НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

БОНДАРЕНКО МИКОЛА ВІКТОРОВИЧ

УДК 530.145, 539.12

РОЗСІЮВАННЯ ТА ВИПРОМІНЮВАННЯ ВИСОКОЕНЕРГЕТИЧНИХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В АМОРФНИХ ТА КРИСТАЛІЧНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ХАРКІВ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» Національної академії наук України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України **Шульга Микола Федорович**, Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, генеральний директор.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України **Ситенко Юрій Олексійович**, Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України, завідувач відділу теорії ядра і квантової теорії поля;

доктор фізико-математичних наук, професор **Скалозуб Володимир Васильович**, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара МОН України, завідувач кафедри теоретичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор **Ходусов Валерій Дмитрович**, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна МОН України, завідувач кафедри теоретичної ядерної фізики та вищої математики імені О.І. Ахієзера.

Захист відбудеться «_19_» _березня_ 2019 р. о _15_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.845.02 Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України за адресою: 61108, м. Харків, вул. Академічна, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України за адресою: 61108, м. Харків, вул. Академічна, 1 та на офіційному веб-сайті ННЦ ХФТІ.

Автореферат розіслано «___» _____ 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д 64.845.02,
канд. фіз.-мат. наук _____ А.І. Кірдін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Одночасно з дослідженням фундаментальних властивостей елементарних частинок в їх електрослабких та сильних взаємодіях, на прискорювачах значна увага традиційно приділяється і вивченню їх взаємодії зі звичайною, атомною речовиною. Це вивчення переслідує різноманітні цілі: уточнення уявлень про базові процеси, що дозволяють реєструвати частинки в детекторах (багаторазове розсіювання, іонізаційні втрати енергії, спінова поляризація та деполяризація, електромагнітне випромінювання, народження електрон-позитронних пар та утворення електромагнітних злив); створення пучків фотонів та позитронів на прискорювачах електронів (з подальшими застосуваннями для ядерної фізики або фізики елементарних частинок); створення компактних пристроїв для виведення пучків з накопичувальних кілець на прискорювачах заряджених частинок дуже високих енергій; а також вивчення крайових ефектів і ефектів близького поля (для фізики прискорювачів) і генерація синхротронного випромінювання (що використовується в аналізі конденсованих середовищ, біологічній та медичній фізиці). Розуміння подібних процесів використовується також в аналізі результатів зіткнень, що відбуваються при високій енергії за участю багатонуклонних атомних ядер, які відіграють роль обмеженого «середовища», і нарешті, в астрофізиці, де існують як великомасштабні магнітні поля, так і потоки заряджених частинок надвисоких енергій (космічні промені).

Вельми яскраві застосування виникають при взаємодії пучків заряджених частинок високих енергій з кристалами. Ці задачі набули популярності ще в 1950-70-ті роки, коли були відкриті ефекти когерентного гальмівного випромінювання, каналювання та випромінювання при каналюванні. Пізніше на авансцену вийшли задачі проходження швидких заряджених частинок крізь зігнуті кристали, з огляду на унікальні можливості, що надаються ними для колімування первинних пучків та виведення вторинних пучків на прискорювачах високих енергій.

Експериментальним дослідженням взаємодії високоенергетичних заряджених частинок з речовиною традиційно приділяється значна увага у провідних світових прискорювальних центрах CERN (Женева, Швейцарія), ІФВЕ (Протвино, Росія), FNAL (Чікаго, США), SLAC (Стенфорд, США), DESY (Гамбург, Німеччина), MAMI (Майнц, Німеччина) та ін. З кожною новою енергією відбувається не лише кількісне уточнення знань про відомі явища, а й відкриття якісно нових ефектів та можливостей. Протягом останніх двох десятиліть великий обсяг важливих експериментальних даних було отримано на прискорювачі CERN SPS (200 Гев). Новий виток в дослідженнях відбувається з появою Великого адронного колайдера (LHC). Сучасні тенденції пов’язані з прогресом в експериментальній фізиці, обчислювальній техніці та технологіях виготовлення мішеней. Бажано, щоб розвиток теорії випереджав експериментальний стан досліджень.

З теоретичного погляду, в даній галузі ще залишається чимало нерозв’язаних питань. Ще не вирішені навіть всі питання, пов’язані з проходженням частинок крізь аморфну речовину. Теорія Мольєра багаторазового розсіювання в аморфній речовині зазнає труднощів в перехідній області між подібною до гауссівської поведінки функції розподілу на типових кутах відхилення та резерфордівською

асимптотикою на великих кутах. Перешкоди виникають навіть в описі елементарного акту розсіяння на окремому атомі у випадку великого кулонівського параметра. Природно, що ще більше проблем зустрічається в питаннях взаємодії частинок з кристалами, де динаміка може бути вельми складною. Однією з давніх проблем є відсутність послідовного розділення дії потенціалу кристала на вплив неперервного потенціалу та внесок некогерентного розсіяння, яке б дозволило уникнути подвійного рахунку. В теорії деканалювання відсутнє строге обґрунтування так званого наближення статистичної рівноваги, визначення границь його застосовності та, найголовніше, процедури виходу за його межі. Донедавна бракувало розвинутої теорії об'ємного відбиття, здатної у явному вигляді пов'язати розподіл по кутах відхилення з формою міжплощинного потенціалу. Не існує також достатньо надійної теорії об'ємного захоплення. У теорії генерації електромагнітного випромінення ще теж залишається чимало проблем, оскільки в залежності від частоти фотона, головний внесок може походити від дуже різних просторових масштабів. Зокрема, в теорії випромінення в обмежених мішенях не існувало послідовного підходу для поєднання інфрачервоної межі зі внесками від типових частот.

Таким чином, питання взаємодії швидких заряджених частинок з речовиною є актуальними нині як з теоретичного, так і з експериментального, а також із прикладного погляду, і їх дослідження в наш час продовжується як в традиційних напрямках, так і у зв'язку з новими викликами.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. В Україні провідним центром з вивчення процесів взаємодії швидких заряджених частинок з речовиною є ННЦ ХФТІ. Початок цій галузі досліджень тут було покладено в 1930-х роках, під час становлення прискорювальної ядерної фізики, і вийшло на новий рівень в 1970-ті роки із запуском нового лінійного прискорювача електронів на рекордну в той час в світі енергію 2 Гев. На ньому вдалося зробити ряд важливих відкриттів стосовно проходження швидких заряджених частинок крізь речовину, зокрема, довести можливість каналювання позитронів високих енергій. Після того, як потужніші прискорювачі були введені в експлуатацію за кордоном, харківський лінійний прискорювач електронів припинив роботу на номінальній енергії, проте, дослідження за участю співробітників ННЦ ХФТІ у галузі високих енергій продовжуються у співробітництві з сучасними іноземними експериментальними лабораторіями. Тематика взаємодії швидких частинок з речовиною є однією з профільних в Інституті теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ, в якому працює автор.

Дослідження, покладені в основу дисертації, проводилися в ІТФ ННЦ ХФТІ в рамках:

Програми «Відомче замовлення НАН України на проведення наукових досліджень з атомної науки та техніки», за темами:
2003–2005 рр. «Квантовоелектродинамічні процеси при взаємодії швидких частинок з кристалічними та аморфними речовинами та з інтенсивними зовнішніми полями» (шифр теми 56/04, номер держреєстрації 080901UP0009);

2006–2010 рр. «Теоретичні дослідження електромагнітних процесів при взаємодії заряджених частинок з пучками частинок, речовиною та зовнішніми полями» (шифр теми III-6-06 ІТФ, номер держреєстрації 080906UP0010);
2011–2015 рр. «Розвиток теорії електродинамічних процесів при взаємодії заряджених частинок високих та ультрависоких енергій з аморфною речовиною, кристалічними структурами та інтенсивними зовнішніми полями» (шифр теми III-6-11 ІТФ, номер держреєстрації 0111U09550);
2016–2018 рр. «Електромагнітні процеси в інтенсивних зовнішніх полях та при взаємодії заряджених частинок великої енергії з кристалічними та аморфними середовищами» (шифр теми III-6-16 ІТФ, номер держреєстрації 0116U007070);

науково-дослідної роботи НАН України за темами:
2014–2015 рр. «Електромагнітні процеси при проходженні заряджених частинок великої енергії через кристалічні та аморфні середовища» (номер теми ЦО-7-1, номер держреєстрації 0114U002898);
2016–2017 рр. «Розсіяння та випромінювання заряджених частинок великої енергії в тонких шарах кристалічної та аморфної речовини» (номер теми ЦО-1-8, номер держреєстрації 0116U004398);

а також програми Міністерства освіти та науки України «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави», в рамках тем:
2016–2017 рр. «Рідкісні ядерні процеси і розпади, спектроскопія розпадів та структура ядер (шифр роботи № 1-13-15, номер держреєстрації 0115U000473, ХНУ імені В.Н.Каразіна);
2017–2018 рр. «Індуковані електрослабкими взаємодіями рідкісні процеси і розпади та структурні ефекти в сильних і електромагнітних взаємодіях» (шифр роботи № 1-13-18, номер держреєстрації 0118U002031, 2018 р., ХНУ імені В.Н. Каразіна).

В усіх названих проектах роль автора – виконавець.

В 2015–2017 рр. робота над дисертацією проводилася в докторантурі ННЦ ХФТІ.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертації була розробка теорії багаторазового розсіювання в аморфному середовищі та орієнтованих кристалах, теорії донат-розсіювання, деканалювання, об’ємного відбиття, дослідження залежності інтенсивності та ступеня поляризації гальмівного випромінення від кута та частоти випромінення з урахуванням кулонівської сингулярності атомного потенціалу та її екранування, формулювання теорії випромінювання в представленні прицільних параметрів, послідовне розділення об’ємних та крайових ефектів у спектрах випромінення в скінченних мішенях різних типів. З огляду на сферу діяльності автора, не розглядалися питання народження електрон-позитронних пар.

Для досягнення поставленої мети, автором розв’язувалися наступні задачі:

- Дослідження впливу різних параметрів атомних потенціалів на характеристики розсіяння швидких заряджених частинок;
- Уточнення теорії багаторазового розсіювання при кутах відхилення, більших за типові;

- Послідовне розділення внесків відхилення в неперервному потенціалі та некогерентного розсіювання в орієнтованих кристалах;
- Вихід за рамки наближення статистичної рівноваги в теорії деканалювання позитивно заряджених частинок;
- Теоретичний опис явища об'ємного відбиття в зігнутому кристалі;
- Пошук умов для створення анізотропій в розсіянні ультра-релятивістських електронів в кристалах, оцінка ступеня поляризації відповідного гальмівного випромінення (з урахуванням віддачі фотона) як в кутовому розподілі, так і в інтегралі по кутах випромінення;
- Аналіз типів інтерференції у гальмівному випромінюванні при дворазовому розсіянні, відхиленні у скінченному однорідному магніті та у аморфній мішені скінченної товщини.

Об'єкт дослідження – електромагнітні процеси, що відбуваються при проходженні безструктурних ультра-релятивістських заряджених частинок крізь речовину.

Предмет дослідження – процеси розсіювання та випромінювання швидких заряджених частинок в аморфних та кристалічних мішенях, а також у магнітних полях. Акцент робився на просторово-часових аспектах розвитку процесів при високих енергіях, зокрема, у застосуванні до проходження швидких заряджених частинок крізь прямі та зігнуті кристали, активно використовуваного в сучасній практиці.

Методи дослідження. Всі задачі розглядалися за умов, характерних для фізики високих енергій, коли типові кути розсіювання та випромінювання є малими. Вважаючи енергію достатньо високою, нехтувалося ефектами впливу діелектричної сприйнятливості атомної речовини, та не розглядалася її іонізація. Дослідження велося традиційними аналітичними методами класичної та квантової механіки і електродинаміки, фізичної кінетики, статистичної фізики та математичної фізики. Амплітуди пружного високоенергетичного розсіяння розраховувались на основі наближення ейконалу. Функція розподілу багаторазового розсіяння частинок по кутах в аморфній речовині обчислювалася за допомогою методу розповсюдження дійсного інтегралу в комплексну площину. Просторово-кутовий розподіл багаторазово розсіяних частинок в аморфній речовині знаходився методом перетворення Фур'є та підбору гауссового розв'язку з вільними параметрами. Просторово-кутовий розподіл багаторазово розсіяних частинок на атомних ланцюжках в кристалі обчислювався за допомогою розкладення по повній системі функцій Матьє. Часова залежність площинного деканалювання та довжина деканалювання розраховувалися методом функцій Гріна. Для обчислення кутових розподілів електромагнітного випромінювання застосовувалась стереографічна проекція, для обчислення спектрів випромінення – формула Байера-Каткова та її класичний аналог. Автором розроблені спеціальні аналітичні підходи до розв'язку кінетичних рівнянь, обчислення сум по кристалічній ґратці, інтегралів вздовж траєкторій випромінюючих частинок, по фазовому простору, сум по електронним спіновим станам, які можуть використовуватися також і в комп'ютерному моделюванні реальних процесів.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Узагальнено теорію класичного та квантового розсіяння швидкої зарядженої частинки на екранованому кулонівському потенціалі, що представляє атом. Доведено існування загальних скейлінгових властивостей в цьому процесі, встановлено існування зв'язку між характеристиками розсіяння при великих і при малих кулонівських параметрах.
- Удосконалено теорію багаторазового розсіяння в аморфній речовині. Запропоновано розділення функції розподілу частинок за кутами розсіяння на м'яку та напівжорстку компоненти. Для її інтерпретації запропоновано використання поняття псевдо-ймовірності.
- Вперше запропоновано принцип розділення потенціалу орієнтованого атомного ланцюжка чи площини на неперервну та некогерентну компоненти, остання з яких відповідає за багаторазове розсіювання, і може описуватись інтегралом зіткнень.
- Вперше одержано критерій для оптимальної площинної орієнтації кристала.
- Вперше побудовано опис просторової дифузії при донат-розсіянні.
- Вперше побудована аналітична теорія площинного деканалювання поза рамками наближення статистичної рівноваги.
- Вперше побудована аналітична теорія об'ємного відбиття.
- Запроваджено повну систему радіаційних формфакторів для поляризованого спектра гальмівного випромінення, при довільному значенні ступеня недипольності.
- Вперше одержано формулу, яка пов'язує мольєрівський кут та радіаційну довжину в аморфній речовині, з урахуванням кулонівського характеру розсіювання на складових атомах.
- Вперше одержано асимптотики спектра випромінення при великих та при малих частотах фотонів за умов аномальної дифузії.
- Вперше одержано лінійну по частоті фотона поправку до інфрачервоної факторизаційної теореми для спектра випромінення при розсіянні ультра-релятивістського електрона.
- Вперше обчислено спектри випромінення для деяких практично важливих випадків – при проходженні релятивістських електронів крізь тонку аморфну мішень (але з урахуванням недипольних ефектів) та при проходженні електрона крізь однорідний магніт скінченної довжини (за умов сильно недипольного випромінення).
- Вперше запропоновано метод розділення масштабів і побудовано загальну теорію крайових ефектів для спектрів випромінення ультра-релятивістських електронів в мішенях скінченної товщини, за умов сильної недипольності.

Деякі результати, отримані автором, мають також **методичне значення**:

- Вперше запроваджено використання стереографічної проекції для опису кутових розподілів поляризації та інтенсивності квантового гальмівного випромінення.
- Показано, що кореляція передач імпульсу в мішені та поляризації випромінених фотонів в теорії гальмівного випромінювання незалежно від виконання умов факторизації здійснюється універсальним тензором.
- Розвинута процедура спрощеного усереднення спектрів випромінення.

- Розроблено підхід для обчислення амплітуд класичного випромінення у представленні прицільних параметрів.
- Вперше одержано представлення для спектра електромагнітного випромінення, що має вигляд співвідношення унітарності.
- Запропоновано простий спосіб виводу спектра Ландау-Померанчука-Мигдала.

Практичне значення одержаних результатів. Окрім наукової цінності, істотним є прикладне значення здобутих результатів:

- Непертурбативне обчислення кута екранування є важливим для опису багаторазового розсіяння релятивістських іонів, а також нерелятивістських протонів.
- Зв'язок кута екранування з радіаційною довжиною дозволяє знаходити його з табличних даних, без детальних розрахунків атомної структури.
- Розділення м'якої та напівжорсткої компонент в багаторазовому кулонівському розсіянні може застосовуватися для комп'ютерного моделювання кінетики швидких заряджених частинок в аморфній речовині.
- Уточнення закону деканалювання у часі як на початковій, так і на пізній стадіях є важливим для практичних застосувань каналювання.
- Вираз кута об'ємного відбиття через неперервний потенціал довільного вигляду дозволяє швидко і реалістично обчислювати його у будь-якому кристалі будь-якої площинної орієнтації. Відповідні формули на сьогодні використовуються у оновленнях комп'ютерної програми FLUKA, розробленої у CERN.
- Метод стереографічної проекції дозволяє швидко оцінювати кутовий розподіл та поляризацію випромінення від ультра-релятивістських електронів.
- Квадрупольний формфактор спектра випромінення дозволяє описувати пригнічення м'якого випромінювання у тонких мішенях, подібно до того як функція Мигдала робить це для товстих мішеней.
- Знання крайових ефектів у випроміненні при проходженні електрона крізь скінченний магніт важливе в застосуваннях прискорювальної техніки.
- Загальна техніка недипольного розкладення дозволяє на єдиній основі проводити оцінку крайових ефектів в спектрах випромінення на обмежених мішенях.
- Представлений огляд літератури може бути корисним для початківців в даній галузі.

Особистий внесок здобувача. Усі статті за темою дисертації, окрім [4,7] опубліковані здобувачем особисто. Статті [4,7], матеріали доповіді на конференції [47] та тези доповідей [30,31,33] опубліковані у співавторстві з науковим консультантом, академіком НАН України М.Ф. Шульгою. В статті [7] автору належить вибір методу дослідження та проведення розрахунків. В статті [4] та матеріалах доповіді [47] автору належить постановка задачі, вибір методу дослідження та проведення розрахунків.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися автором на таких конференціях:

- Particle Accelerator Conference (May 12–16, 2003, Portland, OR, USA);
- International IUPAP Conference on Few-Body Physics (Few-Body 17) (June 5–10, 2003, Durham, NC, USA);

- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-09) (September 7–11, 2009, Zvenigorod, Russia);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2010) (October 3–8, 2010, Ferrara, Italy);
- International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (August 29 – September 2, 2011, Kharkov, Ukraine);
- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) (September 23–28, 2013, Lake Sevan, Armenia);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014) (October 5–10, 2014, Capri, Italy);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016) (September 25–30, 2016, Sirmione del Garda, Italy);
- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17) (September 18–22, 2017, Hamburg, Germany);
- Щорічні конференції з фізики високих енергій, ядерної фізики та прискорювачів (2007–2018, Харків, Україна);

а також на наукових семінарах в 2018 р. в ІТФ ННЦ ХФТІ та ІТФ ім. М.М. Боголюбова.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 47 наукових працях: у 22 статтях у фахових вітчизняних і міжнародних періодичних виданнях [1–22], 23 тезах доповідей на конференціях [23–45] та двох матеріалах доповідей на конференціях [46,47]. Статті [12] та [13] опубліковані в одному номері журналу. Перелік робіт наведено в заключній частині автореферату.

Структура і обсяг дисертаційної роботи. Текст дисертації складається з анотації, вступу, огляду літератури, трьох розділів основного тексту, висновків, списку використаної літератури із 499 найменувань та чотирьох додатків. Текст роботи містить 2 таблиці і 74 рисунки, один з яких займає всю сторінку. Повний обсяг дисертаційної роботи становить 373 сторінки, обсяг основної частини – 283 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, а також визначено новизну і практичну цінність здобутих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури. Окреслюються основні етапи розвитку та сучасний стан проблем, розглянутих у дисертації, а також споріднених питань – радіаційного тертя, іонізаційних втрат енергії, поляризаційного та перехідного випромінювання, утворення електрон-позитронних пар та електромагнітних злив, когерентного гальмівного випромінювання та випромінювання при каналюванні, які можуть відігравати важливу роль на практиці.

Другий розділ присвячений проблемам розсіювання швидких заряджених частинок в аморфній речовині. Він починається з розгляду задачі про розсіяння швидкої зарядженої частинки на окремому атомі, після чого ми переходимо до проблем багаторазового розсіяння.

2.1. Розсіяння на окремому атомі.

При достатньо високих енергіях, розсіювання електронів або іонів на окремих атомах може бути описане в рамках теорії потенціального розсіяння, але режим розсіювання залежить від значення кулонівського параметра $\alpha/\hbar v = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$, де $Z_1 e$ і $Z_2 e$ – заряди налітаючого іона (або електрона) та ядра атома, і v – швидкість зіткнення. Якщо кулонівський параметр є малим, то справедливе борнівське наближення. Тоді типові передані імпульси залежать від формфактора атома, але не від значення кулонівського параметра. Якщо ж він великий (що має місце вже для розсіювання Мевних протонів на атомах елементів з середніми Z), то розсіювання стає квазікласичним і істотно складнішим.

В обох випадках, при великих переданих імпульсах диференціальний переріз розсіяння прямує до резерфордівського:

$$\frac{d\sigma}{d^2 q} \underset{q\to\infty}{\simeq} \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d^2 q} = \frac{4\alpha^2}{v^2 q^4}, \tag{1}$$

де q – переданий імпульс. Проте, у випадку квазікласичного розсіяння ця асимптотика досягається в більш віддаленій області. Для довільного екранування, описуваного як $V(r) = \frac{\alpha}{r} g(r)$ з $g(0)=1$, $g(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$, поправка до асимптотики (1) при великих q має вигляд

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}}{d^2 q} \underset{q\to\infty}{\simeq} \frac{4\alpha^2}{v^2 q^4}\left[1 - 2\left(\frac{2\alpha\mu_0}{vq}\right)^2 \left(\ln\frac{vq}{|\alpha|\mu_1} + \frac{1}{4} - \gamma_{\text{E}}\right)\right], \tag{2}$$

де $\gamma_{\text{E}} = 0.577$ – стала Ейлера і

$$\mu_0^2 = g''(0), \tag{3}$$

$$\ln\mu_1 = \frac{1}{\mu_0^2}\int_0^\infty dr g'''(r)\ln r - \gamma_{\text{E}}. \tag{4}$$

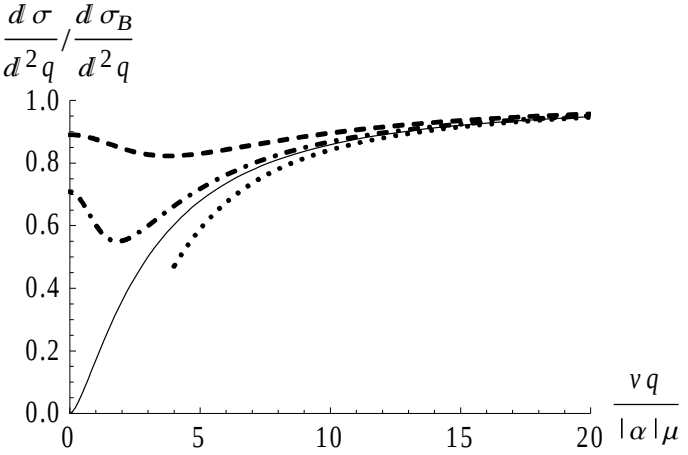


Рис. 1: Відношення диференціального перерізу розсіяння електрона на атомі до борнівського диференціального перерізу, для $|\alpha|/\hbar v = 0.5$ (штрихова крива) та $|\alpha|/\hbar v = 1$ (штрих-пунктирна крива). Суцільна крива – відношення диференціального перерізу атомного розсіяння, розрахованого за класичною механікою, до резерфордівського перерізу. Точкова крива – передрезерфордівська асимптотика [Рівн. (2)].

Знайдена відносна поправка зменшується зі зростанням переданого імпульсу (див. Рис. 1, де графіки прямують до 1 при $q \to \infty$), але водночас є пропорційною квадрату кулонівського параметра, який може бути великим. Ця поправка впливає також на масштаб екранування передач імпульсу, який є єдиним параметром, що

визначає багаторазове розсіювання в аморфній речовині. Відомо, що при наявності кулонівської сингулярності потенціалу взаємодії середньоквадратична передача імпульсу логарифмічно розбігається. Але в послідовній теорії багаторазового кулонівського розсіювання (див. Розд. 2.2), типовий переданий імпульс характеризується величиною

$$\ln q_a = \int d\left(\frac{d\sigma/d^2q}{d\sigma_{Ruth}/d^2q}\right)\ln q - \frac{1}{2}, \tag{5}$$

яка є скінченною. Можна довести, що $q_a(\alpha) \underset{\alpha/\hbar v\to 0}{\to} \hbar\mu_2$, де

$$\ln\mu_2 = \lim_{b_R\to 0}\left\{\ln\frac{2}{b_R} - \int_{b_R}^{\infty} dbb^3\left[\int_b^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}}\frac{d}{dr}\frac{g(r)}{r}\right]^2\right\} - \frac{1}{2} - \gamma_{\mathrm{E}}, \tag{6}$$

тоді як в протилежному, квазікласичному випадку,

$$q_a \underset{\alpha/\hbar v\to\infty}{\simeq} e^{\gamma_{\mathrm{E}}}\frac{\alpha}{v}\mu_2, \tag{7}$$

тобто залежить від екранування через той самий параметр μ_2 і зростає пропорційно значенню кулонівського параметра (див. Рис. 2).

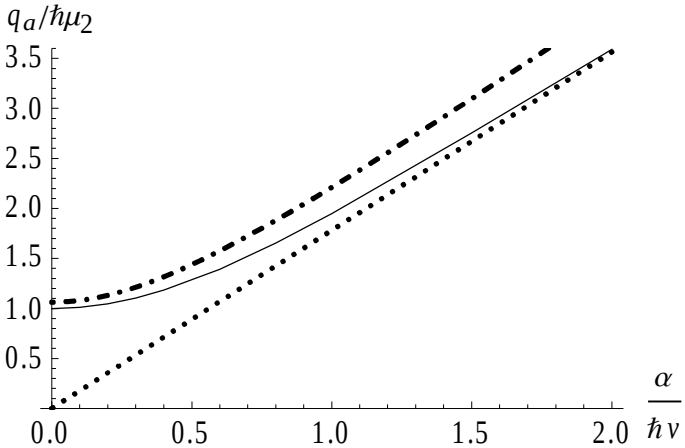


Рис. 2. Суцільна крива – імпульс екранування q_a, визначений формулою (5). Точкова пряма – його квазікласична асимптотика (7). Штрих-пунктирна крива – розрахунок за формулою Мольєра.

Розрахунки підкріплюються обчисленням диференціального перерізу розсіяння високоенергетичної частинки до 3-го борнівського наближення включно.

В класичному ліміті розсіювання на екранованому кулонівському потенціалі можна довести також властивість узагального скейлінгу, коли відношення диференціального перерізу до резерфордівського

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{cl}}/d^2q}{d\sigma_{\mathrm{Ruth}}/d^2q} = \mathcal{R}\left(\frac{vq}{|\alpha|}\right) \tag{8}$$

виражається функцією лише однієї змінної, яка в свою чергу залежить від декількох фізичних параметрів. Це співвідношення є загальнішим за скейлінг Ліндхарда-Нільсен-Шарфа [1*], оскільки включає залежність від α, а також релятивістські ефекти.

2.2. Багаторазове розсіювання в аморфній речовині.

Переходячи до багаторазового розсіювання швидких заряджених частинок в аморфній речовині, ми стикаємося з декількома принциповими проблемами. По-перше, трансляційно інваріантне транспортне рівняння для малих кутів розсіяння

$$\frac{\partial f}{\partial l} = n\int d\sigma(\chi)\left[f(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\chi},l) - f(\boldsymbol{\theta},l)\right] \tag{9}$$

розв'язується в загальному вигляді 2-вимірним перетворенням Фур'є,

$$f(\boldsymbol{\theta},l) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint d^2\rho \exp\left[i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta} - nl\int d\sigma(\chi)\left[1 - J_0(\rho\chi)\right]\right], \tag{10}$$

але з урахуванням резерфордівської асимптотики диференціального перерізу (1), середньоквадратичний кут розсіяння, який виникає в показнику експоненти при спробі розкладення під знаком інтегралу $\int d\sigma(\chi)\left[1 - J_0(\rho\chi)\right] \underset{\rho\to 0}{\simeq} \frac{1}{4}\rho^2\int d\sigma(\chi)\chi^2$, формально розбігається: $\int d\sigma\chi^2 = \infty$, внаслідок чого розподіл насправді не прямує на великих товщинах до гауссівського. Ця розбіжність має лише логарифмічний характер, тому аномальність дифузії може вважатися слабкою.

Якщо обчислити асимптотику інтегралу в показнику експоненти більш строго, вона має вигляд

$$nl\int d\sigma(\chi)\left[1 - J_0(\rho\chi)\right] \underset{\rho\chi_a'\to 0}{\simeq} \frac{\chi_c^2\rho^2}{2}\ln\frac{2}{\chi_a'\rho}, \tag{11}$$

де $\chi_a = q_a/p$, причому q_a визначається рівнянням (5).

У підході Мольєра [2*], далі структура (7) представляється у вигляді

$$\frac{\chi_c^2\rho^2}{2}\ln\frac{2}{\chi_a'\rho} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4B}\ln\frac{u^2}{4}, \tag{12}$$

де $u = \chi_c\sqrt{B}\rho$, після чого проводиться розкладення за зворотними ступенями логарифмічно великої величини *B*. Але відповідні компоненти функції розподілу виявляються осцилюючими функціями кута розсіяння, що дещо спотворює перехід між центральною (подібною до гауссової) частиною розподілу та резерфордівською асимптотикою. Загалом, розкладення Мольєра виявляється нерівномірним і факторіально розбіжним.

Тому, по-друге, постає питання – як провести аналіз в проміжній області так, щоб позбавитися від фіктивних осциляцій. Це питання пов'язане і з більш фізичним – як розділити м'які та жорсткі зіткнення на ймовірнісному рівні, і чи не виникає при достатньо великих товщинах мішені кратне і багаторазове жорстке розсіювання, яке, тим не менш, принципово відрізняється від багаторазового м'якого.

Ці проблеми можна вирішити, якщо розповсюдити інтеграл за прицільними параметрами в комплексну площину і застосувати метод найкрутішого спуску. Відповідна процедура простіше проводиться для розподілу по одній з проекцій кута розсіяння

$$f(\theta_x,l) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_y f(\boldsymbol{\theta},l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left[i\xi\theta_x - nl\int d\sigma(\chi)\left[1 - J_0(\xi\chi)\right]\right]. \tag{13}$$

Рівняння, що визначає точку перевалу, має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\chi_a'\kappa}{2\chi_c}\right)\Bigg|_{\kappa=\kappa_0} = i\frac{\theta_x}{\chi_c} + \kappa_0\left(\ln\frac{\kappa_0\chi_a'}{2\chi_c} + \frac{1}{2}\right) = 0, \tag{14}$$

де $\kappa = \xi\chi_c$. Це рівняння є трансцендентним, але при $\ln \chi_c/\chi_a' \gg 1$ його наближене, суто уявне рішення можна виразити як

$$\kappa_0 = i\nu_0, \qquad \nu_0 \approx \frac{\theta_x}{\chi_c \ln\left(\frac{2\chi_c^2}{\chi_a'\theta_x}\ln\frac{2\chi_c^2}{\chi_a'\theta_x}\right)}. \tag{15}$$

Відповідний контур інтегрування зображений на Рис. 3.

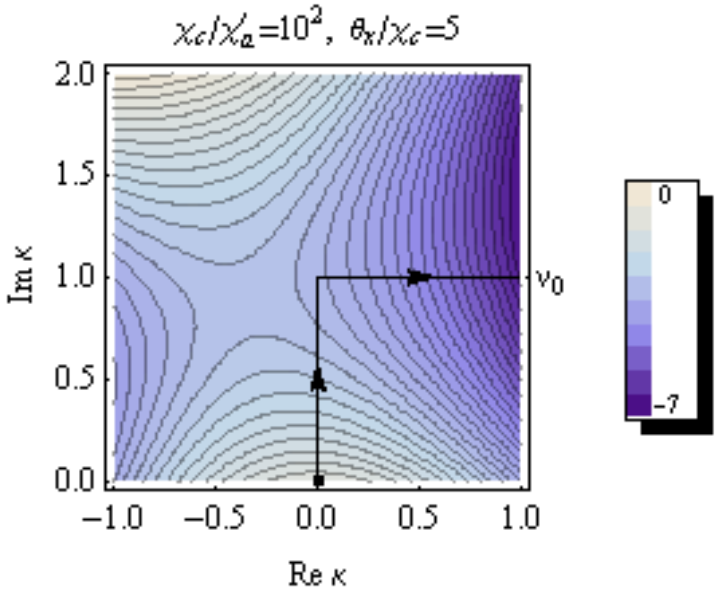


Рис. 3. Градієнтний графік функції $\mathrm{Re}\left(\frac{i\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\chi_a'\kappa}{2\chi_c}\right)$ [дійсної частини показника експоненти в Рівн. (13)] у верхній напівплощині комплексної змінної інтегрування κ для певних значень χ_c та θ_x. Деформований шлях інтегрування зображується чорною ламаною лінією, з ν_0, обчисленим за Рівн. (15).

Ототожнюючи внески для вертикального відрізку шляху інтегрування з напівжорсткою, а від горизонтальної напівпрямої – з м'якою компонентою, ми отримуємо фізичне розділення

$$f(\theta_x, l) = f_h(\theta_x, l) + f_s(\theta_x, l), \tag{16}$$

де

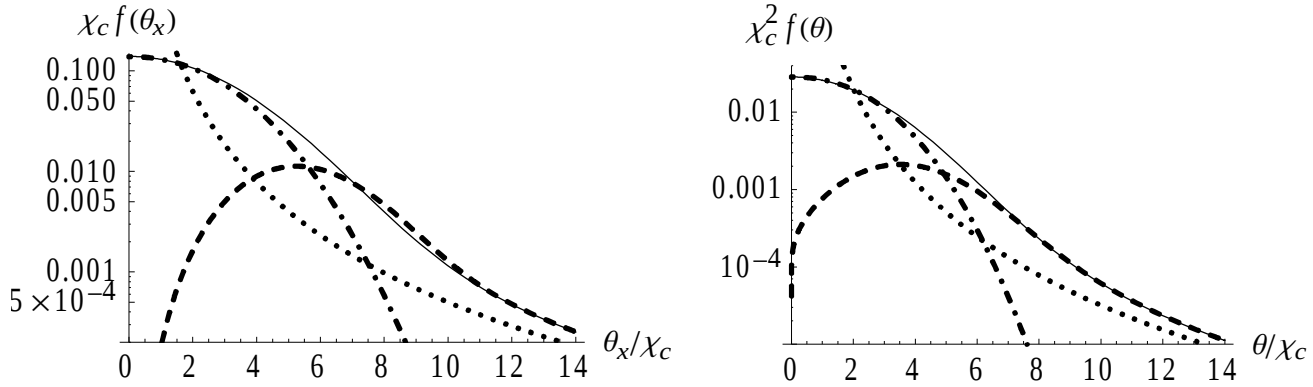
$$f_h(\theta_x, l) = \frac{1}{\pi\chi_c}\int_0^{\nu_0(\theta_x)} d\nu e^{-\frac{\theta_x}{\chi_c}\nu + \frac{\nu^2}{2}\ln\frac{2\chi_c}{\chi_a'\nu}} \sin\frac{\pi\nu^2}{4}, \tag{17}$$

$$f_s(\theta_x, l) = \frac{1}{\pi\chi_c}\mathrm{Re}\int_{i\nu_0(\theta_x)}^{\sim\chi_c/\chi_a'} d\kappa e^{i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\chi_a'\kappa}{2\chi_c}} \approx f(0,l)\exp\left\{-\frac{\theta_x^2}{2\chi_c^2\ln\left[\frac{2\chi_c^2}{C\chi_a'\theta_x}\ln\frac{2\chi_c^2}{\chi_a'\theta_x}\right]}\right\}.$$

Компоненти f_h, f_s є позитивними практично всюди (див. Рис. 4а), але з математичного погляду, більш послідовно трактувати їх не як ймовірності, а як псевдо-ймовірності.

М'який внесок домінує в області $\theta < \chi_c\sqrt{B}$, тоді як одноразове резерфордівське розсіяння – в області $\theta > \chi_c\sqrt{6B}$, де $B \simeq \ln\left(\frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2}\ln\frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2}\right)$ – помірно великий параметр, по зворотній величині якого проводиться розкладення в теорії

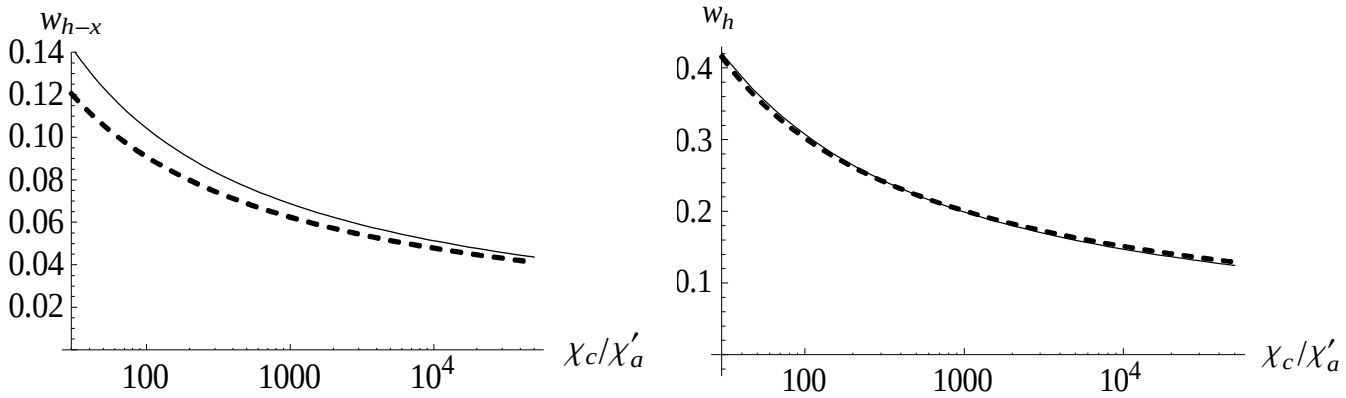
Мольєра. Таким чином, багаторазове напівжорстке розсіяння домінує в значній проміжній області $\chi_c\sqrt{B} < \theta < \chi_c\sqrt{6B}$.



(а) (б)

Рис. 4. Кутові розподіли багаторазово розсіяних частинок в аморфній мішені на товщині, яка характеризується параметром $\chi_c/\chi_a' = 10^2$: а). для проектованого кута θ_x; б). для повного кута θ. Штрихові лінії – внесок жорсткої компоненти, штрих-пунктирні – м'яка компонента. Точкові криві – резерфордівська асимптотика.

Аналогічна, але формально дещо складніша процедура можлива і для функції розподілу за абсолютною величиною кута розсіяння $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$. Відповідні результати зображені на Рис. 4б.



(а) (б)

Рис. 5. а). Загальний відсоток жорстко розсіяних частинок у розподілі по проектованому куту θ_x. Суцільна крива – точний розрахунок; штрихова крива – розрахунок згідно з наближеною формулою (18). б). Загальний відсоток жорстко розсіяних частинок у розподілі по повному куту θ.

Оцінка загального внеску від жорстких зіткнень може бути проведена на основі повної ймовірності, яка отримується інтегруванням формули (17) за всіма θ_x:

$$w_{h-x}(l) = 2\int_0^\infty d\theta_x f_h(\theta_x, l) \underset{\chi_c \gg \chi_a}{\simeq} \frac{1}{\ln\left(\frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2}\ln\frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2}\right) - \psi(2)} \tag{18}$$

[де $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – дигама-функція]. Ця величина становить ~10%, і зменшується зі збільшенням товщини мішені, але повільно – логарифмічно (див. Рис. 5а). Аналогічна величина може бути обчислена і для повної ймовірності жорстких зіткнень в розподілі по полярному куту $f(\theta)$ (Рис. 5б). Ця величина теж зменшується логарифмічно, але виявляється приблизно втричі більшою за w_{h-x}, і становить ~30%, тобто внесок жорстких зіткнень в цей розподіл є завжди вельми значним.

2.3. Просторова еволюція функції розподілу в аморфній речовині.

Для деяких фізичних задач окрім еволюції розподілу по кутах розсіяння виявляється необхідним знати також еволюцію розподілу по просторових координатах. Якщо вважати багаторазове розсіювання гауссівським, відповідне транспортне рівняння з урахуванням конвективних членів у лівій частині має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}_\perp\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\perp}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}=D\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{v}_\perp^2},\qquad v_z=\sqrt{v^2-\boldsymbol{v}_\perp^2}\simeq v-\frac{\boldsymbol{v}_\perp^2}{2v}. \tag{19}$$

Його розв'язок, який задовольняє граничній умові $f(\boldsymbol{v}_\perp,\boldsymbol{r},0)=\delta(\boldsymbol{v}_\perp)\delta(\boldsymbol{r})$, можна виразити у вигляді інтеграла

$$f(\boldsymbol{v}_\perp,\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\frac{A(q_z,t)}{\lambda_3(q_z,t)}\exp\left[iq_z(r-vt)-\frac{t\lambda_2}{2\lambda_3}\left(\frac{\boldsymbol{r}_\perp}{t}-\frac{\boldsymbol{v}_\perp}{2}\right)^2-\left(\lambda_1+\frac{iq_z}{4v}\lambda_2\right)\boldsymbol{v}_\perp^2\right], \tag{20}$$

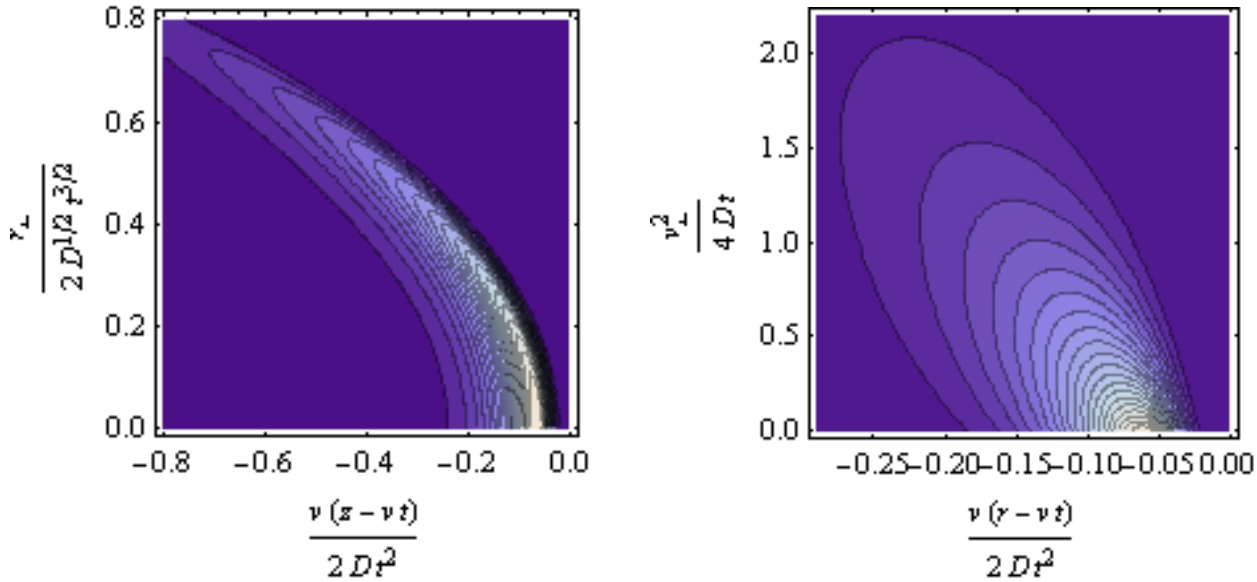
де

$$\lambda_1=\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}\coth 4Dt\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}},\ \lambda_2=\frac{1}{4D\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}\tanh 2Dt\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}},\ \lambda_3=i\frac{v}{q_z}\left(\frac{t}{2}-\lambda_2\right),$$

$$A=\frac{\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}{\sinh 4Dt\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}.$$

Розподіл (20) містить кореляції між усіма змінними $\boldsymbol{v}_\perp$ та $\boldsymbol{r}$. Зокрема, якщо проінтегрувати за $\boldsymbol{v}_\perp$ і цікавитися лише кореляцією між $\boldsymbol{r}_\perp$ і z, виявляється, що 3-вимірний координатний розподіл $f(\boldsymbol{r})$ має чашоподібний вигляд (див. Рис. 6а).

Знання розподілу по флуктуаціях пробігів заряджених частинок в мішенях, тобто по різниці $vt-z$, може бути важливим для розрахунку флуктуацій іонізаційних втрат енергії, тощо. Знання сукупного розподілу по $\boldsymbol{v}_\perp$ та часовій затримці $vt-|\boldsymbol{r}|$ (див. Рис. 6б) потрібне для розрахунку спектрів випромінення. Останній розподіл, який легко одержати з формули (20), застосовується в Розділі 3 для обчислення профілю ефекту Ландау-Померанчука-Мигдала (ЛПМ).



(а) (б)

Рис. 6. а). Просторовий розподіл швидких заряджених частинок в аморфній мішені. б). Розподіл по $|\boldsymbol{r}|-vt$ та $v_\perp^2$.

Третій розділ. Набагато складнішим є опис проходження швидких заряджених частинок крізь кристали. У цьому випадку існує чимало різновидів динамічних та кінетичних режимів. Ми розглянемо декілька з них.

3.1. Розсіяння на окремих атомних ланцюжках та площинах.

Питанням першорядної важливості є розділення внесків неперервного потенціалу та залишкового багаторазового розсіяння на окремих атомах. Найпростішою задачею, в якій можливо провести таке розділення, є розсіяння швидкої зарядженої частинки на статичному атомному ланцюжку, нахиленому під малим кутом до пучка (див. Рис. 7).

Якщо змоделювати потенціал окремого атома як

$$V(\boldsymbol{r}) = Ze^2 \frac{e^{-r/a}}{r}, \tag{21}$$

а всього ланцюжка – як

$$V_s(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(\boldsymbol{r} - n\boldsymbol{d}), \tag{22}$$

то з погляду класичної механіки, імпульс, переданий швидкій частинці, яка пролітає крізь або повз ланцюжок з прицільним параметром $\boldsymbol{b}$ відносно осі, дорівнює

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V_s(\boldsymbol{r}) = \nabla_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_0(\boldsymbol{b} - n\boldsymbol{d}_\perp), \tag{23}$$

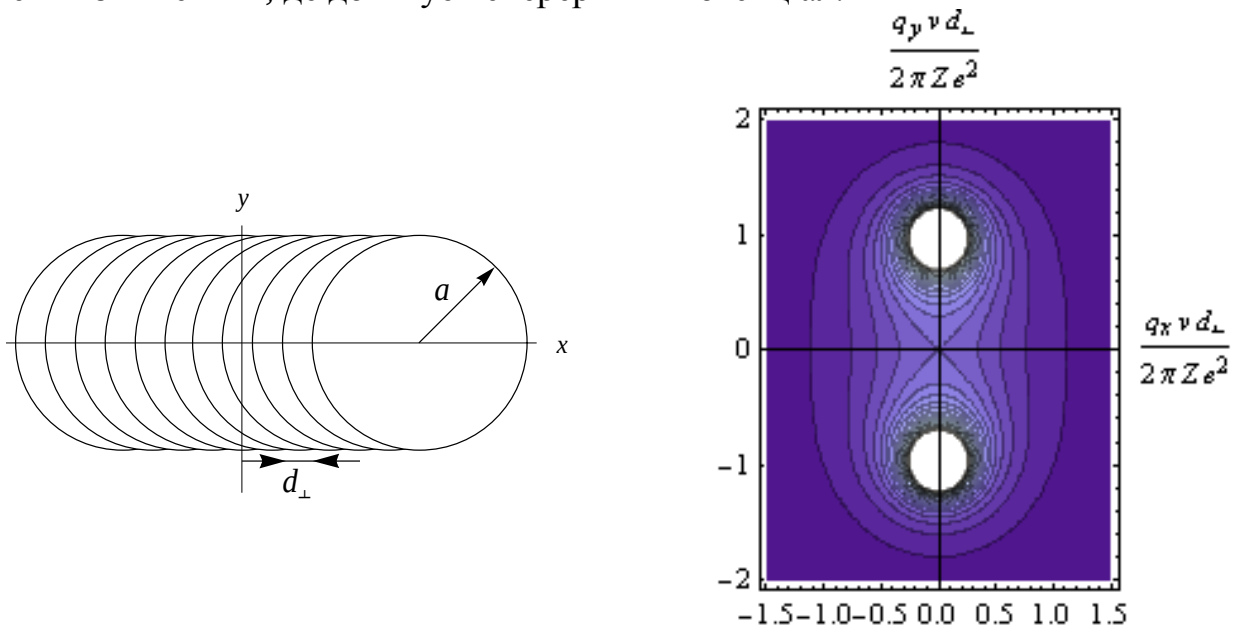
де

$$\chi_0(\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V(\boldsymbol{r}) = -\frac{2Ze^2}{v} K_0(b/a). \tag{24}$$

Обчислення відповідного диференціального перерізу за умови малого кута нахилу ланцюжка відносно пучка ($d_\perp \ll a$) приводить до результату

$$\frac{d\sigma_1}{d^2q}=\left(\frac{2Ze^2}{v}\right)^2\frac{1}{\left[q_x^2+\left(q_y-\frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}\right)^2\right]\left[q_x^2+\left(q_y+\frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}\right)^2\right]}. \qquad (25)$$

У (25) в замкнутому вигляді проведено підсумовування за атомами в ланцюжку. Але диференціальний переріз (25) розбігається при $q_x\to 0$, $q_y\to\pm\frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}$, тобто при далеких зіткненнях, де домінує неперервний потенціал.



(а) (б)

Рис. 7. а). Схематичний вигляд орієнтованого ланцюжка атомів з напрямку налітаючого пучка. б). Класичний диференціальний переріз некогерентного розсіяння, Рівн. (25).

Проблема розбіжностей для диференціального перерізу вирішується, якщо обчислювати його згідно до квантової механіки, у ейкональному наближенні:

$$\frac{d\sigma}{d^2q}=\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\int d^2b e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{qb}}\left[1-e^{\frac{i}{\hbar}\sum\chi_0}\right]\right|^2.$$

Тоді імпульс, переданий уздовж ланцюжка, квантується: $q_x=\frac{2\pi\hbar}{d_\perp}n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, а відповідний переріз вздовж напрямку y дорівнює

$$\frac{d\lambda_{yn}}{dq_y}=\frac{d\lambda_y^{(c)}}{dq_y}\delta_{n0}+\frac{2\pi\hbar}{d_\perp^2}\left(\frac{2Ze^2}{v}\right)^2\frac{1-\delta_{n0}}{\left[\left(\frac{2\pi\hbar}{d_\perp}n\right)^2+\left(q_y-\frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}\right)^2\right]\left[\left(\frac{2\pi\hbar}{d_\perp}n\right)^2+\left(q_y+\frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}\right)^2\right]}.$$

Він складається з двох компонент: диференціального перерізу $d\lambda_y^{(c)}/dq_y$ розсіяння на «неперервному потенціалі» ланцюжка, усередненому вздовж його напрямку x, та

внеску некогерентного розсіяння на окремих атомних сингулярностях. Останній внесок, схожий за структурою на свій класичний аналог (25), має ту суттєву відмінність, що дорівнює нулю при $n=0$, тобто $q_x=0$, завдяки чому сингулярність при $q_y \to \pm\dfrac{2\pi Ze^2}{vd_\perp}$ відсутня, і повний переріз є скінченним.

Подальший аналіз показує, що для розсіяння на одному ланцюжку внесок близьких зіткнень є меншим від внеску неперервного потенціалу як у повному перерізі, так і у середньоквадратичному відхиленні. Щоправда, неперервний потенціал не розсіює частинки вздовж свого напрямку.

Окрім цього, на увагу заслуговує те, що внесок жорсткої компоненти є не зовсім ізотропним. У транспортному рівнянні це проявляється в наближенні, наступному за головним логарифмічним.

Аналогічним чином розглядається також площинна орієнтація. Виявляється, що роль неперервного потенціалу в ній зменшується внаслідок скорочень між внесками від сусідніх ланцюжків. Але, взагалі кажучи, суттєві ефекти ланцюжків можуть ще залишатися. Ці ефекти можна мінімізувати, якщо зробити величинами одного порядку різницю прицільних параметрів між атомами в кожному ланцюжку

$$d_y = \varphi a_1$$

(де φ – кут між пучком та певною кристалографічною віссю у вибраній площині) та різницю прицільних параметрів між ланцюжками

$$d_x = \psi \frac{a_1}{\varphi}$$

(де ψ – кут між пучком та площиною). Звідси витікає умова

$$\varphi \sim \psi^2, \tag{26}$$

яку можна вважати теоретичною умовою площинної орієнтації кристала. Таким чином, щоб отримати найкращу площинну орієнтацію, необхідно спочатку зорієнтувати кристал вздовж однієї з кристалографічних осей, а потім відлаштуватися від неї на пару взаємоузгоджених кутів φ, ψ в двох незалежних напрямках.

3.2. Багаторазове розсіяння на атомних ланцюжках.

При осьовій орієнтації кристала послідовні зіткнення з атомним ланцюжками, навіть у наближенні неперервного потенціалу, мають характер багаторазового розсіювання за азимутом швидкої частинки відносно напрямку ланцюжків, тоді як $|\boldsymbol{v}_\perp|$ зберігається, якщо вважати кожний ланцюжок аксіально симетричним. (Подібний процес дістав назву донат-розсіяння – doughnut scattering.) За великої кількості зіткнень, його можна описати кінетичним рівнянням дифузійного типу

$$\frac{\partial f}{\partial l} + \boldsymbol{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\perp} \equiv \frac{\partial f}{\partial l} + v_\perp \cos\phi \frac{\partial f}{\partial x} + v_\perp \sin\phi \frac{\partial f}{\partial y} = D\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \tag{27}$$

де l – довжина, пройдена ультрарелятивістською частинкою в кристалі, а азимутальний кут ϕ відносно осі z відраховується від площини падіння пучка (Oxz). Відповідною початковою умовою є

$$f(\phi, \boldsymbol{r}_\perp, 0) = \delta(\phi)\delta(\boldsymbol{r}_\perp). \tag{28}$$

Розв'язок рівняння (27) із початковою умовою (28) може бути отриманий за допомогою розкладення по функціях Матьє ce_{2n}, se_{2n}, і веде до результату

$$f(\phi,x,y,0)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} d\alpha e^{iq_\perp(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{Dt}{4}a_{2n}\left(\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)\right]\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\phi-\alpha}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)}{\int_{-\pi}^{\pi}d\phi'\mathrm{ce}_{2n}^2\left(\frac{\phi'}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{Dt}{4}b_{2n}\left(\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)\right]\frac{\mathrm{se}_{2n}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)\mathrm{se}_{2n}\left(\frac{\phi-\alpha}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)}{\int_{-\pi}^{\pi}d\phi'\mathrm{se}_{2n}^2\left(\frac{\phi'}{2},\frac{2iv_\perp q_\perp}{D}\right)}\right\}, \tag{29}$$

де a_{2n}, b_{2n} – характеристичні значення рівняння Матьє.

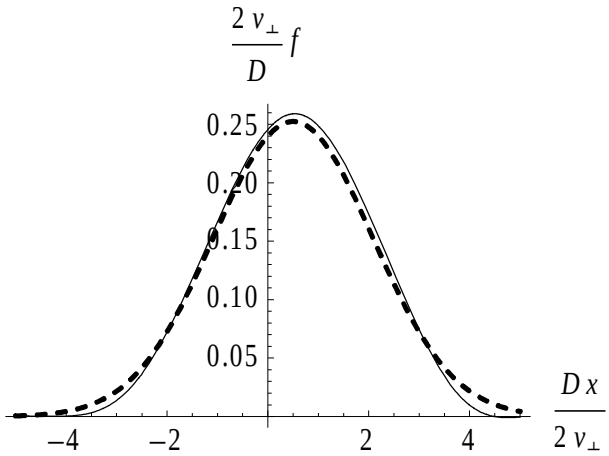
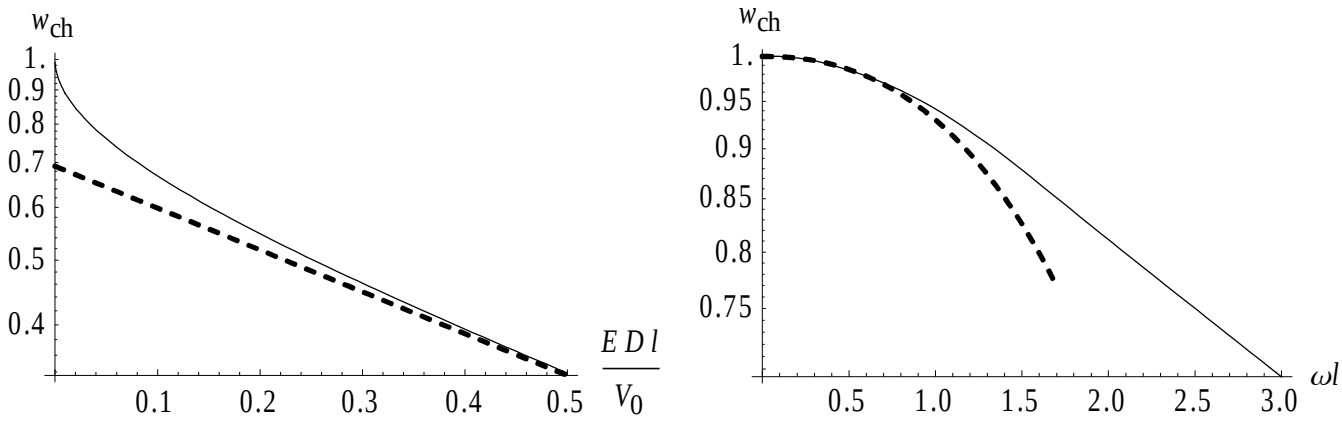


Рис. 8. Просторовий розподіл в площині падіння на кристалічні вісі, при $t=5/D$. Суцільна лінія – розрахунок за формулою (29). Пунктирна лінія зображає гауссову форму, до якої наближається розподіл.

При $Dt\to\infty$ основний внесок до (29) походить від члена $n=0$ в першій сумі та від малих $q_\perp$. Застосовуючи відповідні наближення і проводячи інтегрування, знаходимо, що функція розподілу наближається до гауссівської форми:

$$f(\phi,\boldsymbol{r}_\perp,t)\propto\exp\left[-\frac{D}{2v_\perp^2 t}\left(\boldsymbol{r}_\perp-\frac{\boldsymbol{v}_\perp-v_{\perp 0}}{D}\right)^2\right], \tag{30}$$

щоправда, з «реліктовим» зсувом $-\frac{\boldsymbol{v}_\perp-\boldsymbol{v}_{\perp 0}}{D}$ (див. Рис. 8), який відповідає затримці на встановлення ізотропії за азимутами руху частинки відносно ланцюжків. На відміну від дифузії в аморфній речовині, середньоквадратичне просторове відхилення зростає у часі за законом $\left\langle\left(\boldsymbol{r}_\perp-\langle\boldsymbol{r}_\perp\rangle\right)^2\right\rangle\sim t$, а не $\sim t^3$ як у аморфній речовині, і обернено, а не прямо пропорційно до D, тобто дифузія пригнічується. Це дає змогу застосовувати даний механізм для повороту пучків заряджених високоенергетичних частинок.



(а) (б)

Рис. 9. Зменшення відносної кількості площинно канальованих частинок у часі. а). У наближенні статистичної рівноваги. б). Точний розрахунок у параболічному міжплощинному потенціалі, для $\frac{ED}{2V_0\omega} = 0.1$. Вертикальні осі зображені у логарифмічному масштабі, тому прямолінійні асимптоти графіків на великих l відповідають експоненційним законам.

3.3. Площинне каналювання та деканалювання.

При площинній орієнтації кристала та достатньо малому куті падіння на площини, значний відсоток позитивно заряджених частинок захоплюється у режим площинного каналювання. Поступово частинки залишають канал внаслідок підвищення амплітуди коливань завдяки некогерентному розсіюванню на приблизно рівномірно розподілених валентних електронах, а потім вибивання зосередженими поблизу площин атомними ядрами. Цей процес (деканалювання) може бути описаний за допомогою кінетичного рівняння дифузійного типу

$$\frac{\partial f}{\partial l} + v_\perp \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{E}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v_\perp} = D(x)\frac{\partial^2 f}{\partial v_\perp^2}. \tag{31}$$

За припущень статистичної рівноваги (залежності розподілу лише від поперечної енергії $E_\perp = Ev_\perp^2/2 + V(x)$) та моделі параболічного міжплощинного потенціалу $V(x) = E\omega^2 x^2/2$ [прийнятної для позитивно заряджених частинок у кристалі кремнію в орієнтації (110)], його можна звести до рівняння дифузії по поперечній енергії:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_\perp^2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_\perp^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) \to \frac{E}{2}\Delta_{\sqrt{2E_\perp}\sqrt{2E_\perp}} = E\frac{\partial}{\partial E_\perp}E_\perp\frac{\partial}{\partial E_\perp},$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = D\frac{\partial}{\partial E_\perp}E_\perp\frac{\partial}{\partial E_\perp}f, \qquad D = \text{const} \tag{32}$$

[3*,4*]. Якщо доповнити це рівняння крайовою умовою

$$f(E_\perp, l)\big|_{E_\perp = V_0} = 0, \tag{33}$$

де V_0 – глибина потенціальної ями, загальний розв’язок крайової задачі має вигляд

$$f\left(E_{\perp},t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0\left(j_{0,n}\sqrt{E_{\perp}/V_0}\right)e^{-j_{0,n}^2 Dt/4V_0}, \tag{34}$$

де $j_{0,n}$ – корені функції Бесселя нульового порядку [$J_0\left(j_{0,n}\right)=0$], а коефіцієнти a_n мають визначатися з початкового розподілу.

При великих l будь-який початковий розподіл наближається до найповільнішого члена суми (24):

$$f\left(E_{\perp},l\right)\simeq a_1 J_0\left(j_{0,1}\sqrt{E_{\perp}/V_0}\right)e^{-l/l_d}, \tag{35}$$

де $l_d=\dfrac{4V_0}{j_{0,1}^2 ED}$ – довжина деканалювання в наближенні статистичної рівноваги (див. Рис. 9а).

Однак, потребує дослідження питання точності наближення статистичної рівноваги і виходу за його рамки. Якщо вважати неперервний потенціал в міжплощинному інтервалі параболічним, цього можна досягти за допомогою функції Гріна кінетичного рівняння (31)

$$G\left(x_0,v_{\perp 0},x,v_{\perp},l\right)=\frac{\omega^2}{2\pi D\sqrt{\omega^2 l^2-\sin^2\omega l}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\omega\left[\omega\left(x-x_0\right)\cos\frac{\omega l}{2}-\left(v_{\perp}+v_{\perp 0}\right)\sin\frac{\omega l}{2}\right]^2}{2D\left(\omega l-\sin\omega l\right)}-\frac{\omega\left[\omega\left(x+x_0\right)\sin\frac{\omega l}{2}+\left(v_{\perp}-v_{\perp 0}\right)\cos\frac{\omega l}{2}\right]^2}{2D\left(\omega l+\sin\omega l\right)}\right] \tag{36}$$

у поєднанні з точною крайовою умовою, що частинки, які завдяки дифузії досягають однієї з меж $x=\pm d/2$, залишають міжплощинний інтервал. Якщо на кристал падає пучок, кут розходження якого більший від критичного кута каналювання, то спочатку в режим каналювання потрапляють лише ті частинки, для яких $E_{\perp}<V_0$, і початковою умовою для рівняння (21) є

$$f\left(x,v_{\perp},0\right)\propto\Theta\left(V_0-E_{\perp}\right). \tag{37}$$

Тоді виявляється (див. стадії еволюції у фазовому просторі на Рис. 10), що деканалювання на початковому етапі відбувається за законом

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl}\underset{l\to 0}{\approx}C\frac{D^{3/4}}{d^{3/2}}l^{5/4}, \tag{38}$$

а на пізній стадії закон розпаду стає експоненційним (див. Рис. 9б), тоді як довжина деканалювання набуває суттєвої поправки:

$$l_d=\frac{4V_0}{ED j_{0,1}^2\left(1-2\delta_1\right)}, \tag{39}$$

де

$$2\delta_1=\pi\sqrt{\frac{ED}{V_0\omega}}. \tag{40}$$

Ця поправка пропорційна до кореня параметра $\frac{ED}{V_0\omega}$, малість якого є умовою наближення статистичної рівноваги. Тому навіть при $10^{-3} \le \frac{ED}{V_0\omega} \ll 1$ поправкою $2\delta_1$ нехтувати не можна.

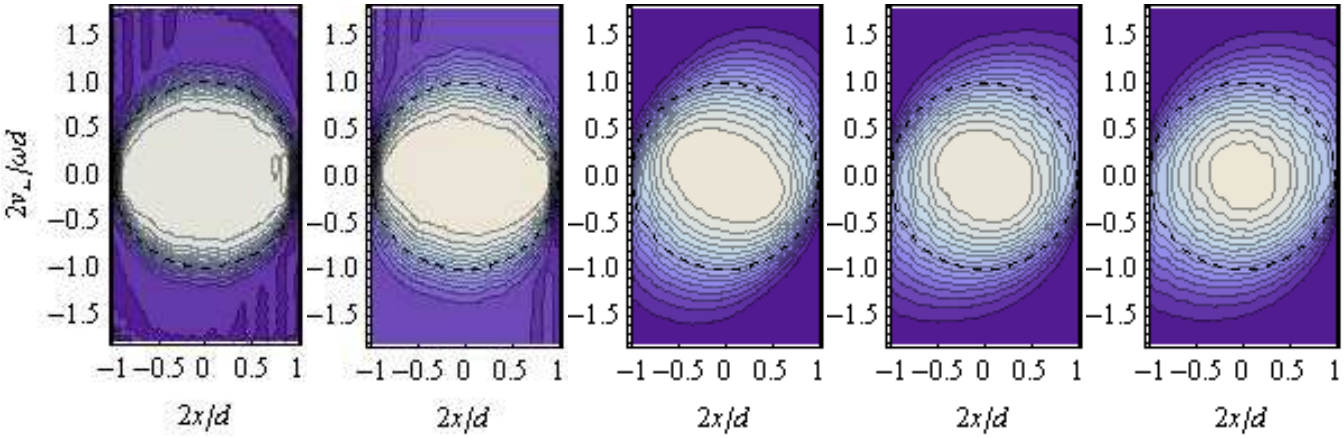


Рис. 10. Стадії еволюції для функції розподілу канальованих частинок у фазовому просторі, для початкової умови (37) та $\frac{ED}{2V_0\omega} = 0.1$. Зліва направо, $\omega l = 0.1$, 0.3, 1, 1.5, 2. В подальшому форма розподілу не змінюється, і відбувається лише експоненційний розпад.

Можливі також і інші початкові умови. Наприклад, якщо початковий пучок є дуже добре колімованим і паралельним напрямку кристалографічних площин, то виникають осциляції деканалювання.

3.4. Проходження крізь зігнуті кристали. Об'ємне відбиття.

Каналювання та споріднені до нього динамічні явища дають змогу керувати частинками високих енергій за допомогою зігнутих кристалів. Окрім деяких змін у процесах каналювання та донат-розсіяння, при цьому виникають і принципово нові ефекти. Ми розглянемо їх за умови площинної орієнтації кристала, враховуючи лише динаміку в неперервному потенціалі.

Якщо радіус згину кристала більше ніж в вчетверо перевищує критичний радіус, $R > 4R_c = 4E/F_{\max}$, виникає явище об'ємного відбиття – коли частинка відхиляється в бік, протилежний згину кристала [5*]. Для слабкого згину кристала, що описується поперечною деформацією $\xi(l)$, залежною від поздовжньої координати l, рівняння руху частинок в його неперервному потенціалі має вигляд

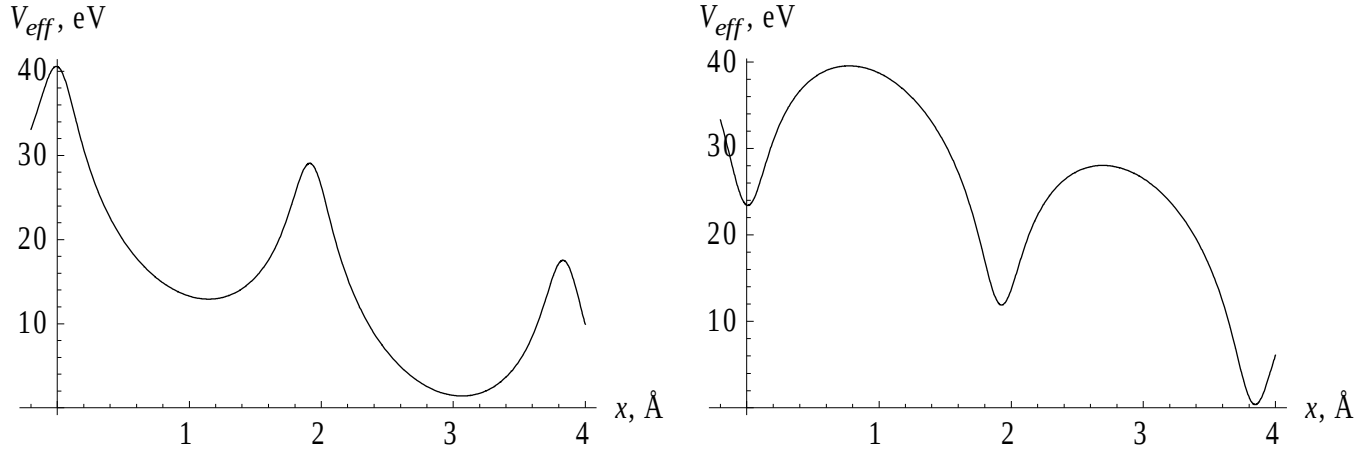
$$E\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V\left[x - \xi(t)\right],$$

або

$$\ddot{r} = -\frac{1}{E} V'(r) - \ddot{\xi}(t). \tag{41}$$

У найпростішому випадку рівномірно зігнутого кристала, коли $\ddot{\xi}(t) = -1/R = \text{const}$, відцентрову силу можна інтерпретувати як викликану статичним відцентровим

потенціалом $-Er/R$. Тоді існує додатковий інтеграл руху $E_\perp = E\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) - E\frac{r}{R}$ – неінерціальна поперечна енергія, і рух стає інтегрованим.



(а) (б)

Рис. 11. Ефективний потенціал зігнутого кристала кремнію в орієнтації (110), для $R/R_c = 10$. а). Для позитивно зарядженої частинки. б). Для негативно зарядженої частинки. Частинка з поперечною енергією $E_\perp$ приходить з боку великих r, відбивається в точці, де $E_\perp = V_{\text{eff}}(r)$, і повертається до великих r.

Використовуючи цю інтегрованість, потрібно обчислити повний кут відхилення частинки

$$\theta_{VR} = \lim_{L\to\infty}\left\{\dot{r}(L) - \dot{r}(0) - L/R\right\}, \tag{42}$$

який не залежить від границь кристала (і тому відбиття називається об'ємним). Було знайдено

$$\theta_{VR}(E_\perp) = -\frac{2}{\sqrt{2Rd}}\,\mathrm{Re}\int_0^d dr\,\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{R}{d}\frac{E_\perp - V(r)}{E} + \frac{r}{d}\right), \tag{43}$$

де $\zeta(\alpha, z)$ – узагальнена функція Рімана з параметром α та аргументом z. З формули (43) можна одержати кутовий розподіл частинок. Найпростіше це зробити за припущення статистичної рівноваги, тобто рівномірного розподілу за $E_\perp$ в межах періоду $\Delta E_\perp = Ed/R$. Тоді

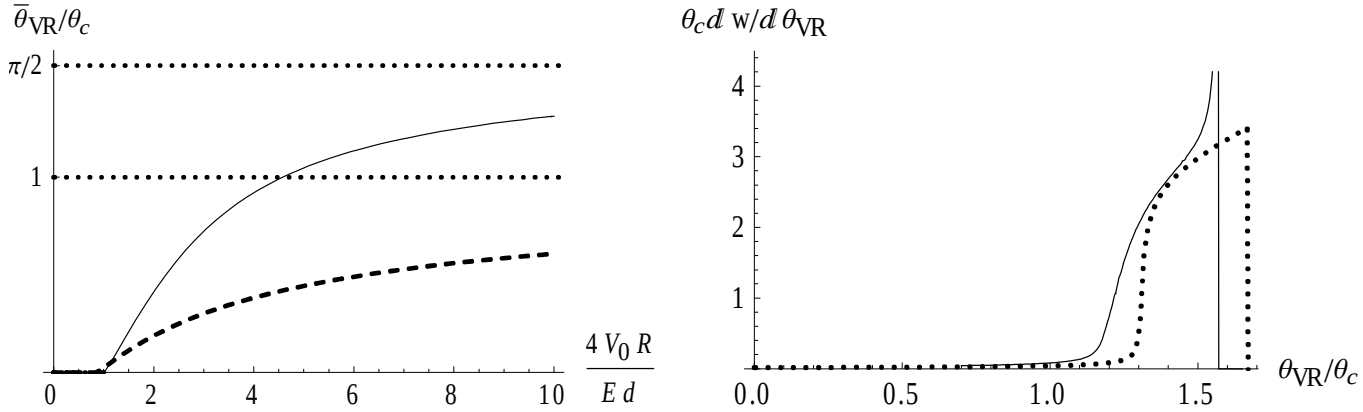
$$\frac{dw}{d\theta_{VR}} = \frac{1}{\Delta E_\perp}\frac{dE_\perp}{d\theta_{VR}}. \tag{44}$$

За умов $R \gg 4R_c$, незалежно від $E_\perp$, кут відхилення наближається до значення

$$\theta_{VR} \underset{R/R_c\to\infty}{\to} \theta_{VR\infty} = \frac{2}{d}\int_0^d dr\sqrt{\frac{2\left[\max V - V(r)\right]}{E}}. \tag{45}$$

Зокрема, для параболічної форми потенціалу, що задовільно описує неперервний потенціал кристала кремнію в орієнтації (110), отримуємо $\theta_{VR} = \frac{\pi}{2}\theta_c$ для позитивно заряджених частинок, та $\theta_{VR} = \theta_c$ для негативно заряджених частинок, де

$\theta_c = \sqrt{2V_0/E}$ – критичний кут каналювання. Таким чином, в даній задачі виникає суттєва залежність від знаку заряду частинки.



(а) (б)

Рис. 12. а). Середній кут об'ємного відбиття в зігнутому монокристалі кремнію в орієнтації (110). Суцільна крива – для позитивно заряджених частинок; штрихова крива – для негативно заряджених частинок. б). Кутові розподіли позитивно заряджених об'ємно розсіяних частинок в кристалі кремнію в орієнтації (110) для $R = 16\,R_c$. Суцільна крива – кімнатна температура. Точкова крива – для потенціалу статичної гратки (без флуктуацій координат атомів).

Якщо ж цікавитися лише середнім кутом відхилення за умов статистичної рівноваги (рівномірного розподілу по $E_\perp$),

$$\bar{\theta}_{VR} = \frac{1}{\Delta E_\perp} \int\limits_{\text{const}}^{\text{const}+\Delta E_\perp} dE_\perp \theta_{VR}\left(E_\perp\right), \tag{46}$$

то з (43) для нього можна отримати просту формулу

$$\bar{\theta}_{VR} = \sqrt{\frac{2}{E}}\frac{2}{d}\mathrm{Re}\int\limits_0^d dr\sqrt{\max_{r'>r} V_{\text{eff}}\left(r'\right) - V_{\text{eff}}\left(r\right)}\,, \tag{47}$$

де $V_{\text{eff}}\left(r\right) = V\left(r\right) - Er/R$ – ефективний потенціал (див. Рис. 11). Останні формули добре узгоджуються з експериментальними даними. Частково вони були закладені в Монте-Карло програму FLUKA [6*], розроблену в ЦЕРН.

В [16] були обчислені як середні кути, так і кутові розподіли для позитивно- та негативно-заряджених частинок для параболічного міжплощинного потенціалу. Для більш реалістичного потенціалу кремнію в орієнтації (110) вони наведені на Рис. 12.

При об'ємному відбитті існує також зв'язок між кількістю близьких зіткнень з ядрами та кутом відбиття [10–12].

Четвертий розділ. У випадку коли крізь речовину проходить електрон або позитрон (надалі будемо говорити про електрон), окрім розглянутого вище пружного розсіяння він може також випускати істотне електромагнітне випромінення. Даний розділ присвячений властивостям процесів випромінювання, здійснюваних ультра-релятивістськими електронами при зіткненнях з атомами, у зовнішньому полі, чи у однорідній речовині. Ми також дослідимо вплив границь макроскопічних мішеней скінченної довжини, який часто потрібно враховувати на практиці.

4.1. Елементарний процес гальмівного випромінювання.

У квантовій електродинаміці матричні елементи процесів випромінювання мають нетривіальну спінорну структуру навіть у найнижчому (другому) порядку теорії збурень. За умов розсіяння на атомах, втім, виникають деякі спрощення. У найпростішому випадку мікроскопічної мішені (що складається, наприклад, з одного атома), диференціальний переріз гальмівного випромінення від ультрарелятивістського електрона

$$d\sigma_{\text{rad}} \approx d\sigma_{\text{scat}}^{\text{diffr}}\left(\boldsymbol{q}_{\perp}\right) dW_{\text{rad}}\left(\boldsymbol{q}_{\perp}, k\right) \tag{48}$$

розпадається на множники [7*,8*], один з яких – диференціальний переріз пружного розсіяння, незалежний від спіну електрона:

$$d\sigma_{\text{scat}}^{\text{diffr}}\left(\boldsymbol{q}_{\perp}\right) = \left|A_{\text{scat}}^{\text{diffr}}\left(\boldsymbol{q}_{\perp}\right)\right|^{2} \frac{d^{2} q_{\perp}}{(2\pi)^{2}} \tag{49}$$

(де $\boldsymbol{q}$ – передача імпульса атома), а інший – диференціальна ймовірність

$$dW_{\text{rad}}\left(\boldsymbol{q}_{\perp}, \boldsymbol{k}\right) = \frac{\pi e^{2}}{EE'} \left|M_{\text{rad}}\right|^{2} d\Gamma_{k} \tag{50}$$

випускання одного фотона в Лоренц-інваріантний елемент фазового об’єму

$$d\Gamma_{k} = \frac{d^{3} k}{(2\pi)^{3} 2\omega}.$$

Тут $\boldsymbol{k}$ та $\omega = |\boldsymbol{k}|$ – імпульс та частота випроміненого фотона, $p' = \left(E', \boldsymbol{p}'\right)$, де $E' = E - \omega$ та $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}$ – відповідно енергія та імпульс кінцевого електрона, і нарешті, M_{rad} є спіновою частиною Лоренц-інваріантного матричного елемента, яка визначається правилами Фейнмана:

$$M_{\text{rad}} = \bar{u}' \left[\frac{e'^{*} \cdot \gamma \left(p \cdot \gamma + q \cdot \gamma + m \right) e \cdot \gamma}{2 p \cdot q + q^{2}} - \frac{e \cdot \gamma \left(p \cdot \gamma - k \cdot \gamma + m \right) e'^{*} \cdot \gamma}{2 p \cdot k} \right] u, \tag{51}$$

де e і e' – 4-вектори поляризації зовнішнього поля та випроміненого фотона відповідно.

У випадку розсіяння на окремих атомах, у головному логарифмічному наближенні можна вважати типові передачі імпульсу набагато меншими від маси електрона:

$$\left|q^{2}\right| \sim r_{a}^{-2} \ll m^{2}. \tag{52}$$

Усі інші кінематичні інваріанти, що характеризують випромінення, мають порядок $p \cdot q \sim p' \cdot q \sim m^{2}$. Нехтування q^{2} порівняно з m^{2} означає застосування наближення еквівалентних фотонів [8*,9*]:

$$M_{\text{rad}} \approx M_{\text{Compt}}.$$

Для практичних застосувань формули (42), коли, як зазвичай буває, спінові стани електронів не вимірюються, квадрат амплітуди M_{rad} має бути усереднений по спінах початкового електрона та просумований по спінах кінцевого електрона. Виявляється, що можна представити результат у вигляді

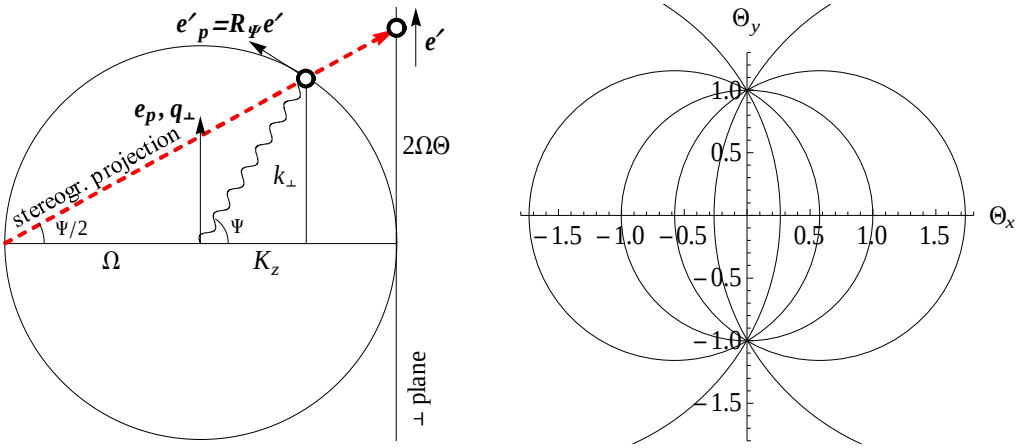
$$\left\langle \left| M_{\text{Compt}} \right|^2 \right\rangle_{\text{el.spin}} = 4\left(e_p \cdot e'_p\right)^2 + e_p^2 e'^2_p \frac{\left(p \cdot q - p \cdot k\right)^2}{p \cdot q p \cdot k}, \tag{53}$$

де

$$e_p = e - q\frac{e \cdot p}{p \cdot q},\ e'_p = e' - k\frac{e' \cdot p}{p \cdot k}. \tag{54}$$

Формула (53) є найпростішим та найсиметричнішим виразом кореляції між e та e'.

Для застосування формули (53) корисно наочно виразити добуток векторів поляризації у системі спокою початкового електрона, а потім провести її трансформацію до лабораторної системи, де електрон є ультра-релятивістським. Таку трансформацію можна уявити як стереографічну проекцію (див. Рис. 13а).



(а) (б)

Рис. 13. а). Геометричне представлення (стереографічна проекція) трансформації кутів випромінення (Ψ) та напрямків поляризації ($\boldsymbol{e}'_p$) з системи спокою початкового електрону до лабораторної системи ($\Theta = \gamma\theta, \boldsymbol{e}'$), де електрон є ультра-релятивістським. б). Результат стереографічної проекції для розподілу напрямків поляризації випромінення в лабораторній системі, за дипольних умов.

Однією з неочевидних і важливих властивостей цієї проекції є те, що вона переводить будь-яке велике коло на сфері у коло на площині, дотичній до сфери у точці, протилежній точці проекції. Оскільки за дипольних умов

$$e_p \approx \frac{p \cdot e}{p' \cdot k} q_\perp, \tag{55}$$

тобто поляризація еквівалентних фотонів є суто поперечною (див. Рис. 13а), з формули (53) очевидно, що поляризація випромінення у системі спокою початкового електрона розподілена по меридіональних колах з полярною віссю уздовж $\boldsymbol{q}_\perp$. Відповідно, у лабораторній системі вони перетворюються на систему кіл, що перетинаються в двох точках, які є відображеннями полюсів на сфері (див. Рис. 13б).

Важливим наслідком розподілу поляризації в лабораторній системі по колах, одне з яких має центр в початку координат, є те, що навіть при усередненні по

переданих імпульсах $\boldsymbol{q}_\perp$, в кутовому розподілі випромінення поляризація може досягати 100% [10*] (див. Рис. 14).

Загалом, в лабораторній системі спектрально-кутова інтенсивність випромінення має вигляд

$$x_\omega \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega d^2\Theta} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\frac{1}{m^2\left(1+\Theta^2\right)}\left\{4\left(1-x_\omega\right)\left(G_{im}q_{m\perp}e_i'\right)^2 + x_\omega^2\boldsymbol{q}_\perp^2\right\}, \tag{56}$$

де $x_\omega = \omega/E$ – доля енергії початкового електрона, забрана фотоном, а стереографічно проектований метричний тензор

$$G_{im}\left(\boldsymbol{\Theta}\right) = \delta_{im} - \frac{2}{1+\Theta^2}\Theta_i\Theta_m = \left(1+\Theta^2\right)\frac{\partial}{\partial\Theta_i}\frac{\Theta_m}{1+\Theta^2} \tag{57}$$

виявляється універсальним тензором, що описує кореляцію між передачами імпульсу та поляризацією випромінення навіть за умов коли теорема факторизації порушується (див. нижче).

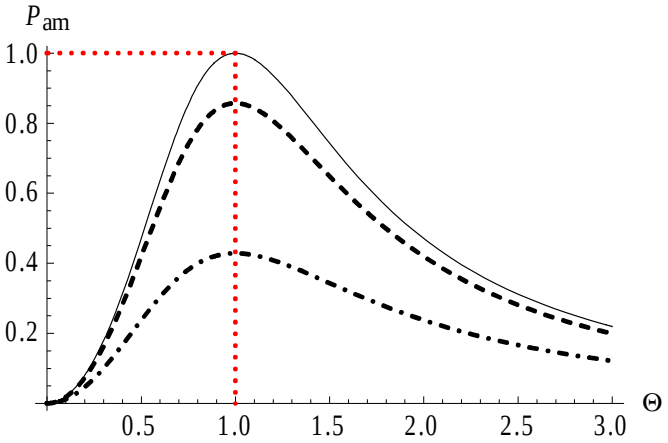


Рис. 14. Кутовий розподіл поляризації гальмівного випромінення в тонкій аморфній мішені. Згори вниз: $x_\omega = 0$, $1/3$, $2/3$.

При виході за межі дипольного наближення, залежність диференціальної ймовірності випромінення від $\boldsymbol{q}_\perp$ перестає бути білінійною:

$$\frac{dW_{\text{rad}}}{d\Gamma_k} \simeq \frac{\pi\alpha}{EE'}\left\{\left(2E\frac{\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{e}'}{p'\cdot k} - 2E'\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}'}{p\cdot k}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{q}^2\omega^2}{p'\cdot k\ p\cdot k}\right\}. \tag{58}$$

При цьому виявляється, що застосовність стереографічної проекції зберігається, оскільки частина, залежна від поляризації, може бути представлена у вигляді добутку

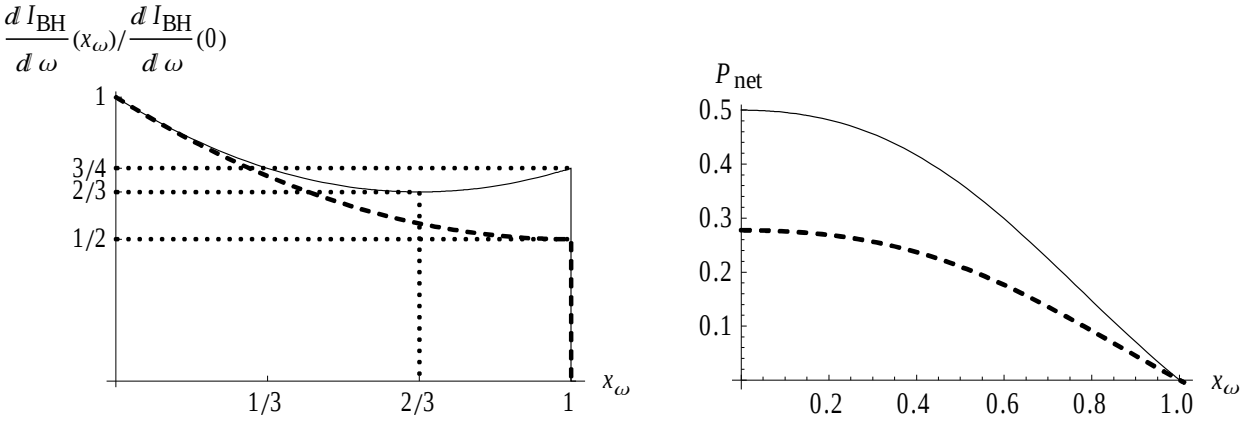
$$E\frac{\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{e}'}{p'\cdot k} - E'\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}'}{p\cdot k} = \tilde{e}\cdot e_p'. \tag{59}$$

Але тепер полярна вісь нахиляється відносно $\boldsymbol{q}_\perp$ і набуває поздовжньої складової: замість e_p, визначеного формулою (55), ми маємо

$$\tilde{e} = e - q\frac{p\cdot e}{p'\cdot k} = \frac{p\cdot e}{p'\cdot k}\left(-\frac{\boldsymbol{q}_\perp^2}{2m},\quad \frac{\boldsymbol{q}_\perp^2}{2m},\quad \boldsymbol{q}_\perp\right) \tag{60}$$

(цей вектор належить до світлового фронту, а не до світлового конуса). Поляризація, як і раніше, розподіляється по колах як на сфері, так і у площині $\boldsymbol{q}_\perp$, але центри цих

кіл зсуваються в напрямку переданого імпульсу. Наслідком є зменшення поляризації після усереднення по напрямках $\boldsymbol{q}_\perp$, як це трапляється при кулонівському розсіянні (див. Рис. 15б).



(а) (б)

Рис. 15. (а) Спектр та (б) середня за кутами поляризація випромінення від ультрарелятивістського електрона при раптовій передачі імпульсу $\boldsymbol{q}_\perp$. Суцільні лінії – $q/m \to 0$. Штрихові лінії: а). $q/m \to \infty$; б). $q/m = 10$.

Якщо проінтегрувати загальну квантову формулу (56) для спектрально-кутового розподілу поляризованого випромінення за кутами (які при високій енергії стають надто малими щоб бути виміряними на практиці), отримуємо спектр випромінення

$$x_\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{dx_\omega} = \frac{e^2}{\pi}\left\{(1-x_\omega)\left[F_1 + \left(2\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e}')^2}{\boldsymbol{q}^2} - 1\right)F_3\right] + x_\omega^2 F_2\right\}, \tag{61}$$

що містить три «радіаційні формфактори» електрона, два з яких є лінійно незалежними:

$$F_1\left(\frac{q}{m}\right) = \frac{2m\left(1+\frac{q^2}{2m^2}\right)}{q\sqrt{1+\frac{q^2}{4m^2}}}\operatorname{arsh}\frac{q}{2m} - 1,\ F_3\left(\frac{q}{m}\right) = 1 - \frac{2m}{q\sqrt{1+\frac{q^2}{4m^2}}}\operatorname{arsh}\frac{q}{2m},\ F_2\left(\frac{q}{m}\right) = \frac{F_1+F_3}{2}. \tag{62}$$

Формула (61) дає можливість прослідкувати вплив недипольності випромінювання (величини відношення q/m) на його спектр (див. Рис. 15а) та поляризацію

$$P_{net}(q/m, x_\omega) = \frac{F_3(q/m)}{F_1(q/m) + \frac{x_\omega^2}{1-x_\omega}F_2(q/m)} \tag{63}$$

(див. Рис. 15б).

Для опису розсіяння на атомах, спектр (61) має бути проінтегрований з вагою $d\sigma/dq_\perp$. При цьому, взагалі кажучи, важливо враховувати сингулярність

кулонівського поля, внаслідок чого форма спектра дещо відрізняється від дипольної в наближенні, наступному за головним логарифмічним:

$$\frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega}=\int d\sigma(q)\omega\frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}=\frac{8Z^2e^6}{3m^2}\left[(1-x_\omega)\left(\ln\frac{1}{\chi_a}+\frac{7}{12}\right)+\frac{3}{4}x_\omega^2\left(\ln\frac{1}{\chi_a}+\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (64)$$

де $\chi_a=q_a/E$ – мольєрівський кут екранування. Цей кут можна пов'язати з радіаційною довжиною, яка зазвичай використовується для характеристики щільності речовини в тому, що стосується протікання в ній жорстких електромагнітних процесів:

$$X_0=\frac{E}{n\sum\limits_{e'}\int_0^E d\omega\frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega}}=\frac{m^2}{4Z(Z+1)e^6\left(\ln\frac{1}{\chi_a}+\frac{5}{9}\right)}. \qquad (65)$$

4.2. Вихід за межі припущення факторизації у квантовому дипольному наближенні

Для виходу за межі припущення факторизації необхідно розглядати матричний елемент оператора електромагнітного струму електрона між точними діраківськими хвильовими функціями початкового та кінцевого електронів у зовнішньому полі. Втім, як відомо [8*], для цього в рівняннях (48), (49) достатньо замінити добуток вектора переданого імпульсу та амплітуди пружного розсіяння на перекриття скалярних частин хвильових функцій φ, через кожну з яких та її похідну виражаються у наближенні Фаррі-Зомерфельда-Мауе всі компоненти відповідних діраківських хвильових функцій:

$$\boldsymbol{q}_\perp A_{\text{scat}}^{\text{diffr}}(\boldsymbol{q}_\perp)\to\boldsymbol{J}_\perp(q_z,\boldsymbol{q}_\perp)=q_z\int d^3re^{iq_zz+i\boldsymbol{q}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\varphi'^*(\boldsymbol{r})\nabla_\perp\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad (66)$$

В термінах $\boldsymbol{J}_\perp$, диференціальний переріз випромінення має вигляд

$$d\sigma_{\text{rad}}=\frac{\alpha}{4\pi^2m^2\left(1+\Theta^2\right)^2}\left\{4(1-x_\omega)\left|\boldsymbol{e}'\mathsf{G}\boldsymbol{J}_\perp\right|^2+x_\omega^2\left|\boldsymbol{J}_\perp\right|^2\right\}\frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}\frac{dx_\omega}{x_\omega}d^2\Theta, \qquad (67)$$

де G – той самий тензор (57), що і в дипольному наближенні.

Подальші спрощення можливі якщо, користуючись простотою залежності перекриття (66) від $\boldsymbol{q}_\perp$, проінтегрувати за всіма імпульсами, переданими мішені:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q_\perp\left|J_{x,y}\right|^2=\int d^2r_\perp\left|F_{x,y}(q_z,\boldsymbol{r}_\perp)\right|^2, \qquad (68)$$

$$\boldsymbol{F}_\perp(q_z,\boldsymbol{r}_\perp)=-\nabla_\perp\int_{-\infty}^{\infty}dze^{iq_zz}V(z,\boldsymbol{r}_\perp). \qquad (69)$$

Таким чином, після інтегрування за $\boldsymbol{q}_\perp$ (що еквівалентно інтегруванню за $\boldsymbol{p}'_\perp$), внески траєкторій з різними прицільними параметрами $\boldsymbol{r}_\perp$ не інтерферують. Тому опис випромінювання стає аналогічним класичній електродинаміці, але з тією відмінністю, що поздовжній переданий імпульс тепер нелінійно залежить від частоти фотона:

$$q_z=\frac{mx_\omega\left(1+\Theta^2\right)}{2\gamma(1-x_\omega)}. \qquad (70)$$

Зрештою, диференціальний переріз випромінення може бути представлений як інтеграл за прицільними параметрами

$$\frac{d\sigma_{\text{rad}}}{d\omega d^2\Theta} = \int d^2 r_\perp \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega d^2\Theta}\left(\boldsymbol{r}_\perp, E, \omega\right) \tag{71}$$

від імовірності випромінення вздовж певної траєкторії

$$\omega\frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega d^2\Theta}\left(\boldsymbol{r}_\perp, E, \omega\right) = \frac{\alpha}{4\pi^2 m^2\left(1+\Theta^2\right)^2}\left\{4\left(1-x_\omega\right)\left|\boldsymbol{e}'\mathsf{G}\boldsymbol{F}_\perp\left(q_z, \boldsymbol{r}_\perp\right)\right|^2 + x_\omega^2\left|\boldsymbol{F}_\perp\left(q_z, \boldsymbol{r}_\perp\right)\right|^2\right\}, \tag{72}$$

яку можна розглядати як фундаментальну величину. Якщо ж проінтегрувати і за (малими) кутами випромінення фотонів, та підсумувати за їхніми поляризаціями, отримаємо

$$\omega\frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}\left(\boldsymbol{r}_\perp\right) = -\frac{\omega\alpha}{\pi\left(1-x_\omega\right)}\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1$$

$$\times\left[\frac{1-\left(1-x_\omega\right)^2}{t_2-t_1}\boldsymbol{\chi}_\perp\left(t_1\right)\cdot\boldsymbol{\chi}_\perp\left(t_2\right)\sin\frac{m x_\omega\left(t_2-t_1\right)}{2\gamma\left(1-x_\omega\right)} + \frac{\omega}{2\gamma^2}\left(\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} dt\boldsymbol{\chi}\left(t\right)\right)^2\cos\frac{m x_\omega\left(t_2-t_1\right)}{2\gamma\left(1-x_\omega\right)}\right], \tag{73}$$

де $\boldsymbol{\chi}\left(t\right) = -E^{-1}\nabla_\perp\int_{-\infty}^{t} dt' V\left(t', \boldsymbol{r}_\perp\right)$ – кут відхилення (так що $\int dt\boldsymbol{\chi}\left(t\right)$ – траєкторія) початкового електрона, без віддачі на випромінення. Можна показати, що після інтегрування по частинах ця формула знаходиться у відповідності з дипольним наближенням формули Байера-Каткова [7*].

4.3. Випромінювання у класичному випадку

Коли випромінювання стає суттєво недипольним внаслідок накопичення кута відхилення на великих довжинах, найцікавіші ефекти зазвичай виникають в м'якій спектральній області $x_\omega \ll 1$. Тоді можна знехтувати віддачею фотона, і задача зводиться до класичної електродинаміки. В останній, як відомо, спектрально-кутовий розподіл випромінення виражається через траєкторію зарядженої частинки формулою

$$\frac{dI}{d\omega d^2 n} = e^2\left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\left[t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}\left(t\right)\right]}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\left(t\right)\right|^2. \tag{74}$$

(На відміну від дипольного наближення, тут траєкторія частинки нетривіальним чином входить і до експоненти.) Для ультра-релятивістських електронів ($\gamma \gg 1$) кути випромінення $\chi \sim \gamma^{-1}$ часто виявляються надто малими для спостереження, і вимірюється лише спектр випромінення, інтегральний за кутами. Для нього з формули (74) можна отримати представлення [4]

$$\frac{dI}{d\omega} = \omega\frac{e^2}{\pi}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 u_\mu\left(t_1\right)u_\nu\left(t_2\right)e^{i\omega\left(t_1-t_2\right)}D_{\mu\nu}\left(\omega, \left|\boldsymbol{r}\left(t_2\right)-\boldsymbol{r}\left(t_1\right)\right|\right), \tag{75}$$

де u_μ, u_ν – 4-швидкості електрона, до яких пропорційні класичні токи, а $D_{\mu\nu}(\omega,r)$ – пропагатор фотона. Наприклад, у фейнманівській калібровці та частотно-координатному представленні фотонний пропагатор має простий вигляд $D_{\mu\nu}(\omega,r)=-\frac{g_{\mu\nu}}{r-i0}e^{i\omega r}$, в якому, однак, потрібно додавати $-i0$ у знаменнику, визначаючи правило обходу полюса. Рівняння (75) виражає співвідношення унітарності між інтегральною за кутами імовірністю випромінення реального фотона та уявною частиною пропагатора віртуального фотона, вставленого між двома точками на електронній траєкторії (див. Рис. 16).

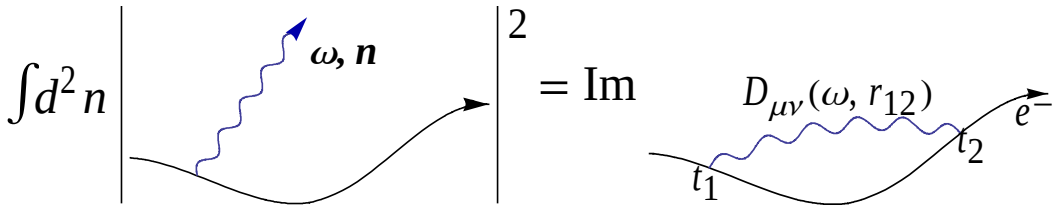


Рис. 16. Діаграмне представлення співвідношення унітарності для процесу випромінення класичною зарядженою частинкою електромагнітних хвиль на певній частоті ω. Суцільна крива зображає траєкторію електрона, хвилясті лінії – розповсюдження випроміненого фотона. На лівій діаграмі фотон є реальним, а на правій – віртуальним, але береться лише уявна частина комплексного внеску.

4.4. Випромінювання у квазі-безкінечному однорідному середовищі

У товстих просторово-однорідних мішенях подвійний інтеграл (75) зводиться до одноразового інтегралу по різниці $t_2-t_1=\tau$:

$$\frac{dI}{d\omega dt}=\omega\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\tau}{\tau}\left(\left\{\gamma^{-2}+\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(0)\right]^2\right\}\sin\omega\left[\tau-\left|\boldsymbol{r}(\tau)-\boldsymbol{r}(0)\right|\right]-\gamma^{-2}\sin\omega(1-v)\tau\right). \tag{76}$$

Загальновідомі приклади включають синхротронне випромінювання та ефект Ландау-Померанчука-Мигдала (ЛПМ) для випромінення в аморфній мішені [7*,10*-12*]. Відповідні спектри мають спільні риси [12*], тому закономірності їх поведінки допускають узагальнення. Якщо припустити більш загальну властивість масштабної інваріантності руху частинки (в однорідному середовищі) – аномальну дифузію:

$$\left[\boldsymbol{v}(\tau)-\boldsymbol{v}(0)\right]^2=c_v\tau^n \tag{77}$$

з довільним показником *n*, то для аргумента синуса в рівнянні (76) це дає:

$$v\tau-\left|\boldsymbol{r}(\tau)-\boldsymbol{r}(0)\right|=\frac{1}{2\tau}\int_0^\tau ds_2\int_0^{s_2}ds_1\left[\boldsymbol{v}(s_2)-\boldsymbol{v}(s_1)\right]^2=c_r\tau^{n+1}, \tag{78}$$

де

$$c_r=\frac{c_v}{2(n+1)(n+2)}. \tag{79}$$

Підставляючи ці величини до інтегралу (76), можна вивести асимптотичні розкладення для спектра у граничних випадках.

А саме, в «інфрачервоному» ліміті $\omega\to 0$,

$$\frac{dI}{d\omega dt}\underset{\omega\to 0}{\simeq}\frac{e^2\sin\frac{\pi n}{2(n+1)}}{2\pi(n+1)}\Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{c_v\omega^{\frac{1}{n+1}}}{c_r^{\frac{n}{n+1}}}-\frac{e^2\omega}{2\gamma^2}\frac{n}{n+1}+O\left(\omega^2\right), \tag{80}$$

тобто спектр прямує до нуля за ступінним законом, показник якого залежить від n. При цьому головний член не залежить від Лоренц-фактора γ, тобто є «радіофізичним» за своєю природою, а член, наступний за головним – навпаки, залежить від γ, але не залежить від щільності речовини, що визначається параметрами c_v, c_r.

В протилежному граничному випадку $\omega\to\infty$,

$$\frac{dI}{d\omega dt}\underset{\omega\to\infty}{\simeq}\frac{e^2\gamma^2}{\pi}\Gamma(n)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)(c_v-4nc_r)\left(\frac{2\gamma^2}{\omega}\right)^{n-1}+\frac{e^2}{2\gamma}\sqrt{\frac{\omega n}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\tau_0}e^{-\frac{\omega\tau_0}{2\gamma^2}\frac{n}{n+1}}\right), \tag{81}$$

де $\tau_0=e^{i\pi(1/n-1/2)}\left[2(n+1)\gamma^2c_r\right]^{-1/n}$. Ця формула вказує, що взагалі кажучи, в «ультрафіолетовому» ліміті спектр теж має ступінну поведінку (яка відповідає дипольному наближенню), хоча при $n=1$ (ЛПМ ефект) вона зводиться до константи (плато Бете-Гайтлера), а при $n=2$ (синхротронне випромінювання) коефіцієнт при головному доданку зникає, і залишається доданок, наступний за головним, який убуває з частотою фотона експоненційно. Фізично ж можливі й випадки дробної аномальної дифузії, зокрема, при розсіянні зарядженої частинки в орієнтованому кристалі.

4.5. Випромінювання в обмежених мішенях. Крайові ефекти

4.5.1. Поправка O(ω) до інфрачервоної факторизаційної теореми

Окрім об’ємного внеску до випромінення, який описується формулою (66), для скінченних мішеней часто необхідно враховувати також крайові ефекти. Вони завжди присутні при достатньо малих ω, оскільки при $\omega\to 0$, як відомо [13*,8*,12*], спектр не є пропорційним товщині мішені, а визначається кінцевим кутом відхилення електрона: $\frac{dI}{d\omega}\underset{\omega\to 0}{\to}\frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega}\left(\gamma\left|\chi_f-\chi_i\right|\right)$, де «класичний спектр Бете-Гайтлера»

$$\frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega}\left(\gamma\left|\chi_f-\chi_i\right|\right)=\frac{2e^2}{\pi}F_1\left(\gamma\left|\chi_f-\chi_i\right|\right)$$

пропорційний формфактору F_1, визначеному рівнянням (62). В наступному наближенні по малій частоті ω можна отримати динамічну поправку:

$$\frac{dI}{d\omega}\underset{\omega\to 0}{\simeq}\frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega}(\gamma\chi)+C_1\omega+O\left(\omega^2\right), \tag{82}$$

де

$$C_1=-\frac{e^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[\chi(t)-\chi_i\right]\cdot\left[\chi_f-\chi(t)\right]. \tag{83}$$

Ця поправка представляє собою затримку в часі порівняно з траєкторією вигляду кута зі сторонами, що співпадають з початковою та кінцевою асимптотами

траєкторії частинки. Таким чином, нахил спектра випромінення в початку координат пов'язаний із затримкою електрона в мішені через викривлення його траєкторії. Залежно від характера динаміки електрона, ця величина може бути як додатньою, так і від'ємною, або дорівнювати нулю.

4.5.2. Слабко недипольне випромінювання. Квадрупольний формфактор.

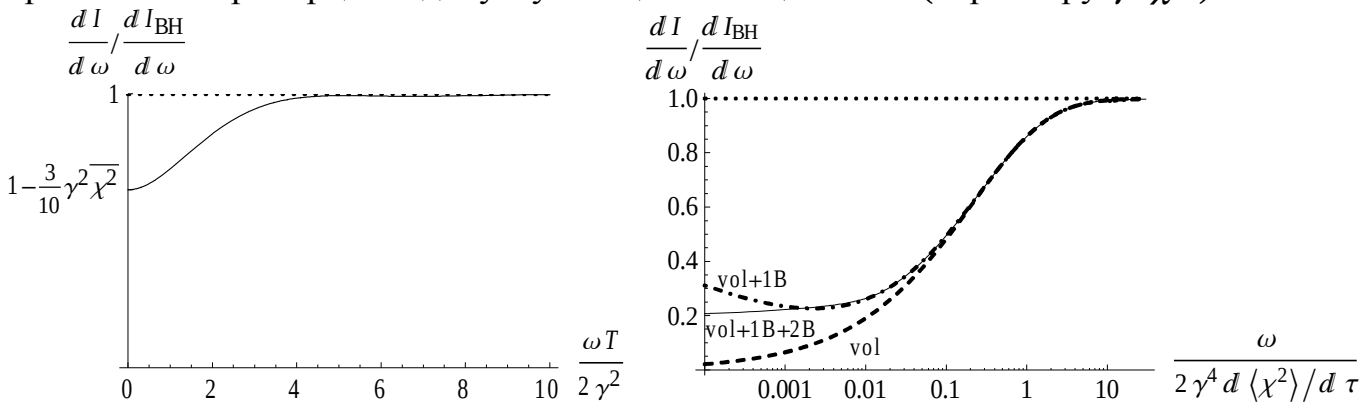
За умови $\gamma^2\overline{\chi^2} \ll 1$, об'ємний внесок відповідає дипольному наближенню, тоді як крайові ефекти можна послідовно виділяти як поправки. Прикладом є гальмівне випромінювання у аморфній пластині, для спектра якого у квадрупольному (наступному за дипольним) наближенні можна отримати формулу

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi}\gamma^2\overline{\chi^2}\left[1 - \frac{3\gamma^2\overline{\chi^2}}{10}F_q\left(\frac{\omega T}{2\gamma^2}\right) + O\left(\gamma^4\overline{\chi^4}\right)\right]. \tag{84}$$

Тут квадрупольний формфактор

$$F_q(\Omega) = \frac{80}{\Omega^2}\int_0^\infty \frac{du\,u}{(1+u)^8}\sin^2\left[\frac{\Omega}{2}(1+u)\right] \tag{85}$$

є скрізь позитивною, але не цілком монотонною функцією. Поведінка спектра (84) зображена на Рис. 17а. На відміну від ефекту ЛПМ в товстій мішені (Рис. 17б), спектр (84) залежить від двох параметрів: товщини мішені T та її щільності. Масштаб по ω не залежить від щільності речовини, а лише від товщини. Глибина ж пригнічення пропорційна добутку товщини на щільність (параметру $\gamma^2\overline{\chi^2}$).



(а) (б)

Рис. 17. а). Спектр випромінення (73), (74) від ультрарелятивістського електрона в скінченній аморфній мішені за умови малого середньоквадратичного відхилення ($\overline{\chi^2} \ll \gamma^{-2}$). б). Те саме за умови $\overline{\chi^2} \gg \gamma^{-2}$. Штрихова крива – суто об'ємний внесок (функція Мигдала). Штрих-пунктирна крива – об'ємний внесок та внески окремих кордонів. Суцільна крива – сума всіх внесків, включно з інтерференцією між кордонами.

4.5.3. Сильно недипольне випромінювання. Струмені випромінення та розділення спектральних масштабів.

За протилежної умови $\gamma^2\overline{\chi^2} \gg 1$ (сильної недипольності випромінювання), якщо ставити на меті виділити крайові ефекти в усьому спектрі, це можна зробити в загальному вигляді:

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{dI_{\text{vol}}}{d\omega}+\frac{dI_{\text{b}}}{d\omega}, \tag{86}$$

де $\frac{dI_{\text{vol}}}{d\omega}\propto T$. Крайові ефекти в свою чергу теж поділяються на дві під-категорії:

$$\frac{dI_{\text{b}}}{d\omega}\underset{\gamma\gg\chi^{-1}}{\simeq}2\frac{dI_{1\text{b}}}{d\omega}\left(\frac{\tau\left(\chi\geq\gamma^{-1}\right)}{l_0(\omega)}\right)+\frac{dI_{\text{bb}}}{d\omega}\left(\frac{T}{l_\chi(\omega)}\right), \tag{87}$$

де внески $\frac{dI_{1\text{b}}}{d\omega}$ від окремих границь формуються на довжині $\sim l_0(\omega)=\frac{2\gamma^2}{\omega}$, а ефекти інтерференції між границями $\frac{dI_{\text{bb}}}{d\omega}$ – на довжині $\sim l_\chi(\omega)=\frac{2}{\omega\chi^2}$. Більш точно, інтерференційна компонента має структуру

$$\frac{dI_{\text{bb}}}{d\omega}=\frac{2e^2}{\pi}\left[2A_1\left(\frac{\omega T\chi^2}{2}\right)F_\perp\left(\frac{\omega T\chi}{\gamma}\right)+A_2\left(\frac{\omega T\chi^2}{2}\right)\right], \tag{88}$$

де A_1 та A_2 – «антенні» формфактори, які залежать від форми траєкторії частинки (але не від її Лоренц-фактора), а струменевий формфактор $F_\perp(\xi)=\xi K_1(\xi)$, де K_1 – функція Макдональда, виникає як

$$E_\perp(b,z,t)=\frac{Ze\gamma b}{\left[b^2+\gamma^2(z-vt)^2\right]^{3/2}},\qquad \int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\omega t}E_\perp(b,z,t)=\frac{2Ze}{vb}F_\perp\left(\frac{\omega b}{v\gamma}\right),$$

і має універсальну форму для всіх процесів та залежить від поперечної довжини (ширини) формування.

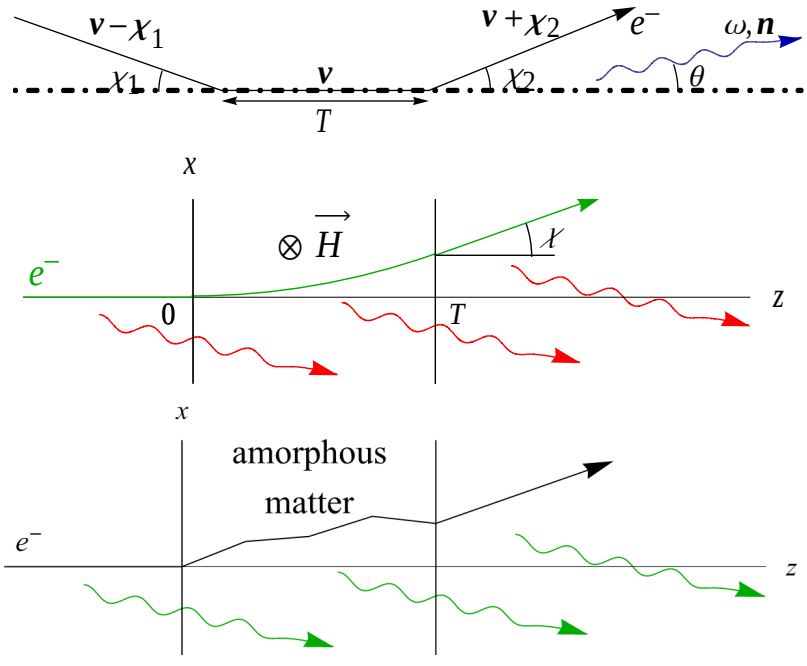
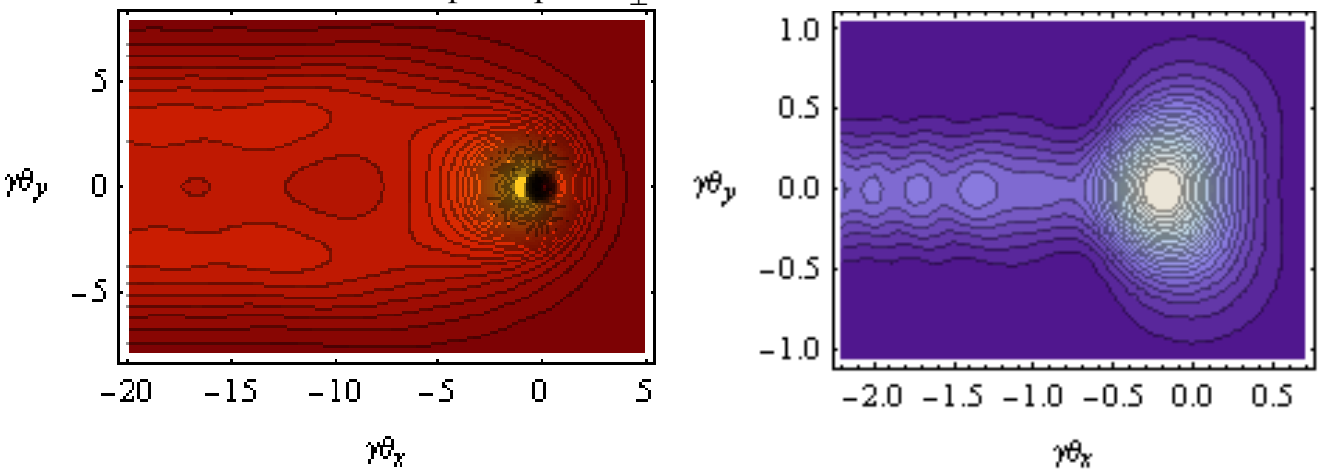


Рис. 18. Типові випадки недипольного випромінювання в мішенях з границями. а). Гальмівне випромінення при дворазовому розсіянні. б). Випромінювання в обмеженому магніті. в). Гальмівне випромінення в обмеженій аморфній мішені.

Властивостями компонент такого розкладення є те, що

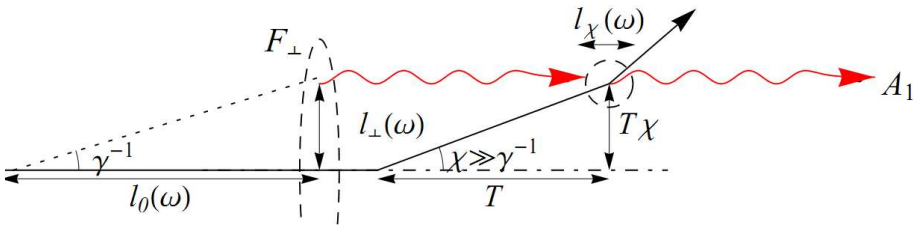
$$\frac{dI_{1b}}{d\omega}, \frac{dI_{bb}}{d\omega} \underset{\omega\to\infty}{\sim} \pm \ln\frac{1}{\omega}, \tag{89}$$

але в сумі (86) логарифмічні розбіжності скорочуються (див. Рис. 17б). При $\omega T\chi^2 \gg 1$ внески A_1 та A_2 осцилюють («радіо»-резонанси), але ці осциляції зрештою гасяться повільним фактором $F_\perp$.

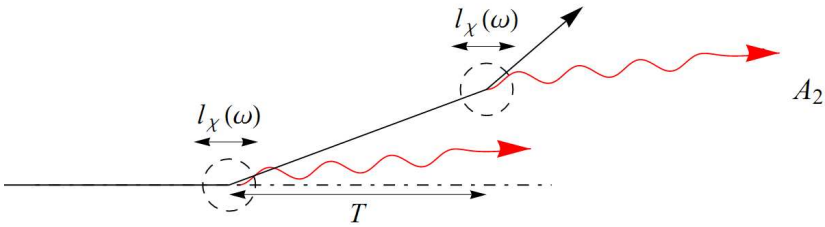


(а) (б)

Рис. 19. Кутовий розподіл випромінення електрона, що влітає у напівбезкінечний магніт. а). $\frac{\omega R}{2\gamma^3} = 0.005$, де R – радіус кривизни траєкторії в магніті. Яскрава пляма є внеском від початкової електронної лінії, інтеграл за кутами від якої дає позитивний логарифмічний внесок (79) до спектра. б). $\frac{\omega R}{2\gamma^3} = 5$. Яскрава пляма є внеском від стрибка прискорення електрона на вході у магніт. Інтеграл за кутами від неї дає асимптотику $\frac{dI_{1b}}{d\omega} \underset{\omega\to\infty}{\simeq} \frac{14e^2\gamma^6}{15\pi R^2\omega^2}$.



(а)



(б)

Рис. 20. а). Графічна ілюстрація формування внеску струменево-міжструменевої інтерференції A_1 та її модулюючого формфактора $F_\perp$. Умовою інтерференції між колінеарними та неколінеарними фотонами, окрім співпадіння напрямків випускання, є рівність прицільних параметрів: $l_\perp(\omega) = \gamma/\omega$ та $b_i \approx T\chi$. Існує також перехресна діаграма, в якій міжструменеві фотони випромінюються з першої вершини розсіяння, а струменеві – з кінцевої електронної лінії. б). Те саме для внеску міжструменево-міжструменевої інтерференції A_2.

В дисертації розглянуто два конкретних приклади такого розділення: випромінювання при дворазовому розсіянні на значні кути (Рис. 18а) та випромінювання в однорідному магнітному полі скінченної довжини, яке відхиляє частинку на значний кут (Рис. 18б). Отримано явні вирази для формфакторів A_1 та A_2. На основі аналізу кутових розподілів (Рис. 19), а також розподілів по прицільних параметрах (Рис. 20) пояснено фізичне походження структури (86–88). Проте, формально її легше вивести з представлення (76), інтегрального за кутами.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі на єдиних засадах розглянуті ключові питання теорії проходження швидких заряджених частинок крізь речовину, розв’язано нові задачі та розвинуто нові підходи. Основні результати, вперше здобуті автором, наступні:

1. Для характеристики розсіяння швидкої зарядженої частинки на атомі запроваджено два залежних від потенціалу атома параметри, що визначають жорстке розсіяння (перед-резерфордівську асимптотику), та один параметр, що характеризує багаторазове розсіювання в атомній речовині з таких атомів. Доведено, що через останню величину як в пертурбативному, так і в квазікласичному режимах виражається імпульс екранування в теорії багаторазового розсіювання Мольєра. Для класичного розсіяння на атомі доведено існування скейлінгу, загальнішого за скейлінг Ліндхарда-Нільсен-Шарфа. Для експоненційно екранованого потенціалу розсіяння обчислено диференціальний переріз високоенергетичного розсіяння в 3-му борнівському наближенні.
2. В теорії багаторазового кулонівського розсіювання при проходженні швидкої зарядженої частинки крізь аморфну речовину за допомогою деформування контуру інтегрування в комплексну площину отримано розділення функції розподілу частинок за кутами розсіяння на м’яку та напівжорстку компоненти. Остання з них описує кратне і багаторазове резерфордівське розсіяння та є важливою в проміжній області кутів. Встановлено, що повна кількість напівжорстко розсіяних частинок складає 10-30%, тобто не є малою. Досліджено область багаторазових жорстких розсіянь для функції розподілу, проміжну між областю гауссівського наближення та резерфордівською асимптотикою.
3. Обчислено просторово-кутові розподіли частинок в однорідній аморфній речовині, включно з розподілом по поздовжній координаті. Знайдено сумісний розподіл по куту відхилення та абсолютній величині радіус-вектора частинки, потрібний для розрахунку спектра супровідного випромінення. Показано, що з цього розподілу можна легко отримати спектр Ландау-Померанчука-Мигдала.
4. Точно розв’язана задача про розсіяння швидкої частинки при падінні під малим кутом на ланцюжок статичних атомів (екранованих кулонівських полів). Проведено строге розділення внесків усередненого потенціалу ланцюжка та некогерентного розсіяння. Доведено, що для некогерентного внеску роль екранування окремих кулонівських полів відіграє проекція відстані між ядрами на площину прицільних параметрів. Показано, що некогерентне розсіяння є анізотропним в наближенні, наступному за головним логарифмічним.

5. Розглянуто розсіяння швидкої зарядженої частинки на атомній площині, яка складається з періодично розташованих атомних ланцюжків (“string of strings”). Теоретично сформульована умова оптимальної площинної орієнтації кристала, при якій прояви ланцюжків по різних напрямках мінімізуються. Оцінено залишкові ефекти від окремих струн, що присутні навіть у оптимальній площинній орієнтації, та їх вплив на некогерентне багаторазове розсіювання.
6. Розвинуто опис багаторазового розсіювання на випадковій сукупності паралельних ланцюжків (doughnut scattering). Для кінетичного рівняння дифузійного типу з урахуванням просторової конвекції отримано розв’язок задачі Коші у вигляді розкладення за функціями Матьє. Знайдено асимптотику просторового розподілу на пізній стадії еволюції, яка виявляється гауссівською зі зсувом, але показник ступінного закону розширення є меншим, аніж у аморфній речовині. При цьому швидкість дифузії виявляється тим меншою, чим більшим є коефіцієнт дифузії. Таким чином, доведено пригнічення просторової дифузії для даного процесу.
7. Запропоновано наближений підхід в теорії площинного деканалювання, який дозволяє вийти за рамки наближення статистичної рівноваги. Показано, що при цьому довжина деканалювання набуває суттєвих добавок, а початкова стадія деканалювання якісно змінюється.
8. Побудовано аналітичну теорію об’ємного відбиття для позитивно- та негативно-заряджених частинок в зігнутому кристалі. Для кристала з міжплощинним потенціалом загального вигляду знайдено середній кут відхилення, а також кутові розподіли відбитого пучка. Обчислено відмінність кількості ядерних взаємодій при об’ємному відбитті від її значення в аморфній мішені або в «аморфно орієнтованому» прямому кристалі тієї ж товщини.
9. В теорії випромінювання при розсіянні релятивістського електрона на мікроскопічній мішені досліджено ефекти недипольності та просторової протяжності, обчислено ступінь поляризації випромінення. Запропоновано використання стереографічної проекції для опису поведінки кутових розподілів поляризації.
10. Отримано формулу, яка пов’язує мольєрівський кут та радіаційну довжину з урахуванням кулонівського характеру розсіювання електрона на атомах у наближенні, наступному за головним логарифмічним.
11. Запропоновано представлення для спектра електро-магнітного випромінювання, що має форму співвідношення унітарності.
12. Для спектра випромінення в однорідному квазі-безкінечному середовищі отримано загальні асимптотичні розкладення при великих та при малих частотах фотонів. Показано, що у випадку аномальної дифузії поведінка спектра на високих частотах, взагалі кажучи, є ступінною.
13. Отримано лінійну по частоті поправку до інфрачервоної факторизаційної теореми для спектра випромінення від ультра-релятивістського електрона, який розсіюється у довільному зовнішньому полі. Ця поправка виявляється залежною від траєкторії електрона всередині мішені.
14. Розв’язано задачу про пригнічення гальмівного випромінення в аморфній мішені, коли середньоквадратичний кут відхилення є невеликим порівняно з

оберненим Лоренц-фактором (тобто за умови, протилежної ефекту Ландау-Померанчука-Мигдала). Здобуто формулу, що описує пригнічення спектра і містить квадрупольний формфактор.

15. Побудовано загальну теорію крайових ефектів для спектрів випромінювання ультра-релятивістських електронів в мішенях скінченної товщини. Сформульовано принцип розкладення за масштабами для довільного спектра випромінення в умовах сильної недипольності. Розглянуто проведення такого розділення для двох конкретних випадків: випромінення при дворазовому розсіянні та випромінення при проходженні крізь скінченний однорідний магніт. Для пояснення його структури введено поняття інтерференції струменів випромінення та міжструменевої компоненти. Передбачено явище осциляцій у м'якій частині спектра.

СПИСОК РОБІТ, ОПУБЛІКОВАНИХ ЗДОБУВАЧЕМ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bondarenco M.V., *Tips for deciphering and quick calculation of radiation spectra*, JINST **13** (2018) C04012.
2. Bondarenco M.V., *Separation of edge effects in highly non-dipole radiation spectra*, Mod. Phys. Lett. A **33** (2018) 1850035.
3. Bondarenco M.V., *Next-to-leading order correction to the factorization limit of the radiation spectrum* Phys. Rev. D **96** (2017) 076009.
4. Bondarenco M.V. and Shul'ga N.F., *Interference in spectrum of radiation from doubly scattered charged particle*, Phys. Rev. D **95** (2017) 056003.
5. Bondarenco M.V., *Improved separation of soft and hard components in multiple Coulomb scattering*, Phys. Rev. D **93** (2016) 036008; **94** (2016) 119901(E).
6. Bondarenco M.V., *Limiting energy loss distributions for multiphoton channeling radiation*, Nucl. Instr. Meth. B **355** (2015) 30–34.
7. Bondarenco M.V. and Shul'ga N.F., *Constructive interference in the spectrum of bremsstrahlung on two amorphous targets*, Phys. Rev. D **90** (2014) 116007.
8. Bondarenco M.V., *Multiphoton effects in coherent radiation spectra*, Phys. Rev. D **90** (2014) 013019.
9. Bondarenco M.V., *Basics of multiphoton effects in coherent radiation spectra*, J. Phys.: Conf. Ser. **517** (2014) 012027.
10. Bondarenco M.V., *Nuclear interactions at volume reflection: Perturbative treatmen*t, Phys. Rev. ST-AB **15** (2012) 032802.
11. Bondarenco M.V., *A relation between the nuclear scattering probability in a bent crystal and the mean volume reflection angle*, Phys. Lett. A **376** (2012) 875–878.
12. Bondarenco M.V., *Nuclear interactions and multiple Coulomb scattering at volume reflection*, Probl. At. Sci. & Tech., N1(61), 2012, Series: Nucl. Phys. Invest. (57) p. 59–63.
13. Bondarenco M.V., *Factorization and QCD enhancements in the Compton mechanism of W and Z boson hadroproduction*, Probl. At. Sci. & Techn., N1(61), 2012, Series: Nucl. Phys. Invest. (57) p. 105–110.
14. Bondarenco M.V., *Comments on theory of volume reflection and radiation in bent crystals*, Il Nuovo Cim. C **342** (2011) 381–388.
15. Bondarenco M.V., *Coherent bremsstrahlung in a bent crystal vs. experiments on volume reflection*, J. Phys.: Conf. Ser. **236** (2010) 012026.

16. Bondarenco M.V., *Model solution for volume reflection of relativistic particles in a bent crystal*, Phys. Rev. A **82** (2010) 042902.
17. Bondarenco M.V., *Coherent bremsstrahlung in a bent crystal*, Phys. Rev. A **81** (2010) 052903.
18. Bondarenco M.V., *Polarization of bremsstrahlung at electron scattering in anisotropic medium*, Phys. Rev. A **82** (2010) 042723.
19. Bondarenco M.V., *Computation and analysis of the polarization degree for bremsstrahlung at peripheral scattering*, Probl. At. Sci. & Techn., N3(61), 2009, Series: Nucl. Phys. Invest. (51) p. 89–94.
20. Bondarenco M.V., *Формирование тени в дифракционном рассеянии адронов по механизму глюонного излучения при фрагментации*, Вістн. ХНУ, сер. фіз. «Ядра, частинки, поля», т. 794, вип. 1 /37/ (2008) с. 125–128.
21. Bondarenco M.V., *Extraction of spin observables in baryon-baryon scattering, sensitive to gluon- and quark-exchange effects*, Probl. At. Sci. & Techn., N5(48), 2007, p. 28–35.
22. Bondarenco M.V., *Covariant amplitude decomposition in relativistic fermion scattering problems*, Probl. At. Sci. & Techn., N3(1), 2007, p. 104–110.
23. Bondarenco M.V., *Volume reflection dependence on the interplanar potential*. Abstracts of the 8th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Ischia, Italy, September 23–28, 2018. P. 108.
24. Бондаренко Н.В., *Рассеяние на малые углы при больших значениях кулоновского параметра*. Тезисы докладов XVI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 20–23 марта 2018 г. С. 107.
25. Bondarenco M.V., *Next-to-leading order correction to infrared limit of radiation spectrum*. Abstracts of the XIIth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17). Hamburg, Germany, September 18–22, 2017. P. 17.
26. Bondarenco M.V., *Types of interference in highly non-dipole radiation spectra*. Book of Abstracts of the 7th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Sirmione–Desenzano del Garda, Italy, September 25–30, 2016. P. 83.
27. Бондаренко Н.В. *Краевые эффекты в спектре излучения ультра-релятивистского электрона в конечном магните*. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 111.
28. Бондаренко Н.В., *Улучшенное разделение мягкой и жесткой компонент в многократном кулоновском рассеянии*. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 111.
29. Бондаренко Н.В., *Предельные спектральные распределения многофотонного излучения при каналировании*. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 84–85.
30. Бондаренко Н.В, Шульга Н.Ф., *Дробовой эффект в тормозном излучении релятивистских электронов*. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике

высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 79.
31. Bondarenco M.V. and Shul'ga N.F., *Enhancing interference in the spectrum of bremsstrahlung on a composite target*. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 77.
32. Bondarenco M.V., *Multiphoton effects in channeling radiation*. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 37.
33. Бондаренко Н.В., Шульга Н.Ф., *Интерференция спектров тормозного излучения от двух аморфных мишеней*. Тезисы докладов XII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 17–21 марта 2014 г. С. 109.
34. Bondarenco M.V., *Multiphoton effects in coherent radiation spectra*. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 59.
35. Bondarenco M.V., *Reconstruction procedure for single-photon radiation spectra from multi-photon ones*. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 24.
36. Бондаренко Н.В., *Многофотонные эффекты в спектре когерентного излучения*. Тезисы докладов XI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 11–15 марта 2013 г. С. 106.
37. Bondarenco M.V., *Multiple scattering and volume capture of charged particles in bent crystals*. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 89.
38. Bondarenco M.V., *Symmetry properties in angular distribution of radiation in thin crystals*. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 20.
39. Bondarenco M.V., *Perturbative account of nuclear scattering at volume reflection*. Abstracts of the 3rd International Conference "Quantum Electro dynamics and Statistical Physics". Kharkov, Ukraine, August 29 – September 02, 2011. P. 83.
40. Bondarenco M.V. *Nuclear scattering and characteristic X-ray radiation at volume reflection*. Abstracts of the VIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-11). Egham, UK, September 12–16, 2011. P. 110.
41. Бондаренко Н.В., *Количество ядерных взаимодействий при объемном отражении частицы в изогнутом кристалле*. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. С. 106–107.
42. Бондаренко Н.В., *Матричная факторизация в амплитуде реального комптоновского рассеяния. Вычисление всех поляризационных характеристик*.

Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. P. 71–72.
43. Bondarenco M.V. *Analytic theory of volume reflection and the accompanying radiation*. Book of Abstracts of the 4th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2010). Ferrara, Italy, October 3–8, 2010. P. 88.
44. Бондаренко Н.В., *Длина когерентности в изогнутом кристалле*. Тезисы докладов VIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–26 февраля 2010 г. P. 112.
45. Бондаренко Н.В., *Поляризация тормозного излучения на несферическом рассеивателе*. Тезисы докладов VII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 23–27 февраля 2009 г. P. 89.
46. Bondarenco M.V., *Towards a unified analytic theory of diffractive QED processes*. Proceedings of the 17th International IUPAP Conference on Few-Body Physics (Few-Body 17). Durham, NC, USA, June 5–10, 2003. P. S320–S322.
47. Bondarenco M.V. and Shul'ga N.F. *A crystal-based spin analyzer for fast neutron beams*. Proceedings of 2003 Particle Accelerator Conference. Portland, OR, USA, 2003. P. 3329–3331.

СПИСОК ЦИТОВАНОЇ В АВТОРЕФЕРАТІ ЛІТЕРАТУРИ

1*. Lindhard J., Nielsen V., and Scharff M., *Approximation method in classical scattering by screened Coulomb fields*. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **38** (1968) 1–32.
2*. Molière G., *Theorie der streuung schneller geladener teilchen. II. Mehrfach- und vielfachstreuung*. Z. Naturforsch. **3a** (1948) 78–97.
3*. Waho T., *Planar dechanneling of protons in Si and Ge*. Phys. Rev. B **14** (1976) 4830–4833.
4*. Кумахов М.А. *Излучение каналированных частиц в кристаллах*. М.: Энергоатомиздат, 1986. — 160 с.
5*. Taratin A.M. and Vorobiev S.A., *Deflection of high-energy charged particles in quasi-channeling states in bent crystals*. Nucl. Instrum. Methods B **26** (1987) 512–521.
6*. Schoofs P. et al., *Monte Carlo modeling of crystal channeling at high energies*. NIM B **309** (2013) 115–119.
7*. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. *Излучение релятивистских электронов*. М.: Атомиздат, 1973. 376 с.
8*. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика*, 4 изд. М.: Наука, 1981. 432 с.
9*. May M.M. and Wick G.C., *On the production of polarized high energy X-rays*. Phys. Rev. **81** (1951) 628.
10*. Ландау Л.Д., Померанчук И.Я., *Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях*. ДАН СССР **92** (1953) 535; 735.
11*. Тер-Микаелян М.Л. *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*. Ереван: Изд. Ак. Наук Арм. ССР, 1969.
12*. Akhiezer A.I., Shul'ga N.F. *High energy electrodynamics in matter*. Amsterdam, Gordon and Breach, 1996. 388 p.
13*. Bloch F. and Nordsieck A., *Note on the radiation field of the electron*. *Phys. Rev.* **52** (1937) 54–59.

АНОТАЦІЯ

Бондаренко М.В. Розсіювання та випромінювання високоенергетичних заряджених частинок в аморфних та кристалічних середовищах. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» Національної академії наук України, Харків, 2019.

Викладаються нові результати в теорії проходження швидких заряджених частинок крізь речовину. Досліджується взаємодія частинок з аморфними та кристалічними, тонкими та товстими мішенями, магнітними полями, а також супровідне електромагнітне випромінення. Особливу увагу приділено питанням детального опису багаторазового розсіяння, модифікації спектрів електромагнітного випромінення (ЛПМ та споріднені ефекти), питанням поляризації випромінення, взаємодії частинок з атомними ланцюжками та площинами у орієнтованих кристалах, деканалюванню, відхиленню частинок у зігнутих кристалах.

Зокрема, розглядаються питання модифікації резерфордівської асимптотики в одноразовому та багаторазовому розсіянні, розділення потенціалу орієнтованого кристала на неперервний потенціал та внесок некогерентного розсіяння, розсіяння на атомних ланцюжках (doughnut scattering) та відповідна просторова еволюція, наближення статистичної рівноваги в теорії площинного каналювання, об’ємне відбиття в зігнутому кристалі, розподіл інтенсивності та поляризації випромінення по частоті, кутах та прицільних параметрах, зв'язок між класичною та квантовою теоріями гальмівного випромінення, просторова еволюція та інтерференція випромінюваних фотонів, крайові ефекти при випромінюванні в скінченних мішенях.

Відзначаються поздовжні просторово-часові та поперечні просторові аспекти розвитку процесів, радіофізичний характер недипольного випромінювання при високій енергії, інтерференція струменів випромінювання, кулонівський характер розсіювання в речовині. Викладення ведеться переважно аналітичними методами.

Ключові слова: багаторазове розсіяння, орієнтаційні ефекти розсіювання в кристалах, деканалювання, об’ємне відбиття, гальмівне випромінювання, поляризація випромінення, синхротронне випромінювання, пригнічення випромінення м’яких фотонів, крайові ефекти у випроміненні в скінченних мішенях, електрон-фотонні струмені.

АННОТАЦИЯ

Бондаренко Н.В. Рассеяние и излучение высокоэнергетических заряженных частиц в аморфных и кристаллических средах. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» Национальной академии наук Украины, Харьков, 2019.

Излагаются новые результаты в теории прохождения быстрых заряженных частиц через вещество. Исследуется взаимодействие частиц с аморфными и кристаллическими, тонкими и толстыми мишенями, магнитными полями, а также

сопровождающее электромагнитное излучение. Особое внимание уделяется вопросам детального описания многократного рассеяния, модификации спектров электромагнитного излучения (ЛПМ и родственные эффекты), вопросам поляризации излучения, взаимодействия частиц с атомными цепочками и плоскостями в ориентированных кристаллах, деканалированию, отклонению частиц в изогнутых кристаллах.

В частности, рассматриваются вопросы модификации резерфордовской асимптотики в однократном и многократном рассеянии, разделение потенциала ориентированного кристалла на непрерывный потенциал и вклад некогерентного рассеяния, рассеяние на атомных цепочках (doughnut scattering) и соответствующая пространственная эволюция, приближение статистического равновесия в теории плоскостного каналирования, объемное отражение в изогнутом кристалле, распределение интенсивности и поляризации излучения по частоте, углам и прицельным параметрам, связь между классической и квантовой теориями тормозного излучения, пространственная эволюция и интерференция излучаемых фотонов, краевые эффекты при излучении в конечных мишеням.

Отмечаются продольные пространственно-временные и поперечные пространственные аспекты развития процессов, радиофизический характер недипольного излучения при высокой энергии, интерференция струй излучения, кулоновский характер рассеяния в веществе. Изложение ведется преимущественно аналитическими методами.

Ключевые слова: многократное рассеяние, ориентационные эффекты рассеяния в кристаллах, деканалирование, объемное отражение, тормозное излучение, поляризация излучения, синхротронное излучение, подавление излучения мягких фотонов, краевые эффекты в излучении в конечных мишенях, электрон-фотонные струи.

ABSTRACT

Bondarenco M.V. Scattering and radiation of high-energy charged particles in amorphous and crystalline media. – Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences by specialty 01.04.02 – theoretical physics. – NSC Kharkov Institute of Physics and Technology of the National academy of sciences of Ukraine, Kharkov, 2019.

Novel aspects of the theory of fast charged particle passage through matter are considered, with the emphasis on particle interactions with amorphous and crystalline, thin and thick targets, and the accompanying emission of electromagnetic radiation.

For scattering of a structureless charged particle on a single atom, it is argued that all the practically observable cross-section characteristics reduce to three parameters. A relationship between characteristics of scattering at small and at large Coulomb parameters has been established. In the theory of multiple scattering in amorphous matter, an asymptotic expansion advantageous compared to Moliere's one is attained by extending the integral into complex plane and using the steepest descent integration path. That leads to a separation of the particle distribution function along the scattering angles into soft and semi-hard components.

For fast charged particle passage through crystals, the fundamental issue is separation of the action of the intra-crystal potential into that of the averaged,

“continuous” potential of aligned atomic planes or strings and the incoherent scattering on cores of individual atoms. This problem has been solved for scattering of an ultra-high-energy particle by a single static atomic chain or plane, by resuming contributions from all the atoms. An important criterion of optimal plane orientation, under which the effects of individual atomic strings inside the plane are minimized, was theoretically formulated.

In the theory of multiple scattering on parallel atomic strings (doughnut scattering), under the diffusion approximation for the collision integral the corresponding second order partial differential equation with a convective term is solved by an expansion in Mathieu functions. At a late evolution stage the spatial diffusion appears to be suppressed compared to that in an amorphous medium, wherefore the particles “stick” to the direction of strings. That effect underlies the possibility of the use of axially aligned bent crystals for extraction of particle beams in accelerators.

An example of non-scattering regime of particle passage through a crystal is channeling, when a fast charged particle undulates, e.g., in between two atomic planes, moving on the average along their direction. The prime issue for it is dechanneling – particle escape from the channels due to close collisions with individual electrons approximately uniformly distributed over the entire crystal, and with individual atomic nuclei concentrated near the aligned planes. For positively charged particles, its theoretical description is simplified by the dominance of the oscillatory motion of channeled particles in the continuous potential over transverse energy fluctuations due to multiple incoherent scattering on interplanar electrons. That notion can be implemented as a random phase approximation in the phase space, reducing the kinetic equation to a Fokker-Planck equation in transverse energy alone (“statistical equilibrium”). However, it ignores the fact that dechanneling occurs only at atomic planes, whereas in between them the transverse energy is not limited from above. Using the Green function of the Fokker-Planck equation for harmonic oscillator, it proves possible to evolve the particle flow during the oscillation half-period, and thereby determine the condition of the statistical equilibrium, and derive a correction to the dechanneling length in the Fokker-Planck approximation. In practice, this correction can be significant.

When a fast charged particle penetrates through a bent crystal (a common tool for modern accelerator applications) in planar alignment and in an over-barrier mode, there is a non-trivial phenomenon of volume reflection, when the particle deflects to a rather well-defined angle, to the direction opposite to that of the crystal bending. The corresponding deflection angle was expressed as a definite integral of the continuous potential over a single interplanar interval. A generic expression for the mean reflection angle was derived, allowing to express it as a function of the particle energy and the crystal bending radius.

An important concern at passage of ultra-relativistic electrons and positrons through matter is description of their radiation, including its polarization. There was proposed an approach, in which the photon polarization vector correlates with just one kinematic vector, and this correlation is then transformed from the initial electron rest frame to the lab frame through a sufficiently simple geometrical procedure – stereographic projection. Predictions are obtained for the polarization distribution in the dipole and non-dipole cases. The spectrum of non-dipole polarized radiation is decomposed into a full set of form factors. Ultimately, a relationship between the radiation length and Moliere's

screening angle in amorphous medium was established, allowing one to unify the procedures of their calculation.

For radiation in macroscopic targets, the crucial point is that after integration over all the momentum transfers in the target, the radiation differential section reduces to an impact parameter integral of the probability of radiation along definite electron trajectories without quantum interference between them, as in classical electrodynamics. The radiation spectrum was brought by the author to a form of an unitarity relation, in which the electron moving along an arbitrary trajectory emits not a real, but a virtual photon with a certain frequency, and subsequently reabsorbs it.

The shape of the radiation spectrum depends both on the electron dynamics or kinetics inside the target, and on the boundary effects. If the high-energy electron transport is treated as transverse anomalous diffusion with a generic index, the radiation spectrum both in the large- and low-frequency limits proves to obey power laws, as well.

With the account of boundary effects, the spectrum of radiation in a finite target is no longer proportional to the target thickness. The differences are most pronounced in the soft part of the spectrum, while their description depends crucially on the radiation non-dipole degree (the electron deflection angle in units of its inverse Lorentz factor). For an arbitrary non-dipole degree, there exists a factorization theorem expressing the spectrum value in the infrared limit (photon frequency tending to zero) through the finite value of the electron deflection angle. The next-to-leading order correction to it, derived by the author, is proportional to the photon frequency and an integral of a quadratic form depending on the electron trajectory shape inside the target.

If the radiation non-dipole degree is strong, the volume contribution to the radiation spectrum can be separated by assuming it to be proportional to the target thickness, and treating the latter as an indefinitely increasing parameter. The rest of the spectral contributions are then categorized as boundary ones, falling, in turn, into two sub-categories: two independent contributions from each of the target boundaries and the contribution from interference between the boundaries. Such a classification can be drawn for a generic case, reflecting the presence of different spectral scales. The properties of its components have been studied for radiation at electron double scattering, radiation at electron passage through a finite-length magnet, and bremsstrahlung in an amorphous plate.

Keywords: multiple scattering, orientation effects in scattering in crystals, dechanneling, volume reflection, bremsstrahlung, radiation polarization, synchrotron radiation, suppression of soft photon radiation, edge effects in radiation in finite targets, electron-photon jets.