q_0(z-\bar{\xi})} \right), \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) &= (1 - \delta) \tilde{\xi}^{(1)} E F^{(e)}(q_0) e^{q_0(z-\bar{\xi})}, \\ F^{(e)}(q) &= (1 - \varepsilon^{-1}) / (\varepsilon(1 + C) + 1 - C).\end{aligned}\tag{4.70}$$

Звернемося тепер до останнього з рівнянь (2.53). Підставляючи до нього знайдені розв'язки (4.67) і (4.70) з урахуванням (2.43) отримаємо:

$$\Phi(q_0) \tilde{\xi}^{(1)} = 0,\tag{4.71}$$

де функція $\Phi(q_0)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}\Phi(q_0) \equiv & \frac{n}{n_s} \left(G(q_0) - 1 - (1 + C) y_0 \left(F(q_0) + \frac{F^{(e)}(q_0)}{4} \right) \right) + \\ & + \frac{4\pi\alpha}{E_0^2} \left(\kappa^2 + q_0^2 \tilde{\beta} \right), \quad \tilde{\beta} = 1 + \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{2}.\end{aligned}\tag{4.72}$$

Як легко бачити, рівняння (4.71) допускає два розв'язки: $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ та $\Phi(q_0) = 0$. Перший з цих розв'язків $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ є тривіальним. Вон означає, що просторово-періодичні структури на поверхні рідкого діелектрика відсутні. Іншими словами, поверхня рідкого діелектрика залишається плоскою. Сам факт наявності фазового переходу до просторово-періодичного профілю поверхні рідкого діелектрика передбачає, що $\tilde{\xi}^{(1)} \neq 0$ (див. (2.39), (2.42), (2.43)). Таким чином, у цьому випадку ми повинні звернутися до другого розв'язку:

$$\Phi(q_0) = 0.\tag{4.73}$$

Це рівняння визначає тільки параметр ґратки q_0 (див.(4.68)), як функцію параметрів фазового переходу завдання - температури T_c , зовнішнього

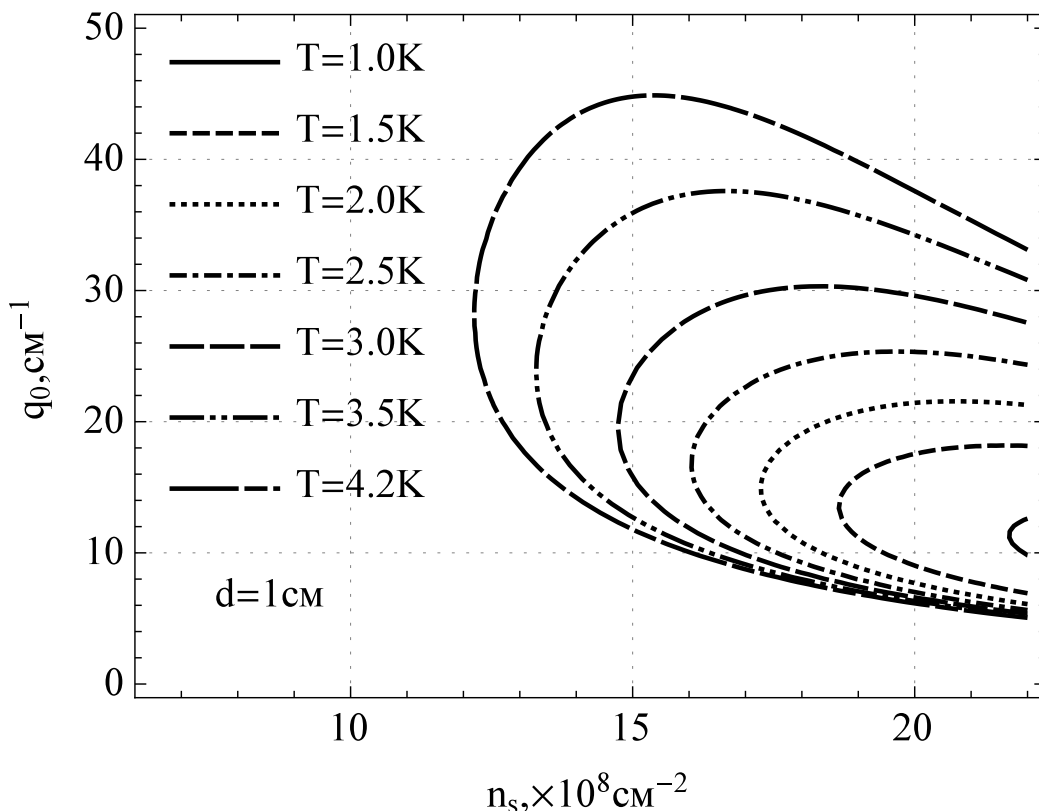


Рис. 4.3. Критичні криві $q_0(n_{sc})$ у випадку масивного гелію.

притискуючого поля $E_c^{(e)}$ (або кількості електронів над одиницею поверхні рідкого діелектрика n_{sc} , див. (3.50)), а також густини цього діелектрика ρ , його коефіцієнта поверхневого натягу α і діелектричної проникності ε , а також діелектричної проникності твердої підкладки ε_d . Насправді рівняння (4.73) визначає певну критичну поверхню фазового переходу $q_0 = q_0(n_{sc}, T_c)$ у просторі «координат» q_0, n_{sc}, T_c . Процедура знаходження такої фазової поверхні виходить за межі аналітичних розрахунків і вимагає залучення чисельних методів, у результаті чого можна отримати залежності, представлені на рис. 4.3 і 4.4.

На рис. 4.3 наведені залежності фазових кривих $q_0 = q_0(n_{sc})$ для різних температур, побудованих з урахуванням формули (3.57) для плівки рідкого діелектрика завтовшки $d = 1\text{cm}$. Відзначимо, що дані криві здобуті з умови (4.73). Наведені дані достатньо добре узгоджуються з наявними експериментальними даними [26, 27]. Згідно з рис. 4.3, при $T = 3,5\text{K}$

періодичні структури з $q_0 \approx 27\text{см}^{-1}$, починають з'являтися при $n_{sc} > 1,2 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$, що відповідає періоду прямої ґратки $a = 2\pi q_0^{-1} \approx 0,28\text{см}$. При $T = 3,5K$ за даними роботи [27] $a = 0,24\text{см}$. За даними цієї ж роботи [27] при $T = 2,5K$ періодичні структури починають спостерігатися при більших полях, ніж $E_c^{(e)} = 2600V/\text{см} = 4\pi e \cdot 1,38 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$. У нашому випадку, як видно з рис. 4.3, за такої ж температури $T = 2,5K$, $E_c^{(e)} \approx 4\pi e \cdot 1,6 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$. Згідно з [26], при $T = 4,2K$, період ґратки, що виникає за $E_c^{(e)} \approx 4\pi e \cdot 0,95 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$, дорівнює $a = 0,176\text{см}$, а виходячи з рис. 4.3 при $T = 4,2K$ і $E_c^{(e)} \approx 4\pi e \cdot 1,22 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$ маємо $a = 2\pi q_0^{-1} \approx 0,22\text{см}$.

Слід зазначити, що у роботах [26, 27] розглядався не тільки квазінейтральний випадок (3.50), але і випадок заряджених систем. Із цієї причини умову появи просторово-періодичних структур зручніше пов'язувати з критичною величиною притискуючого поля $E_c^{(e)}$, а не n_{sc} . Величина ж n_{sc} впливає на ступінь заселеності лунками поверхні діелектрика. Так, за невеликих n_s з досягненням $E_c^{(e)}$, можлива поява лише декількох лунок (наприклад 2,8,20, ...). Зі збільшенням n_s кількість лунок буде збільшуватися все щільніше заповнюючи собою поверхню гелію. При досягненні величини $n_s^m \approx 2 \cdot 10^9\text{см}^{-2}$ розглянута періодична структура починає руйнуватися за рахунок того, що кластери електронів у лунках починають провалюватися у гелій у формі бульбашок (баблонів [85]) і прямують до металевого електрода, що створює притискуюче поле. При $n_s < n_s^m$, існування періодичних структур можливе і в електронейтральному випадку за $n_s^m > n_s > E_c^{(e)}(4\pi e)^{-1}$. Тут ми не будемо більше коментувати особливості утворення лункових періодичних структур у заряджених системах. У загальному випадку така задача потребує окремого розв'язання. Відзначимо лише, що для невиродженого газу зарядів над поверхнею рідкого діелектрика таке завдання було розв'язане у роботі [3]. Важливою обставиною, характерною для випадку «масивного» гелію, є залежність $E_c^{(e)}$ (або n_{sc} у випадку електронейтральних систем, див. (3.50)) від температури. Як і в експериментах [62], у нашому випадку, як видно з

рис. 4.3, $E_c^{(e)}$ спадає зі зростанням T .

Займемося тепер аналізом особливостей фазового переходу над тонкими плівками рідкого діелектрика, коли внесок сил Ван дер Ваальса значно перевищує внесок гравітаційних сил, що діють на атоми діелектрика. У таких системах відкривається можливість теоретичного передбачення і виявлення ряду цікавих ефектів. Як видно з порівняння рис. 3.6 і рис. 3.7, за малих товщин плівки діелектрика, припустимі значення n_s , стають на кілька порядків вище, ніж для масивної плівки діелектрика. Чисельні оцінки показують, що цілком прийнятними для спостереження фазового переходу виявляються значення $n_s \sim 10^{12} \text{см}^{-2}$ і навіть більше. У роботі [80] показано, що для плівок завтовшки декількох сотень ангстрем система, що розглядається, залишається стійкою для будь-яких n_s і лише при зменшенні товщини плівки до величини близько 50 ангстрем або менше електрони починають тунелювати до підкладки крізь діелектричну плівку. У теоретичній роботі [86] показано, що для плівки гелію завтовшки 100 ангстрем на металевій підкладці в області низьких температур вігнерівські структури проявляються за $n_{sc1} \approx 10^{11} \text{см}^{-2}$ і вище. Однак стверджується, що збільшення n_s до значень $n_{sc2} \approx 1,37 \cdot 10^{12} \text{см}^{-2}$ повинно викликати так зване квантове плавлення кристалу. Треба відзначити, що подібний до квантового плавлення ефект спостерігався і в експерименті (див. у зв'язку з цим [87]), однак за менших концентрацій n_{sc2} ніж передбачені в [86].

У межах підходу, що використовується нами, чисельні оцінки, засновані на рівнянні (4.73) при $T = 0,1 \text{K}$ і $d = 10^{-6} \text{см}$, також показують, що в інтервалі концентрацій $n_{sc1} \leq n_s \leq n_{sc2}$ можуть існувати періодичні структури у великому інтервалі значень вектора оберненої ґратки q_0 . Граничні значення концентрацій $n_{sc1} \approx 10^{11} \text{см}^{-2}$ і $n_{sc2} \approx 2,4 \cdot 10^{12} \text{см}^{-2}$ можна трактувати як точки зародження періодичних структур і їх зникнення (плавлення) відповідно. Легко помітити, що отримане нами верхнє граничне значення n_{sc2} сильно відрізняється від аналогічного значення роботи [86]. Тут, однак, слід ще раз підкреслити, що в області великих значень концентрацій і низьких температур викладений у

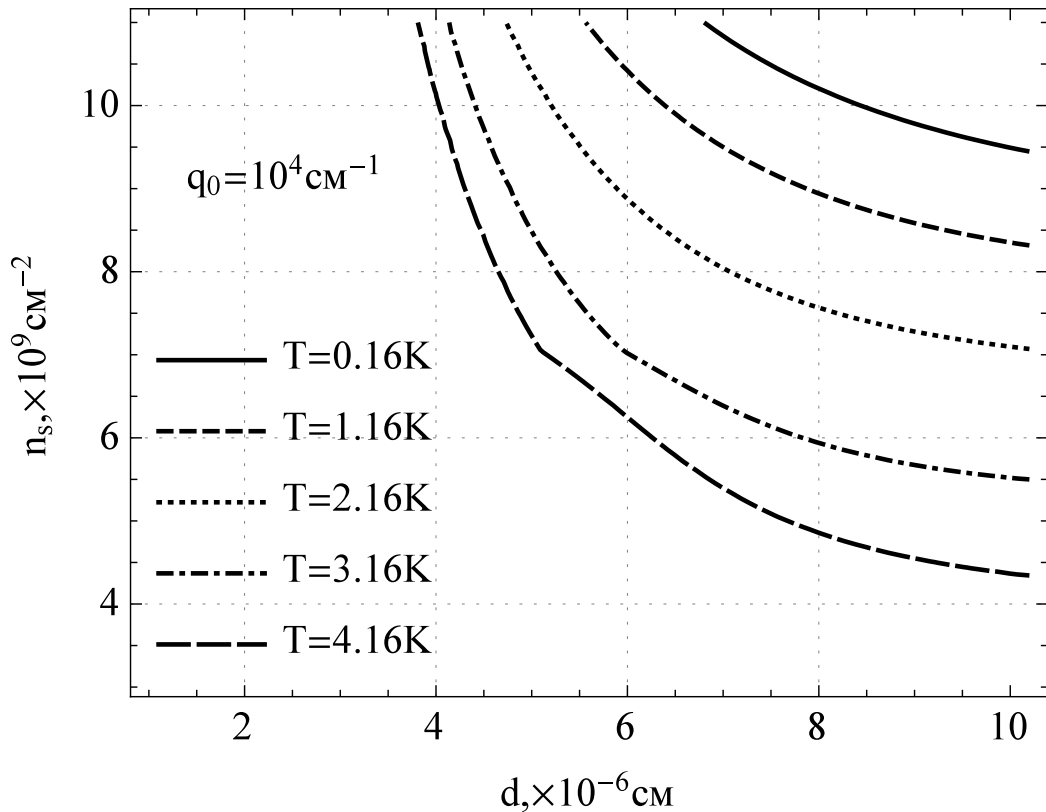


Рис. 4.4. Критичні криві $n_{sc}(d)$ у випадку тонких гелієвих плівок.

дисертаційній роботі підхід вимагає більш строгих уточнень, оскільки у цій області істотну роль можуть відігравати квантові ефекти, зокрема, обмінна взаємодія. Із цієї причини наведені вище оцінки, якісно демонструючи подібні до [86] ефекти, не можуть претендувати на коректне кількісне порівняння з результатами цієї роботи. Відзначимо також якісне узгодження залежностей $n_{sc}(d)$, отриманих на основі (4.72), (4.73) і відображених на рис. 4.4, з результатами експериментальної роботи [76].

Перш ніж перейти до викладу методики обчислення амплітуд досліджуваних просторово-періодичних структур, зробимо важливе методологічне зауваження, що погоджує запропонований нами опис з експериментальними спостереженнями вігнерівських або лункових кристалів. Нами вже зазначалося, що вігнерівською кристалізацією зараз прийнято називати просторово-періодичні структури зарядів над поверхнею рідкого діелектрика, вважаючи ці структури двовимірними [36]. Лункові ж кристали представляють собою структури, сформовані зарядами,

розміщеними у лунках на поверхні рідкого діелектрика, які утворюють періодичну структуру [26]. Ясно, що такі структури заздалегідь тривимірні. Легко помітити, що у запропонованому у дисертаційній роботі підході існування просторово-періодичних структур у системах зарядів над поверхнею рідкого діелектрика апіорі пов'язується з просторово-періодичними деформаціями поверхні цього діелектрика. Із цієї причини всі періодичні структури, що описуються у дисертаційній роботі, можуть розглядатися як лункові. Звідси може витікати висновок, що наш підхід придатний тільки для опису лункових кристалів. Але можна поглянути на дані обставини й інакше. А саме, глибина цих лунок може мати різну величину. Лунки мізерно малої глибини, може статися, у певних випадках при експериментальних вимірах можуть не позначатися на ефектах, пов'язаних з існуванням періодичних структур. У цьому випадку з точки зору експерименту просторово-періодична структура може сприйматися як двовимірною. Таким чином, питання трактування просторово-періодичних структур над поверхнею рідкого гелію як двовимірних або тривимірних може залежати як від конкретних властивостей цих структур (глибини лунки або величини амплітуди), так і від способів їх експериментального спостереження. Наприклад, у випадку великих лунок лункові кристали можуть спостерігатися безпосередньо, навіть без допомоги електронного мікроскопа. У випадку ж вігнерівської кристалізації фазовий перехід до періодично просторових структур фіксується за непрямыми показниками, пов'язаними з динамічними властивостями системи у тангенціальному напрямку до поверхні рідкого діелектрика (див., наприклад, [36]). При цьому сама поверхня діелектрика вважається плоскою. Другий згаданий приклад може належати якраз до випадку малих деформацій поверхні рідкого діелектрика, що не позначаються на вимірюваних експериментально ефектах.

Для підтвердження обґрунтованості такого припущення обчислимо величину параметра порядку $\tilde{\xi}^{(1)}$ поблизу точки фазового переходу. Ця процедура носить досить громіздкий характер. Із цієї причини у даному

підрозділі дисертації ми не будемо наводити докладні викладки, зупинившись на короткому описі розв'язку задачі і обмежившись демонстрацією основних результатів. Відзначимо, що процедура знаходження амплітуд просторово-періодичних станів більш детально наведена у попередньому підрозділі дисертації для випадку невідродженого газу зарядів та у роботі [4].

Для визначення $\tilde{\xi}^{(1)}$ нам буде потрібно розкласти рівняння (2.30)-(2.32) за малими відхиленнями $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$, а також за малими різницями $T - T_c$, $E^{(e)} - E_c^{(e)}$ (або що в умовах квазінейтральності (3.50) рівносильно розкладанню за $n_s - n_{sc}$). Далі, переходячи до рівнянь для Фур'є-образів (2.42), (2.44) і враховуючи головне (2.45) - (2.49) і лінійне (2.53) - (2.54) наближення даної теорії збурень, необхідно отримати її наступний незникаючий порядок при $q = q_0$. У ході виконання даної процедури стає зрозумілим, що для знаходження $\tilde{\xi}^{(1)}$ слід також визначити її зв'язок з другою гармонікою $\tilde{\xi}^{(2)}$. Для цього, у свою чергу, необхідно розкласти рівняння (2.30)-(2.32) за малими відхиленнями $\tilde{\xi}(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j(z, \boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\varphi}_j^{(e)}(z, \boldsymbol{\rho})$, а також за малими різницями $T - T_c$ і $E^{(e)} - E_c^{(e)}$, після чого знайти Фур'є-образ цього розкладання при $q = 2q_0$. Розв'язуючи отриману систему диференціальних рівнянь і дотримуючись підходу, запропонованому у попередньому підрозділі дисертаційної роботи, а також використовуючи методику роботи [4], ми отримаємо зв'язок між першою і другою гармонікою параметра порядку Фур'є-образу $\tilde{\xi}$:

$$\tilde{\xi}^{(2)} = \frac{\gamma}{z_0} \left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^2, \quad (4.74)$$

що приводить до нелінійного рівняння для визначення амплітуди $\tilde{\xi}^{(1)}$:

$$\left(\tilde{\xi}^{(1)} \right)^3 = \tilde{\xi}^{(1)} \frac{z_0^2 \Psi \left(E_c^{(e)}, T_c \right)}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial E^{(e)}} \left(E^{(e)} - E_c^{(e)} \right) + \frac{\partial n}{\partial T} (T - T_c) \right). \quad (4.75)$$

У формулах (4.74) і (4.75) величини γ і $\Psi \left(E_c^{(e)}, T_c \right)$ мають громіздкий вигляд і складну залежність від параметрів $E_c^{(e)}$ і T_c . Рівняння (4.75) допускає два розв'язки. Перший розв'язок $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ тривіальний і від нього

ми вже відмовилися вище при отриманні характеристик критичної точки, див. (4.71)-(4.73). Нижче для чисельних оцінок амплітуди $\tilde{\xi}^{(1)}$ при конкретних значеннях $E_c^{(e)}$ і T_c буде використаний явний вигляд величин γ і $\Psi(E_c^{(e)}, T_c)$, а також вираз для Фур'є-образу першої гармоніки збурення концентрації частинок (див. (3.40), (4.56) і (4.65)) при $z = \bar{\xi}$:

$$n^{(1)} = -T \frac{\partial n}{\partial \mu} (1 - G(q_0)) \frac{\tilde{\xi}^{(1)}}{z_0}.$$

Чисельні оцінки показують, що величина $G(q_0)$ від'ємна, $G(q_0) < 1$, (див. (4.66)). Тому у випадку $\tilde{\xi}^{(1)} \neq 0$ реалізується ситуація, коли над лунками на поверхні рідкого діелектрика знаходяться згустки концентрації заряджених частинок і навпаки, над «пагорбами» поверхні діелектрика знаходяться області локального розрідження концентрації частинок. У випадку другого розв'язку рівняння (4.75):

$$\tilde{\xi}^{(1)} = z_0 \sqrt{\Psi \left(\frac{\partial \ln n}{\partial E^{(e)}} (E^{(e)} - E_c^{(e)}) + \frac{\partial \ln n}{\partial T} (T - T_c) \right)}$$

реалізується саме така ситуація. Чисельні оцінки величини амплітуди $\tilde{\xi}^{(1)}$ при $T = 2,5K$, $n_s = 1,4 \cdot 10^9 \text{см}^{-2}$, $d = 0,1 \text{см}$, $q_0 = 23 \text{см}^{-1}$ і $\sqrt{(E^{(e)}/E_c^{(e)}) - 1} \approx 0,1$, $\sqrt{(T_c/T) - 1} \approx 0,1$, призводять до значення $\tilde{\xi}^{(1)} \approx 4,7 \cdot 10^{-11} \text{см}$, що задовільно узгоджується з оцінками цієї величини у роботах [20, 42]. Як показує ця оцінка, подібні розміри деформацій поверхні навряд чи можуть вважатися фізичними, оскільки вони на порядки менше характерних розмірів атома, $a_0 \sim 10^{-8} \text{см}$ [88]. З цієї причини поверхня діелектрика припустимо вважати плоскою. Слід, однак, брати до уваги ту обставину, що наші оцінки зроблені в області $E^{(e)}/E_c^{(e)} \sim 1$, $T/T_c \sim 1$, де, власне, справедлива і сама теорія фазового переходу, викладена у дисертаційній роботі. При відході від точки переходу (зниження температури, підвищення напруженості притискуючого поля) картина може істотно змінюватися, у тому числі, і у бік прояви тривимірної природи періодичної структури досліджуваної системи, про що мова йшла вище.

Слід підкреслити, що у зазначеному діапазоні параметрів T , n_s і q_0 , які використовуються для чисельних оцінок у цьому підрозділі дисертації,

значення лівої сторони нерівності (4.58) при $z = \bar{\xi}$ за порядком не менше, ніж 10^7 , тому використання рівнянь (4.73) - (4.75) є цілком виправданим. Нагадаємо на закінчення підрозділу, що у дисертаційній роботі для простої ілюстрації можливостей розвинуеного підходу, вивчений фазовий перехід до структур, які характеризуються однією постійною ґратки q_0 . Зазначимо, що в умовах реального експерименту [62] періодична жолобкова структура на поверхні рідкого діелектрика спостерігалася як проміжний стан при переході системи від однорідного стану до двовимірної гексагональної структури. Опис же періодичних структур, які характеризуються двома незалежними векторами оберненої ґратки, паралельними плоскій поверхні діелектрика, як і питання про стійкість несиметричної фази, уявляються автором дисертації окремим завданням, яке чекає на розв'язок у межах розвинуеного підходу.

4.4. Критичні параметри фазового переходу до просторово-періодичних станів у зарядженій системі частинок. Вихід за межі статистики Больцмана

Вихідними рівняннями для дослідження критичних параметрів фазового переходу з утворенням просторово-періодичних структур будуть слугувати рівняння (2.53), (2.54). Підкреслимо ще раз, що в дисертаційній роботі мова йде саме про просторово-періодичні структури типу лункових періодичних утворень. Звернемося насамперед до першого з рівнянь (2.53). Це рівняння може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial z^2} = \left(q_0^2 - 2\sqrt{2} \frac{Li_{1/2}(-e^x)}{a_0^2} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2} \right) \tilde{\varphi}_1^{(1)}, \quad (4.76)$$

в якому відповідно до (3.68), (3.70) і (3.71) враховане співвідношення:

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = - \frac{Li_{1/2}(-e^x)}{\sqrt{2} \pi a_0^2 e^2} \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.77)$$

Розглянемо випадок, коли:

$$a_0^2 q_0^2 \ll 2^{3/2} |Li_{1/2}(-e^x)| \left(\frac{T a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.78)$$

З огляду на ту обставину, що $\chi(z)$ є спадаючою функцією, нерівність (4.78) виконується тим краще, чим ближче z до рівня поверхні діелектрика $z = \bar{\xi}$. Однак, для визначення критичних параметрів фазового переходу нам знадобиться розв'язок рівняння (4.76) у точці $z = \bar{\xi}$, отже, замінимо нерівність (4.78) більш грубою - її частковим випадком при $z = \bar{\xi}$:

$$1 \ll \frac{2^{3/2}}{a_0^2 q_0^2} |Li_{1/2}(-e^{\chi_0})| \left(\frac{\Gamma a_0}{\pi e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.79)$$

Очевидно, що остання нерівність виконується краще для малих q_0 , тобто для макроскопічних просторових масштабів у порівнянні з мікроскопічними. Надалі при отриманні зв'язку між критичними параметрами фазового переходу, ми повинні будемо перевіряти їх на предмет відповідності умові (4.79).

Беручи до уваги (3.68), перейдемо у рівнянні (4.76) від похідних за z до похідних за χ і після ряду нескладних перетворень і спрощень, у наближенні (4.79) рівняння (4.76) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \left(2Li_{5/2}(-e^{\chi}) - \frac{a_0^2}{2^{3/2} z_0^2} \left(\frac{\pi e^2}{a_0 T} \right)^{1/2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi^2} + \\ & + Li_{3/2}(-e^{\chi}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi} - Li_{1/2}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Беручи до уваги наступну властивість полілогарифма:

$$Li_{s-1}(-e^{\chi}) = \frac{d}{d\chi} Li_s(-e^{\chi}), \quad (4.81)$$

наведемо рівняння (4.80) у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \left(Li_{5/2}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(Li_{3/2}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} \right) = \\ & = \frac{a_0^2}{2^{5/2} z_0^2} \left(\frac{\pi e^2}{a_0 T} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Інтегруючи праву і ліву сторону рівняння (4.82) після нескладних перетворень отримаємо:

$$\left(\frac{a_0^2}{2^{5/2} z_0^2} \left(\frac{\pi e^2}{a_0 T} \right)^{1/2} - Li_{5/2}(-e^{\chi}) \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^{(1)}}{\partial \chi} + \frac{1}{2} Li_{3/2}(-e^{\chi}) \tilde{\varphi}_1^{(1)} = C_1, \quad (4.83)$$

де C_1 - постійна інтегрування. Рівняння (4.83) є лінійним неоднорідним рівнянням і вирішується методом варіації довільної сталої. У такому випадку загальний розв'язок рівнянь (4.80) і (4.83) має вигляд:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)} = \frac{E_1(z) a_0}{E_\infty z_0} \left(\frac{\pi e^2}{2^5 a_0 T} \right)^{1/4} \left(C_1 \int \frac{d\chi}{\left(\frac{E_1(z) a_0}{E_\infty z_0} \left(\frac{\pi e^2}{2^5 a_0 T} \right)^{1/4} \right)^{3/2}} + C_2 \right), \quad (4.84)$$

де C_2 - довільна стала інтегрування. Другий частинний розв'язок у (4.84) зростає за абсолютною величиною зі зростанням z . Починаючи з певних z це буде призводити до порушення умови (2.41) застосовності теорії збурень, що застосовується у дисертаційній роботі. Із цієї причини константу C_1 слід покласти рівною нулю. Таким чином, з урахуванням (3.68), (3.69) приходимо до наступного виразу для потенціалу $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(z)$:

$$\tilde{\varphi}_{1k}^{(1)} = C_1^{(1)} E_1(z), \quad C_1^{(1)} = \frac{C_2}{E_\infty} \frac{a_0}{2^{5/4} z_0} \left(\frac{\pi e^2}{a_0 T} \right)^{1/4}. \quad (4.85)$$

Розв'язки другого і третього рівнянь з (2.53) у загальному випадку мають вигляд:

$$\tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) = C_1^{(2)} e^{q_0 z} + C_2^{(2)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) = C_1^{(3)} e^{qz} + C_2^{(3)} e^{-q_0 z}. \quad (4.86)$$

З урахуванням тієї обставини, що напруженості полів при $z \rightarrow -\infty$ повинні залишатися обмеженими, константу $C_2^{(3)}$ у (4.85) необхідно покласти рівною нулю: $C_2^{(3)} \equiv 0$. Величини ж $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ і $C_1^{(3)}$ повинні бути знайдені з граничних умов (2.53). Як легко переконатися, ці константи будуть виражені через величину $\tilde{\xi}^{(1)}$, що є відповідно до (2.42) і (2.50) першою гармонікою Фур'є-образу профілю просторово-періодичної поверхні плівки рідкого діелектрика на твердій підкладці:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(1)} &= \tilde{\xi}^{(1)} E_1(z) G(q_0), \\ \tilde{\varphi}_2^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} \left(e^{q_0(z-\bar{\xi})} - C e^{q_0(\bar{\xi}-z)} \right) E_0 F(q_0), \\ \tilde{\varphi}_3^{(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} E_0 e^{q_0(z-\bar{\xi})} F(q_0) (1 - \delta), \end{aligned} \quad (4.87)$$

де для спрощення запису введені такі позначення:

$$\begin{aligned} G(q_0) &= \frac{\bar{\varphi}_1''(1-C) + (\varepsilon-1)E_0q_0(1+C)}{\bar{\varphi}_1''(1-C) + E_0\varepsilon q_0(1+C)}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon_d - \varepsilon}{\varepsilon_d + \varepsilon}, \\ F(q_0) &= \frac{\bar{\varphi}_1''/\varepsilon}{\bar{\varphi}_1''(1-C) + E_0\varepsilon q_0(1+C)}, \quad C = \delta e^{-2q_0(d+\bar{\xi})}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Розв'язки рівнянь (2.54) у аналогічному наближенні для потенціалів $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$, ($j = 1, 2, 3$) даються формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(e)}(z) &= C_2^{(e1)} e^{-q_0 z}, \quad \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) = C_1^{(e2)} e^{q_0 z} + C_2^{(e2)} e^{-q_0 z}, \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) &= C_1^{(e3)} e^{q_0 z}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Вид цих розв'язків обраний таким чином, щоб напруженості зовнішніх полів при $z \rightarrow \pm\infty$ залишалися обмеженими. Константи у виразах (4.89) також можуть бути знайдені з відповідних граничних умов (2.54), записаних у лінійному наближенні, у результаті чого потенціали $\tilde{\varphi}_j^{(e)(1)}$ можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{(e)(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} E_1^{(e)} (\varepsilon + 1) C F^{(e)}(q_0) e^{q_0(\bar{\xi}-z)}, \\ \tilde{\varphi}_2^{(e)(1)}(z) &= \tilde{\xi}^{(1)} E_1^{(e)} F^{(e)}(q_0) \left(C e^{q_0(\bar{\xi}-z)} - e^{q_0(z-\bar{\xi})} \right), \\ \tilde{\varphi}_3^{(e)(1)}(z) &= (1 - \delta) \tilde{\xi}^{(1)} E_1^{(e)} F^{(e)}(q_0) e^{q_0(z-\bar{\xi})}, \\ F^{(e)}(q_0) &= \frac{1 - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon(1+C) + 1 - C}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Звернемося тепер до останнього з рівнянь (2.53). Підставляючи у нього знайдені розв'язки (4.87), (4.90), з урахуванням (2.43), здобудемо:

$$\Phi(q_0) \tilde{\xi}^{(1)} = 0, \quad (4.91)$$

де функція $\Phi(q_0)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi(q_0) &= (1 + \varepsilon) E_0^2 F(q_0) + E_1^{(e)2} F^{(e)}(q_0) - \\ &\quad - \frac{4\pi\alpha\kappa^2}{q_0(C+1)} \left(1 + \frac{q_0^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \bar{\xi}^2}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Як і раніше у попередньому матеріалі, рівняння (4.91) допускає два розв'язки: $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$ і $\Phi(q_0) = 0$. Перший з цих розв'язків $\tilde{\xi}^{(1)} = 0$

тривіальний. Він означає, що просторово-періодичні структури на поверхні рідкого діелектрика відсутні. Іншими словами, поверхня рідкого діелектрика залишається плоскою. Сам факт наявності фазового переходу до просторово-періодичного профіля поверхні рідкого діелектрика передбачає, що $\tilde{\xi}^{(1)} \neq 0$, (див. (2.34), (2.42)). Таким чином, у цьому випадку ми повинні звернутися до другого розв'язку:

$$\Phi(q_0) = 0. \quad (4.93)$$

Дане рівняння є критичною поверхнею у просторі величин T , n_s , $E^{(e)}$, а також модуля вектора трансляції оберненої ґратки q_0 виникаючої періодичної структури. Аналіз виразу демонструє добре узгодження з експериментальними даними [26, 27] (див. рис. 4.5).

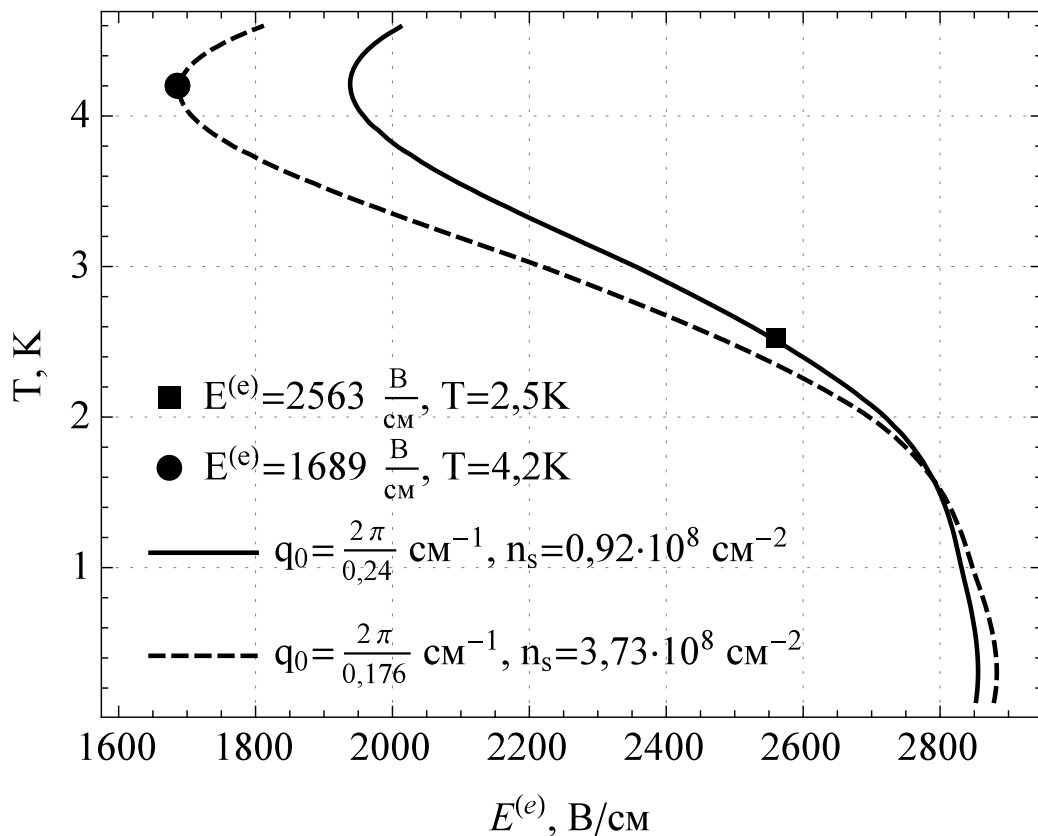


Рис. 4.5. Фазові криві у площині $\{T, E^{(e)}\}$ для різних значень параметрів q_0 , n_s і d . ● - дані експериментальної роботи [26]; ■ - експериментальної роботи [27].

У роботі [26], де спостерігалось формування періодичних структур лункового типу у системі електронів над поверхнею рідкого гелію, при перевищенні зовнішнім полем значення $E_c^{(e)} = 1790 \pm 40 \text{ В/см} = 2\pi e \cdot (1,9 \pm 0,04) \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ реєструвалися гексагональна лункова ґратка з відстанню між лунками близько $2\pi/q_0 = 0,176 \text{ см}$ і до $N_1 = 10^7$ електронів на одну лунку. Виміри проводилися при $T = 4,2 \text{ К}$. Вважаючи, що площа елементарної комірки прямої ґратки у такому випадку є паралелограмом з ребрами $2\pi/q_0$ і кутом між ними рівним $\pi/3$, оцінимо значення n_s , як відношення N_1 до площі цього паралелограма і отримаємо $n_s \leq 3,73 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$. Це значення добре узгоджується з даними роботи [26], згідно з якими у даному експерименті $n_s \leq 0,2n_{s \text{ max}}$, де $n_{s \text{ max}} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ - максимально припустиме значення n_s для електронів над масивним гелієм [75]. Із рівняння (4.93) при даних експериментальних значеннях $T = 4,2 \text{ К}$, $q_0 = 2\pi/0,176 \text{ см}^{-1}$, $d > 0,2 \text{ см}$ і $n_s \leq 3,73 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ (останнє значення також добре узгоджується з експериментом, оскільки там вказується, що $E_c^{(e)}$ не змінюється в інтервалі $0,2 \text{ см} < d < 1,9 \text{ см}$ при відстані між обкладками конденсатора в 2 см), ми отримаємо $E_c^{(e)} = 1689 \text{ В/см} = 2\pi e \cdot 1,79 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$, що з точністю понад 94% відповідає експериментальним даним. Дане узгодження можна вважати дуже добрим, оскільки з урахуванням експериментальної похибки в 2,2%, точність виразу (4.93) може становити від 92,1% до 96,6%. Відзначимо також, що при даних значеннях параметрів T , n_s і $E_c^{(e)}$ права сторона нерівності (3.92) дорівнює 0,096, що значно менше одиниці, тому нерівність (3.92) досить добре задовольняється, і можна говорити про обґрунтованість застосування квазікласичного підходу до опису даного ефекту.

Згідно з даними роботи [27], в якій експериментально і теоретично досліджене утворення періодичних структур лункового типу у системі електронів над поверхнею рідкого гелію, відстань між сусідніми лунками становить $2\pi/q_0 = 0,24 \text{ см}$, лунки виникають, коли зовнішнє поле перевищує критичне значення $E_c^{(e)} = 2600 \text{ В/см} = 2\pi e \cdot 2,76 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ при температурі $T = 2,5 \text{ К}$ і у кожній лунці міститься близько $N_1 = 5 \cdot 10^6$ електронів. З

огляду на те, що періодична структура є гексагональною, це дозволяє приблизно розрахувати n_s як відношення числа електронів у одній лунці до площі елементарної ланки такої гексагональної структури. Таким чином ми одержимо $n_s = N_1 / \left((2\pi/q_0)^2 \sin \pi/3 \right) \approx 0,92 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$. Відповідно до рівняння (4.93) при $n_s = 0,92 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$, $q_0 = 2\pi/0,24 \text{см}^{-1}$, $T = 2,5 \text{K}$ і $d > 0,1 \text{см}$ ми отримаємо $E_c^{(e)} \approx 2\pi e \cdot 2,72 \cdot 10^9 \text{см}^{-2} = 2563 \text{В/см}$, що з точністю більш ніж 98% збігається з даними роботи [27]. Ця 2% похибка, очевидно, не перевищує похибки вимірювання даних у роботі [27], тому можна говорити про дуже добре узгодження експериментальних даних із результатами цього підрозділу дисертаційної роботи. Відзначимо також, що при наведених значеннях T , n_s і $E_c^{(e)}$ права сторона нерівності (3.92) має значення близько 0,107, що можна вважати значно меншим одиниці, тому застосування квазікласичного підходу до опису даного ефекту є цілком обґрунтованим. При значеннях параметрів T , n_s , $E_c^{(e)}$ у роботах [26, 27], ліва сторона нерівності (4.79) має порядок 10^{11} , що набагато більше одиниці, тому застосування отриманих у даному підрозділі формул є більш ніж обґрунтованим.

Рис. 4.6 ілюструє досить добре узгодження рівняння для фазової кривої (4.93) і даних експериментальних робіт [26, 27]. Зміна залежності $E_c^{(e)}(T_c)$ при $T_c > 4,2 \text{K}$ зумовлена температурною залежністю густини $\rho(T)$ і коефіцієнта поверхневого натягу $\alpha(T)$ гелію [89, 90]. Відзначимо також, що застосування формули (4.93) для опису ефекту вігнерівської кристалізації, наприклад, використовуючи дані роботи [36] ($n_{sc} \approx 4,4 \cdot 10^8 \text{см}^{-2}$, $T_c \approx 0,457 \text{K}$, $E_c^{(e)} = 2\pi e n_s$) не дає позитивних результатів. Із цієї причини у області більш низьких температур запропонований у даній роботі підхід може вимагати модифікації. Дійсно, оцінки двовимірної енергії Фермі у роботі [36] дають $\varepsilon_F = 0,03 \text{K}$, проте якісні оцінки ε_F у тривимірному випадку виявляються порівнянними з величиною $T_c \approx 0,457 \text{K}$. Однак урахування внеску квантових ефектів виходить за межі теми дисертаційної роботи, і ми обмежимося описом тільки макроскопічних структур.

Для визначення величини амплітуди $\tilde{\xi}^{(1)}$ цих періодичних

макроскопічних структур, як функції зовнішніх параметрів системи $E^{(e)}, T, n_s$, необхідно залучити більш високі порядки зазначеної теорії збурень, ніж перший. Дана процедура є досить громіздкою, тому тут ми зупинимося лише на основних результатах, і проведемо їх чисельні оцінки. Більш детально дана процедура викладена вище у цьому розділі для невідродженого газу зарядів у квазінейтральному випадку системи, і аналогічні міркування ми застосуємо у випадку зарядженої системи частинок, що має розподіл, відмінний від бoльцманівського. У результаті ми отримаємо вираз для амплітуди параметра порядку розглянутого фазового переходу поблизу критичних значень $E_c^{(e)}, T_c$ і n_{sc} .

$$\tilde{\xi}^{(1)} = \gamma \sqrt{\frac{\partial n}{\partial E^{(e)}} \left(E^{(e)} - E_c^{(e)} \right) + \frac{\partial n}{\partial T} (T - T_c) + \frac{\partial n}{\partial n_s} (n_s - n_{sc})}, \quad (4.94)$$

де γ має досить громіздку залежність від $T_c, n_{sc}, E_c^{(e)}$ і q_0 . Для апробації отриманих результатів використаємо експериментальні дані роботи [27], у якій досліджувався фазовий перехід з утворенням лункових кристалів при зміні $E^{(e)}$ і фіксованих $T = 4,2K$ і $n_s \sim 10^8 \text{см}^{-2}$ (ця величина вже обчислювалася у попередньому розділі на підставі даних цієї ж роботи [27]). При фіксованих $T = T_c$ і $n_s = n_{sc}$ згідно з (4.94) величина $\tilde{\xi}^{(1)}$ змінюється пропорційно кореню $\sqrt{E^{(e)} / E_c^{(e)} - 1}$, що і показує рис. 4.6.

Як видно з рис. 4.6, поблизу точки фазового переходу $E^{(e)} = E_c^{(e)}$ можна говорити про непогане кількісне погодження даних, отриманих у даному підрозділі дисертаційної роботи та експериментальних даних роботи [27]. Крива, здобута на підставі (4.94) у межах експериментальної похибки, збігається з експериментальними даними поблизу $E_c^{(e)}$. Однак, у міру збільшення $E^{(e)}$ корінь $\sqrt{E^{(e)} / E_c^{(e)} - 1}$ перестане бути малим і запропонована у цій роботі теорія збурень стає непридатною.

Обчислимо величину першої гармоніки Фур'є-образу збурення концентрації числа частинок:

$$n^{(1)} = \frac{\partial n}{\partial \varphi_1} \tilde{\varphi}_1^{(1)} + \frac{\partial n}{\partial \xi} \tilde{\xi}^{(1)}$$

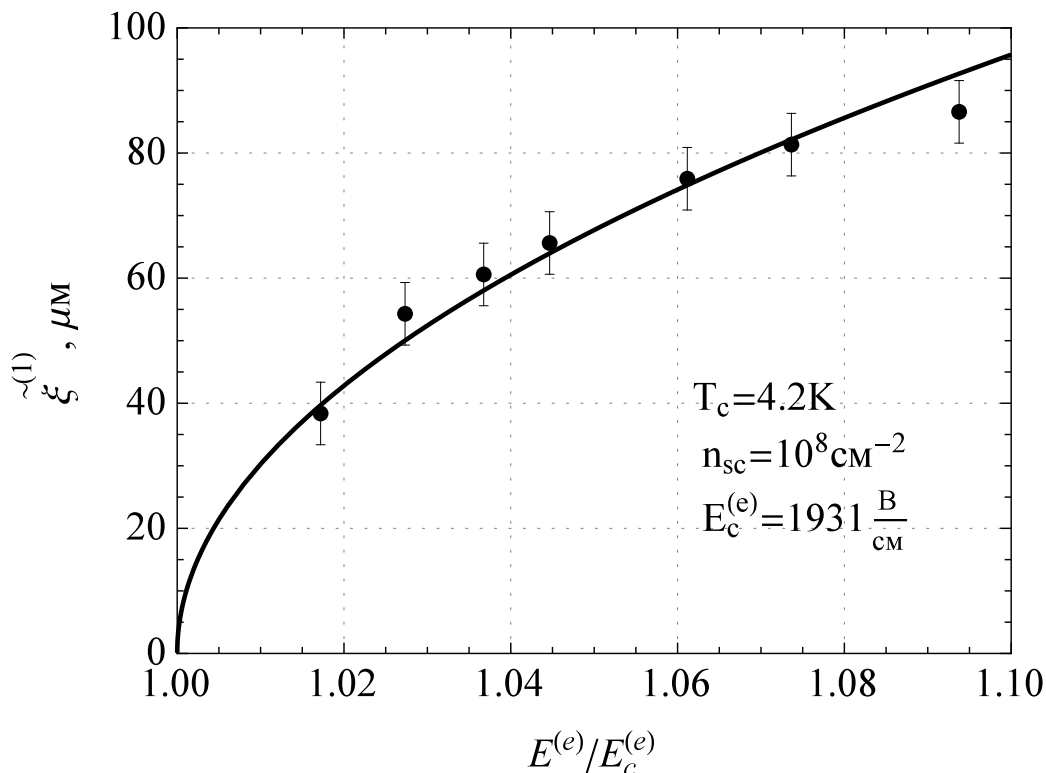


Рис. 4.6. Залежність амплітуди збурень поверхні діелектрика $\tilde{\xi}^{(1)}$ від зовнішнього електричного поля $E^{(e)}$. Суцільна крива отримана на основі (4.94), \bullet - дані експериментальної роботи [27].

при $z = \bar{\xi}$. Згідно з (3.71), (4.87) і (4.88) ми отримаємо:

$$n^{(1)} = -T \frac{\partial n}{\partial \mu} (1 - G(q_0)) \frac{\tilde{\xi}^{(1)}}{z_0}. \quad (4.95)$$

Чисельні оцінки показують, що величина $G(q_0) < 1$, див. (4.88). Тому у випадку $\tilde{\xi}^{(1)} \neq 0$ реалізується ситуація, коли над лунками на поверхні рідкого діелектрика знаходяться згустки концентрації частинок і навпаки, над «пагорбами» поверхні діелектрика знаходяться області локального розрідження концентрації частинок (див. рис. 2.2).

Висновки до розділу 4

У даному розділі досліджено критичні параметри фазового переходу системи заряджених частинок над поверхнею рідкого діелектрика до просторово-періодичних станів. Отримано рівняння критичної поверхні

фазового переходу в просторі параметрів - зовнішнього притискуючого електричного поля, температури і кількості частинок над одиницею площі поверхні діелектрика. Дане рівняння виведено для однопериодичних структур, як у випадку квазінейтральної системи, так і зарядженої, а також для невиродженої системи зарядів, і для системи заряджених частинок, розподілених за статистикою, що виходить за межі статистики Больцмана.

Показано, що рівняння критичної поверхні має добре кількісне узгодження з експериментальними даними у випадку фазових переходів з утворенням макроскопічних періодичних структур у системі електронів над поверхнею рідкого гелію типу лункових кристалів - зарядженої системи.

Показано, що зв'язок між критичними значеннями притискуючого електричного поля, температури, кількості електронів над одиницею поверхні гелію, відстані між сусідніми лунками і товщиною гелієвої плівки добре описується рівнянням для критичної поверхні у просторі зазначених вище «координат», отриманої для періодичних структур в одновимірному випадку.

Поблизу критичної поверхні здобуто вираз для величини параметра порядку фазового переходу - амплітуди просторово-періодичного збурення профілю поверхні рідкого діелектрика для макроскопічних структур однопериодичного типу.

Досліджено залежність амплітуди просторово-періодичного збурення профілю поверхні рідкого діелектрика від критичної величини зовнішнього притискуючого поля поблизу точки переходу. Показано, що ця залежність має кореневий характер, типовий для фазових переходів у термінах теорії Ландау і отримане хороше узгодження з експериментальними даними для цієї залежності у системі електронів над поверхнею рідкого гелію.

Досліджено рівняння для критичної поверхні фазового переходу до однопериодичних збурень у квазінейтральному випадку при досить малих величинах товщини гелієвої плівки, коли внесок сил Ван дер Ваальса, що діють на атоми гелію, переважає силу гравітаційного тяжіння. Показана можливість існування двох критичних величин кількості електронів над

одиноцею площі поверхні гелію, що відображають факт утворення періодичних структур і їх «квантового плавлення», і продемонстровано якісне узгодження цих величин з наявними теоретичними даними.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікаціях [3–6].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розвинено мікроскопічний підхід, що дозволяє описувати фізичні характеристики системи заряджених частинок над поверхнею рідких діелектриків у зовнішньому електричному полі виходячи з послідовного статистичного опису системи великого числа частинок, що знаходяться в стані рівноваги. На відміну від наявних підходів до опису подібних систем, заснованих на уявленні про окремих заряд над поверхнею діелектрика, розвинений у дисертації підхід не містить модельних потенціалів і підгінних констант, що вводяться у вищезазначених підходах при переході до опису системи великого числа частинок. Запропонований підхід може мати досить загальний характер у плані типів заряджених частинок і діелектриків, проте в якості системи, що використовується для апробації результатів отриманих в даному підході, обрані електрони над поверхнею рідкого гелію.

До основних результатів, отриманих у дисертаційній роботі, можна віднести наступні:

1. Побудовано мікроскопічну теорію на основі перших принципів статистичної механіки для опису системи заряджених фермі-частинок над поверхнею рідкого діелектрика в зовнішньому електричному полі без використання модельних уявлень про потенціали сил, діючих на окремих заряд над поверхнею зазначеного діелектрика. Методика підходу враховує можливість фазового переходу до станів із просторово-неоднорідними структурами у зазначеній системі.
2. Сформульовано варіаційний принцип, що дозволяє побудувати систему рівнянь самоузгодження, які описують дану систему за можливості фазового переходу до станів із просторово-періодичними структурами і пов'язують основні параметри її опису - функцію розподілу заряджених частинок, потенціал електричного поля, профіль поверхні рідкого діелектрика.

3. У межах запропонованого підходу здобуто вирази для розподілу концентрації зарядів, потенціалу й напруженості електричного поля системи у випадку плоскої поверхні рідкого діелектрика, як для невиродженого газу частинок, так і з урахуванням виходу за межі статистики Больцмана. Отримано умову застосовності квазікласичного опису даної системи.
4. Досліджено розподіл електричного поля системи і показано, що для невиродженого газу електричне поле експоненційно спадає до фіксованого значення у випадку зарядженої системи і зменшується обернено пропорційно відстані від поверхні діелектрика у випадку квазінейтральної системи.
5. Досліджено здобутий розподіл концентрації зарядів і показано, що відстань від поверхні гелію, нижче якої зосереджена переважна кількість електронів, за порядком величини є порівняною з характерною відстанню локалізації окремого електрона в основному стані над поверхнею гелію.
6. Одержано, у межах запропонованого підходу, рівняння для критичної поверхні фазового переходу до просторово-періодичного стану у системі, яке визначає зв'язок між критичними параметрами фазового перетворення – зовнішнім електричним полем, температурою та кількістю частинок над одиницею площі поверхні діелектрика.
7. Здобуто вираз для параметра порядку фазового перетворення – профілю поверхні - поблизу зазначеної критичної поверхні та показано, що його величина змінюється пропорційно квадратному кореню із напруженості зовнішнього електричного поля.
8. Проаналізовано залежність характеристик системи в околі фазового перетворення від товщини плівки рідкого діелектрику, величини притискуючого поля й концентрацій зарядів над поверхнею, допустимих із точки зору стійкості системи. Показано, зокрема, що для відносно тонких плівок діелектрика їх ефективна товщина слабо залежить від величини притискуючого поля, а діапазон допустимих концентрацій зарядів над поверхнею значно розширюється у порівнянні з випадком

масивного діелектрика.

Таким чином, мета дисертаційної роботи досягнута, поставлені завдання повністю розв'язані.

ПОДЯКИ

Насамкінець хочу висловити глибоку подяку своєму науковому керівникові академіку НАН України Слюсаренко Юрію Вікторовичу за запропоновану тематику досліджень, плідне обговорення результатів, допомогу на усіх етапах роботи над дисертацією і постійну підтримку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Cond. Matt. Phys.* 2009. V. 12. №. 1. P. 19–34.
2. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On phase transitions in the system of charged fermi-particles above the liquid dielectric surface. *Problems of Atomic Science and Technology.* 2012. V. 57. №. 1. P. 288–291.
3. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. The thomas-fermi model in the theory of systems of charged particles above the surface of liquid dielectrics. *J. Math. Phys.* 2012. V. 53. P. 103302(22 p.).
4. Slyusarenko Yu.V., Lytvynenko D.M. The theory of spatially periodic equilibrium states in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Journal of Physical Studies.* 2015. V. 19. №. 3. P. 3601(16 p.).
5. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Analyzing the equilibrium states of a quasi-neutral spatially inhomogeneous system of charges above a liquid dielectric film based on the first principles of quantum statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2017. V. 50. P. 315202(35 p.).
6. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On the spatially periodic ordering in the system of electrons above the surface of liquid helium in an external electric field. *Cond. Matt. Phys.* 2018. V. 21. №. 3. P. 33601(12 p.).
7. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Programme and abstracts of the 3rd Conference on Statistical Physics, Lviv, Ukraine, 23-25 June, 2009.* Lviv, 2009. P. 186.
8. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On phase transitions in the system of charged fermi particles above the liquid dielectric surface. *Quantum Electrodynamics and Statistical Physics (QEDSP2011): Book of abstracts of the 3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics, Kharkiv, Ukraine, 29 August – 2 September, 2011.* Kharkiv, 2011. P. 161.

9. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of phase transitions in the system of charged fermi-particles above liquid dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Book of Abstracts of the 4-th Conference on Statistical Physics*, Lviv, Ukraine, 3-6 July, 2012. Lviv, 2012. P. 143.
10. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Spatial periodic structures in the system of charged fermi-particles above the surface of liquid dielectrics. *Physics of Disordered Systems: Proceedings of VI International Conference on Physics of Disordered Systems*, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013. Lviv, 2013. P. 70.
11. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the liquid dielectric surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems: Book of Abstracts of the 6th International Conference on Physics of Liquid Matter*, Kyiv, Ukraine, 23-27 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 244.
12. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the V International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 2-6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 108.
13. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Phase transitions in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VI International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2015. Kharkiv, 2015. P. 76.
14. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of spatially periodic structures in a gas of charged particles above its surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems: Book of Abstracts of the 7th International Conference on Physics of Liquid Matter*, Kyiv, Ukraine, 27-30 May, 2016. Kyiv, 2016. P. 182.
15. Lytvynenko D.M. Analysis of influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of the phase transition to a spatially periodic structure

- in a gas of charged particles above it. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VII International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 109.
16. Cole M.W., Cohen M.H. Image-potential-induced surface bands in insulators. *Phys. Rev. Lett.* 1969. V. 23. №. 21. P. 1238–1241.
 17. Shikin V.B. Motion of helium ions near a vapor-liquid surface. *J. Exp. Theor. Phys.* 1970. V. 31. №. 5. P. 936–940.
 18. Shikin V.B., Monarkha Yu.P. Surface charges in helium (a survey). *Fiz. Nizk. Temp.* 1975. V. 1. №. 8. P. 957–983.
 19. Monarkha Yu.P., Shikin V.B. Low dimensional electron systems at liquid helium surface (review article). *Low Temp. Phys.* 1982. V. 8. №. 6. P. 563–601.
 20. Monarkha Yu., Kono K. Two-dimensional Coulomb liquids and solids. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 346 p.
 21. Edelman V.S. Levitated electrons. *Sov. Phys. Usp.* 1980. V. 23. №. 4. P. 227–244.
 22. Hippolito O., de Felicio J.R.D., Farias G.A. Electron bound states on liquid helium. *Solid State Communications.* 1978. V. 28. №. 5. P. 365–368.
 23. Sommer W.T. Liquid helium as a barrier to electrons. *Phys. Rev. Lett.* 1964. V. 12. №. 9. P. 271–273.
 24. Grimes C.C., Brown T.R., Burns M.L., Zipfel C.L. Spectroscopy of electrons in image-potential-induced surface states outside liquid helium. *Phys. Rev.* 1976. V. 13. №. 1. P. 140–147.
 25. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Second edition. Oxford: Pergamon Press, 1987. V. 6. P. 551.
 26. Leiderer P., Wanner M. Structure of the dimple lattice on liquid 4He . *Physics Letters A.* 1979. V. 73. №. 3. P. 189–192.
 27. Leiderer P., Ebner W., Shikin V.B. Macroscopic electron dimples on the surface of liquid helium. *Surf. Sci.* 1982. V. 113. №. 1-3. P. 405–411.
 28. Williams R., Crandall R.S. Crystallization of electrons on the surface of liquid helium. *Phys. Lett. A.* 1971. V. 34. №. 7. P. 404–405.

29. Shikin V. Excitation of capillary waves in helium by a wigner lattice of surface electrons. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 1974. V. 19. №. 10. P. 335.
30. Monarkha Yu.P., Shikin V.B. Theory of a two-dimensional wigner crystal of surface electrons in helium. *J. Exp. Theor. Phys.* 1975. V. 41. №. 4. P. 710–714.
31. Fisher D.S., Halperin B.I., Platzman P.M. Phonon-rippion coupling and the two-dimensional electron solid on a liquid-helium surface. *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. №. 12. P. 798–801.
32. Wigner E. On the interaction of electrons in metals. *Phys. Rev.* 1934. V. 46. P. 1002–1011.
33. Peletminsky A.S., Peletminsky S.V., Slyusarenko Yu.V. On phase transitions in a fermi liquid. ii. transition associated with translational symmetry breaking. *Low Temp. Phys.* 1999. V. 25. P. 303.
34. Shikin V.B. Instability and reconstruction of a charged liquid surface. *Phys. Usp.* 2011. V. 54. P. 1203–1225.
35. Syvokon V.E., Nasedkin K.A. Dynamic phase transitions in a two-dimensional electronic crystal and in a two-dimensional helium film. *Low Temp. Phys.* 2012. V. 38. №. 1. P. 6–15.
36. Grimes C.C., Adams G. Evidence for a liquid-to-crystal phase transition in a classical, two-dimensional sheet of electrons. *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. №. 12. P. 795–798.
37. Troyanovskii A.M., Volodin A.P., Khaikin M.S. Electron localization over the surface of crystalline hydrogen and neon. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 1979. V. 29. №. 7. P. 421–425.
38. Kajita K. A new two-dimensional electron system on the surface of solid neon. *Surf. Sci.* 1984. V. 142. №. 1-3. P. 86–95.
39. Wanner M., Leiderer P. Charge-induced ripplon softening and dimple crystallization at the interface of ^3He - ^4He mixtures. *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. №. 5. P. 315–317.
40. Bishop D.J., Dynes R.C., Tsui D.C. Magnetoresistance in si metal-oxide-semiconductor field-effect transistors: Evidence of weak localization and correlation. *Phys. Rev. B.* 1982. V. 26. №. 2. P. 773–779.

41. Devreese J.T., Peeters F.M. The Physics of the Two-Dimensional Electron Gas. New York: Plenum Press, 1987. 441 p.
42. Andrei E.Y. Two-Dimensional Electron Systems on Helium and other Cryogenic Substrates. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
43. Monarkha Yu.P., Syvokon V.E. A two-dimensional wigner crystal (review article). *Low Temp. Phys.* 2012. V. 38. №. 12. P. 1355–1389.
44. Рыбалко А.С., Есельсон Б.Н., Ковдря Ю.В. Фазовый переход жидкость - кристалл в системе поверхностных электронов при температурах ниже 0,3 К. *Физика низких температур.* 1979. Т. 5. № 8. С. 947–949.
45. Marty D., Poitrenaud J., Williams F.I.B. Observation of liquid-to-crystal transition in a two dimensional electronic system. *Journal de Physique Lettres.* 1980. V. 41. №. 13. P. 311–314.
46. Gianetta R.W., Ikezi H. Nonlinear deformation of the electron-charged surface of liquid 4He. *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. №. 12. P. 849–852.
47. Gianetta R.W., Ikezi H. Macroscopic structures on the electron charged surface of liquid 4He. *Surf. Sci.* 1982. V. 113. P. 412–418.
48. Leiderer P. Electrons at helium interfaces. *Physica B.* 1984. V. 126. №. 1-3. P. 92–99.
49. Grimes C.C. Electrons in surface states on liquid helium. *Surf. Sci.* 1978. V. 73. P. 379–395.
50. Cole M.W. Electronic surface states of liquid helium. *Reviews of Modern Physics.* 1974. V. 46. №. 3. P. 451–464.
51. Grimes C.C., Brown T.R., Burns M.L., Zipfel C.L. Spectroscopy of electrons in image-potential induced surface states outside liquid helium. *Phys. Rev. B.* 1976. V. 13. №. 1. P. 140–147.
52. Cole M.W. Electronic surface states of a dielectric film on a metal substrate. *Phys. Rev. B.* 1971. V. 3. №. 12. P. 4418–4422.
53. Volodin A.P., Khaikin M.S., Edelman V.S. Surface electronic states above a helium film. *JETP Lett.* 1976. V. 23. №. 9. P. 478–481.
54. Atkins K.R. Third and fourth sound in liquid helium II. *Phys. Rev.* 1959. V. 113. №. 4. P. 962–965.

55. Ikezi H., Platzman P.M. Stability of helium films charged with electrons. *Phys. Rev. B*. 1981. V. 23. №. 3. P. 1145–1148.
56. Etz H., Gombert W., Idstein W., Leiderer P. Stability of charged He4 films. *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. №. 27. P. 2567–2570.
57. Монарха Ю.П. К теории электрон-риплонных резонансов в двумерном Вигнеровском кристалле над поверхностью жидкого гелия. *Физика низких температур*. 1980. Т. 6. № 6. С. 685–697.
58. Lev B.I., Zhugaevych A.Ya. Statistical description of model systems of interacting particles and phase transitions accompanied by cluster formation. *Phys. Rev. E*. 1998. V. 57. №. 6. P. 6460–6469.
59. Lev B.I., Zagorodny A.G. Statistical description of coulomb-like systems. *Phys. Rev. E*. 2011. V. 84. №. 6. P. 061115.
60. Lev B.I., Ostroukh V.P., Tymchyshyn V.B., Zagorodny A.G. Electron distribution on a deformed liquid-helium surface. *Ukr. J. Phys.* 2015. V. 60. №. 3. P. 247–252.
61. Lev B.I., Ostroukh V.P., Tymchyshyn V.B., Zagorodny A.G. Statistical description of the system electrons on the liquid helium surface. *The European Physical Journal B*. 2014. V. 87. P. 253.
62. Ebner W., Leiderer P. Development of the dimple instability on liquid 4He. *Phys. Lett. A*. 1980. V. 80. №. 4. P. 277–280.
63. Gor'kov L.P., Chernikova D.M. Concerning the structure of a charged surface of liquid helium. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 1973. V. 18. №. 2. P. 68–70.
64. Mima K., Ikezi H. Propagation of nonlinear waves on an electron-charged surface of liquid helium. *Phys. Rev. B*. 1978. V. 17. №. 9. P. 3567–3575.
65. Williams R., Crandall R.S. Deformation of the surface of liquid helium by electrons. *Phys. Lett. A*. 1971. V. 36. №. 1. P. 35–36.
66. Coimbra D., Sokolov S.S., Rino J.P., Studart N. Surface electron transport over a helium film. *J. Low Temp. Phys.* 2002. V. 126. №. 1/2. P. 505–510.
67. Sokolov S.S., Studart N. Electron transport in a quasi-one-dimensional channel on superfluid helium film. *Phys. Rev. B*. 2002. V. 66. №. 7. P. 075424(5 p.).
68. Monarkha Yu.P., Sokolov S.S., Hai G.-Q., Studart N. Channel

- magnetotransport of surface electrons on superfluid helium. *Physica E*. 2002. V. 12. P. 950–952.
69. Leiderer P., Scheer E., Kono K., Lin J.J., Rees D.G. Stability of surface state electrons on helium films. *J. Low Temp. Phys.* 2015. V. 183. P. 258.
70. Monarkha Yu.P. Nonlinear dynamics of a two-dimensional wigner solid on superfluid helium. *Low Temperature Physics*. 2018. V. 44. №. 4. P. 286–293.
71. Syvokon V.E., Sokolov S.S., Sharapova I.V. Structural transitions and plasma oscillations in electron rows above liquid helium. *Low Temperature Physics*. 2019. V. 45. №. 1. P. 58–69.
72. Landau L.D., Lifshitz E.M. Quantum Mechanics. Non-relativistic theory. Second edition. Oxford: Pergamon Press, 1965. V. 3. 632 p.
73. Landau L.D., Lifshitz E.M. Statistical Physics. Part 1. Third edition. Oxford: Pergamon Press, 1980. V. 5. 562 p.
74. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Физматлит, 2003. 615 с.
75. Chernikova D.M. Properties of a self-localized charged layer on the surface of liquid helium. *J. Exp. Theor. Phys.* 1975. V. 41. №. 1. P. 121–124.
76. Mistura G., Günzler T., Nesper S., Leiderer P. Microwave study of screened two-dimensional electron crystals on helium films. *Phys. Rev. B*. 1997. V. 56. №. 13. P. 8360–8366.
77. Dyugaev A.M., Grigor'ev P.D., Ovchinnikov Yu.N. Properties of a classical electron gas at the surface of condensed media. *J. Exp. Theor. Phys.* 2000. V. 90. №. 6. P. 1089–1092.
78. Shikin V.B., Monarkha Yu.P. Two-dimensional Charged Systems in Helium. Moscow: Nauka, 1989. 156 с.
79. Peeters F.M. Two-dimensional wigner crystal of electrons on a helium film: Static and dynamical properties. *Phys. Rev. B*. 1984. V. 30. №. 1. P. 159–165.
80. Hu X.L., Dahm A.J. Stability of charged thin helium films. *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 42. №. 4. P. 2010–2013.
81. Lundqvist S., March N.H. Theory of the inhomogeneous electron gas. New York and London: Plenum Press, 1983. 397 p.

82. Tatarskii V.V. On the stability of charged helium film. *Low Temp. Phys.* 1986. V. 12. №. 5. P. 451–457.
83. Kamke E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Stuttgart: Vieweg+Teubner Verlag, 1977. 668 p.
84. Jackson D. *Fourier series and orthogonal polynomials*. New York: Mathematical Association of America, 1941. 245 p.
85. Albrecht U., Leiderer P. Multielectron bubbles in liquid helium. *Europhys. Lett.* 1987. V. 3. №. 6. P. 705–710.
86. Peeters F.M., Platzman P.M. Electrons on films of helium: A quantum mechanical two-dimensional fermion system. *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. №. 25. P. 2021–2023.
87. Günzler T., Bitnar B., Mistura G., Naser S., Leiderer P. Evidence for quantum melting in the two-dimensional electron system on a thin helium film. *Surf. Sci.* 1996. V. 361-362. P. 831–834.
88. Bohr N. On the constitution of atoms and molecules, Part I. *Philosophical Magazine*. 1913. V. 26. P. 1–24.
89. Donnelly R.J., Barengh C.F. The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure. *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1998. V. 27. №. 6. P. 1217–1274.
90. Van Sciver S.W. *Helium Cryogenics*. Second edition. New York: Springer, 2012. 486 p.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Cond. Matt. Phys.* 2009. V. 12. № 1. P. 19-34.

2. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On phase transitions in the system of charged Fermi-particles above the liquid dielectric surface. *Problems of Atomic Science and Technology.* 2012. V. 57. № 1. P. 288-291.

3. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. The Thomas-Fermi model in the theory of systems of charged particles above the surface of liquid dielectrics. *J. Math. Phys.* 2012. V. 53. P. 103302(22 p).

4. Slyusarenko Yu.V., Lytvynenko D.M. The theory of spatially periodic equilibrium states in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Journal of Physical Studies.* 2015. Vol. 19. № 3. P. 3601(16 p.).

5. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Analyzing the equilibrium states of a quasi-neutral spatially inhomogeneous system of charges above a liquid dielectric film based on the first principles of quantum statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2017. V. 50. P. 315202(35 p.).

6. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V., Kirdin A.I. On the spatially periodic ordering in the system of electrons above the surface of liquid helium in an external electric field. *Cond. Matt. Phys.* 2018. V. 21. № 3. P. 33601(12 p.).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On equilibrium charge distribution above dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Programme and abstracts of the 3rd Conference on Statistical Physics, Lviv, Ukraine, 23-25 June, 2009.* Lviv, 2009. P. 186. (Доповідач).

8. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On phase transitions in the system of charged Fermi particles above the liquid dielectric surface. *Quantum Electrodynamics and Statistical Physics (QEDSP2011): Book of abstracts of the*

3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics, Kharkiv, Ukraine, 29 August – 2 September, 2011. Kharkiv, 2011. P. 161. (Доповідач).

9. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of phase transitions in the system of charged Fermi-particles above liquid dielectric surface. *Statistical Physics. Modern Trends and Applications: Book of Abstracts of the 4-th Conference on Statistical Physics*, Lviv, Ukraine, 3-6 July, 2012. Lviv, 2012. P. 143. (Доповідач).

10. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. Spatial periodic structures in the system of charged Fermi-particles above the surface of liquid dielectrics. *Physics of Disordered Systems: Proceedings of VI International Conference on Physics of Disordered Systems*, Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013. Lviv, 2013. P. 70. (Доповідач).

11. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. The theory of spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the liquid dielectric surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems: Book of Abstracts of the 6th International Conference on Physics of Liquid Matter*, Kyiv, Ukraine, 23-27 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 244. (Доповідач).

12. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the spatially periodic equilibrium states in the quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the V International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 2-6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 108. (Доповідач).

13. Lytvynenko D.M. and Slyusarenko Yu.V. Phase transitions in quasi-neutral system of charges above the surface of liquid dielectric. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VI International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2015. Kharkiv, 2015. P. 76. (Доповідач).

14. Lytvynenko D.M., Slyusarenko Yu.V. On the influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of spatially periodic structures in a gas of charged particles above its surface. *Physics of Liquid Matter. Modern Problems:*

Book of Abstracts of the 7th International Conference on Physics of Liquid Matter, Kyiv, Ukraine, 27-30 May, 2016. Kyiv, 2016. P. 182. (Доповідач).

15. Lytvynenko D.M. Analysis of influence of liquid dielectric film thickness on the characteristics of the phase transition to a spatially periodic structure in a gas of charged particles above it. *Low Temperature Physics: Conference Program and Abstracts Book of the VII International Conference for Young Scientists*, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 109. (Доповідач).