

НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР  
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»  
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**БОНДАРЕНКО Микола Вікторович**

УДК 530.145, 539.12

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**РОЗСИЮВАННЯ ТА ВИПРОМІНЮВАННЯ ВИСОКОЕНЕРГЕТИЧНИХ  
ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В АМОРФНИХ ТА КРИСТАЛІЧНИХ  
СЕРЕДОВИЩАХ**

01.04.02 – теоретична фізика  
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ /М.В. Бондаренко/

Науковий консультант – Шульга Микола Федорович,  
доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України

Харків — 2019

## АНОТАЦІЯ

*Бондаренко М. В.* Розсіювання та випромінювання високоенергетичних заряджених частинок в аморфних та кристалічних середовищах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 – Фізика та астрономія). – Інститут теоретичної фізики ім. О. І. Ахієзера, Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» Національної академії наук України, Харків, 2019.

Фізика проходження швидких заряджених частинок (електронів, позитронів та іонів) крізь речовину виникла та значною мірою сформувалася протягом ХХ століття, надаючи тестові задачі для квантової механіки, класичної і квантової електродинаміки, а згодом слугуючи більш практичним цілям. Особливий сектор у ній займають процеси за участю ультра-релятивістських частинок. При цьому речовину можна розглядати як «заморожену», а всі прями, як пружні, так і непружні процеси за участю пролітаючої частинки трактувати в малокутовому наближенні. До типових задач належать розсіювання в аморфних середовищах (де опис розсіювання на атомних оболонках потребує точності), різноманітні питання проходження заряджених частинок крізь кристали (де динаміка загалом є складною), та електромагнітне випромінювання від електронів (яке є когерентним процесом, оскільки інтенсивність випромінювання на заданій частоті залежить від траєкторії електрона вздовж протяжної просторової ділянки). На початку ХХІ сторіччя в цій тематиці відбулися просування по деяким напрямкам, пов'язаним з експериментальним дослідженням нових явищ та виникненням нових теоретичних концепцій. В дисертації викладений внесок до відповідної теорії, зроблений автором.

В теорії одноразового атомного розсіяння для характеристики спостережуваних на практиці величин виявляється достатнім трьох параметрів

введених автором. Популярні модельні потенціали не визначають ці параметри достатньо точно, тому вони мають визначатися з експериментів. Встановлено зв'язок з характеристиками розсіювання в режимі великого кулонівського параметра (коли на речовину падають атомні ядра важких елементів).

В теорії багаторазового розсіювання в аморфній речовині недоліком теорії Мольєра була осциляційна поведінка членів розкладення, і розбігання асимптотичного ряду в цілому. Асимптотичні розкладення з кращими властивостями досягаються за допомогою розповсюдження інтеграла в комплексну площину та використання шляху інтегрування найшвидшого спуску. Цим методом автором було отримано розділення функції розподілу на м'яку та напівжорстку компоненти. Остання з них описує кратне резерфордівське розсіювання, та є важливою в проміжній області кутів. Встановлено, що відсоток напівжорстко розсіяних частинок є значним.

В задачах проходження швидких заряджених частинок крізь орієнтовані кристали фундаментальною проблемою є розділення дії потенціалу кристала на неперервний потенціал атомних площин або ланцюжків та некогерентне розсіювання на корах окремих атомів. Найпростішим прикладом є розсіювання ультра-релятивістської частинки на окремому статичному атомному ланцюжку. При малому куті орієнтації ланцюжка відносно початкового пучка заряджених частинок атомне екранування перестає позначатися на зіткненнях з кулонівськими корама атомів. Конформні властивості неекранованих кулонівських полів тоді дозволяють провести підсумовування по всіх атомах та виразити диференціальний переріз розсіювання на ланцюжку у замкнутому вигляді. Таким чином диференціальний переріз некогерентного розсіювання (що є, взагалі кажучи, анізотропним) відокремлюється від дії неперервного потенціалу струни. Подібним чином розділення проводиться також для розсіювання швидкої зарядженої частинки на атомній площині. Вдається теоретично сформулювати важливий критерій оптимальної площинної орієнтації, коли ефекти окремих атомних ланцюжків всередині

площини мінімізуються.

У теорії багаторазового розсіювання на паралельних ланцюжках (донат-розсіювання) використання дифузійного наближення для інтеграла зіткнень веде до рівняння 2-го порядку з частинними похідними, для розв'язку якого можна застосувати метод розділення змінних. Загальний розв'язок виражається у вигляді розкладення по функціях Мат'є, і є доволі складним, але на пізньому етапі еволюції виникають спрощення у описі просторової частини дифузії. Дифузія виявляється сповільненою відносно дифузії в аморфній речовині, тобто частинки «прилипають» до напрямку ланцюжків. Цей ефект лежить в основі можливості використання зігнутих кристалів в осьовій орієнтації для відведення пучків частинок на прискорювачах.

До задач розсіювання не зводиться явище каналювання, коли швидка заряджена частинка осцилює, наприклад, між двома атомними площинами, рухаючись в середньому вздовж їх напрямку. Для практичних застосувань каналювання головною є проблема деканалювання – вибивання швидких частинок з каналу внаслідок зіткнень з окремими електронами, рівномірно розподіленими по всьому об'єму кристала, та з окремими атомними ядрами, зосередженими поблизу площин. Для позитивно заряджених частинок теоретичний опис деканалювання спрощується завдяки домінуванню коливань каналюваних частинок у неперервному потенціалі над флуктуаціями поперечної енергії внаслідок багаторазового некогерентного розсіювання на міжплощинних електронах. Цю концепцію можна запровадити як наближення випадкових фаз у фазовому просторі, зводячи кінетичне рівняння до рівняння Фоккера-Планка лише по поперечній енергії («статистична рівновага»). Але тоді ігнорується той факт, що деканалювання відбувається тільки на атомних площинах, в той час як між ними рух не є обмеженим. Використовуючи функцію Гріна рівняння Фоккера-Планка для гармонічного осцилятора, автором була продемонстрована можливість прослідити еволюцію потоку частинок впродовж напів-періоду осциляції, і таким чи-

ном визначити умову статистичної рівноваги, а також знайти поправку до довжини деканалювання в наближенні Фоккера-Планка. Ця поправка виявляється доволі значною. Був визначений також закон деканалювання у часі на початковому етапі, що є важливим для практичних застосувань каналювання.

Коли швидко заряджена частинка проходить крізь зігнутий кристал (що є наразі широко вживаним методом в сучасній техніці прискорювачів) в площинній орієнтації та в надбар'єрному режимі, існує нетривіальне явище об'ємного відбиття, коли частинка відхиляється на певний кут, в бік, протилежний згину кристала. При високій енергії можна вважати, що рух об'ємно відбитої частинки керується переважно неперервним потенціалом. В рівномірно зігнутому кристалі (коли задача стає подібною до руху в центрально-симетричному полі, і інтегрованою у загальному вигляді), з урахуванням квазі-періодичності неперервного потенціалу, кут відхилення був виражений через визначений інтеграл від неперервного потенціалу по окремому міжплощинному інтервалу. За допомогою цього представлення отримано вираз для середнього кута відбиття при довільному радіусі згину. Для радіусів згину значно більших від критичного знайдено загальний вираз, що описує кутовий розподіл об'ємно відбитої частинки.

При проходженні ультра-релятивістських електронів та позитронів крізь речовину важливо враховувати їх електромагнітне випромінювання. Типові задачі пов'язані з розрахунком поляризації випромінюваного фотона, врахуванням властивостей руху зарядженої частинки всередині мішені, та врахуванням обмеженості мішені. Розрахунок та візуалізація поляризації випромінених фотонів ускладнюються тим, що існує чимало кінематичних векторів, з якими вона може корелювати. Автором було запропоновано представлення, в якому поляризація корелює лише з одним вектором, а потім ця кореляція трансформується по простому та наочному геометричному закону – стереографічній проекції. Отримано передбачення для розподілу поляризації в дипольному та недипольному випадках. Спектр

недипольного поляризованого випромінювання був розкладений по повній системі формфакторів. З використанням цього розкладення, отримано зв'язок між радіаційною довжиною та мольєрівським кутом екранування в аморфній речовині, що дозволяє знаходити кут Мольєра з табличних даних, без складних розрахунків.

При переході до макроскопічних мішеней важливим є той факт, що після інтегрування за імпульсами, переданими мішені, диференціальний переріз випромінення зводиться до інтеграла по прицільних параметрах від імовірності випромінення вздовж окремих траєкторій, між якими немає квантової когерентності, тобто ситуація стає подібною до класичної механіки. При цьому відносна втрата енергії електроном в акті випромінення фотона може бути значною, що враховується в загальному вигляді формулою Байєра-Каткова, хоча для багатьох застосувань з цієї категорії достатньо класичної електродинаміки. Автором було показано, що формулу для спектра випромінення можна виразити у вигляді співвідношення унітарності, в якому електрон, рухаючись вздовж довільної траєкторії, випромінює не реальний, а віртуальний фотон з певною частотою, а потім перепоглинає його.

Конкретна форма спектрів випромінення залежить від динаміки та кінетики електрона всередині мішені, а також від крайових ефектів. Якщо кінетику електрона розглядати як аномальну дифузію з довільним показником ступеню, було показано, що як при малих, так і при великих частотах фотонів  $\omega$  спектр випромінення теж підкорюється ступінним законам.

З урахуванням крайових ефектів, спектр випромінення на малих частотах не є пропорційним товщині мішені. Відмінності найбільш помітні в м'якій частині спектра, і їх опис суттєво залежить від ступеня недипольності випромінення (кута відхилення електрона в одиницях його зворотнього Лоренц-фактора). Для довільного ступеня недипольності існує факторизаційна теорема, яка виражає значення спектра в інфрачервоному ліміті  $\omega \rightarrow 0$  через значення кінцевого кута відхилення електрона. Автором бу-

ла отримана поправка до неї, пропорційна частоті фотона та інтегралу від квадратичної форми, залежної від траєкторії електрона всередині мішені. Ця поправка фізично пов'язана із затримкою в часі для електрона порівняно з апроксимацією його траєкторії траєкторією у вигляді кута. Тому вимірюючи спектр випромінення електрона в області малих частот, можна вивчати властивості руху електрона всередині мішені.

Якщо недипольність є сильною, об'ємні внески до спектра випромінення можна виділяти, вважаючи їх пропорційними товщині мішені, яка розглядається як змінюваний параметр. Решта внесків до спектра тоді відносяться до категорії крайових, ще поділяючись, в свою чергу, на дві підкатегорії: внески від окремих кордонів мішені та внески від інтерференції між кордонами. Таку класифікацію можна провести в загальному вигляді, завдяки присутності різних спектральних масштабів. Досліджено властивості її компонентів. Типові приклади включають випромінення при дворазовому розсіянні електрона, випромінення при проходженні електрона крізь магніт скінченної довжини, та гальмівне випромінення в аморфній пластинці. Для цих задач обчислені відповідні недипольні радіаційні формфактори, передбачено осциляційну поведінку спектрів гальмівного випромінення у м'якій області, введено поняття про інтерференцію струменевої та міжструменевої компонент випромінення.

*Ключові слова:* багаторазове розсіяння; орієнтаційні ефекти розсіювання в кристалах; деканалування; об'ємне відбиття; гальмівне випромінювання; поляризація випромінення; синхротронне випромінювання; пригнічення випромінення м'яких фотонів; крайові ефекти у випроміненні в скінченних мішенях; електрон-фотонні струмені.

## Список публікацій здобувача за темою дисертації.

*Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

1. Bondarenco M. V. Tips for deciphering and quick calculation of radiation spectra. *Journal of Instrumentation*. 2018. Vol. 13. P. C04012.
2. Bondarenco M. V. Separation of edge effects in highly non-dipole radiation spectra. *Mod. Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 33. P. 1850035. Vol. 33. — P. 1850035.
3. Bondarenco M. V. Next-to-leading order correction to the factorization limit of the radiation spectrum. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 96. P. 076009.
4. Bondarenco M. V., Shul'ga N. F. Interference in spectrum of radiation from doubly scattered charged particle. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 95. P. 056003.
5. Bondarenco M. V. Improved separation of soft and hard components in multiple Coulomb scattering. *Phys. Rev. D*. 2016. Vol. 93. P. 036008.
6. Bondarenco M. V. Limiting energy loss distributions for multiphoton channeling radiation. *NIM B*. 2015. Vol. 355. P. 30–34.
7. Bondarenco M. V., Shul'ga N. F. Constructive interference in the spectrum of bremsstrahlung on two amorphous targets. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 116007.
8. Bondarenco M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 013019.
9. Bondarenco M. V. Basics of multiphoton effects in coherent radiation spectra. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 517. P. 012027.
10. Bondarenco M. V. Nuclear interactions at volume reflection: Perturbative treatment. *Phys. Rev. ST-AB*. 2012. Vol. 15. P. 032802.
11. Bondarenco M. V. A relation between the nuclear scattering probability in a bent crystal and the mean volume reflection angle. *Phys. Lett. A*. 2012. Vol. 376. P. 875–878.
12. Bondarenco M. V. Nuclear interactions and multiple Coulomb scattering at volume reflection. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2012. Vol. 57. P. 59–63.
13. Bondarenco M. V. Factorization and QCD enhancements in the Compton



mechanism of W and Z boson hadroproduction. Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest. 2012. Vol. 57. P. 105–110.

14. Bondarenco M. V. Comments on theory of volume reflection and radiation in bent crystals. Il Nuovo Cim. C . 2011. Vol. 342. P. 381–388.

15. Bondarenco M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal vs. experiments on volume reflection. J. Phys.: Conf. Ser. 2010. Vol. 236. P. 012026.

16. Bondarenco M. V. Model solution for volume reflection of relativistic particles in a bent crystal. Phys. Rev. A. 2010. Vol. 82. P. 042902.

17. Bondarenco M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal. Phys. Rev. A. 2010. Vol. 81. P. 052903.

18. Bondarenco M. V. Polarization of bremsstrahlung at electron scattering in anisotropic medium. Phys. Rev. A. 2010. Vol. 82. P. 042723.

19. Bondarenco M. V. Computation and analysis of the polarization degree for bremsstrahlung at peripheral scattering. Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest. 2009. Vol. 51. P. 89–94.

20. Бондаренко Н. В. Формирование тени в дифракционном рассеянии адронов по механизму глюонного излучения при фрагментации. Вісн. ХНУ, сер. фіз. «Ядра, частинки, поля». 2008. Vol. 794. P. 125–128.

21. Bondarenco M. V. Extraction of spin observables in baryon-baryon scattering, sensitive to gluon- and quark-exchange effects. Probl. At. Sci. and Techn. 2007. Vol. N5(48). P. 28–35.

22. Bondarenco M. V. Covariant amplitude decomposition in relativistic fermion scattering problems. Probl. At. Sci. and Techn. 2007. Vol. N3(1). P. 104–110.

*Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

23. Bondarenco M. V. Volume Reflection Dependence on the Interplanar Potential. Book of Abstracts of the 8th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2018). Ferrara, Italy, September 23–28, 2018. P. 108.

24. Бондаренко Н. В. Рассеяние на малые углы при больших значениях

кулоновского параметра. Тезисы докладов XVI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 20–23 марта 2018 г. С. 107.

25. Bondarenko M. V. Next-to-leading order correction to infrared limit of radiation spectrum. Abstracts of the XIIth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17). Hamburg, Germany, September 18–22, 2017. P. 17.

26. Bondarenko M. V. Types of interference in highly non-dipole radiation spectra. Book of Abstracts of the 7th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Sirmione–Desenzano del Garda, Italy, September 25–30, 2016. P. 83.

27. Бондаренко Н. В. Краевые эффекты в спектре излучения ультра-релятивистского электрона в конечном магните. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 113.

28. Бондаренко Н. В. Улучшенное разделение мягкой и жесткой компонент в многократном кулоновском рассеянии. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 113.

29. Бондаренко Н. В. Предельные спектральные распределения многофотонного излучения при каналировании. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 84-85.

30. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Дробовой эффект в тормозном излучении релятивистских электронов. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 79-80.

31. Bondarenko M. V. and Shul'ga N. F. Enhancing interference in the spectrum of bremsstrahlung on a composite target. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling

Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 77.

32. Bondarenco M. V. Multiphoton effects in channeling radiation. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 37.

33. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Интерференция спектров тормозного излучения от двух аморфных мишеней. Тезисы докладов XII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 17–21 марта 2014 г. С. 109.

34. Bondarenco M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 59.

35. Bondarenco M. V. Reconstruction procedure for single-photon radiation spectra from multi-photon ones. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 24.

36. Бондаренко Н. В. Многофотонные эффекты в спектре когерентного излучения. Тезисы докладов XI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 11–15 марта 2013 г. С. 106.

37. Bondarenco M. V. Multiple scattering and volume capture of charged particles in bent crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 89.

38. Bondarenco M. V. Symmetry properties in angular distribution of radiation in thin crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 20.

39. Bondarenko M. V. Perturbative account of nuclear scattering at volume reflection. Abstracts of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics”. Kharkov, Ukraine, August 29 – September 02, 2011. P. 83.

40. Bondarenko M. V. Nuclear scattering and characteristic X-ray radiation at volume reflection. Abstracts of the VIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-11). Egham, UK, September 12–16, 2011. P. 110.

41. Бондаренко Н. В. Количество ядерных взаимодействий при объемном отражении частицы в изогнутом кристалле. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. С. 106-107.

42. Бондаренко Н. В. Матричная факторизация в амплитуде реального комптоновского рассеяния. Вычисление всех поляризационных характеристик. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. С. 71-72.

43. Bondarenko M. V. Analytic theory of volume reflection and the accompanying radiation. Book of Abstracts of the 4th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2010). Ferrara, Italy, October 3–8, 2010. P. 88.

44. Бондаренко Н. В. Длина когерентности в изогнутом кристалле. Тезисы докладов VIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–26 февраля 2010 г. С. 112.

45. Бондаренко Н. В. Поляризация тормозного излучения на несферическом рассеивателе. Тезисы докладов VII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 23–27 февраля 2009 г. С. 89.

46. Bondarenko M. V. Towards a unified analytic theory of diffractive QED processes. Proceedings of the 17th International IUPAP Conference on

Few-Body Physics (Few-Body 17). Durham, NC, USA, June 5–10, 2003. P. S320–S322.

47. Bondarenko M. V., Shul’ga N. F. A crystal-based spin analyzer for fast neutron beams. Proceedings of 2003 Particle Accelerator Conference. Portland, OR, USA, 2003. P. 3329–3331.

## ABSTRACT

*Bondarenko M. V.* Scattering and radiation of high-energy charged particles in amorphous and crystalline media. – Qualifying scientific work (manuscript).

Thesis for the scientific degree of a Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, speciality 01.04.02 “Theoretical physics” (104 – Physics and astronomy). – A. I. Akhiezer Institute for theoretical physics, National science center “Kharkov Institute of Physics and Technology” of the National academy of sciences of Ukraine, Kharkov, Ukraine, 2019.

Novel aspects of the theory of fast charged particle passage through matter are considered, with the emphasis on particle interactions with amorphous and crystalline, thin and thick targets, and the accompanying emission of electromagnetic radiation.

For scattering of a structureless charged particle on a single atom, it is argued that all the practically observable cross-section characteristics reduce to three parameters. A relationship between characteristics of scattering at small and at large Coulomb parameters has been established. In the theory of multiple scattering in amorphous matter, an asymptotic expansion advantageous compared to Molière’s one is attained by extending the integral into complex plane and using the steepest descent integration path. That leads to a separation of the particle distribution function along the scattering angles into soft and semi-hard components.

For fast charged particle passage through crystals, the fundamental issue is separation of the action of the intra-crystal potential into that of the averaged,

“continuous” potential of aligned atomic planes or strings and the incoherent scattering on cores of individual atoms. This problem has been solved for scattering of an ultra-high-energy particle by a single static atomic chain or plane, by resuming contributions from all the atoms. An important criterion of optimal plane orientation, under which the effects of individual atomic strings inside the plane are minimized, was theoretically formulated.

In the theory of multiple scattering on parallel atomic strings (doughnut scattering), under the diffusion approximation for the collision integral the corresponding second order partial differential equation with a convective term is solved by an expansion in Mathieu functions. At a late evolution stage the spatial diffusion appears to be suppressed compared to that in an amorphous medium, wherefore the particles “stick” to the direction of strings. That effect underlies the possibility of the use of axially aligned bent crystals for extraction of particle beams in accelerators.

An example of non-scattering regime of particle passage through a crystal is channeling, when a fast charged particle undulates, e.g., in between two atomic planes, moving on the average along their direction. The prime issue for it is dechanneling – particle escape from the channels due to close collisions with individual electrons approximately uniformly distributed over the entire crystal, and with individual atomic nuclei concentrated near the aligned planes. For positively charged particles, its theoretical description is simplified by the dominance of the oscillatory motion of channeled particles in the continuous potential over transverse energy fluctuations due to multiple incoherent scattering on interplanar electrons. That notion can be implemented as a random phase approximation in the phase space, reducing the kinetic equation to a Fokker-Planck equation in transverse energy alone (“statistical equilibrium”). However, it ignores the fact that dechanneling occurs only at atomic planes, whereas in between them the transverse energy is not limited from above. Using the Green function of the Fokker-Planck equation for harmonic oscillator, it proves possible to evolve the particle flow during the oscillation half-period, and thereby

determine the condition of the statistical equilibrium, and derive a correction to the dechanneling length in the Fokker-Planck approximation. In practice, this correction can be significant.

When a fast charged particle penetrates through a bent crystal (a common tool for modern accelerator applications) in planar alignment and in an over-barrier mode, there is a non-trivial phenomenon of volume reflection, when the particle deflects to a rather well-defined angle, to the direction opposite to that of the crystal bending. The corresponding deflection angle was expressed as a definite integral of the continuous potential over a single interplanar interval. A generic expression for the mean reflection angle was derived, allowing to express it as a function of the particle energy and the crystal bending radius.

An important concern at passage of ultra-relativistic electrons and positrons through matter is description of their radiation, including its polarization. There was proposed an approach, in which the photon polarization vector correlates with just one kinematic vector, and this correlation is then transformed from the initial electron rest frame to the lab frame through a sufficiently simple geometrical procedure – stereographic projection. Predictions are obtained for the polarization distribution in the dipole and non-dipole cases. The spectrum of non-dipole polarized radiation is decomposed into a full set of form factors. Ultimately, a relationship between the radiation length and Molière's screening angle in amorphous medium was established, allowing one to unify the procedures of their calculation.

For radiation in macroscopic targets, the crucial point is that after integration over all the momentum transfers in the target, the radiation differential section reduces to an impact parameter integral of the probability of radiation along definite electron trajectories without quantum interference between them, as in classical electrodynamics. The radiation spectrum was brought by the author to a form of an unitarity relation, in which the electron moving along an arbitrary trajectory emits not a real, but a virtual photon with a certain frequency, and subsequently reabsorbs it.

The shape of the radiation spectrum depends both on the electron dynamics or kinetics inside the target, and on the boundary effects. If the high-energy electron transport is treated as transverse anomalous diffusion with a generic index, the radiation spectrum both in the large- and low-frequency limits proves to obey power laws, as well.

With the account of boundary effects, the spectrum of radiation in a finite target is no longer proportional to the target thickness. The differences are most pronounced in the soft part of the spectrum, while their description depends crucially on the radiation non-dipole degree (the electron deflection angle in units of its inverse Lorentz factor). For an arbitrary non-dipole degree, there exists a factorization theorem expressing the spectrum value in the infrared limit (photon frequency tending to zero) through the finite value of the electron deflection angle. The next-to-leading order correction to it, derived by the author, is proportional to the photon frequency and an integral of a quadratic form depending on the electron trajectory shape inside the target.

If the radiation non-dipole degree is strong, the volume contribution to the radiation spectrum can be separated by assuming it to be proportional to the target thickness, and treating the latter as an indefinitely increasing parameter. The rest of the spectral contributions are then categorized as boundary ones, falling, in turn, into two sub-categories: two independent contributions from each of the target boundaries and the contribution from interference between the boundaries. Such a classification can be drawn for a generic case, reflecting the presence of different spectral scales. The properties of its components have been studied for radiation at electron double scattering, radiation at electron passage through a finite-length magnet, and bremsstrahlung in an amorphous plate.

*Keywords:* multiple scattering; orientation effects in fast particle scattering in crystals; dechanneling; volume reflection; bremsstrahlung; radiation polarization; synchrotron radiation; suppression of soft photon emission; boundary effects in radiation in finite targets.



## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ</b>	<b>23</b>
<b>ВСТУП</b>	<b>25</b>
<b>Розділ 1. РОЗВИТОК ФІЗИКИ ПРОХОДЖЕННЯ ШВИДКИХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК КРІЗЬ РЕЧОВИНУ (ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД)</b>	<b>36</b>
1.1. Застосування прискорювачів заряджених частинок . . . . .	36
1.2. Розвиток класичної електродинаміки . . . . .	37
1.2.1. Синхротронне випромінювання . . . . .	37
1.2.2. Крайові ефекти в синхротронному випромінюванні .	39
1.2.3. Гальмування випроміненням . . . . .	40
1.2.4. Ондулятори . . . . .	42
1.2.5. Взаємодія з лазерами . . . . .	43
1.2.6. Поляризаційне випромінювання . . . . .	43
1.2.6.1. Черенковське випромінювання . . . . .	43
1.2.6.2. Перехідне випромінювання . . . . .	44
1.2.6.3. Інші види поляризаційного випромінювання	45
1.2.7. Гальмівне випромінювання . . . . .	46
1.2.7.1. Недипольні ефекти . . . . .	46
1.2.7.2. Крайові ефекти в гальмівному випромінюванні	47
1.3. Кінетика проходження крізь аморфну речовину. Квантові ефекти . . . . .	49
1.3.1. Багаторазове кулонівське розсіювання . . . . .	49
1.3.1.1. Кутовий розподіл . . . . .	49
1.3.1.2. Поперечно-неоднорідні мішені . . . . .	51

	17
1.3.2.	Іонізаційні втрати енергії . . . . . 52
1.4.	Квантова теорія випромінювання . . . . . 57
1.4.1.	Непертурбативний опис гальмівного випромінювання 58
1.4.2.	Квантові ефекти в синхротронному випромінюванні 60
1.4.3.	Квазікласичний операторний метод . . . . . 60
1.4.4.	Багатофотонні ефекти і електромагнітні каскади . . 61
1.5.	Проходження крізь кристали . . . . . 64
1.5.1.	Когерентне гальмівне випромінювання . . . . . 64
1.5.2.	Каналування . . . . . 66
1.5.3.	Деканалування . . . . . 68
1.5.4.	Випромінювання при каналуванні та інші непружні процеси . . . . . 71
1.5.5.	Донат-розсіювання . . . . . 73
1.5.6.	Поверхневе каналування . . . . . 74
1.5.7.	Зігнуті кристали . . . . . 74
1.5.7.1.	Поворот каналованих частинок зігнутим кристалом . . . . . 74
1.5.7.2.	Об'ємне відбиття та об'ємне захоплення . . 75
1.5.7.3.	Поворот пучків кристалами в аксіальній орієнтації . . . . . 76
1.5.7.4.	Прецесія магнітного моменту . . . . . 77
1.5.7.5.	Лінзування зігнутими кристалами . . . . . 77
1.5.7.6.	Кристалічні ондулятори . . . . . 78
1.6.	Сучасні проблеми . . . . . 78
<b>Розділ 2. РОЗСІЮВАННЯ В АМОΡФНИХ СЕРЕДОВИЩАХ</b>	<b>84</b>
2.1.	Розсіяння швидких заряджених частинок на атомі . . . . . 84
2.1.1.	Класичний опис . . . . . 86

2.1.2.	Ейкональне наближення . . . . .	89
2.1.3.	Середній квадрат переданого імпульсу. Імпульс екранування . . . . .	93
2.1.4.	Параметри $\mu_n$ для різних атомних потенціалів . . . . .	99
2.2.	Поліпшене розділення м'яких та жорстких компонент при багаторазовому кулонівському розсіюванні . . . . .	100
2.2.1.	Розв'язок Фур'є-Бесселя для рівняння переносу . . . . .	101
2.2.2.	Товсті мішені: теорія Мольєра . . . . .	102
2.2.3.	Тонкі мішені: ступінні та логарифмічні поправки до асимптотики Резерфорда . . . . .	105
2.2.4.	Аналіз у комплексній площині . . . . .	107
2.2.5.	Розподіл за проєктованими кутами . . . . .	108
2.3.	Просторово-кутовий розподіл частинок, розсіяних в аморфному середовищі . . . . .	116
2.3.1.	Поперечний розподіл . . . . .	117
2.3.2.	Розподіл по $\vec{v}_\perp$ та поздовжній координаті . . . . .	120
2.3.3.	3-вимірний координатний розподіл . . . . .	125
2.4.	Висновки до Розділу 2 . . . . .	129
<b>Розділ 3. РОЗСІЮВАННЯ В КРИСТАЛАХ</b>		<b>131</b>
3.1.	Взаємодія швидких частинок з атомним ланцюжком та атомною площиною . . . . .	132
3.1.1.	Розсіяння на одному атомному ланцюжку. Розділення внесків неперервного потенціалу та некогерентного розсіяння . . . . .	134
3.1.1.1.	Класичне розсіювання . . . . .	139
3.1.1.2.	Квантовий опис . . . . .	141
3.1.2.	Розсіяння на атомній площині (геометрія «струни струн») . . . . .	145

3.1.2.1.	Орієнтація «струни струн» та «аморфна» орієнтація площини . . . . .	146
3.1.2.2.	Розсіювання на «струні струн» . . . . .	147
3.2.	Донат-розсіювання (дифузійна теорія) . . . . .	151
3.2.1.	Кутовий розподіл . . . . .	153
3.2.2.	Розподіл по $x$ . . . . .	155
3.2.2.1.	Моменти . . . . .	155
3.2.2.2.	Повний розв'язок . . . . .	156
3.2.2.3.	Гауссівський ліміт просторової еволюції . . . . .	159
3.3.	Площинне каналювання та деканалювання . . . . .	161
3.3.1.	Рівняння Фоккера-Планка для деканалювання . . . . .	166
3.3.1.1.	Наближення статистичної рівноваги . . . . .	167
3.3.2.	Деканалювання в наближенні статистичної рівноваги . . . . .	169
3.3.2.1.	Початковий пучок зі значним кутовим розхо- дженням . . . . .	172
3.3.2.2.	Ідеально колімований та орієнтований поча- тковий пучок . . . . .	173
3.3.3.	Броунівський рух гармонічного осцилятора . . . . .	175
3.3.3.1.	Загальний розв'язок . . . . .	176
3.3.3.2.	Задача Коші . . . . .	178
3.3.3.3.	Власні функції . . . . .	179
3.3.4.	Крайова задача . . . . .	181
3.3.4.1.	Початковий етап деканалювання . . . . .	182
3.3.4.2.	$\mathcal{O}(\sqrt{D})$ -поправка до довжини деканалювання . . . . .	185
3.3.4.3.	Осциляції деканалювання . . . . .	187
3.4.	Проходження заряджених частинок крізь зігнуті кристали. Об'ємне відбиття . . . . .	189
3.4.1.	Опис викривлення кристалів . . . . .	190
3.4.2.	Об'ємне відбиття . . . . .	191

3.4.3.	Кут об'ємного відбиття в товстому кристалі . . . . .	193
3.5.	Висновки до Розділу 3 . . . . .	200
<b>Розділ 4. ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОНІВ ВИСО-</b>		
<b>КИХ ЕНЕРГІЙ</b>		<b>202</b>
4.1.	Елементарний процес гальмівного випромінення. Спектральний, кутовий та поляризаційний розподіли . . . . .	203
4.1.1.	Кінематика . . . . .	205
4.1.2.	Факторизація імовірностей розсіяння та випромінення	206
4.1.3.	Дипольне наближення (наближення еквівалентних фотонів) . . . . .	210
4.1.3.1.	Інтерпретація у системі спокою початкового електрона. Стереографічна проекція . . . . .	212
4.1.3.2.	Визначення кутового розподілу за напрямками поляризації для певного напрямку переданого імпульсу . . . . .	216
4.1.3.3.	Інтенсивність неполяризованого випромінення та ступінь поляризації . . . . .	219
4.1.3.4.	Кутовий розподіл поляризації випромінення в ізотропній мішені . . . . .	221
4.1.3.5.	Спектр, інтегральний по кутах, і середня поляризація . . . . .	224
4.1.4.	Недипольне випромінювання . . . . .	226
4.1.4.1.	Система спокою початкового електрона та стереографічна проекція . . . . .	227
4.1.4.2.	Спектр, проінтегрований за кутами . . . . .	229
4.1.5.	Гальмівне випромінювання при розсіянні на атомі. Зв'язок між радіаційною довжиною в аморфному середовищі та кутом екранування Мольєра . . . . .	232

4.1.6.	Поправка $\mathcal{O}(x_\omega)$ у факторизованому спектрі. Теорема Лоу . . . . .	234
4.2.	Вихід за межі припущення факторизації у квантовому дипольному наближенні . . . . .	236
4.2.1.	Високоенергетичні хвильові функції . . . . .	237
4.2.2.	Матричний елемент випромінення . . . . .	239
4.2.3.	Інтегрування за кінцевими станами електрона. Поперечна декогерентність . . . . .	243
4.2.4.	Спектр, проінтегрований за кутами . . . . .	244
4.3.	Випромінювання у класичному випадку . . . . .	246
4.3.1.	Спектрально-кутовий розподіл . . . . .	247
4.3.2.	Правило сум для енергії. Локальність класичного випромінювання електромагнітної енергії . . . . .	248
4.3.3.	Ультрарелятивістське представлення малих кутів (світлового фронту) . . . . .	250
4.3.4.	Спектр випромінення: представлення у вигляді подвійного інтеграла за часом . . . . .	250
4.3.5.	Врахування віддачі при випромінюванні ( $\omega \sim E$ ) . . . . .	254
4.3.6.	Представлення прицільних параметрів . . . . .	254
	4.3.6.1. Випромінювання при одноразовому розсіянні . . . . .	256
	4.3.6.2. Синхротронне випромінювання . . . . .	257
4.4.	Випромінювання у квазі-нескінченному однорідному середовищі . . . . .	260
4.4.1.	Синхротронне випромінювання . . . . .	261
4.4.2.	Випромінювання в аморфному середовищі. ЛПМ-ефект . . . . .	264
	4.4.2.1. Точне гауссове усереднення . . . . .	265
	4.4.2.2. Процедура швидкого усереднення . . . . .	269
	4.4.2.3. Компенсуючий приріст при великих $\omega$ (дробовий ефект) . . . . .	271

4.4.3.	Масштабна інваріантність в однорідних середовищах. ГЧ та УФ асимптотики у першому та другому набли- женнях . . . . .	272
4.5.	Випромінювання в обмежених мішенях. Крайові ефекти . .	274
4.5.1.	Поправка $\mathcal{O}(\omega)$ до інфрачервоної факторизаційної те- ореми . . . . .	275
4.5.2.	Радіаційний формфактор у тонкій аморфній пластинці	279
4.5.3.	Випромінювання у товстих мішенях . . . . .	283
4.5.3.1.	Випромінювання при вльоті електрона у на- півнескінченний магніт . . . . .	284
4.5.3.2.	Випромінювання в скінченному магніті . . .	287
4.5.3.3.	Розділення об'ємних та крайових внесків для довільних мішеней . . . . .	295
4.6.	Висновки до Розділу 4 . . . . .	299
<b>ВИСНОВКИ</b>		<b>302</b>
<b>ПОДЯКИ</b>		<b>308</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>		<b>309</b>
<b>Додаток А. ВЛАСТИВОСТІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЕКСПО- НЕНЦІЙНО ЕКРАНОВАНОГО ПОТЕНЦІАЛУ</b>		<b>349</b>
A.1.	Ейкональний борнівський ряд . . . . .	349
A.2.	Повний переріз . . . . .	351
A.3.	Дифракційне розсіяння . . . . .	353
<b>Додаток Б. НЕПЕРЕРВНИЙ ПОТЕНЦІАЛ КРИСТАЛА КРЕМНІЮ В ПЛОЩИННІЙ ОРІЄНТАЦІЇ (110)</b>		<b>356</b>
<b>Додаток В. УЗАГАЛЬНЕНА ДЗЕТА-ФУНКЦІЯ</b>		<b>365</b>
<b>Додаток Д. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА</b>		<b>368</b>

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$m, \vec{p}, E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$	маса, імпульс та релятивістська енергія частинки
$\gamma = E/m$	Лоренц-фактор
$\vec{r}, t, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	координата, час та швидкість класичної частинки
$u_\mu = \gamma(1, \vec{v})$	4-вектор швидкості
$\vec{k}, \omega =  \vec{k} $	хвильовий вектор (імпульс) та частота (енергія) фотона
$\vec{n} = \vec{k}/\omega$	напрямок руху фотона
$x_\omega = \omega/E$	доля енергії електрона, забрана випроміненим фотоном; $x_\omega < 1$
$V(\vec{r})$	потенціальна енергія взаємодії частинки з полем статичної мішені
$\chi \ll 1$	кут розсіяння
$\chi_a$	кут Мольєра; $\chi'_a = 1.08\chi_a$ – модифікований кут Мольєра
$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$	борівський радіус, де $m_e, e$ – маса та заряд електрона
$T$	товщина мішені
$n$	щільність атомів у мішені
$\sigma$	переріз розсіяння
$\vec{b} = (x, y)$	прицільний параметр
$z$	поздовжня координата швидкої частинки
$R$	радіус згину кристала або синхротронної орбіти
$R_c$	критичний радіус згину кристала
$\theta \ll 1$	кут випромінення
$\vec{\Theta} = \gamma\vec{\theta}$	перемасштабований кут випромінення
$G_{im} = \delta_{im} - \frac{2}{1+\Theta^2}\Theta_i\Theta_m$	тензор, що визначає кутовий розподіл випромінення
$i, m = 1, 2$	поперечні індекси
IERF	initial electron rest frame (система спокою початкового електрона)
ІЧ, УФ	інфрачервоний, ультрафіолетовий (у широкому сенсі)
ЛПМ	ефект Ландау-Померанчука-Мигдала



### Конвенції

4-вимірна метрика та німі індекси:  $a_\mu b^\nu = a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ .

$\gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) – матриці Дірака,  $\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu = 2\delta_\mu^\nu$ .

У Розд. 4 використовується система одиниць  $\hbar = c = 1$ .

### Використовувані спеціальні функції

$\operatorname{erfc} s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty du e^{-u^2}$	додаткова функція помилок, $\operatorname{erfc} 0 = 1$
$\operatorname{Ci}(s) = - \int_s^\infty du \frac{\cos u}{u}$	інтегральний косинус
$\operatorname{si}(s) = - \int_s^\infty du \frac{\sin u}{u}$	інтегральний синус
${}_2F_1(a, b; c; s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n (b)_n s^n}{(c)_n n!}$	гіпергеометрична функція Гаусса
${}_1F_2(a; b, c; s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n s^n}{(b)_n (c)_n n!}$	узагальнена гіпергеометрична функція
$\operatorname{Ai}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \cos\left(su + \frac{1}{3}u^3\right)$	функція Ейрі
$\operatorname{Gi}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \sin\left(su + \frac{1}{3}u^3\right)$	функція Скорера
$J_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du \cos(nu - s \sin u)$	функція Бесселя, $n = 0, 1, 2, \dots$
$j_{n,m}, \quad m = 1, 2, \dots$	$m$ -й корінь функції $J_n$ : $J_n(j_{n,m}) = 0$
$K_n(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty du e^{nu - s \cosh u}$	функція Макдональда
$\mathbf{H}_n(s) = \frac{2(s/2)^n}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)} \int_0^1 du \frac{\sin us}{(1-u^2)^{1/2-n}}$	функція Струве
$\operatorname{ce}_n(s, q)$	парна функція Матьє, $\operatorname{ce}_n(s, 0) = \cos ns$
$a_n(q)$	характеристичне значення рівн. Матьє
$\Gamma(s) = \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-u}$	гама-функція
$\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$	дигамма-функція
$\gamma_E = -\psi(1) = 0.577\dots$	стала Ейлера
$\Gamma(\alpha, s) = \int_s^\infty du u^{\alpha-1} e^{-u}$	неповна гама-функція
$\zeta(s) = \sum_{m=1}^\infty m^{-s}$	дзета-функція Рімана
$\zeta(\alpha, s)$	узагальнена дзета-функція (див. Дод. В)
$\vartheta_n(u, s)$	еліптичні тета-функції, $n = 1, 2, 3, 4$
$D_n(s) = \frac{n}{s^n} \int_0^s du \frac{u^n}{e^u - 1}$	функція Дебая, $D_n(0) = 1$
$B_n(s)$	поліноми Бернуллі, $\frac{ue^{su}}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^\infty B_n(s) \frac{u^n}{n!}$
$B_n = B_n(0)$	числа Бернуллі

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Одночасно з дослідженням фундаментальних властивостей елементарних частинок в їх електрослабких та сильних взаємодіях, на прискорювачах значна увага традиційно приділяється і вивченню їх взаємодії зі звичайною, атомною речовиною. Це вивчення переслідує різноманітні цілі: уточнення уявлень про базові процеси, що дозволяють реєструвати частинки в детекторах (багаторазове розсіювання, іонізаційні втрати енергії, спінова поляризація та деполіризація, електромагнітне випромінювання, народження електрон-позитронних пар та утворення електромагнітних злив); створення пучків фотонів та позитронів на прискорювачах електронів (з подальшими застосуваннями для ядерної фізики або фізики елементарних частинок); створення компактних пристроїв для виведення пучків з накопичувальних кілець на прискорювачах заряджених частинок дуже високих енергій; а також вивчення крайових ефектів і ефектів близького поля (для фізики прискорювачів) і генерація синхротронного випромінювання (що використовується в аналізі конденсованих середовищ, біологічній та медичній фізиці). Розуміння подібних процесів використовується також в аналізі результатів зіткнень, що відбуваються при високій енергії за участю багатонуклонних атомних ядер, які відіграють роль обмеженого «середовища», і нарешті, в астрофізиці, де існують як великомасштабні магнітні поля, так і потоки заряджених частинок надвисоких енергій (космічні промені).

Вельми яскраві застосування виникають при взаємодії пучків заряджених частинок високих енергій з кристалами. Ці задачі набули популярності ще в 1950-70-ті роки, коли були відкриті ефекти когерентного гальмінового випромінювання, каналювання та випромінювання при каналюванні. Пізніше на авансцену вийшли задачі проходження швидких заряджених частинок крізь зігнуті кристали, з огляду на унікальні можливості, що на-

даються ними для колімування первинних пучків та виведення вторинних пучків на прискорювачах високих енергій.

Експериментальним дослідженням взаємодії високоенергетичних заряджених частинок з речовиною традиційно приділяється значна увага у провідних світових прискорювальних центрах CERN (Женева, Швейцарія), ІФВЕ (Протвино, Росія), FNAL (Чикаго, США), SLAC (Стенфорд, США), DESY (Гамбург, Німеччина), MAMI (Майнц, Німеччина) та інш. З кожною новою енергією відбувається не лише кількісне уточнення знань про відомі явища, а й відкриття якісно нових ефектів та можливостей. Протягом останніх двох десятиліть великий обсяг важливих експериментальних даних було отримано на прискорювачі CERN SPS (200 Гев). Новий виток в дослідженнях відбувається з появою Великого адронного колайдера (LHC). Сучасні тенденції пов'язані з прогресом в експериментальній фізиці, обчислювальній техніці та технологіях виготовлення мішеней. Бажано, щоб розвиток теорії випереджав експериментальний стан досліджень.

З теоретичного погляду, в даній галузі ще залишається чимало нерозв'язаних питань. Ще не вирішені навіть всі питання, пов'язані з проходженням частинок крізь аморфну речовину. Теорія Мольєра багаторазового розсіювання в аморфній речовині зазнає труднощів в перехідній області між подібною до гауссівської поведінки функції розподілу на типових кутах відхилення та резерфордівською асимптотикою на великих кутах. Перешкоди виникають навіть в описі елементарного акту розсіювання на окремому атомі у випадку великого кулонівського параметра. Природно, що ще більше проблем зустрічається в питаннях взаємодії частинок з кристалами, де динаміка може бути вельми складною. Однією з давніх проблем є відсутність послідовного розділення дії потенціалу кристала на вплив неперервного потенціалу та внесок некогерентного розсіювання, яке б дозволило уникнути подвійного рахунку. В теорії деканалювання відсутнє строге обґрунтування так званого наближення статистичної рівноваги, визначення границь його застосовності та, найголовніше, процедури виходу за його межі. Донедавна

бракувало розвинутої теорії об'ємного відбиття, здатної у явному вигляді пов'язати розподіл по кутах відхилення з формою міжплощинного потенціалу. Не існує також достатньо надійної теорії об'ємного захоплення. У теорії генерації електромагнітного випромінювання ще теж залишається чимало проблем, оскільки в залежності від частоти фотона, головний внесок може походити від дуже різних просторових масштабів. Зокрема, в теорії випромінювання в обмежених мішенях не існувало послідовного підходу для поєднання інфрачервоної межі зі внесками від типових частот.

Таким чином, питання взаємодії швидких заряджених частинок з речовиною є актуальними нині як з теоретичного, так і з експериментального, а також із прикладного погляду, і їх дослідження в наш час продовжується як у традиційних напрямках, так і у зв'язку з новими викликами.

**Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.** В Україні провідним центром з вивчення процесів взаємодії швидких заряджених частинок з речовиною є ННЦ ХФТІ. Початок цій галузі досліджень тут було покладено в 1930-х роках, під час становлення прискорювальної ядерної фізики, і вийшло на новий рівень в 1970-ті роки із запуском нового лінійного прискорювача електронів на рекордну в той час в світі енергію 2 Гев. На ньому вдалося зробити ряд важливих відкриттів стосовно проходження швидких заряджених частинок крізь речовину, зокрема, довести можливість каналювання позитронів високих енергій. Після того, як потужніші прискорювачі були введені в експлуатацію за кордоном, харківський лінійний прискорювач електронів припинив роботу на номінальній енергії, проте дослідження за участю співробітників ННЦ ХФТІ у галузі високих енергій продовжуються у співробітництві з сучасними іноземними експериментальними лабораторіями. Тематика взаємодії швидких частинок з речовиною є однією з профільних в Інституті теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ, в якому працює автор.

Дослідження, покладені в основу дисертації, проводилися в ІТФ ННЦ ХФТІ в рамках:

Програми «Відомче замовлення НАН України на проведення наукових досліджень з атомної науки та техніки», за темами

2003-2005 рр. «Квантовоелектродинамічні процеси при взаємодії швидких частинок з кристалічними та аморфними речовинами та з інтенсивними зовнішніми полями» (шифр теми 56/04, номер держреєстрації 080901UP0009);

2006-2010 рр. «Теоретичні дослідження електромагнітних процесів при взаємодії заряджених частинок з пучками частинок, речовиною та зовнішніми полями» (шифр теми III-6-06 ІТФ, номер держреєстрації 080906UP0010);

2011-2015 рр. «Розвиток теорії електродинамічних процесів при взаємодії заряджених частинок високих та ультрависоких енергій з аморфною речовиною, кристалічними структурами та інтенсивними зовнішніми полями» (шифр теми III-6-11 ІТФ, номер держреєстрації 0111U09550);

2016-2018 рр. «Електромагнітні процеси в інтенсивних зовнішніх полях та при взаємодії заряджених частинок великої енергії з кристалічними та аморфними середовищами» (шифр теми III-6-16 ІТФ, номер держреєстрації 0116U007070);

науково-дослідної роботи НАН України за темами:

2014-2015 рр. «Електромагнітні процеси при проходженні заряджених частинок великої енергії через кристалічні та аморфні середовища» (номер теми ЦО-7-1, номер держреєстрації 0114U002898);

2016-2017 рр. «Розсіяння та випромінювання заряджених частинок великої енергії в тонких шарах кристалічної та аморфної речовини» (номер теми ЦО-1-8, номер держреєстрації 0116U004398);

а також програми Міністерства освіти та науки України «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави», в рамках тем:

2016-2017 рр. «Рідкісні ядерні процеси і розпади, спектроскопія розпадів та структура ядер (шифр роботи № 1-13-15, номер держреєстрації 0115U000473, ХНУ імені В. Н.Каразіна);

2017-2018 рр. «Індуковані електрослабкими взаємодіями рідкісні процеси і розпади та структурні ефекти в сильних і електромагнітних взаємодіях» (шифр роботи № 1-13-18, номер держреєстрації 0118U002031, 2018 р., ХНУ імені В.Н. Каразіна).

В усіх названих проектах роль автора – виконавець.

В 2015-2017 рр. робота над дисертацією проводилася в докторантурі ННЦ ХФТІ.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертації була розробка теорії багаторазового розсіювання в аморфному середовищі та орієнтованих кристалах, теорії донат-розсіювання, деканалювання, об'ємного відбиття, дослідження залежності інтенсивності та ступеня поляризації гальмівного випромінення від кута та частоти випромінення з урахуванням кулонівської сингулярності атомного потенціалу та її екранування, формулювання теорії випромінювання в представленні прицільних параметрів, послідовне розділення об'ємних крайових ефектів у спектрах випромінення в скінченних мішенях та різних типів. З огляду на сферу діяльності автора, не розглядалися питання народження електрон-позитронних пар.

Для досягнення цієї мети, автором розв'язувалися наступні задачі:

- (i) Дослідження впливу різних параметрів атомних потенціалів на характеристики розсіювання швидких заряджених частинок;
- (ii) Уточнення теорії багаторазового розсіювання при кутах відхилення, більших за типові;
- (iii) Послідовне розділення внесків відхилення в неперервному потенціалі та некогерентного розсіювання в орієнтованих кристалах;
- (iv) Вихід за рамки наближення статистичної рівноваги в теорії деканалювання позитивно заряджених частинок;
- (v) Теоретичний опис явища об'ємного відбиття в зігнутому кристалі;

- (vi) Пошук умов для створення анізотропій в розсіянні ультра-релятивістських електронів в кристалах, оцінка ступеня поляризації відповідного гальмівного випромінювання (з урахуванням віддачі фотона) як в кутовому розподілі, так і в інтегралі по кутах випромінювання;
- (vii) Аналіз типів інтерференції у гальмівному випромінюванні при дворазовому розсіянні, відхиленні у скінченному однорідному магніті, та у аморфній мішені скінченної товщини.

*Об'єкт дослідження* – електромагнітні процеси, що відбуваються при проходженні безструктурних ультра-релятивістських заряджених частинок крізь речовину.

*Предмет дослідження* – процеси розсіювання та випромінювання швидких заряджених частинок в аморфних та кристалічних мішенях, а також у магнітних полях. Акцент робився на просторово-часових аспектах розвитку процесів при високих енергіях, зокрема, у застосуванні до проходження швидких заряджених частинок крізь прямі та зігнуті кристали, активно використовуваного в сучасній практиці.

**Методи дослідження.** Всі задачі розглядалися за умов, характерних для фізики високих енергій, коли типові кути розсіювання та випромінювання є малими. Вважаючи енергію достатньо високою, нехтувалося ефектами впливу діелектричної сприйнятливості атомної речовини, та не розглядалася її іонізація. Дослідження велося традиційними аналітичними методами класичної та квантової механіки і електродинаміки, фізичної кінетики, статистичної фізики та математичної фізики. Амплітуди пружного високоенергетичного розсіяння розраховувались на основі наближення ейконалу. Функція розподілу багаторазового розсіяння частинок по кутах в аморфній речовині обчислювалася за допомогою методу розповсюдження дійсного інтегралу в комплексну площину. Просторово-кутовий розподіл багаторазово розсіяних частинок в аморфній речовині знаходився методом перетворення Фур'є та підбору гауссового розв'язку з вільними параме-

трами. Просторово-кутовий розподіл багаторазово розсіяних частинок на атомних ланцюжках в кристалі обчислювався за допомогою розкладення по повній системі функцій Мат'є. Часова залежність площинного деканалювання та довжина деканалювання розраховувалися методом функцій Гріна. Для обчислення кутових розподілів електромагнітного випромінювання застосовувалась стереографічна проекція, для обчислення спектрів випромінювання – формула Байера-Каткова та її класичний аналог. Автором розроблені спеціальні аналітичні підходи до розв'язку кінетичних рівнянь, обчислення сум по кристалічній ґратці, інтегралів вздовж траєкторій випромінюючих частинок, по фазовому простору, сум по електронним спіновим станам, які можуть використовуватися також і в комп'ютерному моделюванні реальних процесів.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

- Узагальнено теорію класичного та квантового розсіяння швидкої зарядженої частинки на екранованому кулонівському потенціалі, що представляє атом. Доведено існування загальних скейлінгових властивостей в цьому процесі, встановлено існування зв'язку між характеристиками розсіяння при великих і при малих кулонівських параметрах.
- Удосконалено теорію багаторазового розсіяння в аморфній речовині. Запропоновано розділення функції розподілу частинок за кутами розсіяння на м'яку та напівжорстку компоненти. Для її інтерпретації запропоновано використання поняття псевдо-ймовірності.
- Вперше запропоновано принцип розділення потенціалу орієнтованого атомного ланцюжка чи площини на неперервну та некогерентну компоненти, остання з яких відповідає за багаторазове розсіювання, і може описуватись інтегралом зіткнень.
- Вперше одержано критерій для оптимальної площинної орієнтації кристала.
- Вперше побудовано опис просторової дифузії при донат-розсіянні.



- Вперше побудована аналітична теорія площинного деканалювання поза рамками наближення статистичної рівноваги.
- Вперше побудована аналітична теорія об'ємного відбиття.
- Запроваджено повну систему радіаційних формфакторів для поляризованого спектра гальмівного випромінення, при довільному значенні ступеня недипольності.
- Вперше одержано формулу, яка пов'язує мольєрівський кут та радіаційну довжину в аморфній речовині, з урахуванням кулонівського характеру розсіювання на складових атомах.
- Вперше одержано асимптотики спектра випромінення при великих та при малих частотах фотонів за умов аномальної дифузії.
- Вперше одержано лінійну по частоті фотона поправку до інфрачервоної факторизаційної теореми для спектра випромінення від ультра-релятивістського електрона.
- Вперше обчислено спектри випромінення для деяких практично важливих випадків – при проходженні релятивістських електронів крізь тонку аморфну мішень (але з урахуванням недипольних ефектів) та при проходженні крізь однорідний магніт скінченної довжини (за умов сильно недипольного випромінення).
- Вперше запропоновано метод розділення масштабів і побудовано загальну теорію крайових ефектів для спектрів випромінення ультра-релятивістських електронів в мішенях скінченної товщини, за умов сильної недипольності.

Деякі результати, отримані автором, мають також **методичне значення**:

**ННЯ:**

- Вперше запроваджено використання стереографічної проєкції для опису кутових розподілів поляризації та інтенсивності квантового гальмівного випромінення.
- Показано, що кореляція передач імпульсу в мішені та поляризації випромінених фотонів в теорії гальмівного випромінювання незале-

жно від виконання умов факторизації здійснюється універсальним тензором.

- Розвинута процедура спрощеного усереднення спектрів випромінювання.
- Розроблено підхід для обчислення амплітуд класичного випромінювання у представленні прицільних параметрів.
- Вперше одержано представлення для спектра електромагнітного випромінювання, що має вигляд співвідношення унітарності.
- Запропоновано простий спосіб виводу спектра Ландау-Померанчука-Мигдала.

**Практичне значення одержаних результатів.** Окрім наукової цінності, істотним є також прикладне значення розглянутих питань:

- Непертурбативне обчислення кута екранування є важливим для опису багаторазового розсіяння релятивістських іонів, а також нерелятивістських протонів.
- Зв'язок кута екранування з радіаційною довжиною дозволяє знаходити його з табличних даних, без детальних розрахунків атомної структури.
- Розділення м'якої та напівжорсткої компонент в багаторазовому кулонівському розсіянні може застосовуватися для комп'ютерного моделювання.
- Уточнення закону деканалування у часі як на початковій, так і на пізній стадіях є важливим для практичних застосувань каналювання.
- Вираз кута об'ємного відбиття через неперервний потенціал довільного вигляду дозволяє швидко і реалістично обчислювати його у будь-якому кристалі будь-якої площинної орієнтації. Відповідні формули були потім використані у оновленнях комп'ютерної програми FLUKA, розробленої у CERN.
- Метод стереографічної проекції дозволяє швидко оцінювати

кутовий розподіл та поляризацію випромінення від ультра-релятивістських електронів.

- Квадрупольний формфактор спектра випромінення дозволяє описувати пригнічення м'якого випромінювання у тонких мішенях, подібно до того як функція Мигдала робить це для товстих мішеней.
- Знання крайових ефектів у випроміненні при проходженні електрона крізь скінченний магніт важливе в застосуваннях прискорювальної техніки.
- Загальна теорія недипольного розкладення дозволяє на єдиній основі проводити оцінку крайових ефектів в спектрах випромінення на обмежених мішенях.
- Представлений огляд літератури може бути корисним для початківців в даній галузі.

**Особистий внесок здобувача.** Усі статті за темою дисертації, окрім [4, 7], опубліковані здобувачем особисто. Статті [4, 7], матеріали доповіді на конференції [47] та тези доповідей на конференціях [30, 31, 33] опубліковані у співавторстві з науковим консультантом, акад. НАНУ М. Ф. Шульгою. В статті [7] автору належить вибір методу дослідження та проведення розрахунків. В статті [4] та матеріалах доповіді [47] автору належить постановка задачі, вибір методу дослідження та проведення розрахунків.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на таких конференціях:

- Particle Accelerator Conference (May 12 – 16, 2003, Portland, OR, USA);
- International IUPAP Conference on Few-Body Physics (Few-Body 17) (June 5–10, 2003, Durham, NC, USA);
- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-09) (September 7–11, 2009, Zvenigorod, Russia);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling

- Phenomena (Channeling 2010) (October 3-8, 2010, Ferrara, Italy);
- International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics” (August 29 – September 2, 2011, Kharkov, Ukraine);
- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) (September 23–28, 2013, Lake Sevan, Armenia);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014) (October 5–10, 2014, Capri, Italy);
- International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016) (September 25–30, 2016, Sirmione del Garda, Italy);
- International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17) (September 18–22, 2017, Hamburg, Germany);
- Щорічні конференції з фізики високих енергій, ядерної фізики та прискорювачів (2007–2018, Харків, Україна);

а також на наукових семінарах в 2018 р. в ІТФ ННЦ ХФТІ та ІТФ ім. М. М. Боголюбова.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 47 наукових працях: у 22 статтях у фахових вітчизняних і міжнародних періодичних виданнях [1–22], 23 тезах доповідей на конференціях [23–45] та двох матеріалах доповідей на конференціях [46, 47]. Статті [12] та [13] опубліковані в одному номері журналу.

**Структура дисертації.** Текст дисертації складається з анотації, вступу, огляду літератури, трьох розділів основного тексту, висновків, списку використаної літератури із 499 найменувань та чотирьох додатків. Текст роботи містить 2 таблиці і 74 рисунки, один з яких займає всю сторінку. Повний обсяг дисертаційної роботи становить 373 сторінки, обсяг основної частини – 283 сторінки.

## РОЗДІЛ 1

**РОЗВИТОК ФІЗИКИ ПРОХОДЖЕННЯ ШВИДКИХ  
ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК КРІЗЬ РЕЧОВИНУ  
(ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД)****1.1. Застосування прискорювачів заряджених частинок**

У сучасному світі прискорювачі заряджених частинок (головним чином, електронів, позитронів та іонів) широко застосовуються для різноманітних цілей, і їх число досягло багатьох тисяч. Початковим їх призначенням було вивчення будови атомної речовини, потім самих атомів, атомних ядер і елементарних частинок, які складають атомне ядро (протонів та нейтронів), потім народження нових, нестабільних, але тим не менш фундаментальних частинок. Після бурхливого періоду відкриття нових частинок, більше уваги стало приділятися вивченню їх властивостей, які проявляються, зокрема, з підвищенням енергії. Виявилось, що висока енергія зіткнення суттєво спрощує характер електромагнітної взаємодії між частинками, які, незважаючи на високу енергію, не руйнуються повністю, а лише пружно розсіюються на малі кути, або фрагментують на невелику кількість частинок, які рухаються приблизно в тому ж напрямку, що і початкова (наприклад, випускається фотон під релятивістськи малим кутом). Таким чином склалася галузь фізики високих енергій, і хоча вона залишається орієнтованою на вивчення мікросвіту на фундаментальному рівні, її можна розглядати і як таку, що має самостійне значення.

Фізика високих енергій веде свій відлік від відкриття космічних променів та побудови теорії електромагнітних злив. Проте, прискорювальна фізика високих енергій розпочалася лише у 1960-і роки, зі створенням мульти-Гевних прискорювачів, таких як УНК (Серпухов), SLAC, DESY,

CERN SPS. Ці центри разом з FNAL, BNL, LHC є провідними і нині, надаючи пучковий час міжнародним колабораціям.

Прискорювачі дещо менших енергій ( $\sim 1$  Гев) потрібні для фізики високих енергій на пучках електронів, які є найлегшими з заряджених частинок. Прискорювачі з цієї категорії знаходяться у Фраскаті, Новосибірську, Томську, Москві, Харкові, Єревані, Орхусі, Майнці, Цукубі [48]. На них переважно проводиться вивчення взаємодії електронів з речовиною, орієнтоване на прикладні застосування – отримання поляризованих фотонів, позитронів, створення кристалічних дефлекторів і т.д. (див. нижче).

Існує також багато малих прискорювачів, які застосовуються для медицини, ядерної фізики, структурного та елементного аналізу речовин, і т.п. [49].

## 1.2. Розвиток класичної електродинаміки

Теорія електромагнітних процесів при взаємодії частинок високої енергії з речовиною і зовнішніми полями розвивалася у тісному контакті з експериментами, поступово розширюючи область доступних енергій. Першим її етапом, цілком природно, стало дослідження класичного випромінювання від релятивістських електронів у макроскопічних зовнішніх полях.

**1.2.1. Синхротронне випромінювання.** Відповідно до класичної електродинаміки, будь-яка прискорена частинка випромінює світло у вигляді електромагнітних хвиль [50,51]. Ультра-релятивістські частинки легше піддаються поперечному прискоренню, ніж поздовжньому, тому для них ефективнішою є дія поперечних сил, тоді як фізична природа цих сил не має принципового значення. Випромінювання при русі ультра-релятивістського електрона в будь-якому макроскопічному полі узагальнено називається магнітогальмівним або синхротронним. Детальний теоретичний розрахунок класичного випромінювання при русі електрона по колу в атомі був виконаний ще в 1907 році [52], але він виявився незасто-

совним до типових процесів в атомі, де рух електрона квантується, і його енергія не може губитися безперервно.<sup>1</sup> До даної задачі повернулися лише в кінці 1930-х років, у зв'язку з рухом швидких електронів у макроскопічних полях – бетатроні та в магнітному полі Землі. Було помічено, що відповідне випромінювання настільки сильне, що фактично обмежує досяжні енергії електронів в магнітних полях – як на поверхні Землі, так і в циклічних прискорювачах [57–59].

При детальних дослідженнях було встановлено, що кутовий розподіл випромінювання від ультра-релятивістських електронів зосереджений уздовж напрямку їх руху, а в спектрі випромінювання основний максимум потрапляє не на частоту обертання електрона, а на вищі гармоніки (Рис. 1.1а). Тому згодом було запропоновано спрощений опис спектра як квазінеперервного [60–65]. Характерні частоти синхротронного випромінювання швидко зростають зі зростанням енергії електрона, і при досягненні енергії 100 Мев світло, що випускається електронним пучком у магнітному полі синхротрона General Electric, виявилось спостережуваним вже візуально [66, 67].

Магнітогальмівне випромінювання спостерігалось також у різноманітних космічних джерелах, де наявність високого ступеня поляризації випромінювання дозволяє з достовірністю відрізнити його від теплового [68, 69]. З урахуванням реабсорбції [70], воно стає вже підрозділом фізики релятивістської плазми. Після відкриття пульсарів (1967) висловлювалися ідеї про можливість існування в особливо великих пульсарах (магнетарах) магнітних полів сумірних з критичним

$$H_0 = \frac{m^2 c^3}{e \hbar},$$

при яких необхідно також враховувати спонтанне народження електрон-позитронних пар.

---

<sup>1</sup>Для високозбуджених циркулярних станів рідбергівських атомів, що активно вивчаються нині у зв'язку з приготуванням квантових суперпозицій квазікласичних станів типу «шредінгерівських котів» [53, 54] і безперервного моніторингування «квантових стрибків» між ними [55, 56], така можливість через століття може знову відкритися.

Сьогодні рентгенівське синхротронне випромінювання широко застосовується для структурного аналізу речовин, в біології, медицині, при створенні електронних мікросхем, завдяки тому, що його інтенсивність набагато перевищує інтенсивність випромінювання в рентгенівських трубках [71–73]. При енергіях сучасних адронних прискорювачів (ЛНС), помітним стає вже й синхротронне випромінювання від протонів, яке є видимим за допомогою інфрачервоних камер і завдає теплового навантаження на надпровідні магніти.

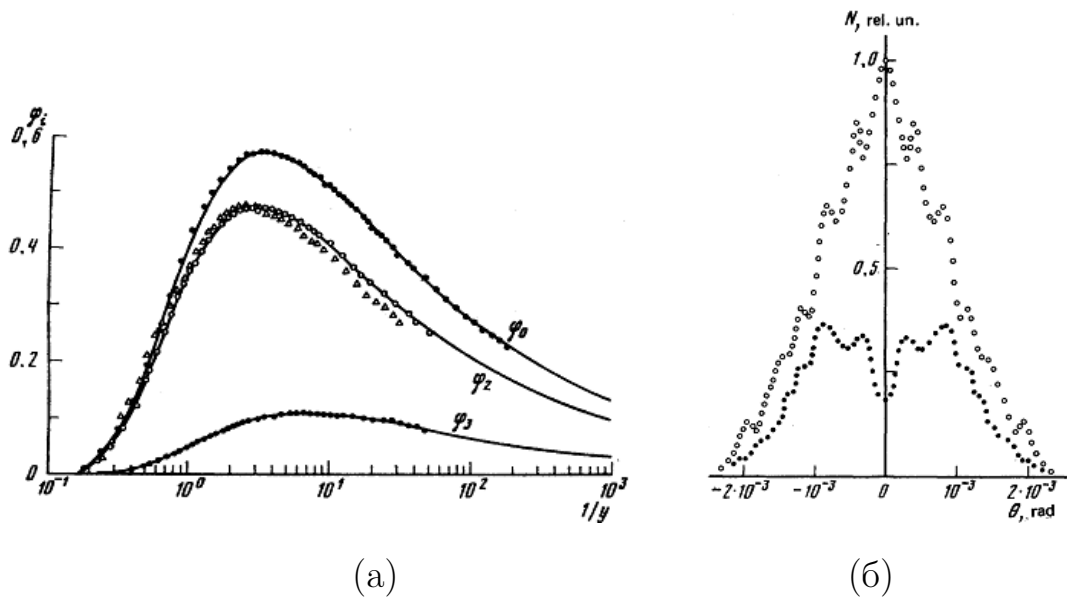


Рис. 1.1. а). Спектр синхротронного випромінювання, виміряний для фотонів фіксованої частоти при змінній енергії електронів [74].  $y = \frac{2\omega R}{3\gamma^3}$ ;  $\varphi_2$  –  $\sigma$ -компонента,  $\varphi_3$  –  $\pi$ -компонента,  $\varphi_0 = \varphi_2 + \varphi_3$ . б). Кутовий розподіл випромінювання електрона в прямолінійній ділянці синхротрона [74]. Білі точки –  $\sigma$ -компонента, чорні точки –  $\pi$ -компонента.

### 1.2.2. Крайові ефекти в синхротронному випромінюванні.

Теорія синхротронного випромінювання описує характеристики випромінювання в одиницю часу, для сталого, квазі-нескінченного руху електрона. На практиці, однак, можливі також різні крайові ефекти, коли електрон входить у магнітне поле або виходить з нього. Теорія випромінювання при повороті електрона в магніті на скінченний кут порядку радіана, або на



ціле число витків, розглядалася в [75].

Випромінювання в прямолінійній ділянці накопичувального кільця розглядалося в [74, 76–78], і виявило характерні інтерференційні ефекти (райдужні кільця) в кутовому розподілі випромінювання (див. Рис. 1.1).

**1.2.3. Гальмування випромінюванням.** У циклічних прискорювачах помітим є також радіаційне скорочення радіусу орбіти електрона [59], що стимулювало розвиток теорії гальмування випромінюванням (radiation reaction). Це питання дискутувалося ще в пору становлення класичної електродинаміки Лоренцом [50], Абрагамом та ін. У застосуванні до задачі про випромінювання осциляторів (яка після роботи М. Планка привела до створення квантової теорії), було виявлено, що в рамках чисто класичної електродинаміки воно може призводити до внутрішніх протиріч, таких як самоприскорення електрона.

У коваріантному запису самоузгоджене рівняння руху, в якому до сили Лоренца  $eF^{\mu\nu}u_\nu$  додається сила радіаційного тертя, має вигляд

$$m \frac{du^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}u_\nu + \frac{2e^2}{3} \left( \frac{d^2u^\mu}{ds^2} + \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} u^\mu \right) \quad (1.1)$$

(рівняння Лоренца-Абрагама-Дірака). Якщо виключити в правій частині похідні 4-швидкості  $u^\mu$  вище першої з того ж рівняння (1.1), у другому наближенні виникає рівняння

$$m \frac{du^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}u_\nu + \frac{2e^2}{3} \left\{ \frac{e}{m} u_\nu u^\lambda \partial_\lambda F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{m^2} [(F^{\lambda\nu}u_\nu)^2 u^\mu - F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} u^\nu] \right\}, \quad (1.2)$$

відоме як рівняння Ландау-Ліфшиця [64]. В (1.2) проблема самоприскорення заряду вже відсутня, хоча, зважаючи на наявність 4-градієнта від напруженості електромагнітного поля, сила з його боку виявляється не зовсім локальною (втім, в однорідному і статичному полі такий ефект відсутній). Члени у другому рядку рівняння (1.2) можуть бути перевиражені у вигляді

$$(F^{\lambda\nu}u_\nu)^2 u^\mu - F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} u^\nu = 4\pi (\delta_\lambda^\mu - u^\mu u_\lambda) T^{\lambda\nu} u_\nu, \quad (1.3)$$

де  $T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{4\pi} (-F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\nu}^{\mu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda})$  – тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля [64]. В системі спокою електрона, де  $u^{\mu} = (1, \vec{0})$ , відповідна сила спрямована вздовж вектора Пойнтінга  $4\pi T^{0\alpha} = [\vec{E}\vec{H}]^{\alpha}$ , тобто представляє дію тиску електромагнітного поля (пондеромоторна сила) [79]. Ця сила є квадратичною по тензору напруженості електромагнітного поля, але спрямована не антипаралельно вектору прискорення, тобто електричного поля  $\vec{E}$ , а перпендикулярно йому.<sup>2</sup> Таким чином, частинка може відчувати магнітне поле  $\vec{H}$  навіть у нульовому порядку за швидкістю, але при цьому у вищому порядку по заряду. Проте, залишаються питання, чи вичерпує дане наближення всі ефекти радіаційного тертя, і чи не дозволяють рівняння (1.2) обернення в часі, призводячи лише до перевизначення понять зовнішнього поля і/або електромагнітної маси і 4-імпульсу електрона. Дані проблеми активно обговорюються і понині [79–87].

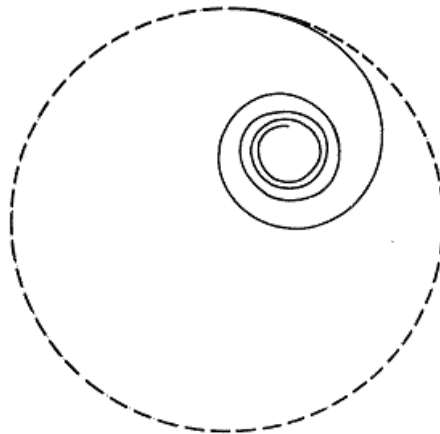
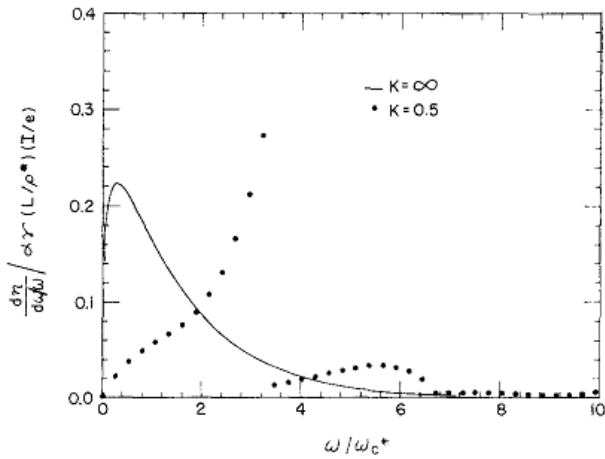


Рис. 1.2. Розрахунок радіаційного гальмування ультра-релятивістського електрона в магнітному полі [88].

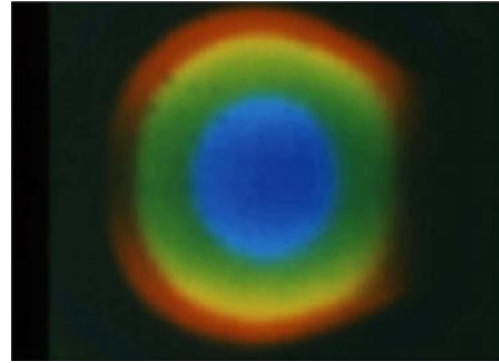
Для напіврелятивістських частинок застосовується метод гамільтоніана Дарвіна [64], тоді як для ультра-релятивістських частинок врахування гальмування випромінюванням спрощується тим, що втрата енергії стає еквівалентною втраті поздовжнього імпульсу [79, 88, 89] (див. Рис. 1.2). У прискорювачах поздовжні втрати енергії компенсуються електричним по-

<sup>2</sup>Також вона, взагалі кажучи, не є антипаралельною швидкості електрона, як припускав Лармор на основі теорії ефіру.

лем, в той час як гальмування випроміненням зменшує амплітуду бетатронних коливань [90–92] (тотожність для суми декрементів відома як правило сум Робінсона).



(а)



(б)

Рис. 1.3. а). Вимірний спектр ондуляторного випромінення при відносно невеликому параметрі недипольності  $K$  [93]. Суцільна крива показує спектр синхротронного типу, до якого має наближатися спектр випромінення вігглера ( $K \rightarrow \infty$ ). б). Кутовий розподіл ондуляторного випромінення у видимому діапазоні [94].

**1.2.4. Ондулятори.** Побічна користь від синхротрона як джерела електромагнітного випромінення, а не лише прискорювача заряджених частинок, поставила питання, чи є він для цієї мети оптимальним. Було запропоновано [95, 96], що вигідніше було б пропускати електрони по черзі крізь магніти різної полярності, в яких електрон здійснює періодичні коливання відносно швидкого поздовжнього руху. В роботі Мотта такий рух був названий ондуляторним. Перший ондулятор був незабаром побудований [97], і в подальшому ці пристрої набули популярності, хоча і не витіснили синхротрони. У сучасних прискорювачах ондулятори часто вбудовують у прямолінійні ділянки синхротронів або накопичувальних кілець, що об'єднує їх переваги, використовуючи пучок когерентним чином, і водночас циклічно [71, 98, 99]. Ондулятори працюють приблизно в тій самій спектральній

області, що і джерела синхротронного випромінення, але можуть бути де-що жорсткішими (від НВЧ до гама) і значно яскравішими [94, 100]. Якщо спостерігати ондуляторне випромінення у видимому світлі, то через наявність сильної кореляції між частотою та кутом випромінювання, світлова пляма виявляється забарвленою в райдужні тони (див. Рис. 1.3).

**1.2.5. Взаємодія ультра-релятивістських заряджених частинок з лазерами.** Роль періодичного зовнішнього поля, яке діє на пучок електронів, може відігравати не тільки фіксована мішень, але й монохроматична електромагнітна хвиля (світло). Принцип дії при цьому той самий, що і в ондуляторі, але довжина хвилі світлових квантів є мікроскопічною. В залежності від інтенсивності лазера, можливий режим поглинання окремих фотонів або класична електромагнітна хвиля. При поглинанні зустрічного фотона, електрону вигідно випустити вперед гама-квант, який забирає велику частину енергії, щоб відносно м'який віртуальний електрон міг «підхопити» лазерний фотон. Таким чином можна також отримувати вельми монохроматичні пучки гама-квантів [101], але опис такого процесу відноситься до квантової електродинаміки (див. нижче). Якщо ж лазерний промінь скерований по ходу пучка, генерується стимульоване випромінювання (підсилювач лазера на вільних електронах [99]).

### **1.2.6. Поляризаційне випромінювання.**

**1.2.6.1. Черенковське випромінювання.** Тим часом, в електродинаміці суцільних середовищ були виявлені види випромінювання, що виникають навіть при прямолінійному русі зарядженої частинки, і, таким чином, не залежать від її маси, а лише від швидкості. У квазіоднорідному середовищі таким є черенковське випромінювання, відкрите експериментально (1934) П. Черенковим при проходженні пучка гама-квантів крізь воду, як люмінесцентне сяйво під певним кутом, що залежить від середовища. Після додаткових експериментальних досліджень [102], правильне пояснення ефекту (який походить від вторинних, комптонівських електро-

нів, що вибиваються гама-квантами в мішені, а потім випромінюють) було дано Вавіловим [103]. Незабаром була побудована і теорія цього ефекту як електромагнітної «ударної хвилі» від понадсвітлових електронів [104–106]. У своїй статті Тамм і Франк відзначили аналогічну роботу Зоммерфельда щодо випромінювання від понадсвітлового електрона в вакуумі, опубліковану до створення спеціальної теорії відносності. Даний вид випромінювання, названий черенковським, увійшов до більшості підручників з електродинаміки [107–110], і, з огляду на прозорість середовищ в оптичному діапазоні, ліг в основу ефективних методів детектування релятивістських заряджених частинок з помірно великими Лоренц-факторами (електронів в нейтринних експериментах або важких адронів на колайдерах) [111–113]. Лише через кілька десятиліть по тому було виявлено [114–117], що задача про випромінювання при понадсвітловому русі в діелектрику розглядалася ще в 1888 р. Хевісайдом [118], а черенковське сяйво від електронів, що випускаються радіоактивними джерелами спостерігалось в 1910 Марією Склодовською-Кюрі, і в 1926 вивчалось П. Малле [116].

**1.2.6.2. Перехідне випромінювання.** У той час як черенковське випромінювання генерується в об'ємі мішені, додаткове випромінювання виникає на її границях, внаслідок заломлення поля пролітаючої швидкої частинки, причому симетрично по напрямках вперед-назад, що незвично для релятивістської фізики. Таке випромінювання отримало назву перехідного [119]. Фактично, в дослідях [120,121] воно спостерігалось набагато раніше, але для нього (на відміну від черенковського) не була своєчасно знайдена вірна інтерпретація. Пізніші експериментальні дослідження [122,123] підтвердили передбачення теорії [119]. Незважаючи на поляризаційне походження такого випромінювання, виявилось, що воно доволі швидко зсувається у бік високих частот зі зростанням Лоренц-фактора пролітаючої зарядженої частинки (див. Рис. 1.4), і сьогодні широко використовується для отримання когерентного рентгенівського випромінювання в періодичних мішенях [109, 124–126], або для детектування вторинних частинок з

Лоренц-факторами  $\gamma \gtrsim 10^3$  (електронів, піонів), і зокрема, їх розрізнення.

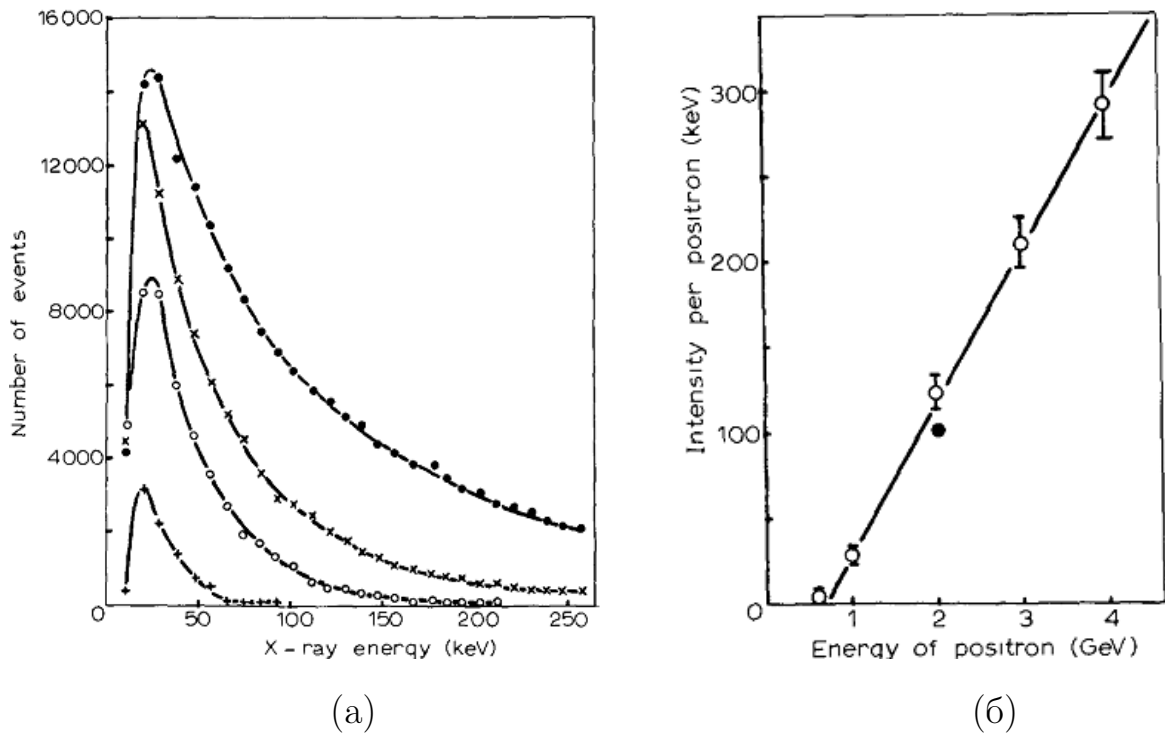


Рис. 1.4. а). Спектр перехідного випромінювання, виміряний для енергій позитронів 1, 2, 3 і 4 Гев (знизу вгору) на алюмінієвій мішені. б). Повна енергія перехідного випромінювання [127].

**1.2.6.3. Інші види поляризаційного випромінювання.** Випромінювання, аналогічне перехідному, викликають взагалі будь-які внутрішні неоднорідності в речовині, в тому числі завжди присутня атомна структура. Подібні види випромінювання узагальнено називаються поляризаційними [128–131]. Якщо речовина є аморфною, в ній можливе поляризаційне випромінювання на окремих атомах, в спектрі якого виділяються піки характеристичного рентгенівського випромінювання. Якщо речовина є кристалічною, можливе так зване параметричне рентгенівське випромінювання [124, 125, 132–135], при якому кулонівське поле швидкої частинки дифрагує (відчуває бреггівські відбиття) на сімействах атомних площин. Нарешті, зарядженій частинці навіть необов'язково проходити крізь мішень: достатньо пройти поблизу її поверхні [135–138].

**1.2.7. Гальмівне випромінювання.** У разі якщо крізь щільну мішень проходить електрон, завдяки своїй легкості, він передусім буде випромінювати внаслідок своїх власних прискорень при зіткненнях з атомами речовини. Такий вид випромінювання отримав назву гальмівного (bremsstrahlung). Взагалі кажучи, енергії окремих випромінюваних фотонів при цьому можуть бути співмірними з енергією ультра-релятивістського електрона, тому опис даного процесу вимагає квантового підходу (див. нижче). Однак, в області відносно низьких частот придатне і класичне трактування, в якому спектр виявляється незалежним від частоти [108,139]. За аналогією з відповідним результатом, вперше отриманим у квантовій електродинаміці (див. нижче), це плато називають спектром Бете-Гайтлера. При найменших  $\omega$  може знадобитися враховувати ще й ефект діелектричної проникності середовища [124].

**1.2.7.1. Недипольні ефекти.** У дипольному наближенні, при заданому масштабі переданих імпульсів  $q_{\perp}$ , інтенсивність випромінювання обернено пропорційна квадрату маси частинки:  $dI/d\omega \sim (q_{\perp}/m)^2$ , внаслідок чого частинками, що випромінюють найінтенсивніше, є електрони та позитрони. Однак, коли викривлення траєкторії електрона стає значним, його маса перестає відігравати вирішальну роль для випромінювання. При цьому поздовжній масштаб, на якому позначається кривизна траєкторії, визначається частотою випроміненого фотона. Таким чином, на достатньо низьких частотах випромінювання, і в достатньо товстих мішенях, де накопичуються великі кути відхилення, поведінка спектральної щільності випромінювання може якісно змінитися. Як було доведено Ландау і Померанчуком [140], спектр випромінювання на одиницю довжини в товстій аморфній мішені в області малих частот прямує до нуля за законом

$$\frac{dI}{dt d\omega} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{d\langle \chi^2 \rangle}{dt}} \omega. \quad (1.4)$$

Тут коефіцієнт пропорційності  $\sqrt{\frac{d\langle \chi^2 \rangle}{dt}}$  обернено пропорційний енергії зарядженої частинки, але не залежить від її маси. Кількісна теорія ефекту

пригнічення в усій області спектра, в тому числі з урахуванням квантових ефектів, була побудована Мигдалом [141], тому це явище пригнічення отримало назву ефекту Ландау-Померанчука-Мигдала (ЛПМ). У повній теорії присутня вже й залежність від Лоренц-фактора зарядженої частинки.

Якісний аналіз причин, що призводять до пригнічення спектральної щільності випромінення при малих  $\omega$ , привів до формулювання загального поняття довжини формування фотона [142]:

$$l_f = \frac{2}{\omega(\gamma^{-2} + \theta^2)} \quad (\hbar\omega \ll E), \quad (1.5)$$

де  $\theta$  – кут випромінення. Воно виявилось застосовним і до синхротронного [143–146], а також до інших типів випромінювання. Також воно обговорювалося на рівні елементарного процесу випромінювання при дворазовому розсіянні електрона на кути, які значно перевищують типові кути випромінення (останні мають масштаб оберненого Лоренц-фактора) [147, 148] – див. Рис. 1.5а. Поняття довжини формування фотона дозволило пояснити поведінку радіаційних спектрів у багатьох задачах з єдиного погляду, і лягло в основу низки монографій [124, 143, 145]. Для дипольного випромінювання, коли типові кути  $\theta \lesssim \gamma^{-1}$ , можна замінити (4.199) простішим виразом  $l_0 = 2\gamma^2/\omega$ .

В теорії Мигдала процес багаторазового розсіювання в речовині вважається гауссовим. З урахуванням аномального характеру кулонівського розсіювання, як було показано в [149], інфрачервона асимптотика спектра випромінення дещо змінюється, набуваючи додаткового логарифмічного множника. В подальшому, концепція ЛПМ-пригнічення була перенесена і на глюонне випромінювання та втрати енергії в кварк-глюонній плазмі (див. огляд [150]).

**1.2.7.2. Крайові ефекти в гальмівному випромінюванні.** В ефекті ЛПМ середовище вважається квазі-безмежним, а результуючий спектр випромінювання прямує до нуля при  $\omega \rightarrow 0$ . На практиці ж, з урахуванням скінченної товщини мішені, спектр випромінення при  $\omega \rightarrow 0$



залишається відмінним від нуля, хоча і не пропорційний товщині мішені (див. Рис. 1.5а). Як було відзначено в роботах [151, 152], він визначається кінцевим кутом розсіювання електрона (факторізаційна межа [153]), усередненим по статистичному розподілу по кутах розсіювання в мішені. У проміжній області частот, послідовні розрахунки призводять до доволі громіздких формул [154–156]. Виявляється, що внесок до спектра випромінення тільки від однієї межі розділу між вакуумом та аморфним середовищем при  $\omega \rightarrow 0$  необмежено зростає за логарифмічним законом [157]. Це зростання (подібне до поведінки спектра перехідного випромінення на одній границі [79]) зупиняється інтерференцією випромінення від двох границь.

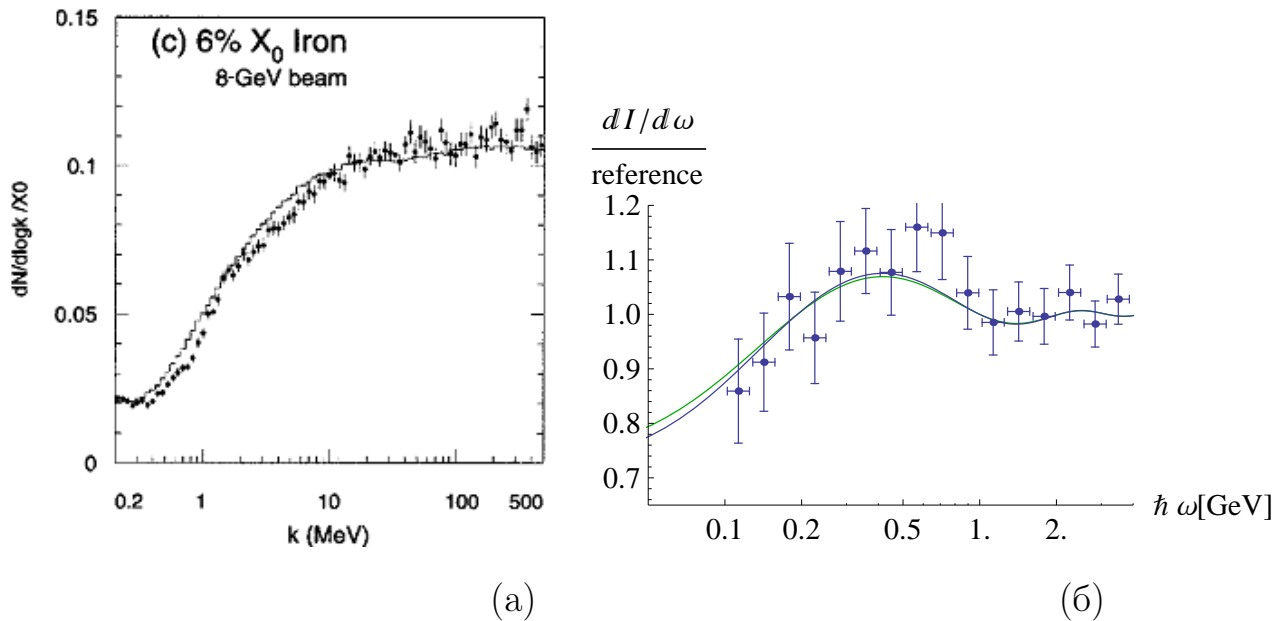


Рис. 1.5. а). Вимірний спектр випромінення при проходженні електронів 8 Гев крізь аморфну фольгу [158]. Пригнічення спектра при  $k < 10$  МеВ пов'язане з ефектом ЛПМ. При  $k < 0.2$  МеВ (в рентгенівській області) в спектрі присутній підйом, пов'язаний з перехідним випромінюванням на межі метал-вакуум. б). Вимірний спектр випромінення при проходженні електронів 178 Гев крізь дві аморфних фольги розділені відстанню 0.1 мм [159]. Криві – теоретичні розрахунки [7].

У складніших, структурованих мішенях (що складаються, наприклад, з декількох аморфних фольг) було виявлено [156, 160], що в спектрі ви-

промінювання перехід від інфрачервоної границі до плато Бете-Гайтлера може бути не монотонним, а містити осциляції, коли довжина формування фотона стає співмірною з одним з геометричних масштабів (наприклад, відстанню між фольгами – див. Рис. 1.5б). Такий ефект можна вважати аналогічним інтерференції випромінювання електрона в прямолінійній ділянці накопичувального кільця (див. Розділ 1.2.2).

### **1.3. Кінетика проходження крізь аморфну речовину.**

#### **Квантові ефекти**

**1.3.1. Багаторазове кулонівське розсіювання.** Первинним впливом середовища на швидку частинку, що проходить крізь нього, є багаторазове розсіювання на атомах. Воно призводить до викривлення траєкторій частинок. У першому наближенні таке розсіювання можна розглядати як пружне, що відбувається в екранованому кулонівському потенціалі статичних атомів, оскільки переріз когерентного розсіювання в кулонівському полі ядра пропорційний квадрату його заряду, що значно перевищує суму внесків від перерізів розсіювання на окремих електронах. Вперше така постановка задачі виникла в досліджах одноразового розсіювання, які проводилися в лабораторії Резерфорда, де мішені робилися тонкими, але тим не менш, суттєвим було також і перерозсіювання (plural scattering) [161, 162].

**1.3.1.1. Кутовий розподіл.** Якщо знехтувати відносними втратами енергії для швидких частинок і вважати кути розсіювання малими, розподіл ймовірності по ним описується лінійним транспортним рівнянням в площині поперечних переданих імпульсів, яке в поперечно-однорідному середовищі розв'язується у загальному вигляді перетворенням Фур'є [162, 163]. З огляду на еквівалентність процесу багаторазового малокутового розсіювання випадковому блуканню в поперечній площині, можна очікувати, що для великої товщини розподіл має прямувати до гауссового [161, 163].

Певні складнощі виникають, однак, з урахуванням того, що атомні по-

ля мають кулонівські сингулярності, внаслідок чого середній квадрат кута відхилення в малокутовому наближенні розходиться. Тоді може бути доцільним вручну розділяти м'які (гауссові) та жорсткі (ступінні) внески в функцію розподілу, як було запропоновано Вільямсом [164], за аналогією з його підходом [165] в іонізаційних втратах енергії (див. нижче). З погляду теоретичної фізики, втім, такий підхід видається надто штучним, і був замінений Мольєром більш послідовним розкладенням по оберненим ступеням логарифма великої товщини мішені [166, 167] (див. Рис. 1.6). Після огляду Бете [168] ця процедура набула статусу стандартної (див. [169]).

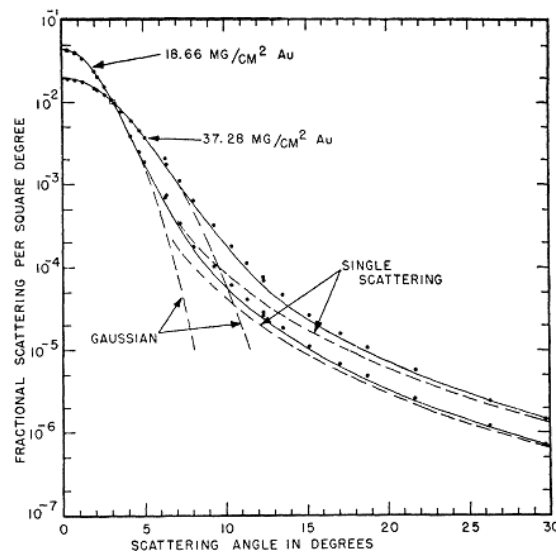


Рис. 1.6. Одне з перших вимірювань кутового розподілу багаторазового кулонівського розсіяння з високою статистикою, що показує перехід від центральної області кутів до резерфордівської ступінної асимптотики [170]. Суцільні криві (дещо неточні в перехідній області) обчислені за теорією Мольєра. Видно існування області, проміжної між центральною областю гауссівського розсіяння та «хвостом» одноразового розсіяння, і співмірної за розміром з центральною.

Огляд подальших удосконалень, які пропонувалися, можна знайти в статті Скотта [171]. Зокрема, була виділена залежність від знаку заряду, яка може проявлятися при не дуже високих енергіях [172, 173]. В теорії Мольєра ця залежність включається в єдиний феноменологічний параметр –

кут екранування  $\chi_a$ , який виражається через диференціальний переріз розсіяння швидкої частинки на атомі, і тому, в принципі, залежить не лише від атома, але й від налітаючої частинки. Для обчислення цього параметра Мольєром [166] було запропоновано апроксимацію атомного потенціалу у вигляді суперпозиції експоненційно екранованих кулонівських полів (потенціал Мольєра) та вперше застосоване ейкональне наближення.<sup>3</sup> На основі цих результатів Мольєр запропонував також параметризацію для кута екранування

$$\chi_a = \chi_0 \sqrt{1.13 + 3.76 \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \right)^2}, \quad (1.6)$$

де  $Z_1 e$ ,  $Z_2 e$  – заряди частинок, що стикаються,  $v$  – швидкість зіткнення. В радіус екранування можна включити також і внесок непружних процесів [179].

З огляду на те, що результати теорії Мольєра, взагалі кажучи, виражаються лише в інтегральній формі, що не надто наочно, для практичних застосувань були запропоновані також евристичні спрощені формули. У них виділяється центральна частина розподілу ймовірності, яка апроксимується гауссіаном, але відповідний середній квадрат кутового відхилення залежить від товщини мішені не лінійно, а з логарифмічною поправкою [180, 181]. Використання подібних наближень може бути достатнім в експериментах з помірною статистикою, і в мішенях середньої товщини.

**1.3.1.2. Поперечно-неоднорідні мішені.** При високій енергії просторові флуктуації траєкторій частинок в мішені є малими, але для деяких задач їх все ж необхідно враховувати. Вперше об'єднаний розподіл по поперечних координатах та кутах відхилення був обчислений Фермі, для гауссової дифузії [182]. В подальшому Янгом [183] було обчислено розподіл частинок в аморфному середовищі по поперечних координатах і по довжи-

---

<sup>3</sup>Це наближення, яке дозволяло в простій формі вийти за межі теорії збурень при достатньо високій енергії, в подальшому стало широко застосовуватися в ядерній фізиці [174–177] та фізиці елементарних частинок [178].

нах пробігів внаслідок викривлення траєкторії в мішені заданої товщини. Як відзначалося ще Вільямсом [165], знання розподілу по довжинах пробігів необхідне для розрахунку страгглінга іонізаційних втрат. Врахування просторової еволюції стає необхідним також коли в мішені присутні неоднорідності на такому ж малому масштабі, як і просторове розширення пучка. Найпростішим прикладом є падіння пучка під малим кутом на поверхню напівнескінченної аморфної мішені.<sup>4</sup> Відповідна стаціонарна крайова задача була розв'язана Фірсовим [186], привівши до висновку, що пучок, в принципі, повинен повністю відбиватися, набуваючи кутового розподілу

$$\frac{dw_{\text{refl}}}{d\chi} = \frac{3}{2\pi} \frac{\chi_0^{1/2} \chi^{3/2}}{\chi_0^3 + \chi^3}, \quad (1.7)$$

незалежного від коефіцієнта дифузії ( $\chi_0 \ll 1$  позначає кут падіння). Значно складніша, але і реалістичніша задача про багаторазове розсіяння моноенергетичного пучка при падінні під малим кутом на плоскопаралельну аморфну пластину була розв'язана в [187], теж привівши до достатньо простого результату:

$$\frac{dw_{\text{refl}}}{d\chi} = \frac{3}{2\pi} \frac{\chi_0^{1/2} \chi^{3/2}}{\chi_0^3 + \chi^3} e^{-\frac{\chi_0^3 + \chi^3}{9Dl}}, \quad (1.8)$$

де  $l$  – товщина пластини,  $D$  – коефіцієнт дифузії по кутах. Передбачені ефекти відбиття та відхилення при проходженні згодом тестувалися експериментально [188, 189].

**1.3.2. Іонізаційні втрати енергії.** Оскільки непружні процеси відбуваються з ненульовою ймовірністю, швидкі частинки, проходячи крізь речовину, поступово гальмуються, і в достатньо товстій мішені зупиняються. Принцип розрахунку швидкості гальмування швидкої частинки через передачу енергії точковим атомним електронам був сформульований Томсоном ще до визначення правильної моделі атома. Після появи планетарної

<sup>4</sup>Складніша, але теж важлива для практики задача про колімацію пучка краєм розсіюючої та гальмуючої пластини скінченної товщини розглядалася Курантом [184], використовуючи спрощену краєву умову, яка задовольняється методом зображень. Проте, отримана функція розподілу не була скрізь позитивною, і дещо відрізнялася від результатів чисельного моделювання [185].

моделі атома [190], метод Томсона був застосований до неї Дарвіном [191], який отримав:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{2\pi n_a Z_a (Ze^2)^2}{m_e v^2} L, \quad (1.9)$$

де  $m_e$  – маса електрона,  $Z$  – заряд швидкої частинки,  $Z_a$  – атомний номер речовини, а  $n_a$  – щільність атомів, так що  $n_a Z_a$  дає щільність електронів в речовині. Решта коефіцієнтів в (1.9) виникають як  $\Delta E_1 \sigma_1$ , де, в силу масштабної інваріантності нерелятивістського класичного розгляду,  $\sigma_1 \sim \pi(\Delta b)^2 \sim \pi \left( \frac{Ze^2}{\Delta E_1} \right)^2$  – переріз зіткнення при кулонівській взаємодії,  $\Delta E_1 \sim m_e v^2 / 2$  – витрата енергії на іонізацію в одному зіткненні.

Результат (1.9), однак, містив логарифмічне розходження  $L$ , обрізання якого проводилося евристично, за порядком величини. Уточнений принцип обрізання, виходячи з часових, а не просторових міркувань (хоча в ультра-релятивістському випадку різниця між ними зникає<sup>5</sup>) був запропонований Н. Бором [108, 192–194]:

$$L = \ln \frac{T_{\max}^2}{I^2} + \mathcal{O}(v^2/c^2), \quad (1.10)$$

де  $T_{\max} = 2mv^2$  – максимальна енергія, яка може бути передана нерелятивістською налітаючою частинкою атомному електрону (в «лобовому» зіткненні), з параметром  $I$ , в класичній механіці пропорційним  $Z$  та частоті обертання електрона в атомі.

Строгий розрахунок потребував залучення квантової механіки. Після декількох невдалих спроб (див. їх огляд в [195]), він був виконаний молодим Х. Бете, який, повністю відмовившись від класичного уявлення про прицільні параметри, провів всі обчислення в імпульсному представленні квантової механіки [144, 196, 197]. В результаті, за великим рахунком, була отримана формула Бора, але з чітко визначеним (і незалежним від  $Z$ ) параметром  $I$ , названим потенціалом іонізації, а згодом і з релятивістськими поправками. Пізніше, втім, було доведено [195, 198], що при високих енер-

---

<sup>5</sup>Врахування релятивістських ефектів не позначається на передлогарифмічному множнику, оскільки електрони, вибиті при далеких зіткненнях, залишаються нерелятивістськими.

гіях уявлення про прицільні параметри є придатним і в квантовій механіці (і більш того, є найбільш природним в суттєво неоднорідних середовищах, таких як кристали). Бете також відзначив зв'язок іонізаційних втрат ультра-релятивістської частинки з комптонівським розсіюванням, який раніше досліджувався Фермі [199].

Вихід за рамки теорії збурень по взаємодії атомних електронів з кулонівським полем швидкої частинки був здійснений Блохом [200], який отримав відповідну поправку до формули Бете:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi n_a Z_a (Ze^2)^2}{m_e v^2} \left[ \ln \frac{T_{\max}}{I} - f \left( \frac{Ze^2}{\hbar v} \right) \right], \quad (1.11)$$

$$f(s) = \Re [\psi(1 + is) - \psi(1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2}{n(n^2 + s^2)}. \quad (1.12)$$

Завдяки кулонівській поправці  $f$ , у формулі (1.11) можна перейти до класичної межі  $\frac{Ze^2}{\hbar v} \rightarrow \infty$ , в якій під логарифмом з'являється відношення  $\frac{\hbar v T_{\max}}{Ze^2 I}$ .

Окрім середніх втрат енергій, була обчислена також іонізація (ionization rate) – середнє число утворених в речовині електрон-іонних пар. Проте, для останньої величини суттєве значення набуває рекомбінація. Разом з вимірюванням імпульсу частинки по відхиленню в магнітному полі, іонізація використовується для визначення її маси. За аналогією з іонізацією може бути побудована і теорія радіаційного утворення дефектів (radiation damage) [201].

У цитованих вище роботах [191,192,196] зіткнення швидких заряджених частинок з атомами трактувалися як незалежні, і таким чином, речовина уявлялася як сума атомів (правило Брега). Згодом Фермі [202] і, дещо раніше, на якісному рівні, Сванном [203], у зв'язку з фізикою проходження космічних променів крізь речовину було уточнено, що для далеких зіткнень слід розглядати не сприйнятливність одного атома, а діелектричну проникність речовини в цілому. Більш того, на атомних частотах, коли зв'язані електрони поведуться як квазівільні, речовину слід трактувати як електрон-іонну плазму, а в плазмі електричні поля експоненційно екрану-

ються на далеких відстанях. Це призводить до зупинки асимптотичного логарифмічного зростання з енергією за рахунок дальніх зіткнень (ефект щільності Фермі), хоча, в принципі, не перешкоджає зростанню за рахунок близьких зіткнень, з великою передачею енергії [204, 205].<sup>6</sup> Окрім ефекту щільності, існує також поправка на ефект оболонок [добавка до (1.9), не пропорційна  $Z_a$ ], і залежність від знаку заряду (ефект Баркаса), яка теж враховується введенням відповідної адитивної поправки [206].

З урахуванням імовірнісного характеру зіткнень як у класичній, так і у квантовій механіці [207], окрім загального уповільнення виникає ще й статистичний розкид часток по енергіях. Відповідна флуктуація (straggling) вперше обчислювалася Бором [208], і було знайдено, що для важких частинок розподіл прямує до гауссового. Випадок електронів був пізніше розглянутий Вільямсом [165], який, зберігши ідею Бора про розбиття області переданих енергій на «м'які» та «жорсткі», показав, що розподіл набуває ступінного «хвоста» в бік великих передач енергії, завдяки внеску «лобових» зіткнень з атомними електронами. На думку Вільямса, в принципі, також можливо було побудувати загальний розв'язок, що не вдається до штучного розбиття, але він не має особливої практичної цінності. Лише 15 років по тому Ландау [209] (без згадки робіт Бора та Вільямса) побудував такий розв'язок, з якого випливало, що між м'якими та жорсткими областями існує логарифмічна перехідна область, і саме вона дає головний внесок, а функція розподілу на великих товщинах прямує не до гауссіану, а до іншого універсального розподілу, який в подальшому отримав назву розподілу Ландау (див. Рис. 1.7) [210].

Сучасна теорія страгглінга будується також з урахуванням поправки на ефект щільності та споріднені ефекти [212]. Іонізаційні втрати в напівпровідниках можуть бути вельми точно виміряні по електричному струму, що дозволяє конструювати на їх основі ефективні детектори [213]. Такі детектори дозволяють точно вимірювати енергії нерелятивістських прото-

---

<sup>6</sup>Таке зростання, однак, може обмежуватися самим методом реєстрації іонізаційних втрат енергій.



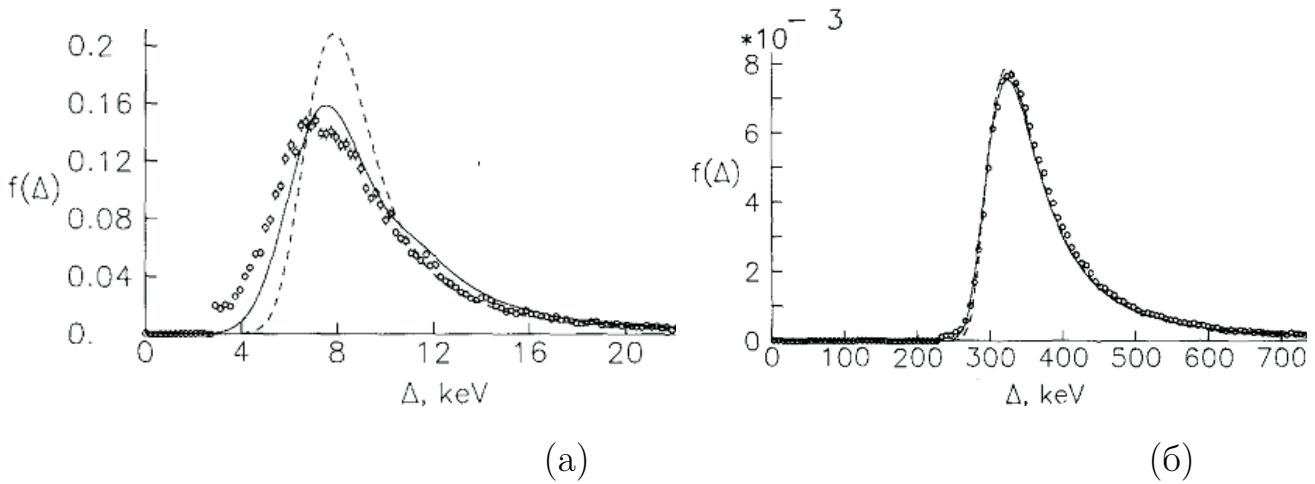


Рис. 1.7. Виміряні розподіли по іонізаційним втратам енергії протонів 2 Гев в кремнії товщиною 32 мкм (а) і 1 мм (б) [211]. В тонких мішенях розподіл Ландау (пунктирні криві) не застосовний.

нів. Для ультра-релятивістських же частинок, коли іонізаційні втрати вже слабо залежать від енергії, вони можуть використовуватися як лічильники заряджених частинок (наприклад, в електромагнітних зливах – див. нижче).

Для визначення пробігів частинок розрахунок багаторазового розсіювання і втрат енергії повинен проводитися єдиним чином. Огляд результатів в рамках таких підходів можна знайти в монографіях [214, 215].

Кількість каналів реакцій при зіткненнях заряджених частинок з атомами насправді доволі велика, тому може виникнути потреба врахування взаємодії також між більш ніж двома частинками. При цьому складеним може бути не тільки атом мішені, але й налітаючий об'єкт. Прикладами таких процесів є перезарядка іонів [169, 216], народження гама-квантом електрон-позитронної пари (що вперше розглядалося в тій самій роботі Бете і Гайтлера [217], що і гальмівне випромінювання – див. нижче), або пружне розсіяння гама-кванта в полі ядра шляхом утворення віртуальної електрон-позитронної пари (ефект Дельбрюка) [218]. Нарешті, ефекти декількох частинок можуть об'єднуватися з істинно макроскопічними ефектами, як, наприклад, при розрахунку іонізаційних втрат від народженої

реальної електрон-позитронної пари. Зменшення втрат через взаємне скорочення полів електрона та позитрона на початковій стадії їх розльоту відоме як ефект Кінга-Перкінса-Чудакова. Цей ефект, відкритий практично одночасно (і незалежно) теоретично [219] і експериментально [220], взагалі кажучи, вимагає застосування квантової електродинаміки [221], але в головному логарифмічному наближенні допускає квазікласичне трактування [222, 223]. Результати нових вимірювань і аналіз сучасного стану проблеми див. в [224].

#### 1.4. Квантова теорія випромінювання

Подальший розвиток квантової теорії і створення квантової електродинаміки дозволили уточнити передбачення щодо пружного розсіювання електронів на атомних ядрах [225–228] і один на одному в області значних передач імпульсу, а також відкрило можливості описувати істотно квантові процеси гальмівного випромінювання і народження електрон-позитронних пар. Незважаючи на те, що при високій енергії електрона передані йому з боку речовини імпульси є малими порівняно з його масою, внаслідок поперечної віддачі при випусканні типового жорсткого фотона, електрон може зазнати перевероту спіну, тому для послідовного розрахунку необхідно використовувати рівняння Дірака (1928). Спершу, однак, був розвинений феноменологічний підхід на основі методу еквівалентних фотонів [198, 229], в дусі методу, запропонованого Фермі [199] для іонізаційних втрат.

Невдовзі після того, як рівняння Дірака було випробувано на процесах  $ee$ ,  $e^+e^-$ ,  $eA$  розсіювання, атомних спектрах і Комптон ефекті, воно було застосоване і до задачі про гальмівне випромінювання (див. Рис. 1.8). У борнівському наближенні по взаємодії з атомом цей процес можна розглядати як віртуальний Комптон-ефект (фотон, яким електрон обмінюється з ядром, має 4-імпульс поза світловим конусом). Віртуальність одного з фотонів вже відчутно ускладнює завдання підсумовування по поляризаціях електрона, але це було здійснено в [217, 230]. Для ультра-релятивістського

випадку результат в подальшому був спрощений в [231, 232], де також була досліджена залежність поляризації випромінюваних фотонів від кута їх випускання. Зокрема, було виявлено, що коли кут випромінення точно дорівнює оберненому Лоренц-фактору, поляризація може досягати 100% [231]. Ще більше спрощень надає згадуваний вище метод еквівалентних фотонів у поєднанні з рівнянням Дірака – дипольне наближення.

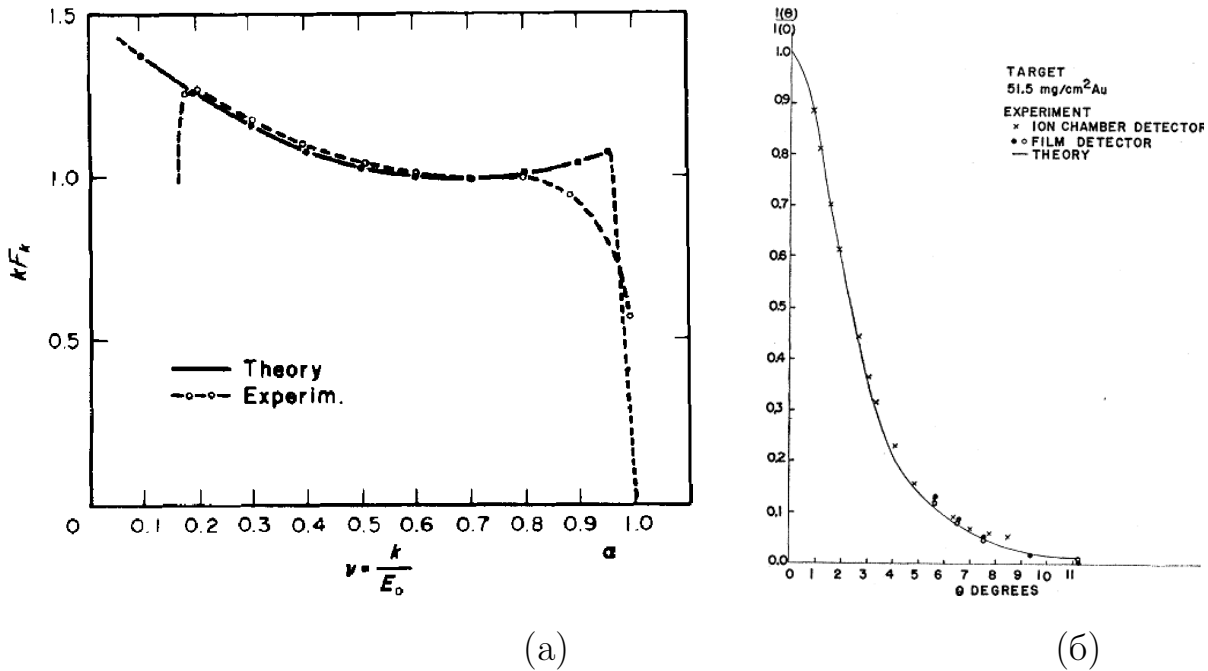


Рис. 1.8. а). Вимірний спектр гальмівного випромінювання від електронів енергією 1.5 Гев [233]; б). Кутовий розподіл гальмівного випромінювання від електронів енергією 17 Мев. Точки – експеримент з мішенями у вигляді фольги та іонної камери [234]. Лінія – розрахунок [235], з урахуванням багаторазового розсіювання електронів в мішені по теорії Мольєра.

#### 1.4.1. Непертурбативний опис гальмівного випромінювання.

Розрахунок Бете-Гайтлера і цитовані вище його спрощення базувалися на трактуванні взаємодії між електроном та атомом у найнижчому порядку теорії збурень (борнівському наближенні). Параметром розкладення при цьому є  $Ze^2/\hbar v$ , де  $Z$  – заряд ядра атома, а  $v$  – швидкість зіткнення. З огляду на те, що для атомів з високим атомним номером ( $Z \gg 1$ ) ця величина може досягати порядку одиниці [236, 237], важливо вміти розраховувати

взаємодію електрона з кулонівським полем і поза рамками теорії збурень. Це було зроблено за аналогією з підходом Зоммерфельда [238, 239] для гальмівного випромінення нерелятивістського електрона, використовуючи наближену релятивістську хвильову функцію [240, 241], аналогічну точній нерелятивістській кулонівській [242, 243], і враховуючи спін-орбітальну взаємодію при невеликих переданих імпульсах наближено (через градієнтний доданок). Навіть на цьому шляху, втім, розв'язок був отриманий не відразу: розрахунки [244, 245] невірно враховували умову причинності (див., однак, [246]), тоді як дисертація Елверта [247] свого часу була опублікована лише частково [239, 248], а повністю – через 30 років [249]. Непертурбативні ефекти для гальмівного випромінювання на окремому атомі виявляються відносно невеликими. В цілому, вони є пригнічуючими як за рахунок зменшення радіусу екранування з  $Z$ , що призводить до головного члена  $\ln \frac{1}{\alpha Z^{1/3}}$ , так і за рахунок плавності руху електрона всередині атома, що дає кулонівську поправку  $-f(Z\alpha)$ , де  $f$  визначається формулою (1.12). Проте, автори [236, 237] не помітили аналогії між радіаційними та іонізаційними втратами енергії, відомої з методу еквівалентних фотонів. Огляд досліджень фундаментального процесу випромінювання електрона на атомі можна знайти в [250–252].

Розвиток теорії ейконального наближення при високій енергії [166, 174, 197, 240] в подальшому дозволив врахувати в рамках непертурбативного підходу екранування кулонівського поля [253] (яке є суттєвим для випромінювання ультра-релятивістських електронів [230]). У рівнянні Дірака навіть у високоенергетичному ліміті залишається незникаючий фазовий множник, що залежить від координат. У матричному елементі випромінювання ці множники з хвильових функцій початкового і кінцевого електронів комбінуються. Узагальнюючий результат [253] також став одним із ключових у теорії електромагнітних процесів в речовині при високих енергіях.

### 1.4.2. Квантові ефекти в синхротронному випромінюванні.

Теорія збурень квантової електродинаміки не задовольнила всіх потреб експериментальної фізики, оскільки на практиці існують електромагнітні поля, які діють на електрон як завгодно довго. В деяких випадках вдається точно розрахувати хвильові функції електрона в зовнішньому полі поза рамками теорії збурень і обчислити амплітуду випромінення як матричний елемент переходу між такими хвильовими функціями (представлення Фаррі [254]). Першим прикладом такого підходу стала квантова теорія синхротронного випромінювання [255], що використовувала відомі точні хвильові функції для релятивістського електрона в магнітному полі [256, 257]. Відповідна перша квантова поправка була обчислена ще раніше [258], в гейзенбергівському представленні (без використання поняття хвильових функцій), і звелася до заміни в імовірності випромінення як функції частоти фотона

$$\omega \rightarrow \omega [1 + \hbar\omega/E + \mathcal{O}(\omega^2)] . \quad (1.13)$$

На практиці, для енергій, досяжних на сьогоднішній день в синхротронах, квантові поправки залишаються малими (інакше рух електронів в синхротроні важко було б контролювати через великий розкид по енергії), хоча ці поправки – зокрема, так зване спінове світло – вдавалося спостерігати [259].

Помітніше на русі електрона в накопичувальному кільці позначається дискретний характер електромагнітного випромінювання, внаслідок чого розподіл електронів по енергіях розмивається. Це призводить до квантових флуктуацій радіусу орбіти електрона, причому між радіусом орбіти і зростанням її флуктуацій може встановлюватися рівновага. Крім того, як було вперше показано в дисертації Тернова [260], внаслідок свого випромінювання, електрони набувають високу ступінь поляризації вздовж магнітного поля (радіаційна поляризація) [144, 261].

**1.4.3. Квазікласичний операторний метод.** Оскільки рух в однорідному магнітному полі аналогічний осциляторному, а для останньо-

го випадку відомі ефективні операторні методи розв'язку, в яких часова еволюція операторів аналогічна еволюції відповідних класичних величин, представляється перспективним використовувати переваги операторних методів і для квазі-однорідних зовнішніх полів. Найповніша відповідність з класичною механікою досягається для інтеграла за кутами вильоту кінцевого електрона (при заданому  $\hbar\omega = E - E'$ ), коли спектр залежить лише від траєкторії початкового електрона. При цьому все ще залишається і суттєвий ефект поздовжньої віддачі фотона, а правило заміни (1.13) у всіх порядках по  $\hbar\omega/E$  узагальнюється як

$$\omega \rightarrow \frac{\omega}{1 - \hbar\omega/E}, \quad (1.14)$$

і відповідно модифікується довжина формування фотона [262, 263]:

$$l_f = \frac{2}{\omega \left( \frac{m^2}{EE'} + \theta^2 \right)}, \quad (1.15)$$

де  $\theta$  – кут випромінення по відношенню до початкового електрона. Формули (1.14)–(1.15), таким чином, водночас враховують і вплив віддачі випромінення протягом його випускання (порівн. Розд. 1.2.3).

Розвинений підхід отримав назву операторного квазікласичного методу [143, 261, 264, 265], і пізніше обґрунтовувався в рамках багатьох альтернативних підходів [266–271]. У застосуванні до задачі про випромінювання в кулонівському полі він відтворює результат [253].

**1.4.4. Багатофотонні ефекти і електромагнітні каскади.** Імовірності елементарних процесів гальмівного випромінювання та народження пар за порядком величини визначаються електромагнітною константою зв'язку  $\alpha \approx 1/137$ , і її малість виправдовує застосування для них теорії збурень. Однак, в достатньо товстій мішені зрештою має статися навіть малоїмовірна подія. В свою чергу, народжені частинки можуть теж вступати в реакції. Тому при проходженні високоенергетичних електронів або фотонів крізь дуже товсті мішені розвиваються електромагнітні каскади («зливи») – див. Рис. 1.9. Прикладом радіаційно товстої мішені є земля

атмосфера, яка піддається дії ультра-високоенергетичних космічних променів поза-сонячного походження [272]. Саме таким способом були відкриті позитрон, а потім мюон, ознаменувавши настання ери елементарних частинок.

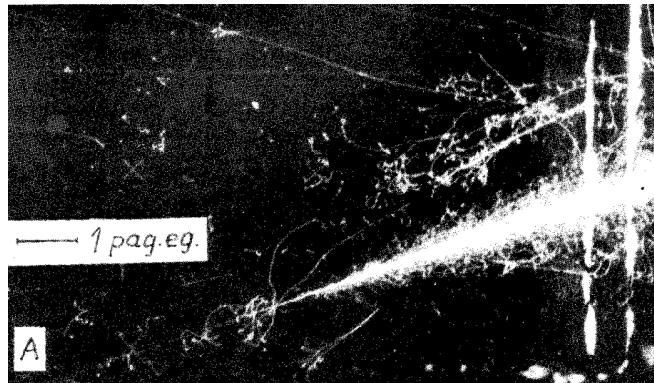


Рис. 1.9. Електрон-фотонна злива, викликана гама-квантом космічного випромінювання [273].

Повна система рівнянь для злив, з інтегральними ядрами, обчисленими в нижчому порядку теорії збурень, була встановлена Карлсоном і Оппенгеймером [274] і Баба та Гайтлером [275]. Її послідовний розв'язок на основі перетворення Мелліна був даний Ландау і Румером [276, 277]. Як і в теорії багаторазового розсіяння Мольєра, речовина в даному наближенні може бути охарактеризована єдиним параметром, в якості якого, слідуючи Карлсону і Оппенгеймеру, зазвичай вибирається радіаційна довжина. З огляду на необхідність знання радіаційних довжин для різних речовин, проводились їх детальні розрахунки [278, 279]. Для врахування гасіння зливи (див. Рис. 1.10), потрібно ввести ще один параметр – наприклад, критичну енергію електрона, при якій його іонізаційні втрати енергії порівнюються з радіаційними. Ефект щільності при цьому можна не враховувати. Утворення злив – найнадійніший спосіб вимірювання енергій електронів, позитронів і фотонів ультра-високих енергій (відповідні детектори називаються електромагнітними калориметрами). Тому теорія злив має велике практичне значення.

Диференціальна ймовірність випромінювання фотона, що входить до

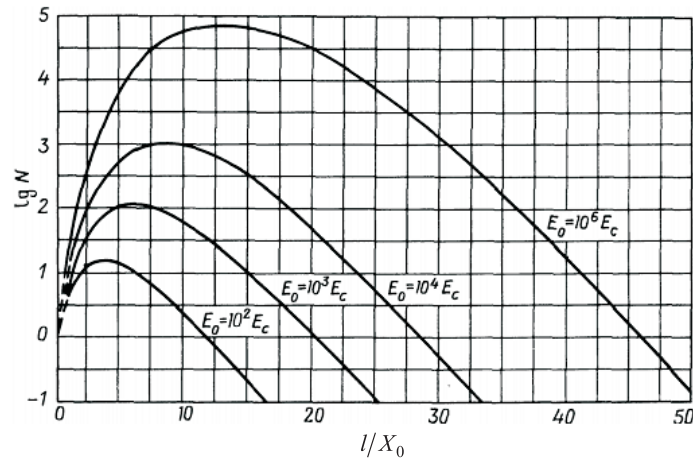


Рис. 1.10. Розрахована множинність частинок в електромагнітній зливі як функція товщини мішені в одиницях радіаційної довжини  $X_0$ , для різних енергій початкового електрона в одиницях критичної енергії  $E_c$  [277]. Для кремнію  $X_0 \approx 10$  см,  $E_c \approx 50$  Мев. Для вольфраму  $X_0 \approx 3.5$  мм,  $E_c \approx 10$  Мев.

рівняння злив, при  $\omega \rightarrow 0$  розходиться як  $\omega^{-1}$ , тоді як диференціальна ймовірність народження пари всюди скінченна. Тому при  $\hbar\omega \ll E$  в мішенях середньої товщини народженням пар можна знехтувати. Оскільки інтеграл  $\int_0 d\omega/\omega$  логарифмічно розходиться на нижній межі, повна ймовірність випромінення одиничного фотона виявляється нескінченною, що нефізично. Однак, в рамках процедури ресумування [280, 281] або розв'язку кінетичного рівняння для зливи [278] дана розбіжність усувається. При цьому роль спостережуваної величини приймає спектр радіаційних енергетичних втрат електронів, без уточнення кількості випущених фотонів (інклюзивний спектр).

Водночас, варто мати на увазі, що випромінювання м'яких фотонів, хоча і описується на імовірнісному рівні розподілом Пуассона, насправді призводить до когерентної суперпозиції станів з різною кількістю фотонів (когерентні стани [282]). Прикладом когерентного квазікласичного випромінювання є лазери. Когерентність стає суттєвою при вимірюваннях кореляцій між фотонами (інтерферометрія), або коли відповідний пучок світла діє на електрон, який в свою чергу випромінює. Тоді замість розсіювання



на окремих квантах електрон здійснює квазікласичний рух в полі інтенсивної електромагнітної хвилі.

## 1.5. Проходження крізь кристали

Для піонерських досліджень взаємодії швидких частинок з речовиною припустимо було обмежуватися аморфними мішенями як найпростішими. Подальший поштовх дало залучення в якості мішеней ідеальних орієнтованих монокристалів, привівши до низки нетривіальних результатів. Кристали дозволяють експериментально вивчати фундаментальні аспекти КЕД в сильних полях [263], і зі значними анізотропіями, а також можуть слугувати зручними конверторами для отримання пучків частинок неатомного походження – жорстких фотонів (в тому числі поляризованих) і позитронів. Пізніше виникла також ідея використовувати слабко зігнуті кристали для керування пучками заряджених частинок ультра-високих енергій в малих просторових масштабах (див. нижче).

**1.5.1. Когерентне гальмівне випромінювання.** Практично одночасно з ондуляторним теоретично було передбачено так зване когерентне гальмівне випромінювання, що виникає при проходженні пучка електронів крізь орієнтований монокристал під малим кутом до низькоіндексного сімейства площин [198, 283–285]. Дійсно, кристал – один з природних способів забезпечити періодичність руху зарядженої частинки, причому на значно меншому просторовому масштабі, а отже, зробити випромінювання жорсткішим. (В цитованих вище роботах до нього прийшли ще й з ідеєю заміни деструктивної інтерференції в ефекті ЛПМ на конструктивну.) Умовою когерентності тут є рівність довжини формування (1.15) та міжплощинної відстані уздовж шляху електрона:

$$l_f = d/\chi,$$

де  $\chi$  – кут між напрямком руху електрона та сімейством кристалічних площин. Передбачений ефект був незабаром підтверджений експериментально – див. Рис. 1.11 і огляди [286–288].

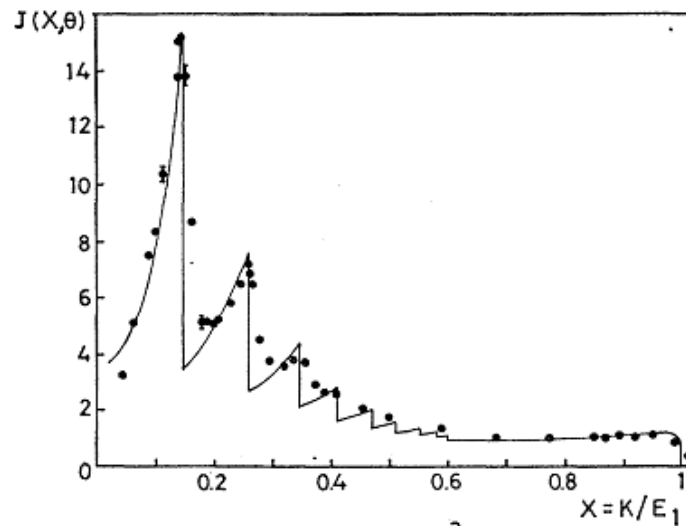


Рис. 1.11. Вимірний спектр когерентного гальмівного випромінення від електронів з енергією 1 Гев в кристалі алмаза товщиною 2 мм при площинній орієнтації (110) [289].

Доволі парадоксально, виявилось, що, незважаючи на силу та протяжність внутрішньо-кристалічних полів, когерентне гальмівне випромінювання успішно описується кінематичної теорією (борнівське наближення по взаємодії з кристалом). Причина цього була розкрита пізніше [290, 291] – як і в задачі Бете-Максімона про кулонівські поправки для гальмівного випромінювання на окремому атомі, в диференціальній імовірності випромінювання, проінтегрованої за кутами руху кінцевого електрона, відбувається скорочення ейкональних фаз хвильових функцій при русі майже вперед. У цих умовах досить добре працює також класична електродинаміка, однак при цьому часто необхідно враховувати поздовжню віддачу випромінювання, що може бути зроблено на основі квазікласичного методу Байєра-Каткова [143]. Останній метод, таким чином, виявився найпродуктивнішим у застосуванні до випромінювання в кристалах [292].

**1.5.2. Каналювання.** Яскравість когерентного гальмівного випромінювання зростає зі зменшенням кута між напрямком руху зарядженої частинки та сімейством кристалічних площин, що робить перспективу його зменшення привабливою. Однак, при достатньо малому куті відносно площин кінематичний опис втрачає придатність, оскільки рух частинки стає істотно викривленим. Найяскравішим ефектом при цьому є каналювання, коли частинка захоплюється в канал, відбиваючись від його стінок. Явище каналювання було доведене в комп'ютерному моделюванні [293], але це моделювання було стимульоване експериментальними роботами [294, 295]. Тому можна рахувати, що даний ефект був відкритий емпірично (в тому числі в комп'ютерних експериментах). Зазначимо, що на можливість проникнення протонів на великі відстані уздовж виділених напрямків (каналювання) було вказано ще Штарком [296], який невдовзі після дослідів Резерфорда пропонував експерименти, аналогічні [294, 295], але вони не були реалізовані свого часу.

Неочевидність можливості ефективного захоплення пучків частинок, які направляються на кристал, в режим достатньо стабільного каналювання пов'язана з високими вимогами на колімацію початкового пучка, його орієнтацію відносно кристала, і на швидкість деканалювання, що залежить, зокрема, від ступеня ідеальності кристала. Відповідні умови теоретично аналізувалися в [297–300] (зокрема, поняття неперервного потенціалу і критичного кута каналювання були введені в [297, 298] і детально розвинені в [299]). Поліпшення якості пучків та кристалів дозволило успішно вирішити всі ці проблеми як для площинних, так і для аксіальних орієнтацій різних кристалів, як для позитивно, так і для негативно заряджених частинок, і в 1980-і роки каналювання почало широко застосовуватися при високих енергіях [301].

При низьких енергіях і для легких частинок каналювання може розглядатися як аналог динамічної дифракції [303]. З точки зору неперервного потенціалу, при цих умовах його ями вміщують відносно мале число кван-

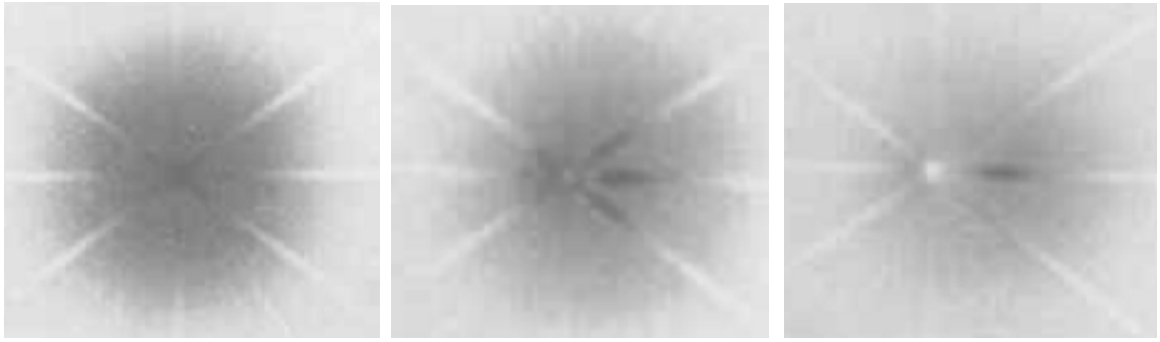


Рис. 1.12. «Зіркоподібні» кутові розподіли протонів з енергією 4 Мев, що пройшли крізь кристал кремнію товщиною 25 мкм в напрямку, близькому до осі  $\langle 110 \rangle$ , з послідовним збільшенням кута відносно неї [302]. Видно ефекти некогерентного багаторазового розсіювання (сірий диск), захоплення частинок в площинні канали (чорні смуги) і блокування (світлі смуги в продовження темних).

тових рівнів (зон), вимагаючи розрахунку зонної структури [304, 305]. При високій енергії, навпаки, рух каналюваних частинок може описуватися класичною механікою навіть надійніше, ніж для когерентного гальмівного випромінювання [299, 306, 307].

Умови застосовності класичної механіки виконуються ще краще при осьовій орієнтації кристала (див. 1.12), оскільки середні поля в цьому випадку є ефективно сильнішими. Але рух у 2-вимірному неперервному потенціалі ґратки атомних ланцюжків, взагалі кажучи, відбувається хаотично [308]. Строге доведення властивості хаотичності існує для руху в періодичній ґратці жорстких дисків (періодичний лоренцівській газ, або розширений більярд Синая), і ґрунтується на теоремі Синая [309]. Неперервний потенціал кристала є плавнішим, ніж жорсткі диски; тим не менш, зіткнення з корами ланцюжків можуть також виконувати розсіюючу, а значить, і хаотизуючу дію. На відстані від корів (наприклад, для аксіального каналювання позитивно заряджених частинок) причини хаосу більшою мірою є аналогічними тим, що присутні в моделі Хенона-Хейлса [310], і хаос, відповідно до теореми Колмогорова-Арнольда-Мозера [311–313] слабкий при

достатньо малій поперечній енергії, посилюється з її підвищенням. Поняття математичної теорії хаосу залучалися навіть для обґрунтування самого поняття неперервного потенціалу [314].

**1.5.3. Деканалювання.** Канальовані, як і надбар'єрні стани не є абсолютно стабільними: внаслідок некогерентного розсіювання при близьких зіткненнях з окремими електронами або ядрами в речовині, поперечна енергія швидкої частинки флюктує, завдяки чому можуть відбуватися переходи між фракціями – деканалювання (вибивання з каналу) і реканалювання (захоплення в канал). Таким чином, процес деканалювання можна розглядати як аналог процесу іонізаційних втрат, з тією відмінністю, що роль зв'язаної відіграє швидка частинка, яка проходить крізь канал. При цьому існує і кореляція між імовірністю деканалювання позитивно зарядженої канальованої частинки в одиницю часу та швидкістю іонізаційних втрат енергії.

Обчислювальна складність полягає в тому, щоб одночасно врахувати коливальний рух в неперервному потенціалі та випадковий характер розсіювання, інтенсивність якого теж істотно залежить від координат [315]. Як спрощуюче припущення, часто приймається, що некогерентне багаторазове розсіяння є слабшим (або повільнішим) процесом, ніж осциляції, що викликаються дією когерентного неперервного потенціалу, тому диференціальну ймовірність некогерентних процесів можна вважати залежною лише від інваріанту осциляцій – поперечної енергії  $E_{\perp}$  («статистична рівновага»). Вводячи відповідні коефіцієнти дифузії та накладаючи граничні умови по  $E_{\perp}$ , при найпростіших модельних припущеннях вдається отримати навіть аналітичний розв'язок рівняння дифузії [316, 317]. Цей розв'язок на великих глибинах проникнення убуває експоненційно, і його декремент визначає довжину деканалювання. Надійніші результати дає чисельне моделювання (див. Рис. 1.13). Разом з тим, моделювання здатне виявити і ефекти, які мали б бути відсутніми в наближенні статистичної рівнова-

ги [318, 319].

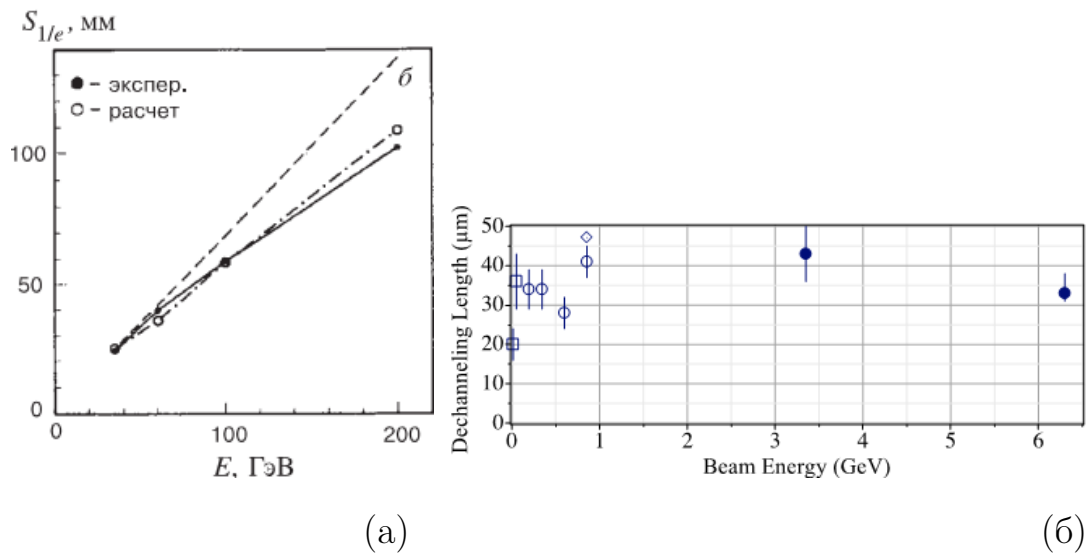


Рис. 1.13. Виміряні довжини деканалювання в кремнії в орієнтації (110) в залежності від енергії каналюваної частинки: а). для протонів [320, 321]; б). для електронів [322]. Для негативно заряджених частинок, довжина деканалювання значно менша, оскільки атомні ядра знаходяться на дні потенціальної ями, і завжди спричиняють сильне розсіювання.

Характерною ознакою статистичної рівноваги є експоненційний закон розпаду. Такий закон в цілому узгоджується з експериментальними даними, але при цьому для площинного каналювання позитивно заряджених частинок потрібно враховувати, наприклад, суму двох експонент [323]:

$$N_{ch}(z) \approx N_u e^{-z/L_n} + N_s e^{-z/L_e}, \quad (1.16)$$

де менша довжина  $L_n$  відповідає швидкому деканалюванню частинок з достатньо великими поперечними енергіями на атомних ядрах, а  $L_e \gg L_n$  – деканалюванню глибоко підбар'єрних частинок на всюди присутніх атомних електронах.

Для експериментального визначення поточної кількості каналюваних частинок розроблено спеціальні методи. Для нерелятивістських протонів напівпровідникові детектори, розміщені на виході з кристала, дозволяють розділяти каналювані та деканалювані фракції по їх іонізаційним втра-

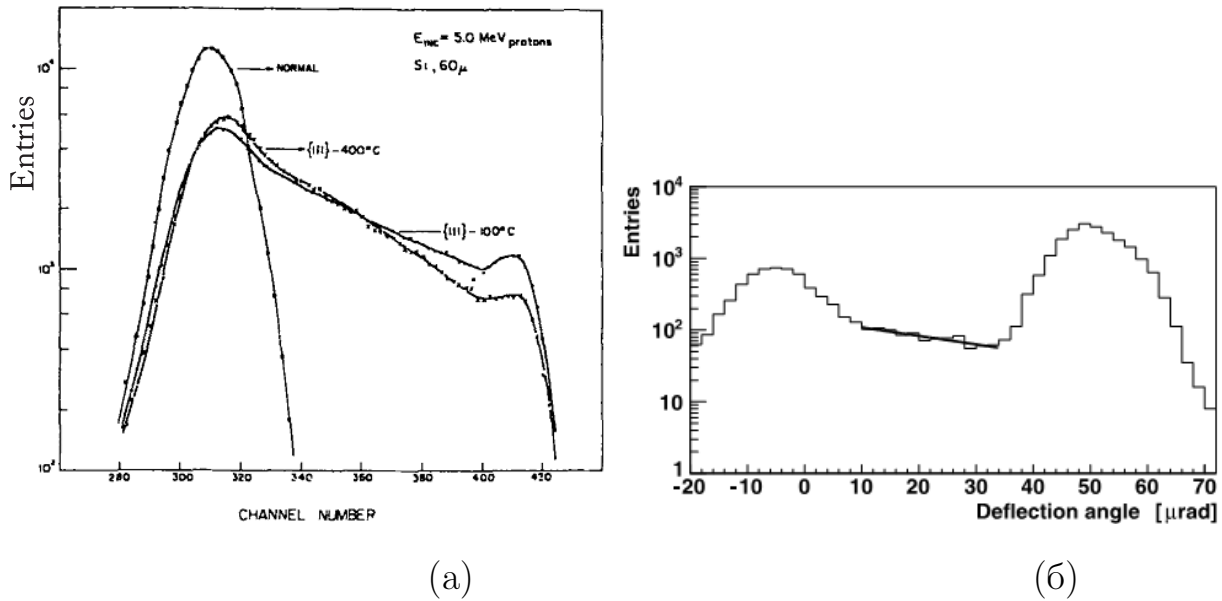


Рис. 1.14. Експериментальне розділення фракцій каналюваних та дека-  
 налюваних частинок, і визначення довжини деканалювання: а). методом  
 вимірювання втрат енергії, для протонів 5 Мев [316]; б). за допомогою слаб-  
 кого згину кристала, для протонів 400 Гев [323].

там [316] (див. Рис. 1.14а). При високих енергіях аналогічні детектори, роз-  
 міщені по довжині кристала, дозволяють проводити моніторинг стану кана-  
 лювання кожної частинки. Довжина деканалювання при цьому надійніше  
 може бути виміряна за допомогою слабо зігнутих кристалів [320, 323, 324]  
 (див. Рис. 1.14б). (Слід пам'ятати, що згин кристала підсилює деканалю-  
 вання за рахунок відцентрових сил, тому при збільшенні енергії необхідно  
 послаблювати згин, зберігаючи його радіус набагато більшим від крити-  
 чного  $R_c = E/F_{\max}$  [325].)

В умовах, коли вимірюються лише довжини деканалювання, згоду те-  
 орії з експериментом можна забезпечити підгонкою одного або декількох  
 параметрів. В ідеалі ж теорія повинна описувати не лише довжину дека-  
 налювання, але й розподіл по кутах та енергіях кінцевих частинок при  
 будь-якому куті падіння та енергії початкової частинки, а також товщині  
 кристала. Для цього ще належить чимало зробити, і на шляху ще можуть  
 виникнути ускладнення. Зокрема, чисельне моделювання вказує, що для  
 точнішого опису треба враховувати так зване квазіканалювання [300, 326],

коли частинка має поперечну енергію, близьку до висоти потенціального бар'єру, і доволі довго затримується поблизу його вершини (див. Рис. 1.15). Ще не цілком досліджена також і роль квантових ефектів у деканалюванні [206].

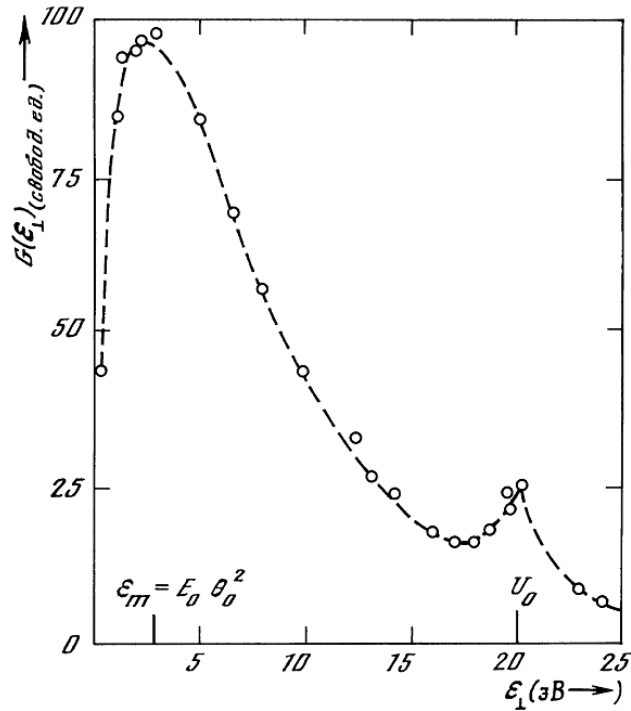


Рис. 1.15. Чисельне моделювання функції розподілу протонів 0.5 Мев по поперечних енергіях в умовах каналювання в кремнії при площинній орієнтації (100) [327]. Пік при малих  $E_{\perp}$  відповідає каналюваним частинкам, його спадання з ростом  $E_{\perp}$  – деканалюванню, а затримка на вершині потенціальної ями (малий пік при  $E_{\perp} \approx U_0$ ) – квазіканалюваній фракції.

**1.5.4. Випромінювання при каналюванні та інші непружні процеси.** З каналюванням виявилися пов'язаними також важливі вторинні ефекти. Одним з перших з них було передбачення ефекту когерентного збудження внутрішніх станів каналюваних ядер (ефект Огорокова) [206, 328–330]. Іонізаційні втрати енергії при каналюванні теж помітно змінюються, але лише за рахунок того, що змінюється функція розподілу швидких частинок відносно атомів [306].

У подальшому, після того як були отримані каналювані позитрони ви-



соких енергій [331, 332], було передбачено випромінювання при їх площинному каналюванні [109, 333–336]. Подібне випромінювання дещо раніше передбачалося для електронів при аксіальному каналюванні [337], проте випромінювання при площинному каналюванні позитронів монохроматичніше (див. Рис. 1.16), і тому має ліпші характеристики як джерело випромінювання [126].

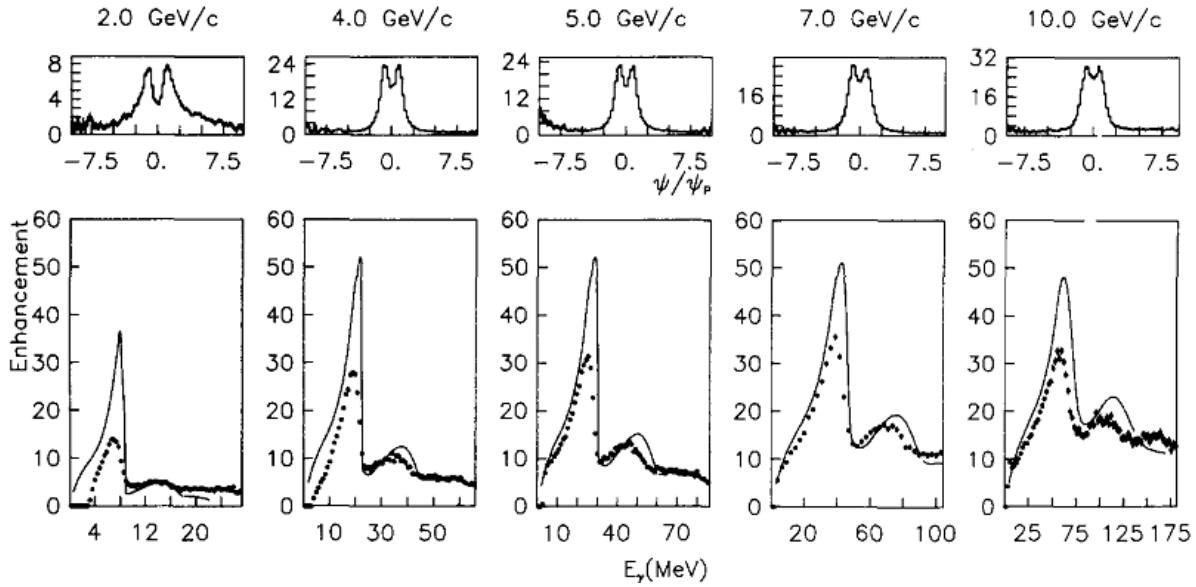


Рис. 1.16. Нижня панель – виміряні спектри випромінювання від каналюваних позитронів 2-10 Гев в кристалі кремнію товщиною 0.1 мм в орієнтації (110). Верхня панель – залежність інтенсивності випромінювання від кута падіння позитрона [338].

Зі зростанням енергії типові кути випромінювання (що мають порядок оберненого Лоренц-фактора) стають набагато меншими за кути вигину траєкторії (близькі до критичного кута каналювання):

$$\theta_c = \sqrt{\frac{2V_0}{E}} \gg \frac{1}{\gamma}, \quad (1.17)$$

де  $V_0$  – глибина ями для неперервного потенціалу. Ця умова реалізується при енергіях електронів понад 100 Гев, досягнутих в 1980-і роки на прискорювачі CERN SPS. За цих умов, довжина формування випромінювання стає коротшою від періоду осциляцій електрона в каналі, і тоді випромінювання формується локально, як у квазі-однорідному електричному полі

(constant-field approximation або синхротронний механізм). Передбачалися також радіаційне охолодження і радіаційна самополяризація позитронів або електронів в каналі [263, 339]. Інтерес представляє також ультраквантова межа синхротронного випромінювання, коли низькочастотна ступінна поведінка спектра фактично простягається майже аж до його квантові межі  $\hbar\omega \approx E$  [340].

Умови квазіоднорідного поля можуть виконуватися не лише для випромінювання, але й для народження пар фотоном, падаючим під малим кутом на кристалічну площину або вісь. У достатньо товстому кристалі може встигнути розвинути навіть електромагнітна злива. Останній метод використовується при розробці позитронних джерел [292, 339, 341–343].

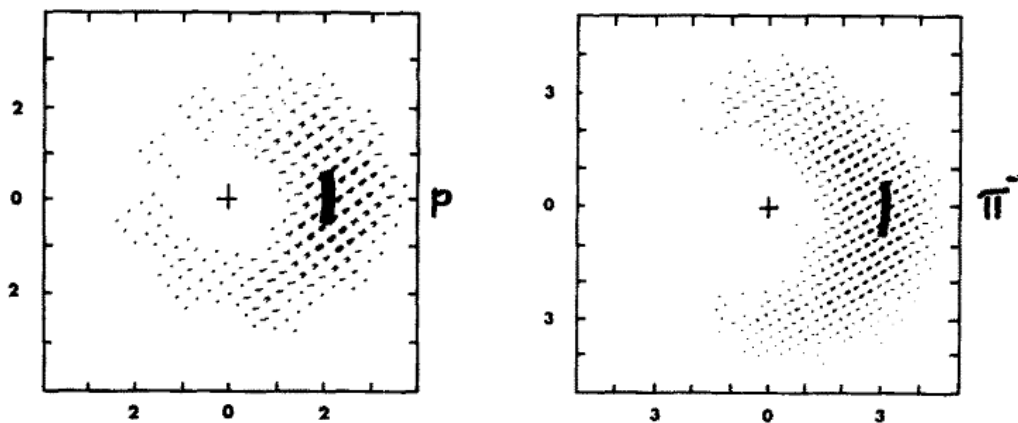


Рис. 1.17. Виміряні кутові розподіли (в одиницях осьового кута каналювання) [344] протонів та негативних піонів з енергію 15 Гев після проходження крізь кристал германію товщиною 0.7 мм в орієнтації  $\langle 110 \rangle$ .

**1.5.5. Донат-розсіювання.** В аксіальному випадку і при сильно надбар'єрному русі режим сильного хаосу (див. Розд. 1.5.2) дозволяє знехтувати кореляціями між розсіяннями на ланцюжках та розглядати їх статистично, як випадкові та рівномірно розподілені в поперечній площині. Оскільки в цьому наближенні ланцюжки є аксіально симетричними, в кожному розсіянні зберігається модуль поперечної компоненти швидкості частинки відносно напрямку ланцюжків, а розсіювання відбувається лише за

азимутом. Відповідно, кутовий розподіл частинок (див. Рис. 1.17) набуває форми «бублика» (англ. doughnut), що дало назву всьому процесу — донат-розсіювання [263, 300, 344]. Його можна описувати класичною механікою [299, 345, 346]. Втім, слід мати на увазі, що при помірних енергіях та кутах падіння на ланцюжки існують і проміжні режими між аксіальним каналюванням та донат-розсіюванням, в яких в кутовому розподілі частинок, що пройшли крізь кристал, проявляються зіркоподібні елементи [300, 347, 348].

**1.5.6. Поверхнєве каналювання.** Когерентна взаємодія швидких частинок з кристалічними площинами або осями може виникати також якщо ці елементи знаходяться на поверхні кристала. Власне, спеціально підготована поверхня кристала і може слугувати такою площиною. При падінні на неї пучка іонів або атомів під ковзаючим кутом пучок може майже повністю відбиватися, але, на відміну від ковзаючого падіння на аморфну атомну поверхню (див. Розд. 1.3.1.2 та [336]), набувати при цьому структурованого кутового розподілу відповідно до атомного порядку в площині. Такий режим називається «поверхневим каналюванням» (див. [206, 349] та посилання там). Окрім прикладного значення для вивчення поверхонь твердих тіл, він дозволяє безпосередньо спостерігати результати взаємодії заряджених частинок з окремими атомними осями чи площинами, які мають приблизно таким же чином протікати і в об'ємі кристала.

### **1.5.7. Зігнуті кристали.**

**1.5.7.1. Поворот каналюваних частинок зігнутим кристалом.** Плідна ідея практичного використання каналювання при ультрависоких енергіях була запропонована Цигановим [325]: оскільки рух частинок обмежений стінками міжплощинних каналів, при плавному згинанні кристала частинки повинні слідувати за вигином. Макроскопічні кристали здатні витримувати лише невеликі пружні деформації, але для частинок високої енергії відхилення на великі кути і не потрібні. Враховуючи значну

силу внутрішньокристалічних полів, управління пучками з їх допомогою все одно має бути ефективнішим, ніж за допомогою великогабаритних магнітів. Ця ідея була підкріплена комп'ютерним моделюванням [350], після чого реалізована на практиці [351–353] (порівняно з ідеєю Штарка про каналювання, доволі швидко отримавши визнання). Хоча спочатку відсоток захоплюваних частинок складав лише  $\sim 1\%$ , в подальшому використання схеми багаторазового проходження крізь кристал в кільці накопичувача [354] підвищило його до понад 80%. На практиці, для стабільності каналювання важливо також забезпечити рівномірність вигину кристала.

**1.5.7.2. Об'ємне відбиття та об'ємне захоплення.** У вищевикладеній постановці задачі частинка вважається потрапляючою в канал на вході в зігнутий кристал. В реальних умовах так трапляється далеко не завжди, тому важливо вивчити випадок, коли частинка падає на кристал під кутом, що перевищує кут каналювання. При цьому вона рухається майже по прямій, але в зігнутому кристалі кут руху відносно площин поступово змінюється. Якщо він стане достатньо малим, частинка може перейти в стан, близький до квазі-каналювання. В результаті у неї з'являється можливість захопитися в режим каналювання (об'ємне захоплення) [355], але при високих енергіях імовірність цього процесу мала, і зазвичай відбувається пружне відбиття в сторону, протилежну вигину – об'ємне відбиття [321, 356].<sup>7</sup> Кут відхилення при об'ємному відбитті відносно невеликий:  $\theta_{\text{vt}} \approx 1.4\theta_c$  для позитивно заряджених частинок в кремнії в орієнтації (110) і  $\theta_{\text{vt}} \approx \theta_c$  для негативно заряджених частинок, зате практично всі частинки відхиляються на однаковий кут (повний акцептанс – див. Рис. 1.18а) [358]. Це дає змогу застосовувати для збільшення кута відхилення повторне об'ємне відбиття на декількох кристалах [358, 359].

Що стосується об'ємного захоплення, воно експериментально досліджувалося при енергіях протонів 1 Гев [360]. Була встановлена лінійна зале-

---

<sup>7</sup>Інтерпретація об'ємного відбиття з погляду розсіювання на впорядкованих атомних ланцюжках була запропонована в [357].

жність його ймовірності від радіусу згину кристала. Об'ємне захоплення є найефективнішим для негативно заряджених частинок [356, 361], оскільки вони проходять крізь області концентрації атомних ядер з малими потенціальними енергіями, і втрата поперечної кінетичної енергії відразу веде до захоплення.

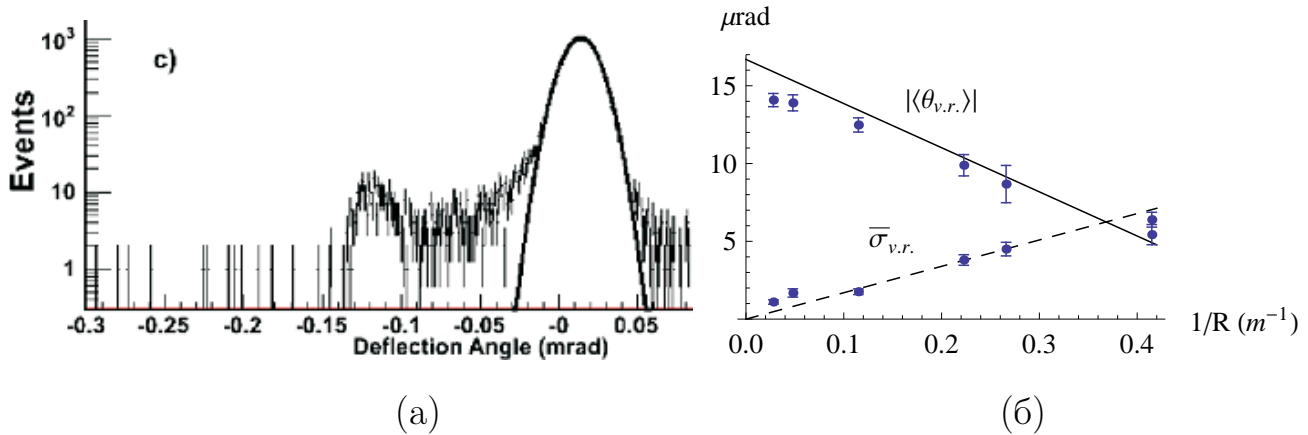


Рис. 1.18. а). Виміряний кутовий розподіл протонів 400 Гев, що пройшли крізь кристал кремнію 3 мм в орієнтації (110) за умов об'ємного відбиття [362]. Лівий пік – об'ємно захоплені частинки, правий пік – об'ємно відбита фракція. Значна ширина піку об'ємно відбитої фракції тут пов'язана з некогерентним багаторазовим розсіянням частинки у товстому кристалі до та після об'ємного відбиття. б). Середній кут відхилення та дисперсія фракції об'ємно відбитих частинок як функції кривизни кристала. Точки – експериментальні дані [363]. Прямі лінії – теоретичні розрахунки [10,11,16].

### 1.5.7.3. Поворот пучків кристалами в аксіальній орієнтації.

Для повороту пучка на значний кут насправді необов'язково захоплювати його в режим каналювання – достатньо будь-яким чином пригнітити балістичну складову руху крізь зігнутий кристал. При осьовій орієнтації це може бути досягнуто і за допомогою багаторазового розсіювання на атомних ланцюжках (див. Розд. 1.5.5) [308, 352]. Відповідний механізм відхилення в зігнутому кристалі отримав назву стохастичного [308, 364] (оскільки він проявляється в середньому, після великого числа практично некорельованих розсіянь), і був підтверджений експериментально.

Окрім повороту та розширення, однак, пучок зазнає помітного структурування. При цьому кутовий розподіл може бути суттєво анізотропним, проявляються ефекти площин, та навіть захоплення в площинне каналювання [360].

**1.5.7.4. Прецесія магнітного моменту.** Ультра-релятивістська частинка взаємодіє з електричним полем кристала також за допомогою свого магнітного моменту, і хоча його вплив на рух частинки дуже незначний, сам він може помітно повертатися. Вимірювання такої прецесії вимагає надійних методів визначення орієнтації спіну, чого найлегше досягти для нестабільних частинок по їх розпадах після виходу з кристала (кутовий розподіл розпаду залежить від напрямку спіну). У цих умовах по кінцевій величині кута прецесії можна знайти величину *аномального* магнітного моменту частинки. Подібна процедура була запропонована для вимірювання магнітних моментів заряджених гіперонів [365]. При цьому, для забезпечення виділеного напрямку прецесії в середньому, кристал має бути зігнутим. Моменти дивних  $\Sigma^+$  гіперонів (які є відносно довгоживучими) вимірювалися [366] і порівнювалися з результатами вимірювань у магнітному полі. Отримані значення магнітних моментів взаємно узгоджуються, але в разі каналювання в кристалі похибки виявляються в декілька разів більшими, тому для дивних гіперонів цей метод ще не дає переваги. Для чармованих гіперонів, час життя яких на три порядки менший, метод пропускання крізь кристал видається безальтернативним [367–370], але водночас і значно складнішим.

**1.5.7.5. Лінзування зігнутими кристалами.** У розвиток ідеї Циганова, були запропоновані способи неоднорідного згину кристалів, які переслідували різні цілі. Зокрема, якщо радіус згину кристала змінюється в поперечному напрямку, то на виході або вході пучок може бути істотно непаралельним, завдяки чому кристал буде виконувати роль лінзи [371]. Такі можливості, перспективні як для фокусування, так і навпаки, для отрима-

ння вторинних пучків (мезонів або, після їх розпадів, нейтрино) з малим розходженням, були реалізовані в [372, 373].

**1.5.7.6. Кристалічні ондулятори.** Щоб зберегти відносно короткий період коливань заряджених частинок у каналі, і водночас збільшити їх амплітуду, був запропонований так званий синусоїдальний ондулятор [374], в якому канали згинаються разом з кристалом за синусоїдальним законом. Наразі цей метод активно досліджується в експериментах.

## 1.6. Сучасні проблеми

Вважаючи сьогодні всі основні явища фізики взаємодії швидких заряджених частинок з речовиною відомими, можна пов'язувати її подальший розвиток з переходом на новий рівень трьох складових:

(і) Розвиток прискорювачів: ультра-висока енергія (що наближається до умов, коли її можна вважати асимптотичною), висока інтенсивність та високий ступінь колімації пучків. Прискорювач CERN SPS з рекордною на сьогодні енергією електронів і позитронів 200 Гев надає пучковий час для експериментів з фіксованими мішенями. У кристалах (найчастіше виготовлюваних з кремнію), де узгоджена дія атомних полів відхиляє заряджені частинки найефективніше, вже досягається умова недипольності, коли типові кути випромінення  $\theta \sim \gamma^{-1}$  перевищують критичний кут площинного каналювання. На наступному ж, невдовзі очікуваному поколінні прискорювачів електронів, ця нерівність стане сильною, і випромінювання при каналюванні буде синхротроно-подібним, формуючись локально, як у квазі-однорідному полі. Далі, м'яка область, в якій відбувається пригнічення спектрів випромінення, дійде до кінця спектра, визначеного енергією початкового електрона. Це повинно відбутися в кремнії при енергіях електронів  $E \sim m_e^3 / F_{\max} \sim 1$  Тев. При енергії того ж порядку це станеться і в аморфному середовищі, але в свинці [158]. На прискорювачах протонів нещодавно відбулося нове збільшення енергії – ЛНС 7+7 Тев. На даний час

ЛНС переважно працює в режимі колайдера, але проводяться також роботи з фіксованими мішенями [375, 376]. При енергіях ЛНС заряджена частинка може проходити крізь доволі товсті кристали практично без некогерентного багаторазового розсіювання, взаємодіючи лише з неперервним потенціалом. У ХХІ столітті набули поширення також пучки високзаряджених іонів.

(ii) В еру нанотехнологій не становить принципової проблеми виготовлення ультра-тонких, структурованих і/або вигнутих мішеней. Тонкі кристали мають ту властивість, що впливом багаторазового розсіювання в них у порівнянні з дією неперервного потенціалу можна знехтувати. Зігнуті кристали служать практичним цілям колімації і виведення пучків з прискорювачів, а також дозволяють отримувати розгортку процесів деканалювання по кутах, тобто за часом виходу. Для когерентного гальмівного випромінювання, зігнуті кристали надають можливість локальної зміни довжини когерентності зовнішнього поля, навіть в умовах дипольного випромінювання [14, 17].

(iii) Зростання потужностей процесорів комп'ютерів робить загальнодоступними комп'ютерні програми для моделювання проходження швидких заряджених частинок крізь речовину. Для аморфних мішеней розроблено Монте-Карло симулятори GEANT, FLUKA, EGS та інші. Для роботи з товстими кристалами поки що часто використовуються спрощені моделі з неперервними потенціалами [377, 378] (зокрема, такі, що функціонують під GEANT [379], FLUKA [380], Mathematica [381]). Разом з тим, існують і спеціалізовані програми з проходження частинок крізь кристали, що працюють в 3d [321] (див. також [370]).<sup>8</sup> На прискорювачах і в дослідницьких центрах застосовуються суперкомп'ютери, що дозволяють промоделювати процеси достатньо ретельно.

Загалом, ці нові можливості, по-перше, дають змогу управляти траєкто-

---

<sup>8</sup>В моделюванні [293], де було відкрито каналювання, теж використовувалася 3d модель бінарних зіткнень, але розглядувані кристали були доволі тонкими.



ріями заряджених частинок в деталях. Також в деталях можна вимірювати енергетичні та кутові залежності розподілів частинок, що виходять з мішені, і за їх допомогою досліджувати процеси локально в просторі та часі. На цьому рівні наявні старі концепції можуть потребувати уточнення, і можуть виникнути також нові концепції. Зрештою, щоб коректно моделювати відповідні процеси чисельно, необхідна достатня точність визначення закладуваних параметрів. Глобальний фіт (як, наприклад, в [382]) для цього не гарантує збіжності по точності; кращим є підбір для кожного параметра найбільш підходящих експериментів.

Серед першочергових конкретних проблем, які постають сьогодні у фізиці проходження швидких заряджених частинок крізь речовину, можна відзначити наступні.

У найпростішому процесі – проходженні частинок крізь аморфну речовину – при сучасних технологіях мішень може бути зроблена настільки тонкою, що розсіювання в ній навіть на малі кути буде практично одноразовим [383]. Це дозволяє безпосередньо вимірювати параметри атомного потенціалу, в тому числі ті, що є суттєвими для багаторазового розсіювання. Такий підхід дає вищу точність, ніж дифракція рентгенівських променів і електронів на макроскопічних зразках.

З іншого боку, навіть в умовах багаторазового розсіяння в аморфній речовині, як сучасні пучки, так і комп'ютери дозволяють досліджувати з високою статистикою область «крил» функції розподілу по кутах, де відбувається перехід від гауссоподібного центрального розподілу до ступінних «хвостів». Саме в цій області проявляється чутливість до нетривіальних аспектів багаторазового кулонівського розсіювання, тобто ефектів, відсутніх як у чисто м'якому (гауссівському), так і в одноразовому (резерфордівському) розсіянні.

Ще більше потреб, але водночас і можливостей для удосконалення теорії виникає з урахуванням нових технологій і методів, що застосовуються для кристалічних мішеней. В останні кілька років в практику уві-

йшли ультра-короткі, «напів-хвильові» кристали [384], проходячи крізь які, швидка заряджена частинка взаємодіє лише з однією або двома атомними площинами. На рівні тонкого орієнтованого кристала стає можливим досліджувати найбільш фундаментальне поняття – неперервний потенціал. Давно відомо, що в так званій площинній орієнтації кристала в квазі-неперервних атомних площинах можуть залишатися істотні ефекти ланцюжків. Це зазначалося ще Ліндхардом [299], який запропонував трактування атомної площини як струни струн (string of strings). Однак залишається нез'ясованим, за яких умов і як саме ефекти струн мінімізуються, а також яким чином відбувається перехід від струни струн по одному напрямку до струни струн по іншому. Нещодавно з'явилися свідчення моделювання у 3d моделях про те, що внесок некогерентного багаторазового розсіювання в кристалах в «аморфній орієнтації» теж відрізняється від відповідного значення у справжньому аморфному середовищі [385].

У товстих кристалах, де можливе каналювання, першорядним питанням є існування статистичної рівноваги, а разом з ним і чітко визначеної довжини деканалювання. Існують свідчення як на користь [386], так і проти цього поняття [318], але послідовного розгляду все ще бракує. Такий розгляд повинен визначити умови, при яких дане наближення є справедливим, і вказати шляхи виходу за його рамки або підвищення точності.

У сучасній фізиці проходження заряджених частинок крізь зігнуті кристали, поряд з каналюванням важливе місце займає об'ємне відбиття (див. Розд. 1.5.7.2). Воно формується на декількох зігнутих атомних площинах, але все ж у досить малій просторовій області, завдяки чому для нього достатньо використовувати відносно тонкі кристали, і можна застосовувати кілька кристалів підряд [387]. При цьому кут одноразового відбиття має порядок критичного кута каналювання, хоча коефіцієнт пропорційності залежить від знаку заряду частинки, і дещо різниться для кристалів різних орієнтацій і хімічних елементів. Є потреба визначити величину цього кута і форму кутових розподілів теоретично.

Цікаві також режими, перехідні між регулярними (характерними для кристалів площинної орієнтації) і стохастичними (які реалізуються в аморфному середовищі). Такі режими можуть виникати в орієнтованих кристалах осьової орієнтації, де внаслідок двовимірності неперервного потенціалу присутнє явище динамічного хаосу. Є також вказівки на те, що при осьовій орієнтації кристала може виникати аномальна дифузія, але це питання поки що тільки почало досліджуватися [388].

Зрештою, не можна обійти увагою випромінювання, яке генерується релятивістськими електронами у фіксованих мішенях. Через чутливість спектрів випромінення до всіх деталей траєкторії зарядженої частинки, сучасні можливості в деталях конструювати траєкторію електрона на мікромасштабі набувають особливої цінності і відкривають нові напрямки в дослідженнях. Ще в 1990-і роки в теорії пригнічення спектра гальмівного випромінення в аморфному середовищі (ефекту ЛПМ) у зв'язку з цим виник інтерес до просторово-неоднорідних мішеней [160]. Були вивчені спектри випромінення при проходженні електронів крізь структуровані мішені з декількох аморфних фольг [159], і доведено існування інтерференційних осциляцій в спектрі для такої мішені, хоча лише одного типу. Але якщо використовувати тонкі кристали як кікери, з'являється можливість спрямованого відхилення високоенергетичної зарядженої частинки, завдяки чому можна добитися, щоб і інші принципові інтерференційні ефекти не зникали внаслідок усереднення за азимутальними напрямками, а максимально виявлялися.

Природно, що в залежності від частоти фотона, його властивості можуть проявлятися більшою мірою як хвильові або корпускулярні (чи геометрико-оптичні). Тому в спектрально-кутовому розподілі випромінення існує велика кількість різноманітних ефектів – електрон-фотонні струмені, розподіл фотонів по прицільних параметрах, хвильова інтерференція, декогерентність, та інші. В цілому, фізиці інтерференційних явищ у випромінюванні при високих енергіях притаманні як релятивістські динамічні,

так і радіофізичні (незалежні від маси електрона) аспекти.

Узагальнюючи, можна сказати, що фотон – елементарна частинка, властивості випускання якої, навіть через понад століття після відкриття, все ще не вичерпно досліджені. Як і раніше, привертають увагу питання, яким чином фотон генерується в різних ситуаціях, і в чому відмінність цього процесу від випускання класичної електромагнітної хвилі.

Залишаються актуальними також питання залежності поляризації випромінювання від різних параметрів. Важливо мати представлення кутових розподілів поляризації, але вона є векторною величиною, і тому характеризується як абсолютною величиною, так і напрямком.

Таким чином, на сьогоднішній день можна відзначити наступні актуальні напрямки розвитку фізики проходження ультра-релятивістських заряджених частинок крізь речовину:

- Уточнення параметрів атомних потенціалів.
- Побудова послідовних теорій неперервного потенціалу, деканалювання при високих енергіях, і об'ємного відбиття.
- Встановлення паралелей теорії розсіювання безструктурних частинок та їх електромагнітного випромінювання при високих енергіях з фізикою адронів. Тут існують схожі поняття, такі як напівжорстке кратне розсіювання, струмені випромінювання. Вивчати їх, як теоретично, так і експериментально, легше в електродинаміці, після чого можна використовувати ці знання у фізиці жорстких процесів з множинним народженням адронів.

На цих напрямках було зосереджено увагу автора. Вони потребують застосування методів теоретичної фізики, оскільки навіть якщо відкриття принципово нових явищ і стає дедалі малоюмовірнішим, нові ефекти та концепції продовжують з'являтися. Передбачення нових ефектів і розробка нових концепцій становлять типові завдання для теорфізики. Разом з тим, окрім загального пояснення відомих явищ, теоретична фізика повинна давати також і кількісні передбачення.

## РОЗДІЛ 2

### РОЗСІЮВАННЯ В АМОРФНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Найімовірнішим процесом при проходженні швидких заряджених частинок крізь речовину є їх пружне розсіювання на малі кути. В експериментах на прискорювачах зазвичай використовуються твердотільні мішені, найпростіші з яких – аморфні, хоча широко застосовуються також кристали. Взагалі кажучи, навіть аморфна твердотільна мішень не повністю еквівалентна щільній газовій, оскільки в ній ще містяться й валентні електрони або електрони провідності, і до того ж, можуть проявлятися поверхні твердого тіла. В першому наближенні ефектами колективізованих електронів можна знехтувати, але більш послідовно – враховувати їх через ефективні параметри, такі як відповідно модифікований параметр екранування.

У цьому Розділі ми обговоримо проблеми, що виникають при описі багаторазового розсіювання в аморфних середовищах, але розпочнемо з розгляду розсіяння на одиничному атомі.

#### **2.1. Розсіяння швидких заряджених частинок на атомі на малі кути**

При високих енергіях типові кути розсіяння<sup>1</sup> заряджених частинок на атомах стають малими, але розсіювання в цілому залишається суттєвим (електромагнітні перерізи розсіяння в ультрарелятивістському ліміті прямують до постійних значень, і накопичуються за рахунок перерозсіювання в речовині). Завдяки малості кутів розсіяння при зіткненні швидкого еле-

---

<sup>1</sup> Оскільки наукова термінологія української мови ще не є цілком сталою, наголосимо на доцільності вживання різних слів – «розсіювання» для процесів, що тривають, та «розсіяння» (доконана дія) для кутів, перерізів та амплітуд завершених процесів [389, 390]. Аналогічно, в Розд. 4 слово «випромінення» вживається для кутів, перерізів та амплітуд завершених радіаційних процесів, на відміну від «випромінювання», вживаного для радіаційних процесів, що тривають.

ктрона з атомом, можна знехтувати процесами обміну атомними електронами, і в головному порядку по енергії розглядати розсіяння як викликане статичним потенціалом, утвореним ядром та його електронами. Це виправдовується навіть краще, коли на атом падає протон чи ядро, оскільки обмінні канали в цьому випадку взагалі відсутні. Тоді можна вважати розсіяння на окремому електрично нейтральному атомі таким, що викликається дією сукупного електростатичного потенціалу у вигляді екранованого кулонівського поля:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}g(r), \quad \alpha = Z_1Z_2e^2, \quad g(0) = 1, \quad g(\infty) = 0, \quad (2.1)$$

де  $r$  – відстань до атомного ядра,  $Z_1e$  – заряд налітаючої частинки,  $Z_2e$  – заряд ядра атома.

Функція  $g(r)$  для ізольованого атома, в принципі, повністю визначається числом  $Z_2$ , але потребує розв'язку багаточастинкового рівняння Шредингера, і є доволі складною, хоча і убуває монотонно. До того ж, у речовині електронний розподіл дещо перебудовується. Тому корисно навчитися працювати з  $g(r)$  феноменологічно. На практиці для неї не завжди припустимо використовувати дуже спрощені аналітичні параметризації, такі як чисто експоненційне екранування (борівська модель [391]). З іншого боку, не всі деталі екранування зобов'язані бути однаково важливими. Нашим першим завданням буде встановити, які саме параметри потенціалу є визначальними в яких практичних задачах.

Окрім форми функції екранування  $g(r)$ , режим розсіяння в потенціалі (2.1) істотно залежить від значення безрозмірного відношення  $\alpha/\hbar v$ , яке має назву кулонівського параметра. Для  $|Z_1| = 1$  (тобто налітаючого електрона або протона), не надто великого заряду ядра атому мішені ( $Z_2 \ll \hbar c/e^2 = 137$ ), та релятивістської швидкості налітаючої частинки ( $v \sim c$ ), маємо  $\alpha/\hbar v \ll 1$ , завдяки чому в задачі може бути застосоване борнівське наближення. Якщо ж як  $|Z_1|$ , так і  $Z_2$  є великими, або  $v \ll c$ , то  $\alpha/\hbar v \gtrsim 1$ , і розгляд вже потрібно проводити в непертурбативно-

му режимі. Наприклад, для розсіювання протонів у кремнії ( $Z = 14$ ) межа між пертурбативним та непертурбативним режимами відповідає енергії зіткнення 5 Мев, при якій  $v \approx 0.1c$ ,  $Ze^2/\hbar v \approx 1$ . Квазікласичний режим розсіювання теоретично розглядався в [215, 392, 393] та експериментально тестувався в [394]. Останнім часом, питання кулонівських поправок привертало увагу в різних задачах споріднених з розсіянням на атомних ядрах [155, 246, 395–401], і знову дискутувалася придатність теорії Мольєра при великих кулонівських параметрах [396]. Ще залишається недоведеною строго і висунута в [392] скейлінгова гіпотеза для класичного високоенергетичного розсіювання в екранованому кулонівському полі. Нашою наступною метою буде встановити чіткі і якомога загальніші співвідношення, що характеризують розсіювання на атомі у квазікласичному наближенні.

У даному підрозділі ми почнемо з розгляду процесу розсіювання заряджених частинок на атомі в класичній механіці, потім порівняємо його із загальним квантовим (ейкональним) описом, зокрема досліджуючи його квазікласичну межу, і насамкінець обчислимо декілька доданків пертурбативного розкладення (див. Додаток А.1). Особливу увагу буде приділено випадку великих значень  $q$  та асимптотичному перед-резерфордівському режиму.

**2.1.1. Класичний опис.** Почнемо з випадку, коли розсіювання швидкої зарядженої частинки на атомі піддається класичному опису. Індикатриса розсіювання на малий кут (залежний від прицільного параметра) у цьому випадку виражається просто як

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{b}) &\simeq -\frac{\partial}{\partial \vec{b}} \int_{-\infty}^{\infty} dt V(\sqrt{b^2 + v^2 t^2}) \equiv -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\sqrt{b^2 + z^2}) \\ &= -\frac{2\alpha}{v} \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \int_b^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} g(r). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Звідси диференціальний переріз розсіювання має обчислюватися як якобіан

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}}{d^2q} = \frac{d^2b}{d^2q} = \left| \frac{q dq}{b db} \right|^{-1}. \quad (2.3)$$

У наближенні прямолінійного прольоту він не залежить від знаку заряду.

Завдяки присутності кулонівської сингулярності при малих прицільних параметрах, диференціальний переріз (2.3) при великих переданих імпульсах наближається до резерфордівського

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d^2q} = \frac{4\alpha^2}{v^2q^4}. \quad (2.4)$$

Буває зручно замість (2.3) розглядати відношення  $\frac{d\sigma_{\text{cl}}/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q}$ , яке прямує до одиниці при  $q \rightarrow \infty$ , означаючи настання масштабної інваріантності (скейлінгу) в розсіянні. При довільних переданих імпульсах для цього відношення з (2.3) та (2.4) можна отримати вираз

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} = \left| \frac{d}{db^2} \left( \frac{2\alpha}{vq} \right)^2 \right|^{-1}. \quad (2.5)$$

Згідно з (2.2), тут  $|\alpha|/vq$  залежить лише від  $b$ , тому диференціювання теж дає функцію лише  $b$ , яку можна знову представити як деяку функцію  $vq/|\alpha|$ :

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} = \mathcal{R} \left( \frac{vq}{|\alpha|} \right). \quad (2.6)$$

Таким чином, ми приходимо до узагальненої властивості скейлінгу при довільних переданих імпульсах, аналогічної тій, існування якої припускалося в [392], оскільки в нерелятивістському випадку  $vq$  дорівнює ліндхардівському  $2mv^2 \sin \theta/2 = 4E \sin \theta/2$ , де  $\theta$  – кут розсіяння. Скейлінг (2.6) є дещо загальнішим, аніж в [392], оскільки переданий імпульс  $q$  може бути релятивістським, і окрім того, аргумент функції  $\mathcal{R}$  включає ще й залежність від  $\alpha$ , тобто від типу та швидкості частинки при заданій мішені.<sup>2</sup> Функція  $\mathcal{R}$  залежить від  $g(r)$ , і поки що є невідомою, за винятком того, що при малих значеннях аргумента вона прямує до нуля, а при великих – до одиниці. В [392] пропонувалися параметризації безпосередньо для  $\mathcal{R}$ .

<sup>2</sup>Цей динамічний скейлінг не слід плутати зі статистичним скейлінгом, який виникає в борнівському наближенні, коли атомний формфактор обчислюється в наближенні Томаса-Фермі. Втім, ці два скейлінги можуть і поєднуватися.



Для того щоб повністю виразити диференціальний переріз розсіяння через  $q$ , потрібно розв'язати рівняння (2.2) відносно  $b$ , що в загальному випадку можливо зробити лише чисельно. Втім, асимптотичну поведінку (2.2) неважко вивести:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} q(b) &\underset{b \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\alpha}{v} \left[ \frac{2}{b} + b \int_0^\infty dr g'''(r) \left( \ln \frac{2r}{b} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2\alpha}{vb} \left[ 1 - \frac{(\mu_0 b)^2}{2} \left( \ln \frac{2}{\mu_1 b} + \frac{1}{2} - \gamma_E \right) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

де

$$\mu_0^2 = g''(0) \quad (2.8)$$

– параметр «слабкого екранування», що відіграє важливу роль в різних жорстких процесах за участю атомів, і

$$\ln \mu_1 = \frac{1}{\mu_0^2} \int_0^\infty dr g'''(r) \ln r - \gamma_E. \quad (2.9)$$

Стала Ейлера  $\gamma_E = 0.577$  була введена до визначень (2.7), (2.9), щоб для чисто експоненційно екранованого потенціалу (A.1) виконувалась тотожність  $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ . Оскільки  $\mu_1$  входить до (2.7) під знаком логарифма, чутливість до цього параметра є слабшою, ніж до  $\mu_0$ .

Якщо обернути співвідношення (2.7) в рамках тієї ж точності,

$$b \underset{q \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{2|\alpha|}{vq} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\alpha\mu_0}{vq} \right)^2 \left( \ln \frac{vq}{|\alpha|\mu_1} + \frac{1}{2} - \gamma_E \right) \right],$$

і підставити до Рівн. (2.3), отримаємо поправку наступного порядку до асимптотики Резерфорда:

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d^2q} \underset{q \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{d\sigma_{Ruth}}{d^2q} \left[ 1 - 2 \left( \frac{2\alpha\mu_0}{vq} \right)^2 \left( \ln \frac{vq}{|\alpha|\mu_1} + \frac{1}{4} - \gamma_E \right) \right]. \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>Для цього в (2.2) потрібно розкласти

$$\int_b^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} g(r) = \int_b^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \left[ g(0) + rg'(0) + \frac{r^2}{2} g''(0) \right] + \int_{r_1}^\infty dr \left( \frac{1}{r} + \frac{b^2}{2r^3} \right) g(r),$$

і, обчисливши парціальні інтеграли, скоротити допоміжний параметр  $r_1$ , такий, що  $b \ll r_1 \ll \mu^{-1}$ .

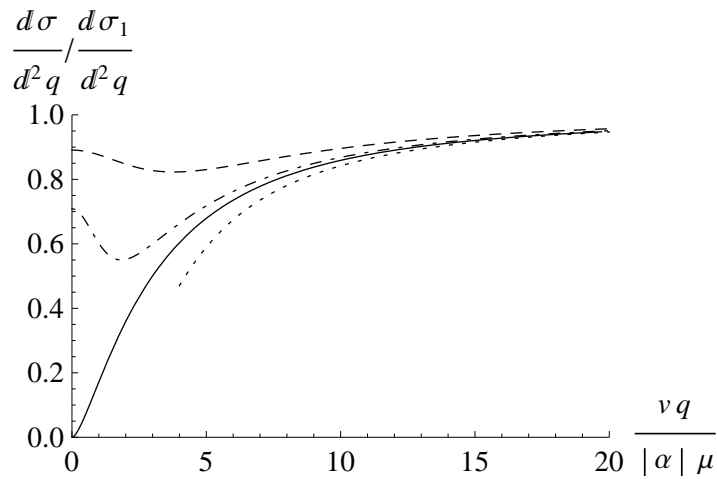


Рис. 2.1. Відношення диференціального перерізу розсіяння електрона або протона на атомі [обчисленого за рівняннями (2.11), (A.14)] до борнівського диференціального перерізу [перший член рівняння (A.7)], для  $\alpha/\hbar v = 0.5$  (штрихова крива) та  $\alpha/\hbar v = 1$  (штрих-пунктирна крива). Суцільна крива – відношення диференціального перерізу атомного розсіяння, розрахованого в класичній механіці, до резерфордівського перерізу [Рівн. (2.4)]. Точкова крива – передрезерфордівська асимптотика [Рівн. (2.10)].

Однак, при розрахунках слід мати на увазі, що параметр  $\mu_0$  виявляється нескінченним в моделі атома Томаса-Фермі [197], до якої в свою чергу здійснювалася прив'язка в роботі Мольєра [166]. Тому для його обчислення потрібен точніший атомний потенціал – наприклад, такий, що визначається з розрахунків методом Хартрі-Фока [215, 402] або з експериментальних даних з розсіяння рентгенівських променів та електронів на атомах різних елементів (як в підході Дойля-Тернера [403], хоча потенціал Дойля-Тернера для нашої задачі незастосовний, оскільки не містить кулонівської сингулярності).

**2.1.2. Ейкональне наближення.** У квантовому розрахунку ми можемо виходити з відомого явного представлення для диференціального перерізу високоенергетичного розсіяння – ейконального наближення [166, 197]:

$$\frac{d\sigma}{d^2q} = |a|^2, \quad (2.11)$$

де

$$a = \frac{1}{2\pi i \hbar} \int d^2 b e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{b}} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \right] \quad (2.12)$$

– амплітуда розсіяння,

$$\chi_0(\vec{b}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt V(\vec{b}, vt) \equiv - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{b}, z) \quad (2.13)$$

– ейкональна фаза. У ейкональному наближенні залежність від знаку заряду частинки (тобто знаку  $\alpha$ ) присутня лише у фазі амплітуди, яка не дає внеску до спостережуваного диференціального перерізу (2.11). Тому електрони та протони з однаковою (достатньо великою) швидкістю розсіюються на атомі подібним чином.

**Великі  $q$ . Квантова перед-резерфордівська асимптотика.** При великих  $q$  квадрат амплітуди (А.14) прямує до тієї ж асимптоти Резерфорда, що і класичний диференціальний переріз (2.4), але ця асимптотика досягається доволі далеко (див. Рис. 2.1). Щоб обчислити поправки, як і в попередньому підрозділі, потрібно врахувати наступні порядки малості в розкладенні ейкональної фази при малих  $b$ :

$$\chi_0(b) \underset{b \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2\alpha}{v} \left[ \ln b + \text{const} + \frac{\mu_0^2 b^2}{4} \left( \ln \frac{\mu_1 b}{2} + \gamma_E - 1 \right) \right].$$

Підставляючи це в (2.12) і лінеаризуючи за поправкою  $\mathcal{O}(\mu_0^2 b^2)$ , отримуємо:

$$\int_0^\infty db b J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{\chi}_0} \simeq \int_0^\infty db b^{1 + \frac{2i\alpha}{\hbar v}} J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) \left[ 1 + \frac{i\alpha}{2\hbar v} \mu_0^2 b^2 \left( \ln \frac{\mu_1 b}{2} + \gamma_E - 1 \right) \right], \quad (2.14)$$

де  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 - \frac{2\alpha}{v} \text{const}$ . Якщо виразити логарифм у підінтегральному виразі через похідну від ступінної функції по її показнику, яку можна винести за знак інтеграла,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty db b J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{\chi}_0} &= \int_0^\infty db J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) b^{1 + \frac{2i\alpha}{\hbar v}} \\ &+ \frac{i\alpha}{2\hbar v} \mu_0^2 \left( \ln \frac{\mu_1}{2} + \gamma_E - 1 + \frac{\partial}{\partial \frac{2i\alpha}{\hbar v}} \right) \int_0^\infty db J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) b^{3 + \frac{2i\alpha}{\hbar v}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

інтеграли зводяться до табличних. Обчислюючи їх та диференціюючи, маємо

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dbbJ_0\left(\frac{qb}{\hbar}\right) e^{i\hbar\tilde{\chi}_0} &= \left(\frac{\hbar}{q}\right)^{2+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} 2^{1+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} \\
&+ \frac{i\alpha}{2\hbar v} \mu_0^2 \left(\ln\frac{\mu_1}{2} + \gamma_E - 1 + \frac{\partial}{\partial 2i\alpha}\right) \left(\frac{\hbar}{q}\right)^{4+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} 2^{3+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \frac{\Gamma\left(2+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{\Gamma\left(-1-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} \\
&= \left(\frac{\hbar}{q}\right)^{2+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} 2^{1+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} + \frac{i\alpha}{\hbar v} \mu_0^2 2^{2+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \left(\frac{\hbar}{q}\right)^{4+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \frac{\Gamma\left(2+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{\Gamma\left(-1-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} \\
&\quad \times \left(\ln\frac{\hbar\mu_1}{q} + \gamma_E - 1 + \frac{\psi\left(2+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right) + \psi\left(-1-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{2}\right), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

де  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  – дигамма-функція, або, використовуючи тотожність  $\psi(z+1) = \psi(z) + 1/z$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dbbJ_0\left(\frac{qb}{\hbar}\right) e^{i\hbar\tilde{\chi}_0} &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{2\Gamma\left(-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} \left(\frac{2\hbar}{q}\right)^{2+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \left[1 - \frac{2i\alpha}{\hbar v} \left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)^2 \left(\frac{\hbar\mu_0}{q}\right)^2\right. \\
&\quad \left.\times \left(\ln\frac{\hbar\mu_1}{q} + \Re\psi\left(\frac{i\alpha}{\hbar v}\right) + \gamma_E - 1 + \frac{1}{1+\frac{i\alpha}{\hbar v}} + \frac{1}{\frac{2i\alpha}{\hbar v}}\right)\right] \\
&= \frac{\alpha}{2\hbar v} \frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)} \left(\frac{2\hbar}{q}\right)^{2+\frac{2i\alpha}{\hbar v}} \\
&\quad \times \left\{1 - \left(\frac{\hbar\mu_0}{q}\right)^2 \left[\frac{2i\alpha}{\hbar v} \left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)^2 \left(\ln\frac{\hbar\mu_1}{q} + \Re\psi\left(\frac{i\alpha}{\hbar v}\right) + \gamma_E\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ 2\left(\frac{\alpha}{\hbar v}\right)^2 \left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right) + \left(1+\frac{i\alpha}{\hbar v}\right)^2\right]\right\}. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Зведення модулю останнього виразу в квадрат і лінеаризація за  $(\hbar\mu/q)^2$  дають<sup>4</sup>

$$\frac{d\sigma}{d^2q} \underset{q/\hbar\mu \gg 1}{\approx} \frac{4\alpha^2}{v^2 q^4} \left\{1\right.$$

<sup>4</sup>Подібна формула була вперше отримана Мольєром [166], але в прив'язці до введеної їм параметризації атомного потенціалу. Остання параметризація, в свою чергу, прив'язана до потенціалу Томаса-Фермі, і тому не є точною при  $r \rightarrow 0$ , а отже, і коефіцієнти в аналогу формули (2.18), отриманому Мольєром, є неточними. Ефекти, що описуються формулою (2.18), досліджувалися експериментально [383, 404], але орієнтуючись на роботу [392], а не Мольєра.

$$-2 \left[ \left( \frac{2\alpha\mu_0}{vq} \right)^2 \left( \ln \frac{q}{\hbar\mu_1} - \Re\psi \left( \frac{i\alpha}{\hbar v} \right) - \gamma_E + \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{\hbar\mu_0}{q} \right)^2 \right] \}. \quad (2.18)$$

У класичному ліміті  $\frac{\alpha}{\hbar v} \rightarrow \infty$ , коли  $\Re\psi \left( \frac{i\alpha}{\hbar v} \right) \rightarrow \ln \frac{|\alpha|}{\hbar v}$ , це переходить у Рівн. (2.10).

Як видно з рівняння (2.18), поправки  $\sim (\alpha\mu_0/vq)^2$  та  $\sim (\hbar\mu_0/q)^2$  в основному адитивні, тому якщо поділити (2.18) на перше борнівське наближення<sup>5</sup>

$$\frac{d\sigma_1}{d^2q} = \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d^2q} \frac{1}{\left[ 1 + (\hbar\mu_0/q)^2 \right]^2} \simeq \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d^2q} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\hbar\mu_0}{q} \right)^2 \right],$$

ми фактично отримуємо класичну асимптотику наступного порядку малості (2.10), з єдиною відмінністю, що  $\Re\psi \left( i\alpha/\hbar v \right)$  може помітно відрізнятися від логарифма при  $\alpha/\hbar v < 2$ . Таким чином, за межами першого борнівського наближення, навіть для помірних  $\alpha/\hbar v$ , диференціальний переріз розсіяння входить у квазікласичний режим раніше, аніж виходить на чисту асимптотику Резерфорда.

На практиці відхилення від асимптотики Резерфорда стає значним при  $\alpha/\hbar v \gtrsim 1$ . У твердотільних мішенях деталі розсіяння на малі кути маскуються багаторазовим розсіюванням, але ефект відхилення від резерфордівської асимптотики все ж вдавалося експериментально спостерігати у тонких металічних фольгах [383, 404] (для  $\alpha/\hbar v > 10$ ).<sup>6</sup>

Слід також мати на увазі, що при  $v \sim c$  існують конкуруючі ефекти. Одним з них є часткове пригнічення асимптотики Резерфорда за рахунок спінових ефектів (фактор  $1 - v^2\chi^2/4c^2$  у формулі Мотта [225]), але цей

<sup>5</sup>Відзначимо, що в пертурбативному режимі  $\alpha \rightarrow 0$  ефективним параметром екранування слугує  $\mu_0$ . Мольєр пропонував використовувати в цій якості еквівалент параметра  $\mu_2$ , визначеного нижче, але це призводить до істотної помилки, що було продемонстровано в [393] і дещо дискредитувало теорію Мольєра. Втім, слід мати на увазі, що зроблене модельне припущення не є принциповою складовою теорії Мольєра.

<sup>6</sup>Відхилення від асимптотики Резерфорда повинні були бути присутніми ще у перших експериментах Гейгера з розсіяння альфа-частинок у речовині [161, 405], де параметр  $\alpha/\hbar v$  сягав порядку 10. Але оскільки в цих дослідженнях багаторазове розсіювання на малі кути було значним, основну увагу було приділено розсіюванню назад [405], що дозволило Резерфорду сформулювати планетарну модель атома [190].

ефект є суто кінематичним, не залежить від кулонівського параметра, і призводить до прискорення, а не до сповільнення убутання диференціального перерізу з  $\chi$ . Іншим подібним ефектом є релятивістське друге борнівське наближення, знайдене в [226], але воно має залежність від знаку заряду частинки і пригнічується великим початковим імпульсом.

**2.1.3. Середній квадрат переданого імпульсу. Імпульс екранування.** В проблемах переносу замість повного перерізу (див. Додаток А.2) частіше потрібно знати транспортний переріз або середній квадрат переданого імпульсу. Його формальне обчислення на основі ейконального наближення (2.11), (2.12) дає

$$\begin{aligned}
\int d^2q q^2 \frac{d\sigma}{d^2q} &= \int d^2q \left| \vec{q} \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2b e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{b}} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2 \\
&= \int d^2q \left| \frac{1}{2\pi} \int d^2b e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{b}} \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2 \\
&= \int d^2b \left| \hbar \frac{\partial}{\partial \vec{b}} e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \right|^2 = \int d^2b \left| \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \chi_0(\vec{b}) \right|^2 \\
&= \int d^2q q^2 \frac{d\sigma_1}{d^2q}, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

згідно з чим точний результат має дорівнювати першому борнівському наближенню [так само, як і класичному результату, оскільки  $\frac{\partial}{\partial \vec{b}} \chi_0(\vec{b})$  – це класичний переданий імпульс (2.2)]. Проте, для екранованого кулонівського потенціалу середній квадрат переданого імпульсу насправді розбігається при малих  $b$ , тому тотожність  $\int d^2q q^2 \left( \frac{d\sigma}{d^2q} - \frac{d\sigma_1}{d^2q} \right) = 0$  може порушуватися. Наприклад, для експоненційно екранованого (юкавського) потенціалу з (А.7) ми отримуємо

$$\hbar^2 \int d^2q q^2 \left( \frac{d\sigma}{d^2q} - \frac{d\sigma_1}{d^2q} \right) \simeq 2\pi \left( \frac{2\alpha}{v} \right)^4 \int_0^\infty dQ Q^3 f_3(Q) + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{2\alpha}{v} \right)^8 \right], \tag{2.20}$$

де  $\int_0^\infty dQ Q^3 f_3(Q) = -0.29 \neq 0$ .

У випадку багаторазового кулонівського розсіювання (що буде розглядатися в наступному підрозділі), замість розбіжного середнього квадрата

переданого імпульсу теорія оперує зі скінченною величиною<sup>7</sup>

$$\ln q_a(\alpha) = \lim_{q_R \rightarrow \infty} \left( \ln q_R - \int_0^{q_R} \frac{dq}{q} \frac{d\sigma/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} \right) - \frac{1}{2} \quad (2.21a)$$

$$\equiv \int d \left( \frac{d\sigma/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} \right) \ln q - \frac{1}{2} \quad (2.21b)$$

(див. [167, 168] та Розд. 2.2.2). З представлення (2.21a) для неї отримуємо

$$\begin{aligned} \ln q_a + \frac{1}{2} &= \lim_{q_R \rightarrow \infty} \left( \ln q_R - \int_0^{q_R} \frac{dq}{q} \frac{d\sigma_1/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} \right) + \int_0^\infty \frac{dq}{q} \frac{\frac{d\sigma_1}{d^2q} - \frac{d\sigma}{d^2q}}{\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d^2q}} \\ &= \lim_{q_R \rightarrow \infty} \left( \ln q_R - \int_0^{q_R} \frac{dq}{q} \frac{1}{[1 + (\hbar\mu/q)^2]^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{v}{2\alpha} \right)^2 \int_0^\infty dq q^3 \left( \frac{d\sigma_1}{d^2q} - \frac{d\sigma}{d^2q} \right). \end{aligned} \quad (2.21c)$$

Ліміт у першому рядку тут можна ідентифікувати як  $\frac{1}{2} + \ln q_a(0)$ , що веде до співвідношення

$$\ln \frac{q_a(\alpha)}{q_a(0)} = \left( \frac{v}{2\alpha} \right)^2 \int_0^\infty dq q^3 \left( \frac{d\sigma_1}{d^2q} - \frac{d\sigma}{d^2q} \right). \quad (2.22)$$

Якби, згідно з Рівн. (2.19), права частина тут дорівнювала нулю, це означало б, що  $q_a(\alpha) \equiv q_a(0)$ . Але чисельний розрахунок на основі рівняння (2.21a) дає функцію, яка необмежено зростає зі зростанням  $\alpha$  (див. Рис. 2.2). Дослідимо тепер цю величину в двох протилежних лімітах: при малих та при великих кулонівських параметрах.

**Малий кулонівський параметр.** В ліміті  $\alpha/\hbar v \rightarrow 0$ , використовуючи (2.12) і (2.4), можна переписати відношення перерізів, що входить до Рівн. (2.21a), як

$$\frac{d\sigma_1/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} = \frac{q^2}{\hbar^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int d^2b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \nabla \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^2. \quad (2.23)$$

Щоб виконати в (2.21a) інтегрування за  $q$ , відділимо в (2.23)  $b$ -сингулярність, розбивши  $\int d^2b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \nabla \chi_0(b)$  на дві частини: по диску  $b < b_R$

<sup>7</sup>Якби в (2.21b) можна було проінтегрувати частинами, або в (2.21a) на верхній межі можна було б покласти  $q_R = \infty$ , цей інтеграл був би пропорційним середньому квадрату переданого імпульсу.

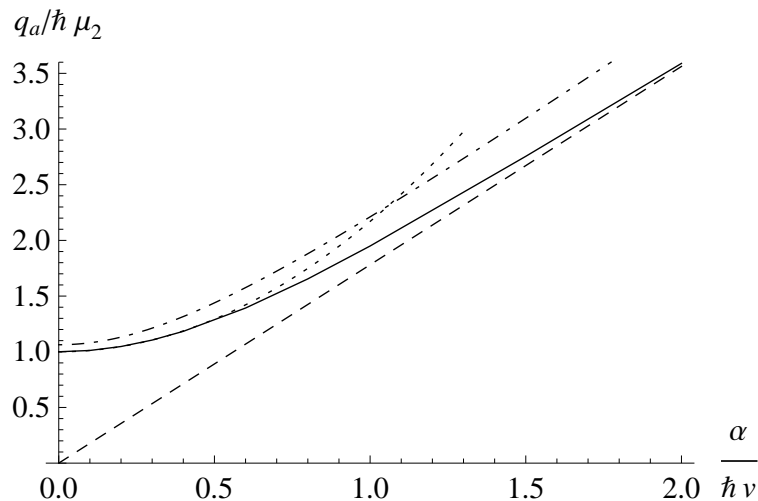


Рис. 2.2. Суцільна крива – імпульс екранування  $q_a$ , визначений за формулою (2.21b). Штрихова лінія – його квазікласична асимптотика (2.32). Точкова крива – третє борнівське наближення (2.22), (2.20). Точково-штрихова крива – розрахунок за формулою Мольєра (1.6).

з центром в початку координат та по його зовнішній частині  $b > b_R$ , де границя  $b_R$  вибирається настільки малою, щоб при  $b < b_R$  екрануванням можна було повністю знехтувати:  $\nabla \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \approx -\frac{\vec{b}}{b^2}$ . Тоді

$$\ln q_a(0) + \frac{1}{2} = \lim_{q_R \rightarrow \infty} \left[ \ln q_R - \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int_{q < q_R} d^2 q \left| \int_{b < b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \frac{\vec{b}}{b^2} - \int_{b > b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \nabla \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^2 \right]. \quad (2.24)$$

Якщо тепер розкрити квадрат суми, в інтерференційному члені можна покласти  $b_R \rightarrow 0$ , після чого він зникає:

$$\ln q_a(0) + \frac{1}{2} = \lim_{q_R \rightarrow \infty} \left[ \ln q_R - \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int_{q < q_R} d^2 q \left| \int_{b < b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \frac{\vec{b}}{b^2} \right|^2 - \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int_{q < q_R} d^2 q \left| \int_{b > b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \nabla \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^2 \right]. \quad (2.25)$$

Далі перший інтеграл в (2.25) обчислюється як

$$\left| \int_{b < b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \frac{\vec{b}}{b^2} \right|^2 = \left[ 2\pi \int_0^{b_R} db J_1 \left( \frac{qb_R}{\hbar} \right) \right]^2 = \left\{ \frac{2\pi\hbar}{q} \left[ 1 - J_0 \left( \frac{qb_R}{\hbar} \right) \right] \right\}^2, \quad (2.26)$$



$$\frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int_{q < q_R} d^2 q \left\{ \frac{2\pi \hbar}{q} \left[ 1 - J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) \right] \right\}^2 \underset{q_R \rightarrow \infty}{\simeq} \ln \frac{q_R b_R}{2\hbar} + \gamma_E. \quad (2.27)$$

Він є сингулярним як при  $q_R \rightarrow \infty$ , так і при  $b_R \rightarrow 0$ , але сингулярність  $\ln q_R$  скорочується з першим членом в правій частині рівняння (2.25).

У другому інтегралі в (2.25) вже безпечно покласти  $q_R \rightarrow \infty$ , після чого інтегрування по повній площині  $\vec{q}$  може бути виконано в загальному вигляді:

$$\frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int d^2 q \left| \int_{b > b_R} d^2 b e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{b}}{\hbar}} \nabla \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^2 = \int_{b_R}^{\infty} db b \left| \frac{d}{db} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^2. \quad (2.28)$$

Підставляючи (2.27), (2.28) до Рівн. (2.25), остаточно отримуємо для імпульсу екранування в пертурбативному режимі

$$\ln q_a(0) + \frac{1}{2} + \gamma_E = \lim_{b_R \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{2\hbar}{b_R} - \int_{b_R}^{\infty} db b \left[ \frac{d}{db} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right]^2 \right\}. \quad (2.29)$$

Зокрема, для експоненційного екранування  $g(r) = e^{-\mu r}$  з (2.29) витікає належний результат  $q_a(0) = \hbar\mu$ , який можна було б отримати і напряду з Рівн. (2.21а) з використанням Рівн. (А.8).

Таким чином, права частина (2.29) в загальному випадку характеризує ще один параметр екранування, відмінний від  $\mu_0$  [Рівн. (2.8)] та  $\mu_1$  [Рівн. (2.9)]. Він є квадратичним по  $\chi_0$ . Ми позначимо його як

$$\mu_2 = \frac{q_a(0)}{\hbar} = \exp \left( \lim_{b_R \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{2}{b_R} - \int_{b_R}^{\infty} db b \left[ \frac{d}{db} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right]^2 \right\} - \frac{1}{2} - \gamma_E \right) \quad (2.30a)$$

$$\equiv \exp \left( \lim_{b_R \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{2}{b_R} - \int_{b_R}^{\infty} db b^3 \left[ \int_b^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \frac{d}{dr} \frac{g(r)}{r} \right]^2 \right\} - \frac{1}{2} - \gamma_E \right). \quad (2.30b)$$

Якщо б кулонівське поле було неекранованим [ $g(r) \equiv 1$ ], інтеграл по  $b$  в (2.30b) логарифмічно розійшовся б на верхній межі, даючи  $\mu_2 = 0$ , як і має бути за умови відсутності масштабу для екранування.

**Великий кулонівський параметр.** Тепер розглянемо протилежний випадок, коли  $\alpha/\hbar v \rightarrow \infty$  (класичний ліміт). Враховуючи однозначний зв'язок між  $q$  та  $b$  у класичній механіці, в представленні (2.21b) можна

перейти до інтегрування за прицільними параметрами. При цьому  $q \propto \alpha/v$ , тоді як відношення

$$\frac{d\sigma/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} = \left| \frac{d}{db^2} \left( \frac{d}{db} \frac{v\chi_0}{2\alpha} \right)^{-2} \right|^{-1} = \frac{\left| b \frac{d}{db} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|^3}{\left| b^2 \frac{d^2}{db^2} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right|}$$

[де використано Рівн. (2.5) та  $q(b) = d\chi_0/db$ ] не залежить від  $\alpha/v$ . Тому залежність  $q_a$  від  $\alpha/v$  для будь-якого атомного потенціалу виділяється в універсальній формі:

$$\begin{aligned} \ln q_a(\alpha) + \frac{1}{2} &= \lim_{b_R \rightarrow 0} \left( \ln q(b_R) - \int_{b_R}^{\infty} \frac{db}{q} \left| \frac{dq}{db} \right| \frac{\left| \frac{bdb}{q dq} \right|}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} \right) \\ &= \ln \frac{\alpha}{v} + \lim_{b_R \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{2}{b_R} - \int_{b_R}^{\infty} db b \left[ \frac{d}{db} \frac{v\chi_0(b)}{2\alpha} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ліміт у правій частині (2.31) виявляється таким самим, як і в (2.29), тому, незалежно від форми функції екранування,

$$q_a(\alpha) \underset{\alpha/\hbar v \rightarrow \infty}{\simeq} e^{\gamma_E} \frac{\alpha}{v} \mu_2. \quad (2.32)$$

Ця асимптотика підтверджується і точним розрахунком – див Рис. 2.2.

Для порівняння, у [166] замість фактора  $e^{\gamma_E} = 1.781$  в асимптотичному співвідношенні (2.32) фігурує коефіцієнт  $\sqrt{3.76/1.13} = 1.824$  [див. Рівн. (1.6)]. Можна вважати, що ця різниця знаходиться в рамках похибки останньої цифри числа 1.13, проте, враховуючи, що мольєрівський вираз (1.6) наближається до своєї лінійної асимптоти зверху доволі повільно, тоді як точний вираз наближається до своєї асимптоти швидше, на практиці різниця виявляється більшою:  $\sim 10\%$ . Втім, оскільки  $q_a$  входить лише до логарифмів, прояви цієї різниці є не надто яскравими.

Знайдену залежність (2.32) якісно можна зрозуміти наступним чином: Головний внесок до  $\int_0^{q_R} \frac{dq}{q} \frac{d\sigma}{d\sigma_{\text{Ruth}}}$  відповідає області  $q_{R0} < q < q_R$ , де  $q_{R0}$  є масштабом найнижчих імпульсів  $q$ , на яких ще  $d\sigma/d^2q \approx d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q$ . Але згідно з рівнянням (2.10),  $q_{R0} \sim \alpha\mu/v$ . Отже,  $\ln q_R - \int_0^{q_R} \frac{dq}{q} \frac{d\sigma}{d\sigma_{\text{Ruth}}} \sim$

$\ln q_{R0} = \ln \frac{\alpha\mu}{v}$ . Природно, що екранований імпульс  $q_a$  є пропорційним силі кулонівського поля, яка визначається константою зв'язку  $\alpha$  (див. також подібні якісні аргументи в [394]), але наявність множника  $e^{\gamma_E}$  в Рівн. (2.32) є нетривіальною.

Оскільки кулонівська поправка, якою є стала Ейлера в формулі (2.32), при великих кулонівських параметрах не залежить від екранування, пропонувався наступний підхід. По формулі (2.22) поправку можна обчислити для неекранованого кулонівського поля [155] при довільному кулонівському параметрі, що дає  $q_a(\alpha)/q_a(0) = \exp\left\{f\left(\frac{\alpha}{\hbar v}\right)\right\}$ , де функція  $f$  визначається формулою (1.12). Останню формулу можна спробувати потім використовувати і для екранованого поля [155, 396]. Такий підхід дає непогане наближення на практиці, але взагалі кажучи, є евристичним.

Для практичних застосувань формула (2.30b) може виявитися не найзручнішою. Якщо екрануюча функція представляється у вигляді суперпозиції експонент – в загальному вигляді через перетворення Лапласа

$$g(r) = \int_0^\infty ds e^{-sr} g(s), \quad g(0) = \int_0^\infty ds g(s) = 1, \quad (2.33)$$

з (2.30b) можна вивести і представлення в термінах Лаплас-оригіналу  $g(s)$ :

$$\mu_2 = \exp \left[ \int_0^\infty ds_1 g(s_1) \int_0^\infty ds_2 g(s_2) \frac{s_2^2 \ln s_2 - s_1^2 \ln s_1}{s_2^2 - s_1^2} - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.34)$$

Підінтегральний вираз тут є регулярним при  $s_2 \rightarrow s_1$ :

$$\frac{s_2^2 \ln s_2 - s_1^2 \ln s_1}{s_2^2 - s_1^2} \xrightarrow{s_1 \rightarrow s_2} \frac{1}{2} + \ln s_2.$$

Знання останнього ліміту є корисним коли  $g$  параметризується як сума лише декількох експонент:  $g(s) = \sum_n g_n \delta(s - s_n)$ , як це робиться у випадку потенціалів Мольєра та Бірсака-Ціглера (див. нижче). Тоді (2.34) приймає вигляд

$$\mu_2 = \exp \left[ 2 \sum_{m>n} g_m g_n \frac{s_m^2 \ln s_m - s_n^2 \ln s_n}{s_m^2 - s_n^2} + \sum_n g_n^2 \left( \frac{1}{2} + \ln s_n \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.35)$$

Очевидно, що для простої експоненційної параметризації  $g(r) = e^{-\mu r}$ , коли в сумі присутній лише один доданок, з (2.35) маємо, як і належить,  $\mu_2 = \mu$ .

**2.1.4. Параметри  $\mu_n$  для різних атомних потенціалів.** Дослідимо тепер відмінності для значень параметрів  $\mu_n$ , що виникають для різних атомних потенціалів, популярних в літературі.

Найчастіше використовується універсальна функція екранування Томаса-Фермі [197], яка, втім, не враховує оболонкової структури та вважається задовільною лише для  $Z > 18$ :

$$g(r) = \mathfrak{g}_{TF} \left( \frac{r}{a_{TF}} \right), \quad \sqrt{z} \frac{d^2 \mathfrak{g}_{TF}(z)}{dz^2} = \mathfrak{g}_{TF}^{3/2}(z).$$

Простішою для теоретичного використання є аналітична апроксимація потенціалу Томаса-Фермі, запропонована Мольєром [166]:

$$g(r) = \mathfrak{g}_M \left( \frac{r}{a_{TF}} \right), \quad \mathfrak{g}_M(z) = 0.35e^{-0.3z} + 0.55e^{-1.2z} + 0.10e^{-6.0z}.$$

Потенціал аналогічної структури з більшим числом доданків був запропонований Бірсаком та Ціглером [382]:

$$\mathfrak{g}_{BZ}(z) = 0.1818e^{-3.2z} + 0.5099e^{-0.9423z} + 0.2802e^{-0.4029z} + 0.02817e^{-0.2016z},$$

але визначався з експериментальних даних по атомним зіткненням (при низьких енергіях).

Нарешті, існує вельми простий потенціал Ліндхарда [299]:

$$g(r) = \mathfrak{g}_L \left( \frac{r}{a_{TF}} \right), \quad \mathfrak{g}_L(z) = 1 - \frac{z}{\sqrt{3 + z^2}}.$$

З таблиці 2.1, де зібрані відповідні параметри  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , видно, що серед вищезгаданих часто використовуваних потенціалів можна зустріти патології, коли той чи інший параметр дорівнює нулю чи нескінченності, або його значення сильно залежить від вибраної параметризації. Також вірогідно, що параметр  $\mu_0$  може суттєво залежати від оболонкової структури атома. Тому краще визначати ці параметри з найбільш відповідних для цього експериментів [383, 404].

Таким чином, незважаючи на те, що розсіювання швидких заряджених частинок на окремих атомах на малі кути експериментально доволі складно спостерігати через вплив багаторазового розсіювання у макроскопічних твердотільних мішенях, це виявляється можливим, і воно має виразні

особливості. Зокрема, існує перед-резерфордівська асимптотика, яка призводить до помітної залежності типових переданих імпульсів від  $\alpha$ . Складніші ефекти залишкового екранування можуть виникати при взаємодії швидких частинок з орієнтованими атомними ланцюжками або площинами, зокрема, при розрахунках деканалювання (див. Розд. 3).

Таблиця 2.1

**Параметри  $\mu_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  для різних атомних потенціалів, в одиницях оберненого радіуса Томаса-Фермі**

Potential	$\mu_0 a_{TF}$	$\mu_1 a_{TF}$	$\mu_2 a_{TF}$
Exponential	1	1	1
Thomas-Fermi	$\infty$	–	1.09
Molière	2.1	4.4	1.08
Biersack-Ziegler	0.52	0.84	0.63
Lindhard	0	0	0.65

**2.2. Поліпшене розділення м'яких та жорстких компонент при багаторазовому кулонівському розсіюванні**

В експериментах з проходження частинок крізь макроскопічні тверді мішені частинка взаємодіє з багатьма атомами. Завдання теорії, таким чином, полягає в забезпеченні точного та детального опису функції розподілу на будь-якій глибині проникнення. Багаторазове розсіювання згладжує функцію розподілу, і в достатньо товстих мішенях процес стає подібним до дифузії. Як відомо, нормальна (гауссова) дифузія є масштабно-інваріантною, тобто функція розподілу на різних глибинах є самоподібною (гауссівською). З урахуванням кулонівського характеру розсіювання на атомах, втім, ця масштабна інваріантність порушується, і дифузія стає аномальною, а розподіли на різних глибинах – не зовсім ізоморфними. Ми розглянемо дану проблему на рівні кутового розподілу.

**2.2.1. Розв'язок Фур'є-Бесселя для рівняння переносу.** Розподіл імовірності  $f(\theta, l) = dw/d^2\theta$  розсіяння швидкої частинки на (типово малий) кут  $\theta$  в аморфному середовищі задовольняє транспортному рівнянню<sup>8</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial l} = n \int d\sigma(\chi) \left[ f(\vec{\theta} - \vec{\chi}, l) - f(\theta, l) \right], \quad (2.36)$$

де  $d\sigma(\chi) = d^2\chi \frac{d\sigma}{d^2\chi}$  – квантовий диференціальний переріз розсіяння частинки на одному атомі на кут  $\chi$ ,  $n$  – щільність атомів в середовищі, а  $l$  – пройдена товщина мішені (див. Рис. 2.3). Рівняння (2.36) зберігає нормування:

$$\int d^2\theta f(\theta, l) = 1. \quad (2.37)$$

Розв'язок рівняння (2.36), що задовольняє початковій умові  $f(\theta, 0) = \delta(\vec{\theta})$ , отримується за допомогою перетворення Фур'є-Бесселя:

$$f(\theta, l) = \int \frac{d^2\rho}{(2\pi)^2} e^{i\vec{\rho}\cdot\vec{\theta} - nl \int d\sigma(\chi)(1 - e^{-i\vec{\rho}\cdot\vec{\chi}})} \quad (2.38a)$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \rho J_0(\rho\theta) e^{-nl \int d\sigma(\chi)[1 - J_0(\rho\chi)]}. \quad (2.38b)$$

У деяких випадках важливішим є розподіл по одній з декартових проекцій кута розсіяння, який виражається одновимірним перетворенням Фур'є:

$$\begin{aligned} f(\theta_x, l) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_y f(\theta, l) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{i\xi\theta_x - nl \int d\sigma(\chi)[1 - J_0(\xi\chi)]}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ми будемо позначати функції розподілу (2.38) та (2.39) однаковою літерою, відрізняючи їх лише за записом їхніх кутових аргументів.

---

<sup>8</sup>Це рівняння може бути виведене з перших принципів в рамках підходу Боголюбова [406], який постулює повну відсутність кореляцій між розсіяннями. У квантовій механіці його також можна отримати напряду з ейконального наближення, хоча в товстих мішенях останнє накладає сильне обмеження знизу на енергію частинки.

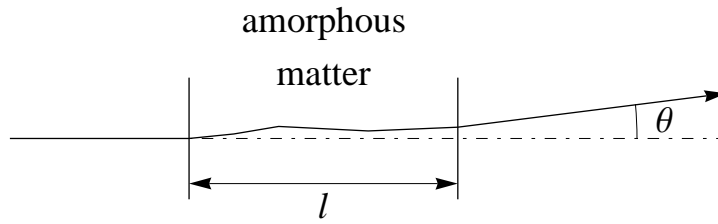


Рис. 2.3. Схематичне зображення проходження швидкої зарядженої частинки крізь шар аморфної речовини.

**2.2.2. Товсті мішені: теорія Мольєра.** Як було зазначено вище, при значній товщині мішені еволюція розподілу по випадковим кутам відхилення частинок (які можна розглядати як поперечні вектори) повинна набувати форми дифузії. У загальному інтегральному представленні (2.38) та (2.39) це проявляється наступним чином: при великих  $nl$  експонента під знаком інтеграла швидко зменшується, отже, типові  $\rho$  (або  $\xi$ ) є малими, що дозволяє апроксимувати показник експоненти відповідним асимптотичним виразом. Однак, враховуючи, що фізичний диференціальний переріз розсіяння швидких заряджених частинок на одному атомі на великі кути має асимптотику Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\chi} \underset{\chi/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{8\pi Z^2 \alpha^2}{p^2 \chi^3}, \quad (2.40)$$

де  $p$  – імпульс частинки,  $Z$  – заряд ядра, а  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  – константа тонкої структури, наївне розкладення  $1 - J_0(\rho\chi) \simeq \rho^2 \chi^2/4$  під інтегралом призводить до логарифмічної розбіжності  $\int d\sigma(\chi)\chi^2$ . Послідовний аналіз [168] показує, що при малих  $\rho$  в асимптотиці показника експоненти в рівняннях (2.38), (2.39) насправді залишається коефіцієнт, логарифмічно залежний від  $\rho$ :

$$nl \int d\sigma(\chi) [1 - J_0(\rho\chi)] \underset{\rho\chi'_a \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\chi_c^2 \rho^2}{2} \ln \frac{2}{\chi'_a \rho}, \quad (2.41)$$

тим самим порушуючи гауссовість інтеграла Фур'є-Бесселя. Тут  $\chi_c^2(l) = 4\pi nl Z^2 \alpha^2 / p^2$ , тоді як так званий кут екранування  $\chi'_a \sim 1/R_a p$ , де  $R_a$  – атомний радіус екранування, характеризує масштаб кутів, на яких сингу-

лярність в (2.40) пригнічується.<sup>9</sup> Таким чином, дифузія тут виявляється аномальною, але лише слабко: аномалія є логарифмічною замість ступінного закону. Це означає, що функція розподілу *не* прямує до розподілу Леві [407], хоча водночас не є і суто гауссівською.

Відношення  $\chi_c^2/\chi_a'^2$  по суті вимірює товщину мішені в одиницях радіаційної довжини  $X_0$ :

$$\frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2} = \frac{\pi}{\alpha\gamma^2\chi_a'^2 \ln \frac{\text{const}}{2\gamma\chi_a'}} \frac{l}{X_0},$$

де  $\text{const} \sim 1$ , а  $\gamma\chi_a'$ , можна теж виразити в термінах  $X_0$  (див. Розділ 4). Наприклад, відношення  $\chi_c/\chi_a' = 10^2$  відповідає твердотільним мішеням товщиною декілька міліметрів. Надалі ми будемо вимірювати товщину мішені в незалежних від  $Z$  одиницях, як  $\chi_c^2/\chi_a'^2$ .

Наближення (2.41) значно спрощує структуру інтегралів (2.38), (2.39), але їхнє обчислення все ще залишається нетривіальним. Інтуїтивно зрозуміло, що дифузія, принаймні при типових кутах, повинна бути близькою до гауссівської, хоча і з можливими логарифмічними відхиленнями. Мольєр [167] запропонував припущення, що типовий кут відхилення становить  $\chi_c\sqrt{B}$ , з таким  $B$ , що різниця логарифмічно великих параметрів  $B - \ln B - \ln \frac{\chi_c^2}{\chi_a'^2}$  є константою порядку одиниці (яка традиційно покладається рівною нулю). Таким чином,  $B(\chi_c^2/\chi_a'^2)$  є функцією Ламберта (див., наприклад, [16]), і права частина рівняння (2.41) набуває вигляду

$$\frac{\chi_c^2\rho^2}{2} \ln \frac{2}{\chi_a'\rho} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4B} \ln \frac{u^2}{4},$$

де  $u = \chi_c\sqrt{B}\rho$ . Оскільки логарифмічна залежність від перенормованої

<sup>9</sup>Через точний диференціальний переріз розсіяння  $\frac{d\sigma}{d\chi} = \frac{8\pi Z^2\alpha^2}{p^2\chi^3}q(\chi)$ , з  $\chi^{-4}q(\chi) \xrightarrow{\chi/\chi_a' \rightarrow 0} \text{const} > 0$  та  $q(\chi) \xrightarrow{\chi/\chi_a' \rightarrow \infty} 1$ , кут екранування виражається як [167, 168]

$$\ln \chi_a' = \int d\mathbf{q}(\chi) \ln \chi + \gamma_E - 1. \quad (2.42)$$

Це відрізняється від традиційнішого  $\chi_a = q_a/p$  (де  $q_a$  досліджувалося в Розд. 2.1.3) доданком  $\gamma_E - 1/2 = 0.077$ , який, втім, є чисельно незначним. При використанні визначення (2.42) права частина рівняння (2.41) має найкоротший вигляд, що полегшує подальші розрахунки. Зауважимо, що хоча рівняння (2.41) було написано для чисто пружного розсіювання, непружний внесок також може бути врахований [179] шляхом простого перевизначення  $\chi_a'$  та  $\chi_c$ .



змінної інтегрування  $u$  в експоненті обернено пропорційна великому параметру  $B$ , це дозволяє розкласти цю частину показника у ряд по оберненим ступеням  $B^{-1}$  і формально проінтегрувати почленно:

$$f(\theta, l) = \frac{1}{2\pi\chi_c^2 B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{B^k} f^{(k)} \left( \frac{\theta}{\chi_c \sqrt{B}} \right), \quad (2.43)$$

з

$$f^{(k)}(\Theta) = \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} du u J_0(\Theta u) e^{-u^2/4} \left( \frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4} \right)^k. \quad (2.44)$$

Відзначимо, що асимптотично<sup>10</sup>  $B \underset{\chi_c \gg \chi'_a}{\simeq} \ln \left( \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2} \ln \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2} \right)$ , і тому параметр розкладення  $B^{-1}$  тут є лише логарифмічно малим, але для  $B \geq 4.5$ , тобто  $\chi_c \gg 10\chi'_a$ , розкладення (2.43) працює задовільним чином [167, 168]. З (2.44) витікає, що для всіх  $k \geq 1$ ,

$$\int d^2\theta f^{(k)}(\theta) \equiv 0. \quad (2.45)$$

Звідси витікає, що функції  $f^{(k)}$  при  $k \geq 1$  не можуть бути скрізь позитивними, а тому не допускають незалежного ймовірнісного тлумачення.

Аналізуючи інтеграли (2.44), можна побачити, що при великих  $\Theta$  компоненти (2.43) поведуть себе як  $f^{(0)}(\Theta) = 2e^{-\Theta^2}$ , що відповідає ідеальному гауссіану, та  $f^{(1)}(\Theta) \sim \Theta^{-4}$ , що відповідає резерфордівській асимптотиці  $f(\theta) \simeq \frac{nl}{2\pi\theta} \frac{d\sigma}{d\theta}$ . Для  $k \geq 2$  маємо  $f^{(k)}(\Theta) \sim \Theta^{-2-2k}$  з точністю до логарифмічних факторів, які будуть обчислені нижче. Подальший аналіз виявляє, що функції  $f^{(k)}$  для  $k \geq 1$  насправді роблять декілька коливань,<sup>11</sup> які є

<sup>10</sup>Головна частина  $\ln \frac{\chi_c}{\chi_a}$  цього виразу була отримана Вільямсом [164] із якісних міркувань – а саме, що логарифмічна розбіжність середнього квадрату переданого імпульсу обрізається на верхній межі величиною  $\chi_1$ , такою, що повна ймовірність розсіяння на кут більший за  $\chi_1$  дорівнює одиниці:  $nl \int_{\chi_1}^{\infty} d\sigma(\chi) = 1$ . Це означає, що  $\chi_1$  – межа розділу між м'якими багаторазовими та жорсткими одноразовими розсіяннями, і підстановка резерфордівського диференціального перерізу дає  $\chi_1 \sim \chi_c$ . Але настільки спрощені міркування не враховують, що під логарифмом теж виникає великий логарифм, і т.д.

<sup>11</sup>Це пов'язано з тим, що при  $k \gg 1$  коефіцієнт  $e^{-u^2/4} \left( \frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4} \right)^k$  під інтегралом в (2.44) утворює різкий пік при  $u \sim 2\sqrt{k}$ . Завдяки цьому, при фіксованому  $\Theta$  і збільшенні  $k$  інтеграл (2.44) прямує до

$$f^{(k)}(\Theta) \sim 2 \ln^k k J_0(2\sqrt{k}\Theta). \quad (2.46)$$

Для  $\Theta = 0$  така швидкість зростання з  $k$  була вказана в [408].

набагато сильнішими від асимптотичних ступінних «хвостів». За помірних  $\chi_c/\chi'_a$ , вони здатні викликати спотворення переходу між гауссівською та резерфордівською областями. Окрім цього, незважаючи на коефіцієнт  $k!$  у знаменнику в правій частині (2.44), функції  $f^{(k)}$  зростають з  $k$  швидше, ніж експоненційно [див. Рівн. (2.46)]. Тому ряд (2.43) розбігається, хоча він тим не менш може слугувати асимптотичним розкладенням в ліміті  $nl \rightarrow \infty$ .

**2.2.3. Тонкі мішені: ступінні та логарифмічні поправки до асимптотики Резерфорда.** Хоча при типових кутах кількість розсіяннь в будь-якій макроскопічній мішені є великою, при значних кутах відхилення функція розподілу може визначатися лише декількома сильними розсіяннями. Тому має сенс розкласти її в ряд збурень

$$f(\theta_x, l) = \sum_{k=1}^{\infty} (nl)^k f_k(\theta_x), \quad (2.47)$$

і дослідити поведінку коефіцієнтів  $f_k(\theta_x)$  при великих  $\theta_x$ .

Перші два члени в (2.47) мають вигляд

$$\begin{aligned} f_1(\theta_x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cos(\xi\theta_x) \int d\sigma(\chi) [J_0(x\chi) - 1] \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi\theta_x} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_x \frac{d\sigma}{d\chi_x} (e^{-ix\chi_x} - 1) \\ &= \frac{d\sigma}{d\theta_x} - \sigma\delta(\theta_x) \underset{\theta_x/\chi'_a \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\chi_c^2}{2nl\theta_x^3} \end{aligned} \quad (2.48)$$

та

$$\begin{aligned} f_2(\theta_x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi\theta_x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_x \frac{d\sigma}{d\chi_x} (e^{-i\xi\chi_x} - 1) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_x \frac{d\sigma}{d\chi_x} \frac{d\sigma}{d(\theta_x - \chi_x)} - \sigma \frac{d\sigma}{d\theta_x} + \frac{\sigma^2}{2} \delta(\theta_x). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Домінуючий внесок до інтеграла в (2.49) походить від двох сусідніх точок:  $\chi_x = 0$ , де можна апроксимувати  $\frac{d\sigma}{d(\theta_x - \chi_x)}$  константою, та  $\chi_x = \theta_x$ , де  $\frac{d\sigma}{d\chi_x} \simeq \frac{d\sigma}{d\theta_x}$ . Відповідна асимптотика інтеграла, таким чином, дорівнює

$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_x \frac{d\sigma}{d\chi_x} \frac{d\sigma}{d(\theta_x - \chi_x)} \simeq \sigma \frac{d\sigma}{d\theta_x}$ , але вона точно скорочується з другим доданком у (2.49). Тому, щоб визначити асимптотику  $f_2$ , необхідно обчислити повільно змінні фактори в підінтегральному виразі у вищих порядках:

$$\begin{aligned} f_2(\theta_x) &\underset{\theta_x/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \int d\chi_x \frac{d\sigma}{d\chi_x} \left( -\chi_x \frac{d}{d\theta_x} \frac{d\sigma}{d\theta_x} + \frac{\chi_x^2}{2} \frac{d^2}{d\theta_x^2} \frac{d\sigma}{d\theta_x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\theta_x^2} \frac{d\sigma}{d\theta_x} \int d\chi_x \chi_x^2 \frac{d\sigma}{d\chi_x}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Тут  $\frac{d^2}{d\theta_x^2} \frac{d\sigma}{d\theta_x} \simeq \frac{6\chi_c^2}{nl\theta_x^5}$  і  $\int_{\sim -\theta_x}^{\sim \theta_x} d\chi_x \chi_x^2 \frac{d\sigma}{d\chi_x} \simeq \frac{\chi_c^2}{nl} \ln \frac{\theta_x}{\chi'_a}$ , звідки

$$(nl)^2 f_2(\theta_x) \underset{\theta_x/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{3\chi_c^4}{\theta_x^5} \ln \frac{\theta_x}{\chi'_a}. \quad (2.51)$$

Отже, якщо побудувати добуток  $\theta_x^3 f(\theta_x)$ , який обертається в нуль при  $\theta_x = 0$  і прямує до ненульової константи коли  $\theta_x/\chi'_a \rightarrow \infty$ , він виявляється немонотонною функцією  $\theta_x$ , і буде перевищувати останню константу при деяких проміжних  $\theta_x$ . Подібна поведінка кутового розподілу багаторазового кулонівського розсіювання спостерігалась експериментально (див. [170]).

Аналогічно можна довести, що всі члени вищих порядків у (2.47) є позитивними і асимптотично убувають як [5]

$$(nl)^k f_k(\theta_x) \underset{\theta_x/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{k(2k-1)!! \chi_c^{2k}}{2\theta_x^{1+2k}} \ln^{k-1} \frac{\theta_x}{\chi'_a}. \quad (2.52)$$

Для розподілу за полярним кутом

$$f(\theta, l) = \sum_{k=1}^{\infty} (nl)^k f_k(\theta) \quad (2.53)$$

асимптотики перших двох доданків розкладення мають вигляд

$$f_1(\theta) = \frac{d\sigma}{d^2\theta} + \sigma \delta(\vec{\theta}) \underset{\theta/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\chi_c^2}{\pi nl \theta^4}, \quad (2.54)$$

$$f_2(\theta) \underset{\theta/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{4} \Delta_{\theta} \frac{d\sigma}{d^2\theta} \int_0^{\sim \theta/2} d\chi \chi^2 \frac{d\sigma}{d\chi} \simeq \frac{8\chi_c^4}{\pi (nl)^2 \theta^6} \ln \frac{\theta}{\chi'_a}, \quad (2.55)$$

а загальний член ряду [5]

$$(nl)^k f_k(\theta) \underset{\theta/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{k k! 2^{k-1} \chi_c^{2k}}{\pi \theta^{2+2k}} \ln^{k-1} \frac{\theta}{\chi'_a}. \quad (2.56)$$

Оскільки коефіцієнти при логарифмах в рівняннях (2.52), (2.56) є значними вже при  $k = 2$ , і до того ж зростають з  $k$  факторіально, при помірно великих  $\theta$  слід підсумовувати такі внески в усіх порядках. В математиці подібні ресумовування типово здійснюються за допомогою інтегрального перетворення Бореля (див., наприклад, [409]). Втім, у нашому випадку в конструюванні нового інтегрального представлення немає потреби, оскільки початковий інтеграл (2.38) або (2.39) вже придатний для цієї мети. Нижче ми введемо відповідні вирази безпосередньо з інтегралів (2.38) та (2.39).

**2.2.4. Аналіз у комплексній площині.** Оскільки нас цікавить той випадок, коли кількість зіткнень є великою, реальні частини показників експонент у підінтегральних виразах (2.38), (2.39) зі зростанням  $\rho$ ,  $|\xi|$  швидко досягають великих від'ємних значень. Сучасний підхід до визначення асимптотик таких інтегралів полягає у виведенні шляху інтегрування в комплексну площину, де підінтегральний вираз можна зробити неосцилюючим, що значно полегшує обчислення асимптотики інтеграла. Для розподілу багаторазового кулонівського розсіювання така процедура деформації була вперше застосована Бете (див. Додаток А в [168], а також [171]), але слугувала головним чином для отримання коефіцієнтів асимптотичних членів на великих кутах [171], або поєднання лише декількох таких членів до виразу, який був коректним лише в обмеженій області  $\theta$  (при великих  $\theta$ ) [168]. Ми збираємося охопити ними всю послідовність асимптотичних членів одночасно, але щоб зробити цю процедуру застосовною при будь-яких кутах, визначення шляху інтегрування має бути скоректоване. Проблема деформації шляху виявляється простішою для розподілу за проєктованим кутом, який не розглядався в [168] взагалі, тому тут ми розглянемо його в першу чергу.

**2.2.5. Розподіл за проєктованими кутами.** Дифузійне наближення для рівняння (2.39) має вигляд (див. виноску 9)

$$f(\theta_x, l) \underset{\chi_c/\chi'_a \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{\pi\chi_c} \Re \int_0^{\sim\chi_c/\chi'_a} d\kappa e^{i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2} \ln \frac{\chi'_a\kappa}{2\chi_c}}, \quad (2.57)$$

де ми замінили змінну інтегрування на  $\kappa = \xi\chi_c$ . Розповсюджуючи цей інтеграл у площину комплексного  $\kappa$  (див. Рис. 2.4), бачимо, що підінтегральна функція має в ній єдину сідлову точку, яка задовільняє рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \left( i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2} \ln \frac{\chi'_a\kappa}{2\chi_c} \right) \Big|_{\kappa=\kappa_0} = i\frac{\theta_x}{\chi_c} + \kappa_0 \left( \ln \frac{\kappa_0\chi'_a}{2\chi_c} + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Оскільки рівняння (2.58) є трансцендентним, явно можна виразити лише його приблизний розв'язок, що, втім, задовільнить нас на даній стадії. Ми можемо вибрати наближення до розв'язку (2.58), яке є суто уявним:

$$\kappa_0 = i\nu_0, \quad \nu_0 \approx \frac{\theta_x}{\chi_c \ln \left( \frac{2\chi_c^2}{\chi'_a\theta_x} \ln \frac{2\chi_c^2}{\chi'_a\theta_x} \right)}, \quad (2.59)$$

із застереженням, що ця формула справедлива лише для  $\chi_c/\chi'_a \gg 10$  (та  $\theta_x < 2\chi_c^2/\chi'_a$ , що зазвичай виконується на практиці).

Логарифм у підінтегральному виразі в (2.57) робить його сингулярним в початку координат, звідки починається шлях інтегрування. Отже, шлях найкрутішого спуску повинен виходити з точки сингулярності і спершу прямувати до сідлової точки. Однак, для простоти ми направляємо його строго уздовж уявної осі, переписуючи змінну інтегрування у вигляді  $\kappa = i\nu$ . Після досягнення точки  $\kappa_0$ , яка визначається з рівняння

$$\frac{\theta_x}{\chi_c} + \nu_0 \left( \ln \frac{\chi'_a\nu_0}{2\chi_c} + \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (2.60)$$

шлях повинен звернути праворуч і продовжувати найкрутіший спуск, але знову, для спрощення ми направляємо його строго паралельно дійсній осі (див. Рис. 2.4). У підсумку, функція розподілу розпадається на суму двох інтегралів з дійсними змінними:

$$f(\theta_x, l) = f_h(\theta_x, l) + f_s(\theta_x, l), \quad (2.61)$$

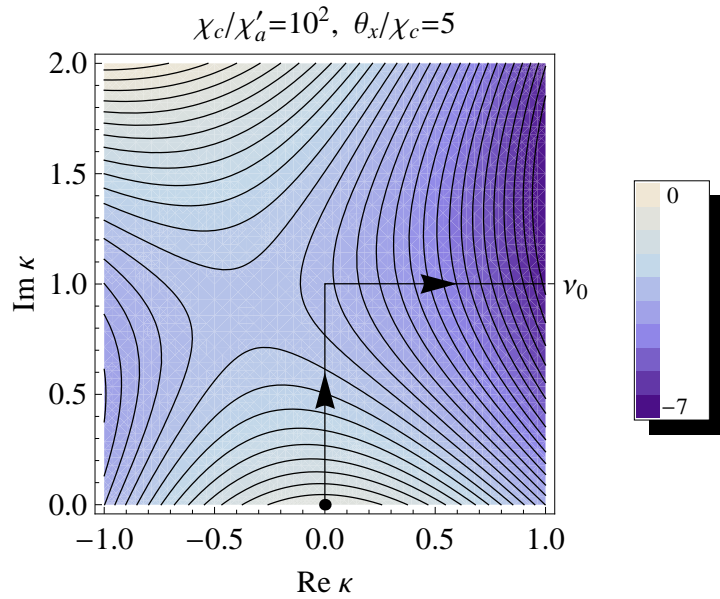


Рис. 2.4. Градієнтний графік функції  $\Re\left(i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\chi'_a\kappa}{2\chi_c}\right)$  [дійсна частина показника експоненти в Рівн. (2.57)] у верхній півплощині комплексної змінної інтегрування  $\kappa$ , для певних значень  $\chi_c$  і  $\theta_x$ . Деформований шлях інтегрування позначено чорною лінією, де точка повороту  $\nu_0$  обчислюється за Рівн. (2.59).

де [5]

$$f_h(\theta_x, l) = \frac{1}{\pi\chi_c} \int_0^{\nu_0(\theta_x)} d\nu e^{-\frac{\theta_x}{\chi_c}\nu + \frac{\nu^2}{2}\ln\frac{2\chi_c}{\chi'_a\nu}} \sin\frac{\pi\nu^2}{4}, \quad (2.62)$$

$$f_s(\theta_x, l) = \frac{1}{\pi\chi_c} \Re \int_{i\nu_0(\theta_x)}^{\sim\chi_c/\chi'_a} d\kappa e^{i\frac{\theta_x}{\chi_c}\kappa + \frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\chi'_a\kappa}{2\chi_c}}. \quad (2.63)$$

Нижче буде показано, що незважаючи на прийняте спрощення шляху інтегрування, інтеграли (2.62), (2.63) можна інтерпретувати як жорстку (або напівжорстку<sup>12</sup>) та м'яку компоненти розсіяння. Тепер же наше завдання – дослідити їхні властивості.

<sup>12</sup>Термін «напівжорстке розсіювання» є співзвучним з використовуваним у адронній фізиці високих енергій терміном «напівжорсткі процеси» [410], які визначаються як достатньо жорсткі, щоб дозволити опис квантовою хромодинамікою без екранування кольору, але водночас відносно м'які, потребуючи підсумовування в усіх порядках. Це має певну аналогію і з нашою ситуацією, але ми не розглядаємо процесів випромінювання і народження пар, обмежуючись лише пружним розсіюванням на багатьох центрах.

**Ресумована жорстка компонента.** Компонента  $f_h$  виявляється позитивною скрізь, навіть для наближеного розв'язку рівняння сідлової точки, оскільки типові внески  $\nu$  в рівнянні (2.62) завжди  $\epsilon \lesssim 1$ , завдяки чому  $\sin \frac{\pi\nu^2}{4} > 0$ . Крім того, практично завжди можна замінити в (2.62)  $\sin \frac{\pi\nu^2}{4} \approx \frac{\pi\nu^2}{4}$ . Це обґрунтовано як при великих, так і при малих  $\theta_x/\chi_c$ : Для  $\theta_x/\chi_c \ll 1$  причина полягає в тому, що верхня межа інтегрування наближається до нуля, залишаючи

$$\begin{aligned} f_h(\theta_x, l) &\underset{\theta_x/\chi_c \ll 1}{\simeq} \frac{1}{4\chi_c} \int_0^{\frac{\theta_x}{\chi_c \ln\left(\frac{2\chi_c^2}{\chi'_a \theta_x} \ln \frac{2\chi_c^2}{\chi'_a \theta_x}\right)}} d\nu\nu^2 \\ &= \frac{\theta_x^3}{12\chi_c^4 \ln^3\left(\frac{2\chi_c^2}{\chi'_a \theta_x} \ln \frac{2\chi_c^2}{\chi'_a \theta_x}\right)}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

В протилежному випадку  $\theta_x/\chi_c \rightarrow \infty$  синус в (2.62) може бути лінеаризований завдяки швидкому збуванню множника  $e^{-\frac{\theta_x}{\chi_c}\nu}$  в підінтегральному виразі. Розкладення решти експоненти в ряд Маклорена дає закон Резерфорда (2.48) та ступінні поправки до нього. З точністю, наступною за головною логарифмічною в ступінній поправці,

$$\begin{aligned} f_h(\theta_x, l) &\underset{\theta_x/\chi_c \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{4\chi_c} \int_0^\infty d\nu\nu^2 e^{-\frac{\theta_x}{\chi_c}\nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{2} \ln \frac{2\chi_c}{\chi'_a \nu}\right) \\ &= \frac{\chi_c^2}{2\theta_x^3} + 3\frac{\chi_c^4}{\theta_x^5} \left[\ln \frac{2\theta_x}{\chi'_a} - \psi(5)\right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

де  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ . Таким чином, зрозуміло, що інтеграл (2.62) підсумовує всі вищі ступінні поправки до асимптотики Резерфорда.

Той факт, що позитивна компонента  $f_h(\theta_x)$  зникає як при  $\theta_x/\chi_c \rightarrow 0$ , так і при  $\theta_x/\chi_c \rightarrow \infty$ , означає, що вона повинна досягати максимуму десь посередині (див. Рис. 2.5). З аналізу інтеграла (2.62) можна зробити загальний висновок, що максимум  $f_h(\theta_x)$  повинен досягатися коли  $\nu_0 \sim \chi_c/\theta_x$ , тобто  $\theta_x \sim \chi_c \sqrt{B(\chi_c^2/\chi_a'^2)}$ , що є ні чим іншим як типовим кутом Мольєра. Точніше, це відповідає зростаючому нахилу піка, а максимум знаходиться при дещо більших  $\theta_x$ . Границю області, де ефекти підсумовування є визначальними, можна оцінити прирівнюючи асимптотику Резерфорда до *подвоєної*

наступної за головною поправки в (2.65):  $\frac{\chi_c^2}{2\theta_x^3} = 2 \times 3 \frac{\chi_c^4}{\theta_x^5} \left[ \ln \frac{2\theta_x}{\chi_a} - \psi(5) \right]$ , тобто  $\theta_x = \chi_c \sqrt{B_1}$ , де  $B_1 = 6B(24e^{-2\psi(5)} \chi_c^2 / \chi_a^2)$ . Завдяки значним числовим коефіцієнтам, інтервал

$$\chi_c \sqrt{B} < \theta_x < \chi_c \sqrt{B_1} \quad (\text{напівжорстка область})$$

виявляється навіть ширшим, ніж м'яка центральна область  $0 < \theta_x < \chi_c \sqrt{B}$ .

Крім того, слід зазначити, що  $f_h(\theta_x)$  не лежить між своїми асимптотами (зокрема, вона знаходиться значно вище асимптоти Резерфорда).

**М'яка компонента.** Далі оцінимо м'яку компоненту, яка визначається інтегралом (2.63). Цей інтеграл близький до гауссової форми, тому його найшвидша залежність від  $\theta_x$  впливає зі значення експоненти в кінцевій точці:

$$e^{-\frac{\theta_x}{\chi_c} \nu_0 + \frac{\nu_0^2}{2} \ln \frac{2\chi_c}{i\chi_a \nu_0}} \simeq e^{-\frac{\theta_x}{2\chi_c} \nu_0},$$

де ми використали рівняння сідлової точки (2.58) в межах точності, з якою було знехтувано  $\ln i$  в рівнянні (2.60). Для врахування решти залежності від  $\theta_x$  найпростіше можна було б замінити в представленні

$$f_s(\theta_x, l) = e^{-\frac{\theta_x}{2\chi_c} \nu_0(\theta_x, l)} g(\theta_x, l) \quad (2.66)$$

відносно повільно змінний коефіцієнт  $g(\theta_x, l)$  його значенням при  $\theta_x = 0$ :

$$g(0, l) = f(0, l) = \frac{1}{\pi \chi_c} \int_0^{\sim \chi_c / \chi_a} d\kappa e^{-\frac{\kappa^2}{2} \ln \frac{2\chi_c}{\chi_a \kappa}}. \quad (2.67)$$

Але ширина  $g$  становить  $\theta_x \sim \chi_c \ln \frac{2\chi_c^2}{\chi_a \theta_x}$ , тоді як для  $f_s$  вона становить  $\theta_x \sim \chi_c \sqrt{\ln \frac{2\chi_c^2}{\chi_a \theta_x}}$ , що є асимптотично меншою, але все ж практично сумірною величиною. Тому варто також врахувати нахил  $g(\theta_x, l)$  у початку координат. Він може бути введений до структури головної експоненти в рівнянні (2.66) шляхом апроксимації

$$g(\theta_x, l) \rightarrow g(0, l) e^{-\frac{\theta_x^2 \ln C}{2\chi_c^2 \ln^2 \frac{2\chi_c^2}{\chi_a \theta_x}}}, \quad (2.68)$$



з  $C \approx 2.2$ . Поєднуючи (2.66), (2.59) і (2.68), отримуємо квазігауссову структуру [5]

$$f_s(\theta_x, l) \approx f(0, l) e^{-\frac{\theta_x^2}{2\chi_c^2 \ln \left[ \frac{2\chi_c^2}{C\chi_a^2 \theta_x} \ln \frac{2\chi_c^2}{\chi_a^2 \theta_x} \right]}}. \quad (2.69)$$

Це нагадує наближення нульового порядку  $f^{(0)}(\theta/\chi_c\sqrt{B})$  розкладення Мольєра (у застосуванні до проєктованого кутового розподілу), але має точніше нормування (2.67), і до того ж  $\theta_x$  з'являється під знаком логарифма у знаменнику показника. Через це залежність (2.69) є вужчою, ніж  $f^{(0)}$  Мольєра при  $\theta_x > \chi_c$ , тобто фактично при типових кутах. Таке звуження дійсно спостерігалось експериментально [170]. Крім того, інтеграл від (2.69) за всіма  $\theta_x$ , на відміну від інтеграла від нульової компоненти розкладення Мольєра, є дещо меншим від одиниці, залишаючи частину ймовірності для  $f_h$ .

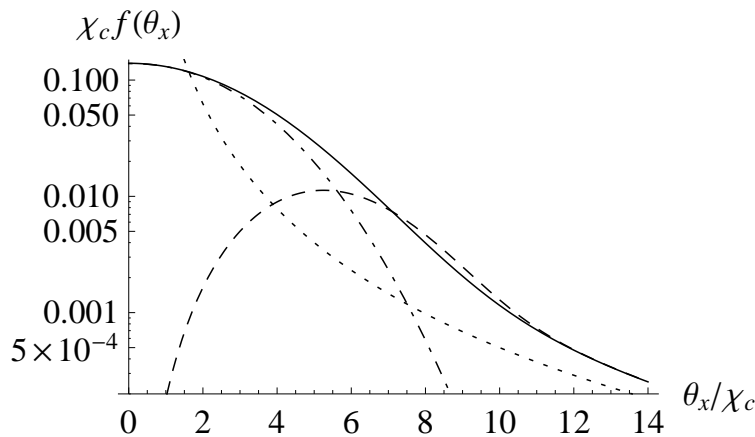


Рис. 2.5. Відносні внески ресумованої жорсткої [штрихова крива, Рівн. (2.62), (2.59)] та м'якої [штрих-пунктирна крива, Рівн. (2.69)] компонент до сумарного розподілу по проєктованому куту розсіяння [суцільна крива, Рівн. (2.57)], для  $\chi_c/\chi_a' = 10^2$ . Сума обчислених таким чином двох компонент практично не відрізняється від суцільної кривої. Точкова крива показує асимптотику Резерфорда (2.48).

**Сукупний розподіл.** Оскільки компоненти (2.62), (2.63) у розкладенні (2.61) досягають максимумів при різних  $\theta_x$ , виникає питання, чи не призводить це до появи вторинного сплеску в сукупному розподілі. Щоб

з'ясувати це, спочатку оцінимо масштаб кутів, де  $f_s(\theta_x)$  і  $f_h(\theta_x)$  стають сумірними. Для великих  $\chi_c/\chi'_a$  це трапляється при відносно великих  $\theta_x$ , що дозволяє, дуже спрощено, використати асимптотику Резерфорда для  $f_h$  і прирівняти її до апроксимації Гаусса для  $f_s$ . Розв'язок такого рівняння в головному логарифмічному наближенні дає  $\theta_x \sim \chi_c \sqrt{2 \ln \frac{2\chi_c}{\chi'_a}}$ , що відповідає куту порядку  $\chi_c \sqrt{B}$ , при якому  $f_h(\theta_x)$  досягає свого максимуму. Тому навколо свого максимуму  $f_h(\theta_x)$  є співмірною з  $f_s(\theta_x)$ , а отже, сума (2.61) не має утворювати додаткового піку. Саме так і відбувається на практиці, що природно з фізичного погляду, оскільки дифузійний процес повинен згладжувати всі особливості розподілу ймовірностей. (Проте, для добутку  $\theta_x^3 f(\theta_x)$ , як відзначалося в розділі 2.2.3, такий зплеск існує [168, 170].)

Рис. 2.5 ілюструє форму сукупного розподілу, а також внески до нього від різних механізмів при  $\chi_c/\chi'_a = 10^2$ . Як видно з рисунку, сукупний розподіл (суцільна крива) значно перевищує суму м'якої і чисто резерфордівської компонент (штрих-пунктирна та пунктирна криві, відповідно). Щоб врахувати це перевищення, потрібно використовувати повну ресумовану жорстку компоненту (штрихову криву), а не лише внесок одноразових розсіянь. Отже, ресумовування кратних жорстких внесків до розсіяння є необхідним на практиці. Воно призводить до уповільнення переходу від режиму Гаусса до режиму Резерфорда, внаслідок чого у істотному кутовому інтервалі може імітуватися закон, проміжний між гауссівським та резерфордівським, такий як розподіл Стьюдента [411], або простий експоненційний закон [385], або ступінний закон з показником, більшим, ніж для найнижчого борнівського наближення, як це відбувається, наприклад, для жорсткого розсіювання адронів (що є багаточастинковими об'єктами, які складаються з кварків, а також глюонів) [412].

**Імовірнісна інтерпретація.** Позитивність обох функцій  $f_s(\theta_x)$  і  $f_h(\theta_x)$  у поєднанні з умовою нормування  $\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x f_s + \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x f_h = 1$  спонукає до тлумачення їх як часткових розподілів імовірності. А саме, оскільки  $f_h(\theta_x)$  враховує всі ступінні внески, її можна інтерпретувати як розподіл

імовірності (напів)жорстко розсіяних частинок, а  $f_s(\theta_x)$ , оскільки вона є майже гауссовою, слід розглядати як розподіл імовірностей м'яко розсіяних частинок. Це породжує деякий елемент сваволі, оскільки не існує абсолютно чіткої *фізичної* межі між м'яко та жорстко розсіяними частинками (хоча існує математична, в комплексній площині прицільних параметрів). Крім того, існують ділянки при доволі великих  $\theta_x$ , де визначена рівнянням (2.63) функція  $f_s(\theta_x)$  стає трохи негативною (хоча це майже непомітно на практиці). З цих причин коректніше інтерпретувати такі функції як *псевдо*-ймовірнісні розподіли. Зазначене свавілля проявляється як залишкова незначна свобода вибору місця розташування кута шляху інтегрування (при застосуванні наближень).

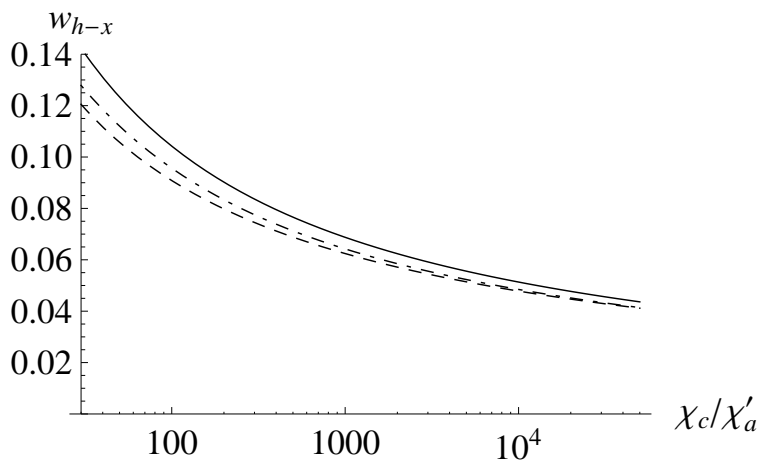


Рис. 2.6. Загальний відсоток напівжорстко розсіяних частинок у проектованому кутовому розподілі, розрахований за рівняннями (2.70), (2.62) (чорна суцільна крива) і за рівняннями (2.70), (2.62), (2.59) (штрих-пунктирна суцільна крива). Штрихова крива – наближення (2.71b).

Приймаючи інтерпретацію (псевдо-)ймовірності, оцінимо відповідну повну ймовірність того, що частинка належить до проектованої напівжорсткої компоненти:

$$w_{h-x}(l) = 2 \int_0^{\infty} d\theta_x f_h(\theta_x, l). \quad (2.70)$$

При великому  $\chi_c/\chi'_a$  підстановка (2.62) в (2.70) та зміна порядку інтегру-

вання дають

$$w_{h-x} = \frac{2}{\pi\chi_c} \int_0^\infty d\nu \sin \frac{\pi\nu^2}{4} e^{\frac{\nu^2}{2} \ln \frac{2\chi_c}{\chi'_a \nu}} \int_{\nu\chi_c \ln \frac{2\chi_c}{\nu\chi'_a}}^\infty d\theta_x e^{-\frac{\theta_x \nu}{\chi_c}}$$

$$\underset{\chi_c \gg \chi'_a}{\simeq} \frac{1}{2} \int_0^{\sim \chi_c/\chi'_a} d\nu \nu e^{-\frac{\nu^2}{2} \ln \frac{2\chi_c}{\chi'_a \nu}}. \quad (2.71a)$$

Останній одноразовий інтеграл можна приблизно обчислити шляхом розкладення  $e^{\frac{\nu^2}{2} \ln \frac{\nu}{2}} \simeq 1 + \frac{\nu^2}{2} \ln \frac{\nu}{2}$ , почленного інтегрування, і наступного представлення результату у вигляді єдиного дробу в межах прийнятої точності [5]:

$$w_{h-x} \underset{\chi_c \gg \chi'_a}{\simeq} \frac{1}{\ln \left( \frac{\chi_c^2}{\chi'_a{}^2} \ln \frac{\chi_c^2}{\chi'_a{}^2} \right) - \psi(2)}. \quad (2.71b)$$

Це фактично означає, що  $w_{h-x} \simeq 1/B$ . Формула (2.71b) свідчить, що частка напівжорстко розсіяних частинок *зменшується* зі збільшенням товщини мішені обернено пропорційно до її логарифму. Фізична причина цього полягає в тому, що межа, за якою частинки слід розглядати як жорстко розсіяні, рухається назовні зі збільшенням товщини мішені завдяки розширенню гауссової компоненти. Натомість, в розкладенні Мольєра тотожність (2.45) не дозволяє безпосередньо оцінити кількість частинок у негауссовій компоненті.

Точна поведінка  $w_h$  як функції  $\chi_c/\chi'_a$  показана на Рис. 2.6 суцільною кривою разом з наближенням (2.71b), показаним штриховою кривою. Очевидно, що рівняння (2.71b) дає хороше наближення для  $w_h$  при  $\chi_c/\chi'_a \gtrsim 10^2$ . Можна також відзначити, що надлишок загальної ймовірності  $w_{s-x} + w_{h-x} - 1$  для  $w_{s-x} = 2 \int_0^\infty d\theta_x f_s(\theta_x)$  і  $f_s(\theta_x)$ , обчисленої у наближенні (2.69), (2.67), з  $C = 2.2$ , є позитивним, але малим у порівнянні з  $w_{\text{hard}}$ :

$$w_{s-x} + w_{h-x} - 1 \sim 2 \times 10^{-3}.$$

Це підтверджує самоузгодженість наших наближень.

Для розподілу по повному куту  $\theta$  відповідна процедура деформування контуру інтегрування та відділення компонент була проведена в [5].

Напівжорстко розсіяні частинки можуть проявлятися не лише в кутовому розподілі розсіяння, але і в кутовому розподілі іонізаційних втрат енергії. Наприклад, в [413, 414] було експериментально виявлено, що для кутів відхилення, більших за типові, середні іонізаційні втрати енергії зростають на декілька відсотків. Тому можна очікувати, що напівжорстко розсіяні частинки втрачають дещо більше енергії, ніж м'яко розсіяні. Однак при цьому може знадобитися аналіз в термінах двох комплексних змінних – спряжених як до кута розсіяння, так і до втрати енергії, а опис процедури деформування поверхні інтегрування в просторі двох комплексних змінних є значно складнішим.

Кінетичні рівняння та методи їх розв'язку за допомогою контурних інтегралів застосовувалися також у теорії багатофотонних ефектів при випроміненні ультра-релятивістських електронів в товстих мішенях [6, 8, 9, 29, 32, 35, 36].

### 2.3. Просторово-кутовий розподіл частинок, розсіяних в аморфному середовищі

Для різних застосувань буває необхідно знати, як пучок частинок перерозподіляється не лише по кутах, але й у просторі (див. зокрема Розд. 1). Флуктуації просторових координат спричиняються флуктуаціями кутів відхилення, тому щоб вирахувати їх, потрібно розв'язати рівняння для об'єднаної функції розподілу  $f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t)$ .

Як найпростіший приклад, просторова еволюція пружного багаторазового розсіяння пучків швидких заряджених частинок у однорідному аморфному середовищі може бути описана за допомогою транспортного рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = I_{coll}\{f\} \quad (2.72)$$

для функції розподілу ймовірностей  $f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t)$ , де  $v_z = \sqrt{v^2 - v_\perp^2}$  і  $\vec{r} = (\vec{r}_\perp, z)$ . Тут  $\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$  – конвективний член, а в правій частині (2.72) знаходи-

ться інтеграл зіткнень, який є лінійним функціоналом  $f$  та пропорційним щільності мішені. Початкова умова для Рівн. (2.72) має вигляд

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, 0) = \delta(\vec{v}_\perp)\delta(\vec{r}). \quad (2.73)$$

При значній товщині мішені часто можна записати інтеграл зіткнень у дифузійному наближенні як

$$I_{coll}\{f\} = D \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_\perp^2} f, \quad (2.74)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Суто кутовий розподіл  $f(\vec{v}_\perp, t) = \int f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) d^3r$  задовольняє замкненому рівнянню

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_\perp^2}, \quad (2.75)$$

яке витікає з (2.72), (2.74) після інтегрування за  $\vec{r}$ . Відповідний початковий стан можна отримати з Рівн. (2.73) як  $f(\vec{v}_\perp, 0) = \delta(\vec{v}_\perp)$ . Розв'язок такої задачі Коші, як відомо, є розподілом Гаусса [415]:

$$f(\vec{v}_\perp, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{v_\perp^2}{4Dt}}. \quad (2.76)$$

**2.3.1. Поперечний розподіл.** Якщо проінтегрувати  $f$  за поздовжньою координатою, не цікавлячись невеликими відхиленнями від рівномірного поздовжнього руху, для функції розподілу по кутах та поперечних координатах  $f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t)$  отримаємо транспортне рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_\perp \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\perp} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_\perp^2} \quad (2.77)$$

з початковою умовою

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, 0) = \delta(\vec{v}_\perp)\delta(\vec{r}_\perp). \quad (2.78)$$

Ключовою властивістю диференціального рівняння в часткових похідних (2.77) та початкової умови (2.78), а значить, і всього розв'язку, є сепарабельність поперечних змінних в *будь-якій* декартовій системі координат:

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, t) = f(v_x, x, t) f(v_y, y, t),$$

де  $f(v_x, x, t)$  задовольняє проектованому транспортному рівнянню

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \quad f(v_x, x, 0) = \delta(v_x) \delta(x).$$

Остання властивість означає, що розв'язок повинен мати багатовимірну гауссівську форму:

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, t) = \frac{1}{\pi} A(t) e^{-c_1(t) \vec{v}_\perp^2 - c_2(t) \vec{v}_\perp \cdot \vec{r}_\perp - c_3(t) \vec{r}_\perp^2}. \quad (2.79)$$

Коефіцієнти  $A$  та  $c_j$  можна знайти, прямо підставивши форму (2.79) до Рівн. (2.77), але процедуру можна спростити (зменшити кількість зв'язків між коефіцієнтами), якщо попередньо виконати перетворення Фур'є по  $\vec{r}_\perp$ :

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 q_\perp e^{i \vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \tilde{f}(\vec{v}_\perp, \vec{q}_\perp, t). \quad (2.80)$$

Тоді Рівн. (2.77) приймає вигляд

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + i \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \tilde{f} = D \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v_\perp^2}. \quad (2.81)$$

З тієї самої причини роздільності декартових координат, розв'язок повинен бути гауссівським, тобто мати структуру

$$\tilde{f}(\vec{v}_\perp, \vec{q}_\perp, t) = \frac{1}{\pi} A(t) e^{-\lambda_1(t) \vec{v}_\perp^2 - i \lambda_2(t) \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp - \lambda_3(t) \vec{q}_\perp^2}. \quad (2.82)$$

Підстановка цього виразу до Рівн. (2.81) приводить до

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \vec{v}_\perp^2 - i \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp - \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \vec{q}_\perp^2 + i \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp = D \left[ -4\lambda_1 + (2\lambda_1 \vec{v}_\perp + i \lambda_2 \vec{q}_\perp)^2 \right],$$

звідки витікає система звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -4D\lambda_1^2, \quad (2.83)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 1 - 4D\lambda_1\lambda_2, \quad (2.84)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = D\lambda_2^2, \quad (2.85)$$

$$\frac{dA}{dt} = -4D\lambda_1 A. \quad (2.86)$$

Ця система є нелінійною, але на щастя, вона не сильно зв'язана, і її легко розв'язати, починаючи із замкненого рівняння для  $\lambda_1$ . Початкова умова (2.78) означає, що в ліміті  $t \rightarrow 0$  Фур'є образ  $\tilde{f}$  повинен стати незалежним від  $\vec{q}_\perp$  і розбіжним при  $\vec{v}_\perp \rightarrow 0$ , звідки

$$\lambda_2, \lambda_3 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad \lambda_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty. \quad (2.87)$$

З урахуванням цього, рівняння (2.83)–(2.86) розв'язуються наступним чином:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4Dt}, \quad (2.88)$$

$$\lambda_2 = \frac{t}{2}, \quad (2.89)$$

$$\lambda_3 = \frac{Dt^3}{12}, \quad (2.90)$$

$$A \propto \frac{1}{t}. \quad (2.91)$$

Для нормування повної ймовірності на одиницю,

$$\int d^2r_\perp d^2v_\perp f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, t) = \int d^2v_\perp \tilde{f}(\vec{v}_\perp, 0, t) = \frac{A}{\lambda_1} = 1,$$

потрібно, щоб  $A = \lambda_1 = \frac{1}{4Dt}$ . Після підстановки знайдених коефіцієнтів до Рівн. (2.80) і подальшого інтегрування отримуємо розв'язок Фермі [182]:

$$f = \frac{3}{4\pi^2 D^2 t^4} \exp \left[ -\frac{3}{Dt^3} \left( \vec{r}_\perp - \frac{\vec{v}_\perp t}{2} \right)^2 - \frac{1}{4Dt} v_\perp^2 \right] \quad (2.92a)$$

$$= \frac{3}{4\pi^2 D^2 t^4} \exp \left[ -\frac{1}{Dt} \left( \vec{\theta}^2 - 3\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{r}_\perp}{t} + 3\frac{r_\perp^2}{t^2} \right) \right], \quad (2.92b)$$

який є гауссівським, як і очікувалось в (2.79).<sup>13</sup>

Розв'язок (2.92a) може бути записаний також як

$$f = \frac{3}{4\pi^2 D^2 t^4} \exp \left[ -\frac{3}{Dt} \left( \frac{\vec{r}_\perp}{t} - \frac{\vec{\theta} + \vec{\theta}_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{4Dt} (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)^2 \right], \quad (2.93)$$

<sup>13</sup>Його можна також обчислити за межами дифузійного наближення (див. [416]), але тут ми не будемо вдаватися до такого узагальнення.



що виражає фізичну симетрію відносно перестановки  $\vec{\theta} \leftrightarrow \vec{\theta}_0$ . Середнє значення  $\vec{r}_\perp/t$  дорівнює середньому арифметичному  $\vec{\theta}$  та  $\vec{\theta}_0$ . Ще однією примітною властивістю є відсутність кореляцій між  $\frac{\vec{r}_\perp}{t} - \frac{\vec{\theta} + \vec{\theta}_0}{2}$  та  $\vec{\theta} - \vec{\theta}_0$ . 12-разова відмінність коефіцієнтів при квадратах доданків в показнику експоненти показує, що кореляція  $\vec{r}_\perp/t$  з  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{\theta}_0$  є сильнішою ніж взаємна кореляція. Це зрозуміло, оскільки відношення  $\vec{r}_\perp/t$  тісніше пов'язане з середнім інтервалом траєкторії, тоді як  $\vec{\theta}$  та  $\vec{\theta}_0$  переважно співвідносяться з його кінцями.

Знання функції розподілу по поперечних координатах стає необхідним на практиці в задачах з поперечно неоднорідною мішенню. Такі задачі будуть розглядатися в наступних розділах, а розв'язок (2.82) буде для них референтним.

**2.3.2. Розподіл по  $\vec{v}_\perp$  та поздовжній координаті.** Переходячи до розподілу по поздовжній координаті, почнемо з редукованої функції розподілу  $f(\vec{v}_\perp, z, t) = \int d^2r_\perp f(\vec{v}_\perp, \vec{r}_\perp, z, t)$ . Вона підкоряється рівнянню, яке витікає з (2.72) після інтегрування за  $\vec{r}_\perp$  та застосування наближення малих кутів відхилення (високої енергії)  $v_z \approx v - \frac{\vec{v}_\perp^2}{2v}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( v - \frac{\vec{v}_\perp^2}{2v} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_\perp^2}. \quad (2.94)$$

Перетворення Фур'є по  $z$ ,

$$f(\vec{v}_\perp, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z e^{iq_z(z-vt)} \tilde{f}(\vec{v}_\perp, q_z, t), \quad (2.95)$$

приводить (2.94) до рівняння

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \frac{iq_z}{2v} \vec{v}_\perp^2 \tilde{f} = D \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \vec{v}_\perp^2}. \quad (2.96)$$

Формально воно аналогічне рівнянню Шредінгера для гармонічного осцилятора, але з уявною частотою [183].<sup>14</sup> На відміну від рівняння (2.96), це рівняння не може бути розв'язане звичайним перетворенням Фур'є по  $\vec{v}_\perp$ .

<sup>14</sup>Також воно подібне до транспортного рівняння, яке виникає в теорії ефекту ЛПМ (див. [124]), але на відміну від останнього, не містить частоти фотона.

Але, на щастя, воно належить до класу рівнянь, які допускають розв'язок у вигляді гауссіану.

Щоб продемонструвати це, шукаємо розв'язок Рівн. (2.96) у формі

$$\tilde{f}(\vec{v}_\perp, q_z, t) = \frac{1}{\pi} A(q_z, t) e^{-\lambda_1(q_z, t) \vec{v}_\perp^2}, \quad (2.97)$$

підстановка якої приводить до рівняння

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \vec{v}_\perp^2 - \frac{i q_z}{2v} \vec{v}_\perp^2 = D (-4\lambda_1 + 4\lambda_1^2 \vec{v}_\perp^2).$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти при різних ступенях  $v_\perp$ , отримуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = -4D\lambda_1^2 - \frac{i q_z}{2v}, \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -4D\lambda_1 A. \quad (2.99)$$

Аналогічно ситуації з анзацем (2.82), початковою умовою для параметрів є

$$\lambda_1, A \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty.$$

Знову, оскільки рівняння (2.98) для  $\lambda_1$  є замкнутим, його можна прямо проінтегрувати, хоча тепер це приводить до складнішого результату:

$$t = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{4D\lambda_1^2 + \frac{i q_z}{2v}} = \frac{1}{4D\sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}}} \operatorname{arccoth} \frac{\lambda_1}{\sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}}}.$$

Звідси можна явно виразити  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}} \coth 4Dt \sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}}. \quad (2.100)$$

У свою чергу,

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(-4D \int dt \lambda_1\right) = \exp\left(-4D \int d\lambda_1 \frac{dt}{d\lambda_1} \lambda_1\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{d\lambda_1 \lambda_1}{\lambda_1^2 + \frac{i q_z}{8Dv}}\right) \propto \sqrt{\lambda_1^2 + \frac{i q_z}{8Dv}} = \frac{\sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}}}{\sinh 4Dt \sqrt{-\frac{i q_z}{8Dv}}}. \end{aligned}$$

Знов, умова нормування

$$\int dz d^2 v_{\perp} f(\vec{v}_{\perp}, z, t) = \int d^2 v_{\perp} \tilde{f}(\vec{v}_{\perp}, 0, t) = 1$$

вимагає, щоб  $A \xrightarrow{q_z \rightarrow 0} \lambda_1 \rightarrow \frac{1}{4Dt}$ . Отже,

$$A = \frac{\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}{\sinh 4Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}. \quad (2.101)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти до Рівн. (2.97), отримуємо розв'язок рівняння переносу (2.94) у вигляді одноразового інтеграла:

$$f(\vec{v}_{\perp}, z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z e^{iq_z(z-vt)} \frac{\sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}{\sinh 4Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \times \exp \left[ -v_{\perp}^2 \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \coth 4Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right]. \quad (2.102)$$

Інтегруючи за  $\vec{v}_{\perp}$ , отримуємо розподіл лише по поздовжній координаті:

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z e^{iq_z(z-vt)} \frac{1}{\cosh 4Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}}. \quad (2.103)$$

Він не є гауссівським, але все ж є масштабно-інваріантним, оскільки може бути виражений як функція однієї змінної:

$$f(z, t) = \frac{v}{2Dt^2} \Phi_z \left[ \frac{v(vt - z)}{2Dt^2} \right] \quad (2.104)$$

з

$$\Phi_z(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_z e^{iQ_z s} \frac{1}{\cosh \sqrt{iQ_z}} = \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial u} \vartheta_1(u, e^{-\pi^2 s}) \Big|_{u=0}, \quad (2.105)$$

де  $\vartheta_1$  – одна з еліптичних тета-функцій [417, 418].

Розподіли (2.102), (2.103) є дійсними, оскільки  $i$  входить до них скрізь в добуток з  $q_z$ , а комплексне спряження інтеграла в цілому еквівалентно зміні знаку змінної інтегрування. При  $z \geq vt$  ці розподіли тотожно дорівнюють нулю. Математично це зумовлено можливістю вивести шлях інтегрування на нескінченність у верхній напівплощині комплексного  $q_z$  (або нижній

півплощині  $Q_z$ ), де підінтегральний вираз експоненційно прямує до нуля. Але фізична причина, очевидно, полягає в тому, що частинка, що рухається вздовж кривої траєкторії з постійною швидкістю, не може випередити частинку, яка рухається прямолінійно з тією ж швидкістю.

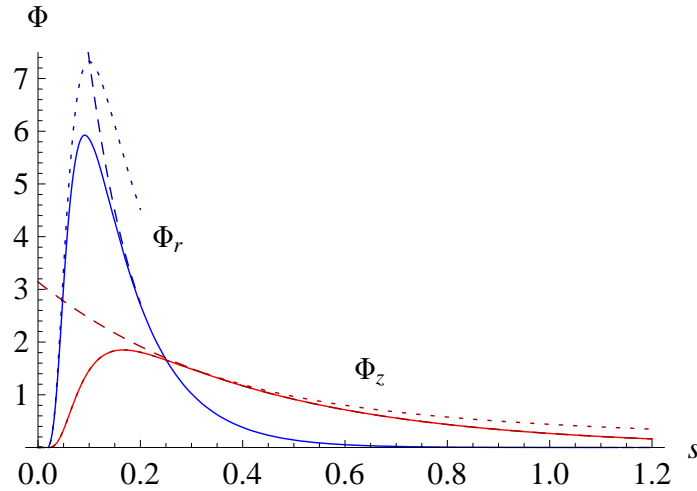


Рис. 2.7. Червона суцільна крива, Рівн. (2.105). Червона штрихова крива, асимптотика (2.106). Червоний пунктир, Рівн. (2.107). Синя суцільна крива, Рівн. (2.126). Синя штрихова крива, Рівн. (2.127). Синя пунктирна крива, Рівн. (2.128).

При великих  $s$  розподіл (2.103) має асимптотику

$$\Phi_z(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\simeq} \pi e^{-\frac{\pi^2}{4}s}, \quad (2.106)$$

що визначається найближчим до дійсної осі полюсом підінтегрального виразу у Рівн. (2.103) у верхній напівплощині  $Q_z$  (коли  $\cosh \sqrt{iQ_z} \xrightarrow{Q_z \rightarrow i\pi^2/4} 0$ ). При малих  $s$

$$\Phi_z(s) \underset{s \rightarrow +0}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{\pi s^{3/2}}} e^{-\frac{1}{4s}}, \quad (2.107)$$

що визначається сідловою точкою в нижній напівплощині. Загальна поведінка функції (2.105) показана на Рис. 2.7 червоною суцільною кривою, тоді як наближення (2.106) та (2.107) показані штриховою та пунктирною кривими відповідно. З рисунку видно, що фактично ці наближення перекриваються, і (2.107) охоплює максимум точного розподілу, який, таким чином, знаходиться при  $s \approx 1/6$ .

Отриманий розподіл можна також інтерпретувати як розподіл по флуктуаціях довжини шляху  $vt$  для частинки, яка проходить крізь мішень товщини  $z$ . У такому контексті дана проблема розглядалася Янгом [183]. Розв'язок, запропонований у [183], є еквівалентним (2.102), (2.103), хоча він виражається в термінах нескінченного ряду під інтегралом Фур'є. Підінтегральний вираз (2.102) є замкнутою формою, до якої цей ряд підсумовується при значенні параметра  $p = 0$  (тобто в інтегралі функції розподілу за  $\vec{r}_\perp$ ). Детальніше обговорення властивостей функції (2.103) можна знайти в [419].

З практичного погляду найважливіше те, що

$$\langle z \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz z f(z, t) = vt - \frac{2Dt^2}{v} \int_{-\infty}^{\infty} ds s \Phi_z(s) = vt - \frac{Dt^2}{v}, \quad (2.108)$$

а отже, в мішені фіксованої товщини  $z$  пробіг частинок (до якого пропорційна кількість непружних процесів – наприклад, середня втрата енергії на іонізацію) залежить від  $z$  не зовсім лінійно [420]:

$$\langle vt \rangle(z) = z \left( 1 + \frac{Dz}{v^3} \right). \quad (2.109)$$

Якщо ж на виході з мішені вимірювати кут відхилення  $v_\perp/v$ , то при його фіксованому значенні

$$\begin{aligned} \langle z \rangle(v_\perp, t) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dz z f(\vec{v}_\perp, z, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dz f(\vec{v}_\perp, z, t)} \\ &= vt + \frac{2Dt^2}{v} \frac{\partial}{\partial iQ_z} \frac{\sqrt{iQ_z}}{\sinh \sqrt{iQ_z}} e^{\frac{v_\perp^2}{4Dt} (1 - \sqrt{iQ_z} \coth \sqrt{iQ_z})} \Big|_{Q_z=0} \\ &= vt - \frac{Dt^2}{3v} \left( 1 + \frac{v_\perp^2}{2Dt} \right), \end{aligned} \quad (2.110)$$

звідки

$$\langle vt \rangle(v_\perp, z) = z \left( 1 + \frac{v_\perp^2}{6v^2} + \frac{Dz}{3v^3} \right). \quad (2.111)$$

Другий член в дужках тут не залежить від мішені (ні від  $D$ , ні від  $z$ ). Однак, його залежність від  $v_\perp/v$  є квадратичною, в той час як в експериментах [413, 414] (при нерелятивістських енергіях) спостерігалась залежність, ближча до лінійної.

**2.3.3. 3-вимірний координатний розподіл.** Тепер ми можемо розрахувати найбільш детальний розподіл, залежний від трьох просторових координат та двох поперечних компонент кута відхилення. Цей розподіл задовольняє рівнянню переносу

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_\perp \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\perp} + \left( v - \frac{\vec{v}_\perp^2}{2v} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_\perp^2}. \quad (2.112)$$

Щоб скористатися перевагами всіх методів, розвинутих у попередніх підрозділах, виконаємо перетворення Фур'є по всіх трьох просторових компонентах функції розподілу:

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{iq_z(z-vt) + i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \tilde{f}(\vec{v}_\perp, \vec{q}, t). \quad (2.113)$$

Це приводить рівняння (2.112) до форми

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + i\vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \tilde{f} - \frac{iq_z}{2v} \vec{v}_\perp^2 \tilde{f} = D \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \vec{v}_\perp^2}. \quad (2.114)$$

Розв'язок останнього рівняння знову шукається у вигляді гауссіану:

$$\tilde{f}(\vec{v}_\perp, \vec{q}, t) = \frac{1}{\pi} A(t) e^{-\lambda_1(t) \vec{v}_\perp^2 - i\lambda_2(t) \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp - \lambda_3(t) \vec{q}_\perp^2}. \quad (2.115)$$

Його підстановка до Рівн. (2.114) дає систему рівнянь для коефіцієнтів:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = -4D\lambda_1^2 - \frac{iq_z}{2v}, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 1 - 4D\lambda_1\lambda_2, \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = D\lambda_2^2, \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -4D\lambda_1 A. \quad (2.119)$$

Ця система відрізняється від (2.83)–(2.86) лише одним доданком у правій частині Рівн. (2.116), який приводить рівняння до форми (2.98). Граничними умовами залишаються рівняння (2.87). Тому розв'язком є ті самі вирази (2.100), (2.101), а також

$$\lambda_2 = \int_0^t dt' e^{4D \int_t^{t'} dt'' \lambda_1(t'')}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sinh 4Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \int_0^t dt' \sinh 4Dt' \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \\
&= \frac{1}{4D \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \tanh 2Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}, \tag{2.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= D \int_0^t dt' \lambda_2^2 \\
&= \frac{iv}{2q_z} \left( t - \frac{1}{2D \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \tanh 2Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right) \\
&\equiv \frac{iv}{q_z} \left( \frac{t}{2} - \lambda_2 \right). \tag{2.121}
\end{aligned}$$

**Просторовий розподіл.** Використовуючи отримані коефіцієнти, спочатку знайдемо суто просторовий 3-вимірний розподіл  $f(\vec{r}, t)$ . Він потребує обчислення інтеграла

$$\begin{aligned}
\int d^2v_\perp d^2q_\perp e^{-\lambda_1(t)\vec{v}_\perp^2 - i\lambda_2(t)\vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp - \lambda_3(t)\vec{q}_\perp^2 + i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} &= \frac{\pi^2}{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2/4} e^{-\frac{r_\perp^2}{4\lambda_3 + \lambda_2^2/\lambda_1}} \\
&= \frac{4\pi^2 q_z}{iv(2t\lambda_1 - \frac{1}{2D})} e^{\frac{iq_z r_\perp^2}{v(2t - \frac{1}{2D\lambda_1})}}, \tag{2.122}
\end{aligned}$$

де в останньому рядку була використана тотожність

$$4\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 = \frac{iv}{q_z} \left( 2t\lambda_1 - \frac{1}{2D} \right). \tag{2.123}$$

Підставляючи (2.122) до Рівн. (2.113), отримуємо

$$\begin{aligned}
f(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi^2 iv} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_z A(q_z, t)}{2t\lambda_1(q_z, t) - \frac{1}{2D}} e^{iq_z \left\{ z - vt + \frac{r_\perp^2}{v \left[ 2t - \frac{1}{2D\lambda_1(q_z, t)} \right]} \right\}} \\
&= \frac{iv}{16\pi^2 D^2 t^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dQ_z Q_z}{\cosh \sqrt{iQ_z} - \frac{\sinh \sqrt{iQ_z}}{\sqrt{iQ_z}}} \\
&\quad \times \exp \left\{ iQ_z \left[ \frac{v(vt - z)}{2Dt^2} - \frac{r_\perp^2}{4Dt^3 \left( 1 - \frac{\tanh \sqrt{iQ_z}}{\sqrt{iQ_z}} \right)} \right] \right\}. \tag{2.124}
\end{aligned}$$

Аналогічно (2.103), цей розподіл зникає при  $z - vt + \frac{r_\perp^2}{2vt} \simeq r - vt > 0$ , в силу причинності, як пояснювалося раніше.

Зображення розподілу (2.124) в площині  $z, |\vec{r}_\perp|$  (див. Рис. 2.8а) показує, що він має чашоподібну форму. Це означає, що радіальний розподіл

$$f(r, t) = \int dz d^2 r_\perp \delta \left( z + \frac{r_\perp^2}{2vt} - r \right) f(\vec{r}, t) = \frac{v}{2Dt^2} \Phi_r \left[ \frac{v(vt - r)}{2Dt^2} \right], \quad (2.125)$$

$$\Phi_r(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_z e^{iQ_z s} \frac{\sqrt{iQ_z}}{\sinh \sqrt{iQ_z}} = \frac{\partial}{\partial s} \vartheta_4(0, e^{-\pi^2 s}) \quad (2.126)$$

буде значно вузьким, ніж розподіл  $\Phi_z(s)$ . Це підтверджується Рис. 2.7 (синя суцільна крива). Щоб зробити порівняння більш кількісним, наведемо асимптотику  $\Phi_r(s)$  при великих  $s$ :

$$\Phi_r(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\simeq} 2\pi^2 e^{-\pi^2 s}, \quad (2.127)$$

і малих  $s$ :

$$\Phi_r(s) \underset{s \rightarrow +0}{\simeq} \frac{1}{2\sqrt{\pi} s^{5/2}} e^{-\frac{1}{4s}}. \quad (2.128)$$

Очевидно, що обидві ці асимптотики є крутішими, ніж їхні аналоги (2.106) та (2.107).

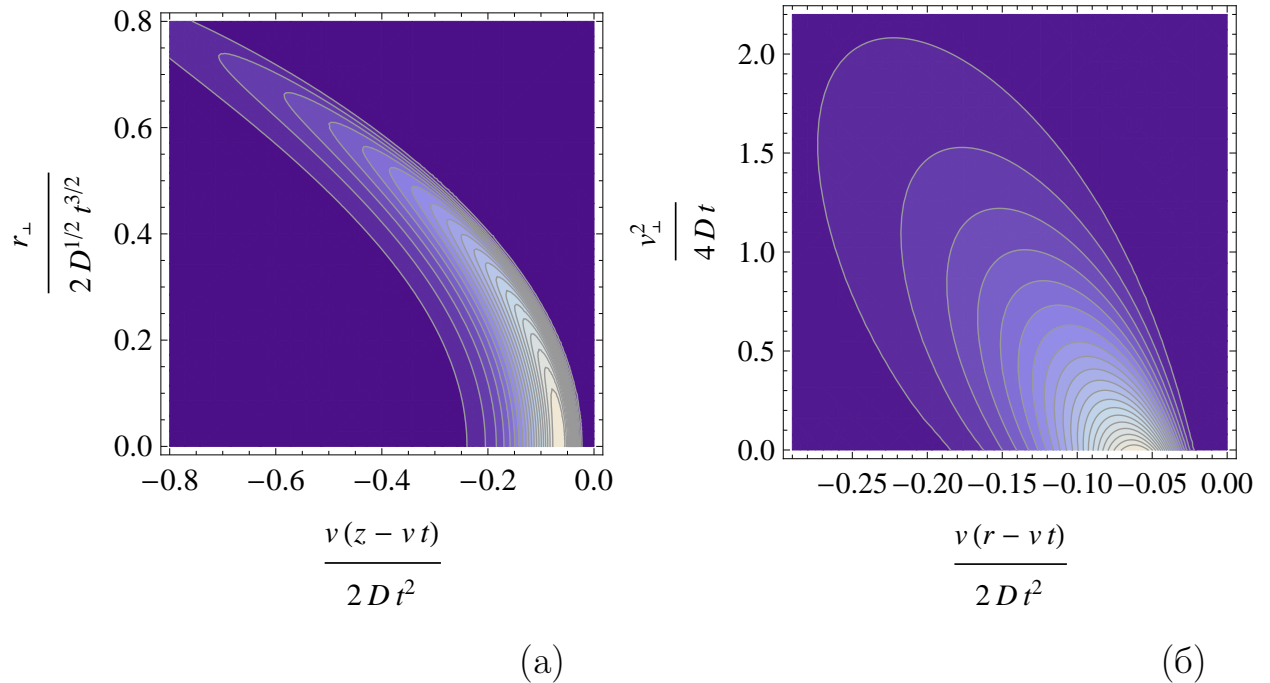


Рис. 2.8. а). 3-вимірний просторовий розподіл багаторазово розсіяних частинок, виражений рівнянням (2.124). б). Сумісний розподіл багаторазово розсіяних частинок по  $r - vt$  і  $\vec{v}_\perp^2$ , виражений Рівн. (2.133).



**Повний розподіл.** Для деяких застосувань (зокрема, до задач випромінювання) потрібно знати повну функцію розподілу  $f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t)$ . Підстановка отриманої форми (2.115) до рівняння (2.113) приводить до

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3\pi} \int d^3q A(q_z, t) \exp \left[ iq_z(z - vt) + i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp - \frac{ivt}{2q_z} \vec{q}_\perp^2 - i\lambda_2(q_z, t) \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp + \frac{iv}{q_z} \lambda_2(q_z, t) \vec{q}_\perp^2 - \lambda_1(q_z, t) \vec{v}_\perp^2 \right], \quad (2.129)$$

де  $\lambda_3$  було виключено на користь  $\lambda_2$  за допомогою (2.121). Якщо ми виразимо тут  $z$  через  $r = \sqrt{z^2 + \vec{r}_\perp^2} \approx z + \frac{\vec{r}_\perp^2}{2vt}$ , то доданки  $-\frac{iq_z}{2vt} \vec{r}_\perp^2$ ,  $i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp$  та  $-\frac{ivt}{2q_z} \vec{q}_\perp^2$  об'єднуються у повний квадрат. Крім того, члени  $-i\lambda_2(q_z, t) \vec{q}_\perp \cdot \vec{v}_\perp$  та  $\frac{iv}{q_z} \lambda_2(q_z, t) \vec{q}_\perp^2$  можна доповнити до повного квадрату. Це дає

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3\pi} \int d^3q A(q_z, t) \exp \left[ iq_z(r - vt) - \frac{iq_z vt}{2} \left( \frac{\vec{q}_\perp}{q_z} - \frac{\vec{r}_\perp}{vt} \right)^2 + ivq_z \lambda_2 \left( \frac{\vec{q}_\perp}{q_z} - \frac{\vec{v}_\perp}{2v} \right)^2 - \left( \lambda_1 + \frac{iq_z}{4v} \lambda_2 \right) \vec{v}_\perp^2 \right]. \quad (2.130)$$

Тут показник експоненти є симетричним відносно перестановки  $\vec{\theta} \leftrightarrow \vec{\theta}_0$ , що можна зробити явним, переписавши  $\vec{v}_\perp^2 = (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)^2$ ,  $\frac{\vec{q}_\perp}{q_z} - \frac{\vec{v}_\perp}{2v} = \frac{\vec{q}_\perp}{q_z} - \frac{\vec{\theta} + \vec{\theta}_0}{2v}$ . Якщо крім того, зсунути змінну інтегрування  $\vec{q}_\perp$ ,

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3\pi} \int d^3q A(q_z, t) \exp \left[ iq_z(r - vt) - \frac{iq_z vt}{2} \left( \frac{\vec{q}_\perp}{q_z} \right)^2 + ivq_z \lambda_2 \left( \frac{\vec{q}_\perp}{q_z} + \frac{\vec{r}_\perp}{vt} - \frac{\vec{v}_\perp}{2v} \right)^2 - \left( \lambda_1 + \frac{iq_z}{4v} \lambda_2 \right) \vec{v}_\perp^2 \right], \quad (2.131)$$

бачимо, що результат залежить лише від різниці  $\vec{r}_\perp/t - \vec{v}_\perp/2$ . Запис (2.131) робить очевидним той факт, що розподіл  $f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t)$  прямує до нуля при  $r > vt$ , оскільки серед доданків у показнику експоненти в підінтегральному виразі,  $iq_z(r - vt)$  має найбільшу швидкість зростання в комплексній площині  $q_z$  [ $\lambda_2 = \mathcal{O}(q_z^{-1/2})$ ]. Інтегрування за  $\vec{q}_\perp$  тепер може бути виконане без втрати будь-якої корисної симетрії, і приводить до представлення повної функції розподілу як одноразового інтеграла:

$$f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3\lambda_3} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(q_z, t)$$

$$\times \exp \left[ iq_z (r - vt) - \frac{t\lambda_2}{2\lambda_3} \left( \frac{\vec{r}_\perp}{t} - \frac{\vec{v}_\perp}{2} \right)^2 - \left( \lambda_1 + \frac{iq_z}{4v} \lambda_2 \right) \vec{v}_\perp^2 \right] \quad (2.132)$$

В подальшому, для задач випромінювання, нас буде фактично цікавити розподіл за  $\vec{v}_\perp$  та модулем  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_\perp, r, t) &= \int dz d^2 r_\perp \delta \left( z + \frac{r_\perp^2}{2vt} - r \right) f(\vec{v}_\perp, \vec{r}, t) \\ &= \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{2tA}{\lambda_2} \exp \left[ iq_z (r - vt) - \left( \lambda_1 + \frac{iq_z}{4v} \lambda_2 \right) \vec{v}_\perp^2 \right] \\ &\equiv \frac{-it}{16\pi^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_z}{\sinh^2 2Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \\ &\quad \times \exp \left[ iq_z (r - vt) - \frac{\vec{v}_\perp^2}{2} \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \coth 2Dt \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right] \\ &\equiv \frac{iv}{64\pi^2 D^2 t^3} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_z \frac{Q_z}{\sinh^2 \frac{1}{2} \sqrt{iQ_z}} \\ &\quad \times \exp \left[ iQ_z \frac{v(vt - r)}{2Dt^2} - \frac{\vec{v}_\perp^2}{8Dt} \sqrt{iQ_z} \coth \frac{\sqrt{iQ_z}}{2} \right]. \quad (2.133) \end{aligned}$$

Він зображений на Рис. 2.8б.

## 2.4. Висновки до Розділу 2

В цьому Розділі ми бачили, що навіть теорія багаторазового розсіювання швидких частинок у найпростішому – аморфному середовищі виявляється не настільки очевидною як може здатися на перший погляд. А саме:

- В теорії розсіювання на окремому атомі виявляється, що серед чималої кількості наявних модельних атомних потенціалів жоден не може вважатися цілком прийнятним для опису слабо екранованого кулонівського розсіювання. Актуальною є проблема точнішого експериментального та теоретичного визначення параметрів потенціалів, які були введені в Розділі 2.1.
- В теорії багаторазового розсіювання (Розд. 2.2) не можна представити кутовий розподіл як суму гауссового розподілу, який відповід-

ає м'якому розсіюванню, та внеску жорстких одноразових, резерфордівських розсіянь, оскільки в не надто тонкій мішені жорсткі розсіяння теж стають багаторазовими, хоча цей ефект потрібно відрізнити від м'якого кратного розсіяння (plural scattering) в тонких мішенях. Може здатися (див. зноску 10), що чіткої межі між м'яко та жорстко розсіяними частинками не існує, але вона, тим не менш, може бути визначена, хоча і в комплексній площині (Рис. 2.4).

- Що стосується просторового розподілу багаторазово розсіяних частинок (Розд. 2.3), потрібно враховувати, що його фронт є викривленим (Рис. 2.8а), і тому в цьому розподілі присутні різні просторові масштаби (Рис. 2.7). При цьому на практиці можуть знадобитися розподіли по недекартовим змінним, таким як  $|\vec{r}^*|$  (див. Розд. 4).

Втім, проходження частинок крізь аморфне середовище дійсно є процесом, найпростішим для опису, і допускає найповніше трактування.

## РОЗДІЛ 3

### РОЗСІЮВАННЯ В КРИСТАЛАХ

Проходження швидких заряджених частинок крізь кристали незрівнянно різноманітніше і складніше, ніж крізь аморфну речовину. В розподілах частинок, що пройшли крізь кристал, існують значні орієнтаційні ефекти, для пояснення яких потрібно враховувати, що при достатньо малому куті руху частинки відносно будь-якого з головних кристалографічних напрямків електричні поля атомів починають діяти на частинку узгоджено, формуючи усереднений, так званий «неперервний» потенціал (див. Розд. 1.5.2). Існують також вищі гармоніки потенціалу, а також некогерентне багаторазове розсіювання на окремих атомах та електронах, але їх відносна величина зменшується зі зростанням енергії швидкої частинки. Тим не менш, їх теж буває необхідно враховувати навіть при високих енергіях, оскільки вони викликають переходи між станами, яких не існувало б у суто неперервному потенціалі (наприклад, між станами з визначеною поперечною енергією).

У зв'язку з цим, дослідження з перших принципів з'ясовують, чи можна вважати некогерентне розсіювання таким, що викликається окремими атомними кодрами, і якщо так, то який у них радіус екранування, а якщо ні, то в чому полягають залишкові орієнтаційні ефекти, і чи можна взагалі описувати некогерентне розсіювання пертурбативно, враховуючи що рух у неперервному потенціалі описується класичною механікою. Феноменологічні ж підходи не чекають на розв'язок всіх цих питань, а вводять некогерентне розсіювання евристичним чином, підганяючи параметри під згоду з експериментами.

Навіть при спрощеному врахуванні некогерентного розсіювання (наприклад, у наближенні Фоккера-Планка з деяким коефіцієнтом дифузії)

розв'язок рівнянь переносу є складнішим, ніж у однорідній аморфній речовині. Порушується трансляційна інваріантність по тим чи іншим ступеням свободи, і водночас зростає роль конвекції. Оскільки конвекція фізично викликається дифузією, зрозуміло, що ці процеси не можуть описуватися окремо. В найпростіших випадках, таких як донат-розсіювання, їх можна звести до єдиного звичайного диференціального рівняння 2-го порядку, яке дозволяє детальний аналіз.

Конвекція може мати навіть критичний характер, як в задачі про площинне деканалювання позитивно заряджених частинок, коли частинка, досягнувши достатньо великої амплітуди коливань в каналі, підходить близько до області концентрації атомних ядер, де вибивається з каналу. У цьому випадку дифузійно-конвекційна задача є крайовою, і має нетривіальні аспекти як вдалечині від, так і поблизу границь.

З сучасної точки зору, вже не можна обійти увагою проходження крізь зігнуті кристали. Зрозуміло, що опис таких процесів має бути ще складнішим і різноманітнішим, ніж у прямому кристалі. Тому тут ми обмежимося площинною орієнтацією. За цих умов, до міжплощинного потенціалу додається відцентровий потенціал, причому при високій енергії він здатен конкурувати з міжплощинним. Поєднання двох різнопланових потенціалів, навіть у режимі без зіткнень, може давати цікаві ефекти, такі як об'ємне відбиття, якому ми приділимо основну увагу.

### **3.1. Взаємодія швидких частинок з атомним ланцюжком та атомною площиною. Розділення внесків неперервного потенціалу та некогерентного кулонівського розсіювання**

Оскільки опис процесів проходження заряджених частинок крізь кристали – це багатогранна проблема, її розгляд доцільно почати з найпростішої задачі – розсіювання швидкої зарядженої частинки на окремому атомному ланцюжку. У цьому випадку орієнтаційні ефекти залежать лише від одного параметра – кута між імпульсом частинки та напрямком ланцюжка.

Навіть якщо взаємодію швидкої зарядженої частинки з окремим атомом ланцюжка припустимо трактувати по теорії збурень, при малому куті падіння на ланцюжок частинка проходить крізь багато атомів, і тому її рух вимагає непертурбативного опису. За таких обставин загалом виправдано застосування класичної механіки, як це робилося в піонерській роботі Ліндхарда [299], де було розвинуто поняття неперервного, або усередненого потенціалу ланцюжка. Але використання самого лише неперервного потенціалу призводить до нехтування внеском некогерентного багаторазового розсіювання на окремих атомах при близьких зіткненнях з ними, яке може теж відігравати суттєву роль на практиці. Фірсов [421] розглядав флуктуацію поперечної енергії при плавному наближенні класичної зарядженої частинки до ланцюжка, складеного з атомів, але зміг лише довести, що вона експоненційно убиває зі збільшенням мінімальної відстані наближення до ланцюжка.

Квантові непертурбативні аспекти даної задачі досліджувалися в [422] з використанням ейконального наближення для ідеального випадку руху швидкої зарядженої частинки точно вздовж ланцюжка. В цій геометрії ланцюжок ефективно виступає як єдиний гіперзаряджений атом, що дозволяє розв'язувати задачу в дусі Розділу 2.1. Але для макроскопічного ланцюжка, який в реальному кристалі містить мільйони атомів, точна орієнтація є надто рідкісною, і подібний розгляд не дозволяє адекватно описати ефекти багаторазового некогерентного розсіювання.

В комп'ютерних програмах для моделювання проходження швидких заряджених частинок крізь орієнтовані кристали, в яких для пришвидшення обчислення використовують неперервні потенціали (див. Розд. 1.6), внесок некогерентного розсіювання зазвичай просто додають до розсіювання у полі неперервного потенціалу, припускаючи локальну подібність некогерентного процесу в кристалі до розсіювання в однорідній аморфній речовині [423]. Однак, подібний евристичний підхід ігнорує ту обставину, що коли проекція відстані між сусідніми ядрами на площину прицільних параметрів

стає значно меншою від радіусу екранування атома, вона може перейняти на себе роль радіусу екранування. Крім того, некогерентна складова розсіяння в полі орієнтованого ланцюжка не повинна априорі бути однаковою в обох поперечних напрямках. Тут ми розглянемо цей комплекс питань, аналізуючи відмінності точного диференціального перерізу розсіяння від внеску до нього неперервного потенціалу. При цьому суттєвими виявляються квантові ефекти, в той час як відхилення у неперервному потенціалі зазвичай дійсно можна описувати класичною механікою.

Аналогічним чином ми розглянемо і проблему взаємодії частинок з атомною площиною, яка складається з періодичної послідовності ланцюжків (конфігурація «струни струн» [299]). У цьому випадку орієнтаційні ефекти залежать від двох кутів. Важливе значення має ліміт так званої площинної орієнтації, коли внеском розсіювання на окремих атомних ланцюжках можна знехтувати, а сукупний площинний неперервний потенціал стає відносно однорідним у обох поперечних напрямках (квазі-аморфна орієнтація кристалічної площини). Однак, як зазначалося ще Ліндхардом [299], умови застосування неперервного потенціалу для площини є менш тривіальними, ніж для струни. Нещодавно в чисельному моделюванні [385] (див. також [424]) були знайдені залишкові відмінності між середньоквадратичними кутами багаторазового розсіяння в кристалі в «аморфній» орієнтації та відповідними значеннями у справжній аморфній мішені з того ж самого матеріалу і тієї ж щільності. Ми пояснимо фізичне походження цього ефекту.

**3.1.1. Розсіяння на одному атомному ланцюжку. Розділення внесків неперервного потенціалу та некогерентного розсіяння.** У цьому підрозділі ми розглянемо розсіяння зарядженої частинки на ідеальному прямому ланцюжку періодично розташованих атомів, нехтуючи їхніми тепловими коливаннями та квантовими флуктуаціями (тобто в статичному наближенні, вважаючи атоми нескінченно важкими). Ми також зне-

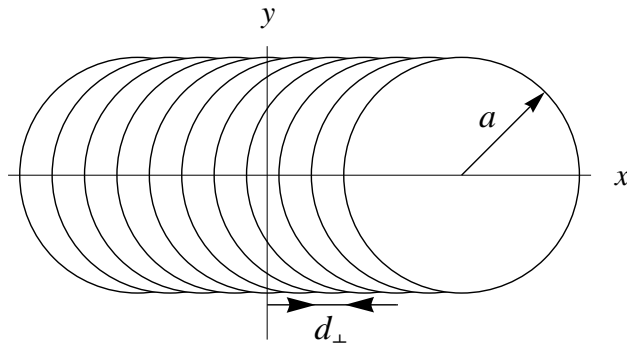


Рис. 3.1. Схематичне зображення вигляду атомного ланцюжка з боку пучка частинок, скерованого на ланцюжок під невеликим кутом. В цих умовах кулонівські поля окремих атомів ефективно «екрануються» шляхом взаємного скорочення на відстанях  $\sim d_{\perp}/2$ , тоді як на більших відстанях потенціали атомів об'єднуються в єдиний неперервний потенціал.

хтуємо перебудовою атомних оболонок, які перекриваються в ланцюжку. Тоді потенціал ланцюжка представляється сумою потенціалів сферично-симетричних атомів:

$$V_s(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(\vec{r} - n\vec{d}),$$

де  $d$  – міжатомна відстань. Для простоти будемо також вважати частинку достатньо швидкою щоб знехтувати як її відхиленням в області взаємодії з ланцюжком, так і неоднорідністю розподілу по прицільних параметрах. Це є виправданим, оскільки ми розглядаємо високо-надбар'єрний рух, а не каналювання. Таким чином, наша постановка задачі властива для надбар'єрного руху, і суттєво відрізняється від процедури виділення внеску некогерентних процесів при каналюванні [299, 319]. Вона також є істотно простішою.

Класична передача імпульсу частинці виражається у цьому випадку як сума передач імпульсів від окремих атомів, кожен з яких характеризується прицільним параметром  $\vec{b}$ , що задає близьку до прямої траєкторію швидкої частинки:

$$\vec{q}(\vec{b}) = -\frac{1}{v} \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dz V_s(\vec{r}) = \nabla_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_0(\vec{b} - n\vec{d}_{\perp}), \quad (3.1)$$



де

$$\chi_0(\vec{b}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Якщо потенціал одного атома представити у вигляді

$$V(\vec{r}) = Ze^2 \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (3.3)$$

(у випадку розсіювання електронів загальний знак має бути змінений), підставляючи його до (3.2), отримуємо

$$\chi_0(\vec{b}) = -2 \frac{Ze^2}{v} K_0(b/a). \quad (3.4)$$

У квантовій механіці локальний зв'язок (3.1) порушується, але квантовий диференціальний переріз розсіяння в ейкональному наближенні

$$\frac{d\sigma}{d^2q} = \left| \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2b e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{b}} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \Sigma \chi_0} \right] \right|^2, \quad (3.5)$$

містить таку ж суму  $\sum \chi_0$ . Тому в будь-якому випадку нам потрібно спочатку обчислити цю суму.

Щоб підсумувати ряд з доданками (3.4), зручно застосувати перетворення Фур'є для загального члена  $\chi_0(\vec{b})$  уздовж напрямку ланцюжка ( $Ox$ , див. Рис. 3.1):

$$K_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}/a\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{ix\xi - |y|\sqrt{a^{-2} + \xi^2}}}{\sqrt{a^{-2} + \xi^2}}, \quad (3.6)$$

і, підставляючи його до Рівн. (3.1), змінити порядок підсумовування та інтегрування, з використанням тотожності Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(x-nd_{\perp})\xi} = e^{ix\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{d_{\perp}\xi}{2\pi} - n\right). \quad (3.7)$$

Подальше інтегрування виникаючих дельта-функцій за  $\xi$  дає

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_0(\vec{b} - n\vec{d}_{\perp}) = -\frac{Ze^2}{v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x / d_{\perp}} \frac{e^{-|y|\sqrt{a^{-2} + (2\pi n / d_{\perp})^2}}}{\sqrt{(d_{\perp} / 2\pi a)^2 + n^2}}. \quad (3.8)$$

Таким чином, ми трансформували одну суму в іншу, але простішу для аналізу.

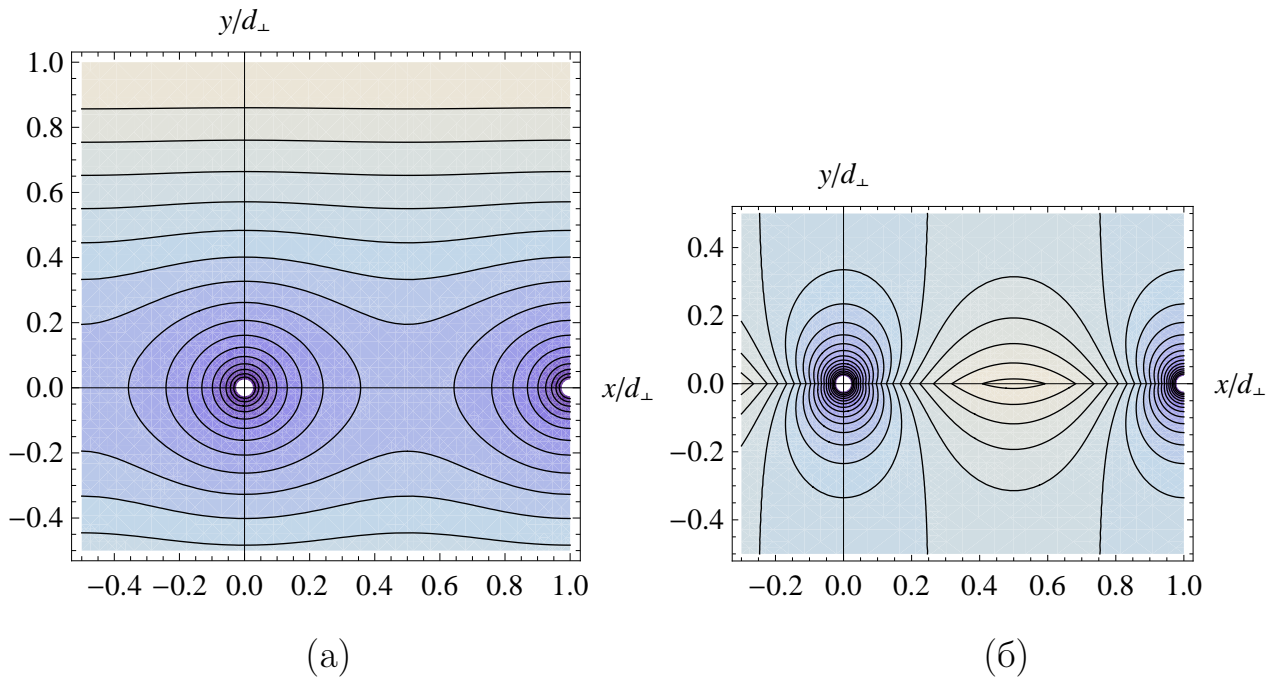


Рис. 3.2. а). Ейкональна функція  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_0(x - nd_{\perp}, y)$  для статичного атомного ланцюжка з однаковими відстанями між атомами [Рівн. (3.8), для  $a/d_{\perp} = 5$ ]. б). Жорстка компонента ейкональної функції,  $\chi_0^{(h)}(\vec{b})$  [Рівн. (3.12)].

Як видно з Рівн. (3.8), умова малості кутів орієнтації ланцюжка більш точно означає, що

$$(d_{\perp}/2\pi a)^2 \ll 1, \quad (3.9)$$

і завдяки присутності множника  $(2\pi)^{-2}$ , ця нерівність фактично виконується навіть при  $d_{\perp} \sim a$ . За цієї умови, якщо в сумі (3.8) відокремити доданок  $n = 0$ , який відповідає неперервному потенціалу, то в інших доданках, що описують розсіювання на безструктурних атомних ядрах, можна покласти  $\sqrt{(d_{\perp}/2\pi a)^2 + n^2} \approx n$ . Це приводить до бажаного розділення:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_0(\vec{b} - n\vec{d}_{\perp}) \simeq \chi_0^{(c)}(y) + \chi_0^{(h)}(\vec{b}), \quad (3.10)$$

де перша компонента

$$\chi_0^{(c)}(y) = -\frac{2\pi Ze^2 a}{vd_{\perp}} e^{-|y|/a} \quad (3.11)$$

відповідає дії неперервного потенціалу, а друга компонента – жорсткому

розсіянню (незалежному від радіусу екранування). Остання компонента може бути виражена також у замкненій формі:

$$\chi_0^{(h)}(\vec{b}) = -\frac{2Ze^2}{v} \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi n(|y+ix)/d_{\perp}} \quad (3.12a)$$

$$= \frac{2Ze^2}{v} \ln \left| 1 - e^{-2\pi(|y+ix)/d_{\perp}} \right| \quad (3.12b)$$

$$\equiv \frac{2Ze^2}{v} \left( \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(x - i|y|)}{d_{\perp}} \right| - \pi \frac{|y|}{d_{\perp}} \right) \quad (3.12c)$$

(див. Рис. 3.2б).

Порівнюючи дві компоненти у рівнянні (3.10), відзначимо, що завдяки коефіцієнту  $a/d_{\perp} \gg 1$ , компонента  $\chi_0^{(c)}$  є набагато більшою, ніж  $\chi_0^{(h)}$ , але натомість, вона змінюється повільніше [тоді як (3.1) є градієнтом  $\chi_0$ ]. Залишається ще й певна взаємоузгодженість між  $\chi_0^{(c)}$  та  $\chi_0^{(h)}$ : їх внески  $\mathcal{O}(|y|)$  до суми (3.10) повинні скорочуватися, щоб функція (3.10) була гладкою при  $y = 0$  для будь-якого  $x$  (як це мало місце для початкової суми гладких функцій).

Тепер зауважимо, що кулонівський потенціал із довільною функцією екранування може бути представлений у вигляді суперпозиції експоненційних екранувань з різними  $a$ , тобто у вигляді інтеграла Лапласа (2.33). Оскільки компонента  $\chi_0^{(h)}$  є лінійною по потенціалу, і не залежить від  $a$ , вона залишиться такою самою для будь-якої функції екранування, в той час як компонента  $\chi_0^{(c)}$  дещо модифікується.

При достатньо малих  $d_{\perp}/a$ , коли  $\frac{d_{\perp}}{2\pi a} \ll \frac{Ze^2}{\hbar v}$ , дія неперервного потенціалу повинна стати квазікласичною.  $\chi_0^{(h)}$  же відповідає швидкому, але слабшому розсіянню. Отже, коли ми переходимо від проблем взаємодії частинки з ланцюжком до її взаємодії з кристалом, когерентний внесок слід описувати динамічно, в той час як некогерентний можна описувати кінетично. Насправді опис цих внесків можна розділити вже в рамках поточної проблеми розсіяння на одному ланцюжку. Нижче ми розглянемо цю задачу в рамках класичної механіки,<sup>1</sup> а потім з позицій більш точної квантової

<sup>1</sup>Це може відповідати використанню у якості падаючих частинок ядер з великим  $Z$ .

теорії.

**3.1.1.1. Класичне розсіювання.** З рівнянь (3.10)–(3.12) легко можна вивести індикатрису  $\vec{q}(\vec{b})$ , а з неї – класичний диференціальний переріз розсіювання  $d\sigma/d^2q$ . На значення компоненти  $q_x$  не впливає неперервний потенціал, який залежить лише від  $y$ . Тому

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum \chi_0 = \frac{2Ze^2}{v} \Re \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[ 2 \sin \frac{\pi(x - i|y|)}{d_\perp} \right] \\ &= \frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp} \Re \cot \frac{\pi(x - i|y|)}{d_\perp}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для  $q_y$ , якщо ми обмежимося областю  $|y| \lesssim d_\perp$ , де домінує жорстке розсіювання, неперервний потенціал дає лише внесок типу  $\text{sgn}(y)$ , який скорочується з похідною від останнього члену в Рівн. (3.12с). Таким чином,

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum \chi_0 \simeq \frac{2Ze^2}{v} \Re \frac{\partial}{\partial y} \ln \left[ 2 \sin \frac{\pi(x - i|y|)}{d_\perp} \right] \\ &= \frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp} \text{sgn}(y) \Im \cot \frac{\pi(x - i|y|)}{d_\perp}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отже,  $q_x$  та  $q_y \text{sgn}(y)$  – це дійсна та уявна частини єдиної комплексної функції

$$Q = \frac{2\pi Ze^2}{vd_\perp} \cot \frac{\pi(x - i|y|)}{d_\perp}, \quad (3.15)$$

тобто

$$q_x = \Re Q, \quad q_y \text{sgn}(y) = \Im Q. \quad (3.16)$$

Щоб з виразу для  $\vec{q}(\vec{b})$  отримати диференціальний переріз розсіювання, потрібно перевиразити  $x$  та  $y$  явно через  $q_x$  та  $q_y$ , що найлегше зробити, інвертуючи комплексну функцію:

$$\frac{x - i|y|}{d_\perp} = \frac{1}{\pi} \text{arccot} \frac{vd_\perp Q}{2\pi Ze^2}. \quad (3.17)$$

Тут  $x/d_\perp$  в лівій частині, як і  $\frac{1}{\pi} \Re \text{arccot}$  в правій частині, визначаються по модулю 1. Залежність від  $a$  випала, і видно, що екранування фактично здійснюється на масштабі  $\sim d_\perp$ , як і передбачалося на початку підрозділу 3.1.

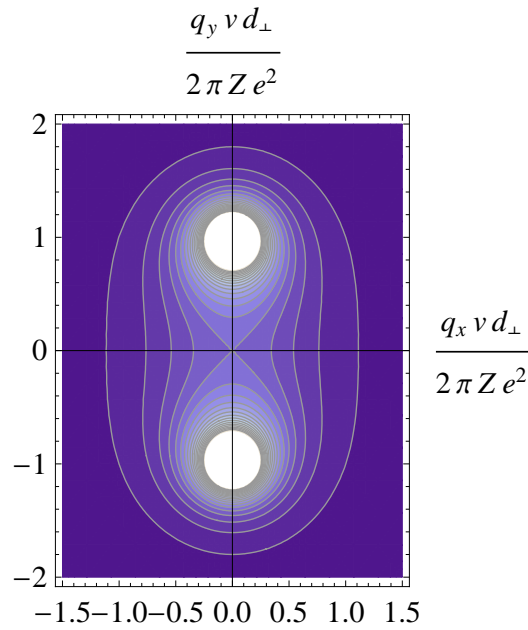


Рис. 3.3. Класичний диференціальний переріз некогерентного розсіяння, Рівн. (3.20).

Щоб далі вивести з (3.17) диференціальний переріз розсіяння, достатньо обчислити якобіан:<sup>2</sup>

$$\frac{d\sigma_1}{d^2q} = \left| \frac{db}{dQ} \right|^2 = \left( \frac{2Ze^2}{v} \right)^2 \frac{1}{\left| \left( \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right)^2 + Q^2 \right|^2}. \quad (3.18)$$

Цей вираз зовні схожий на перше борнівське наближення, але тут  $Q$  є комплексним числом. Щоб обчислити квадрат модуля знаменника, спершу факторизуємо його:

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right)^2 + Q^2 &= \left( Q + i \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right) \left( Q - i \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right) \\ &= \left[ q_x + i \left( q_y + \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right) \right] \left[ q_x + i \left( q_y - \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тепер видно, що

$$\frac{d\sigma_1}{d^2q} = \left( \frac{2Ze^2}{v} \right)^2 \frac{1}{\left[ q_x^2 + \left( q_y - \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right)^2 \right] \left[ q_x^2 + \left( q_y + \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}} \right)^2 \right]}. \quad (3.20)$$

<sup>2</sup>Перше з рівнянь (3.18), де  $b = x + iy$ , можливе лише коли існує голоморфне представлення для індикатриси розсіяння, і є вираженням умов Коші-Рімана для його існування.

На відміну від диференціального перерізу розсіяння на корі окремого атома, це далеко не аксіально-симетрична функція при помірних  $\vec{q}$  (див. Рис. 3.3). До того ж вона залежить від  $Z$  нелінійним чином, а отже, диференціальний переріз некогерентного розсіяння не зводиться до виділення вищих гармонік потенціалу і борнівського розсіювання на них. Але фізична вада полягає в тому, що (3.20) має полюси в точках  $(q_x = 0, q_y = \pm \frac{2\pi Z e^2}{v d_\perp})$ , внаслідок чого повний переріз розбігається. З погляду Рівн. (3.17), це відповідає  $y \rightarrow \pm\infty$ . Втім, як ми бачили в Розд. 2 та Додатку А на прикладі розсіяння на одному атомі, подібні розбігання є лише артефактами відхилення частинок будь-яким плавно убуючим потенціалом в класичній механіці. Вони повинні зникати у квантовомеханічному підході, що буде продемонстровано в наступному підрозділі.

Рівн. (3.20) відповідає потраплянню частинки на певну комірку. Щоб вивести звідси переріз розсіяння широкого пучка, потрібно або помножити (3.20) на кількість атомів в ланцюжку,  $d\sigma = Nd\sigma_1$ , або, якщо початковий пучок є меншим за  $Nd_\perp$ , використовувати відношення

$$\frac{1}{d_\perp} \frac{d\sigma_1}{d^2q} = \frac{d\lambda_y}{d^2q}, \quad (3.21)$$

яке має значення перерізу розсіяння за координатою  $y$ , але імовірності розсіяння за координатою  $x$ .

**3.1.1.2. Квантовий опис.** Наявність сингулярностей у рівнянні (3.20) вказує на те, що цей внесок, взагалі кажучи, потребує квантовомеханічного розгляду. Щодо застосовності ейкональної формули (3.5) до даної конфігурації, коли ланцюжок має велику поздовжню протяжність, звернемо увагу, що площина інтегрування в наближенні ейконала може бути вибрана в 3-вимірному просторі паралельною ланцюжку, який нахилений під малим кутом відносно напрямку пучка [425]. Це виправдовує використання представлення прицільних параметрів (3.5).

З урахуванням періодичності залежності  $\chi_0(x, y)$  від  $x$ , залежність квантовомеханічного перерізу розсіяння частинок від  $q_x$  виявляється дис-

кретною:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d^2q} &= \left| \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \int dy e^{\frac{i}{\hbar}(q_x x + q_y y)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sum \chi_0} \right] \right|^2 \\
&= \left| \sum_n \delta \left( \frac{q_x d_\perp}{2\pi\hbar} - n \right) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{d_\perp} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(2\pi n x / d_\perp + q_y y / \hbar)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sum \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2 \\
&= \sum_n \left| \delta \left( q_x - \frac{2\pi\hbar n}{d_\perp} \right) \right|^2 \\
&\quad \times \left| \frac{1}{d_\perp} \int_0^{d_\perp} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(2\pi n x / d_\perp + q_y y / \hbar)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sum \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2 \\
&= \frac{N d_\perp}{2\pi\hbar} \sum_n \delta \left( q_x - \frac{2\pi\hbar n}{d_\perp} \right) \\
&\quad \times \left| \frac{1}{d_\perp} \int_0^{d_\perp} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(2\pi n x / d_\perp + q_y y / \hbar)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sum \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

де  $N = \sum_n 1 \gg 1$  – кількість атомів у ланцюжку. Тому відповідні фізичні спостережувані визначаються формулою (3.21):

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_{yn}}{dq_y} &= \frac{1}{N d_\perp} \frac{d\sigma}{dq_y} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \frac{1}{d_\perp} \int_0^{d_\perp} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(2\pi n x / d_\perp + q_y y / \hbar)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sum \chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

з  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , що відповідає  $q_x = \frac{2\pi\hbar}{d_\perp} n$ . Підставляючи сюди (3.10), (3.11), (3.12b), отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_{yn}}{dq_y} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i}{\hbar} q_y y} \right. \\
&\quad \times \left[ \delta_{n0} - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \frac{1}{d_\perp} \int_0^{d_\perp} dx e^{2\pi i n x / d_\perp} \left| 1 - e^{-2\pi(|y| + ix) / d_\perp} \right|^{\frac{2iZe^2}{\hbar v}} \right] \left. \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i}{\hbar} q_y y} \left[ \delta_{n0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\xi \cos n\xi \left( 1 + e^{-4\pi|y|/d_\perp} - 2e^{-2\pi|y|/d_\perp} \cos \xi \right)^{\frac{iZe^2}{\hbar v}} \right] \right|^2. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Інтеграл за  $\xi$  тут є одним зі стандартних виразів для приєднаної функції Лежандра [426], тому

$$\frac{d\lambda_{yn}}{dq_y} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i}{\hbar} q_y y} \times \left[ \delta_{n0} - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \frac{(1 - e^{-2\pi|y|/d_{\perp}})^{\frac{iZe^2}{\hbar v}}}{(1 + \frac{iZe^2}{\hbar v})_n} P_n^{\frac{iZe^2}{\hbar v}} \left( \frac{1 + e^{-4\pi|y|/d_{\perp}}}{1 - e^{-2\pi|y|/d_{\perp}}} \right) \right] \right|^2. \quad (3.25)$$

Однак, інтеграл за  $y$ , який залишається, є доволі складним.

Інтеграл можна значно спростити за припущення, що некогерентна частина розсіяння дозволяє пертурбативне обчислення. Після розкладення

$$e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \approx e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \chi_0^{(h)}(\vec{b}) \right] \quad \left( \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1 \right), \quad (3.26)$$

амплітуда розсіяння приймає вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_{\perp}} \int_0^{d_{\perp}} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(2\pi n x/d_{\perp} + q_y y/\hbar)} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(\vec{b})} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i q_y y/\hbar} \left[ \left( 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \right) \delta_{n0} - e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} \frac{i}{\hbar} \frac{1}{d_{\perp}} \int_0^{d_{\perp}} dx e^{2\pi i n x/d_{\perp}} \chi_0^{(h)}(\vec{b}) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Підстановка сюди (3.12а) приводить до

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{\perp}} \int_0^{d_{\perp}} dx e^{2\pi i n x/d_{\perp}} \chi_0^{(h)}(\vec{b}) &= -\frac{Ze^2}{v} \Re \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{d_{\perp}} \int_0^{d_{\perp}} dx e^{2\pi i n x/d_{\perp} - 2\pi m(|y| + ix)/d_{\perp}} \\ &= -\frac{Ze^2}{vn} e^{-2\pi n|y|/d_{\perp}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

для  $n > 0$ , і дає нуль при  $n = 0$ .

Зникнення другого доданку в правій частині рівняння (3.27) при  $n = 0$  означає, що він не інтерферує з першим доданком, який є відмінним від нуля лише для  $n = 0$ . З фізичного погляду це природно, оскільки неперервний потенціал повинен включати в себе всі усереднені ефекти.

Зрештою, (3.23) зводиться до

$$\frac{d\lambda_{yn}}{dq_y} = \frac{d\lambda_y^{(c)}}{dq_y} \delta_{n0} + \frac{d\lambda_{ny}^{(h)}}{dq_y}, \quad (3.29)$$



з диференціальним перерізом некогерентного розсіяння

$$\frac{d\lambda_{ny}^{(h)}}{dq_y} = \frac{1 - \delta_{n0}}{2\pi\hbar} \left( \frac{Ze^2}{\hbar v n} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iq_y y/\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0^{(c)}(y)} e^{-2\pi n|y|/d_{\perp}} \right|^2. \quad (3.30)$$

Враховуючи, що останній інтеграл по  $y$  збігається при  $|y| \lesssim d_{\perp}$ , повільно змінна фаза  $\chi_0^{(c)}(y)$  може бути лінеаризована в цій області:

$$\chi_0^{(c)}(y) \simeq \text{const} + \frac{2\pi i Z e^2}{v d_{\perp}} |y|,$$

даючи

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{ny}^{(h)}}{dq_y} &= \frac{1 - \delta_{n0}}{2\pi\hbar} \left( \frac{Ze^2}{\hbar v n} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i}{\hbar} q_y y + \frac{2\pi i Z e^2}{\hbar v d_{\perp}} |y| - 2\pi n|y|/d_{\perp}} \right|^2 \\ &= \frac{2\pi\hbar}{d_{\perp}^2} \left( \frac{2Ze^2}{v} \right)^2 \frac{1 - \delta_{n0}}{\left| iq_y - \frac{2\pi i Z e^2}{v d_{\perp}} + \frac{2\pi\hbar}{d_{\perp}} n \right|^2 \left| -iq_y - \frac{2\pi i Z e^2}{v d_{\perp}} + \frac{2\pi\hbar}{d_{\perp}} n \right|^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ідентифікуючи  $\frac{2\pi\hbar}{d_{\perp}} n = q_x$  та  $\frac{2\pi\hbar}{d_{\perp}} = \Delta q_x$ , видно, що структура (3.31) в основному збігається зі своїм класичним аналогом (3.20). Однак, суттєва відмінність полягає в тому, що передача імпульсу вздовж ланцюжка квантується, тоді як серед можливих значень для некогерентного багаторазового розсіювання відсутній доданок  $n = 0$ , який повністю поглинається внеском неперервного потенціалу. Це усуває сингулярність в рівнянні (3.20) для  $q_x \rightarrow 0$ ,  $q_y \rightarrow \pm \frac{2\pi Z e^2}{v d_{\perp}}$ .

Рівняння (3.31) було отримане за припущення  $Ze^2/\hbar v \ll 1$ . Тим не менш, оскільки при  $Ze^2/\hbar v \gg 1$  він збігається з класичним результатом, для якісних оцінок ми будемо використовувати його для всіх  $Ze^2/\hbar v$ .

Для порівняння з дією неперервного потенціалу (див. Рис. 3.4), відзначимо, що з боку останнього відсутня передача імпульсу  $q_x$ . Щоб порівняти внески  $q_y$ , достатньо розглянути відношення<sup>3</sup>  $\frac{d\lambda_{1y}^{(h)}/dq_y}{d\lambda_y^{(c)}/dq_y}$  в точці  $q_y = \pm \frac{2\pi Z e^2}{v d_{\perp}}$ , де диференціальний переріз розсіяння на неперервному потенціалі,

$$\frac{d\lambda_y^{(c)}}{dq_y} = \frac{a}{|q_y|} \vartheta(q_{y\text{max}} - |q_y|), \quad q_{y\text{max}} = \frac{2\pi Z e^2}{v d_{\perp}}, \quad (3.32)$$

<sup>3</sup>Доданки з  $n \geq 2$  завжди є субдомінантними. Можна також виконати підсумовування за  $n$ , але сума поводить себе практично як головний член  $n = 1$ .

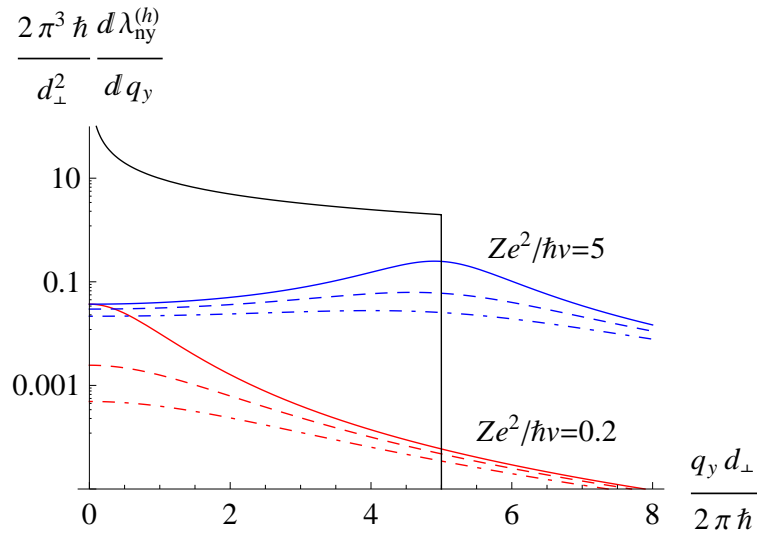


Рис. 3.4. Кольорові криві – квантовий диференціальний переріз для компоненти некогерентного розсіяння в Рівн. (3.31). Червоні криві відповідають  $Ze^2/\hbar v = 0.2$ ; сині,  $Ze^2/\hbar v = 5$ . Суцільні кольорові криві відповідають  $n = 1$ ; штрихові,  $n = 2$ ; штрих-пунктирні,  $n = 3$ . Чорна крива показує диференціальний переріз розсіяння на неперервному потенціалі [Рівн. (3.32)], для  $Ze^2/\hbar v = 5$  та  $a = d_{\perp}$ .

є мінімальним, але ненульовим:

$$\left. \frac{d\lambda_{1y}^{(h)}/dq_y}{d\lambda_y^{(c)}/dq_y} \right|_{q_y = \pm \frac{2\pi Ze^2}{vd_{\perp}}} = \frac{d_{\perp}}{(2\pi)^2 a} \frac{\frac{Ze^2}{\hbar v}}{1 + \left(\frac{\hbar v}{Ze^2}\right)^2}. \quad (3.33)$$

Оскільки тут  $\frac{d_{\perp}}{(2\pi)^2 a} \ll 1$ , відношення (3.33) може досягати порядку одиниці лише для достатньо великих  $Ze^2/\hbar v$  (наприклад, для пучка атомних ядер, коли  $Z \rightarrow Z_1 Z_2$ ).

**3.1.2. Розсіяння на атомній площині (геометрія «струни струн»).** Тепер ми готові проаналізувати взаємодію частинок зі складнішим об'єктом – атомною площиною, нахиленою до пучка заряджених частинок під невеликим кутом. Не обмежуючи загальності, таку площину можна розглядати як періодичну послідовність атомних ланцюжків («струну струн» [299]). Особливе значення має орієнтація, за якої осьові ефекти в площині є незначними, завдяки чому площину можна розглядати як пра-

ктично рівномірно заповнену атомами. Саме таку орієнтацією називають площинною.

**3.1.2.1. Орієнтація «струни струн» та «аморфна» орієнтація площини.** Щоб скласти уявлення про орієнтаційні ефекти у розсіюванні частинок при проходженні крізь атомну площину, зауважимо, що в низькоіндексній площині завжди можна вибрати елементарну комірку з обома сторонами сумірного розміру. При цьому високоенергетичне пружне розсіювання визначається розподілом атомів у площині, перпендикулярній до вектора швидкості частинки (розподілом по прицільних параметрах). У площині прицільних параметрів атоми розташовані набагато щільніше, ніж у непроектованій площині, тому відстань між найближчими проєктованими сусідами є набагато меншою. Разом з тим, розташування проєктованих атомів залишається періодичним, тому в площині прицільних параметрів атоми теж утворюють ґратку. Її різними способами можна розбити на періодичну послідовність паралельних ланцюжків, і кожен проєктований атом належить до певного ланцюжка цього сімейства. Фізична релевантність ланцюжка залежить від щільності атомів в ньому порівняно зі щільністю атомів по інших напрямках.

Осьові ефекти можна мінімізувати за допомогою спеціального вибору напрямку нахилу площини. Якщо  $\vec{a}_1$  та  $\vec{a}_2$  – найменші незалежні вектори ґратки у непроектованій атомній площині, виберемо вісь  $z$  у площині вздовж  $N\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ , де  $N \gg 1$ . Ця вісь відхиляється від напрямку  $\vec{a}_1$  на кут  $\varphi = a_{2\perp}/Na_1 \ll 1$ . Різниця між прицільними параметрами атомів у кожному ланцюжку дорівнює

$$d_x = \varphi a_1,$$

де вісь  $Ox \perp Oz$  теж міститься в атомній площині. Далі оберемо імпульс налітаючої частинки в площині, що містить  $Oz$  та напрямок  $Oy$ , ортогональний до атомної площини, з кутом нахилу  $\psi \ll 1$  до осі  $z$ . В площині прицільних параметрів відносно напрямку руху такої частинки ми отри-

муємо сімейство проєктованих ланцюжків з відстанями прицільних параметрів між ланцюжками

$$d_y = \psi N a_1,$$

Відстані  $d_x$  та  $d_y$  будуть одного порядку, якщо

$$\psi \sim \frac{\varphi}{N} \sim \varphi^2. \quad (3.34)$$

Лише тоді будь-які осьові ефекти в площині будуть відносно малими. Співвідношення (3.34) можна розглядати як теоретичну (на відміну від зазвичай використовуваної емпіричної [286,306]) умову для визначення площинної орієнтації (див. Рис. 3.5). Однак, залишається ще довести, що розподіл атомів у площині може розглядатися як рівномірний, а точність, з якою площину можна вважати «аморфною», повинна бути оцінена кількісно.

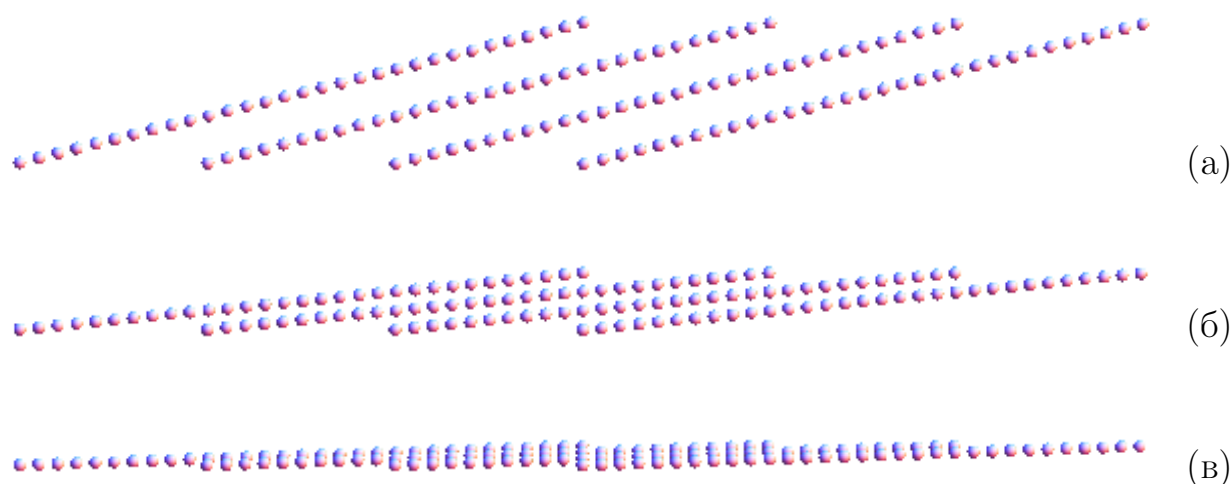


Рис. 3.5. Видгляд однієї площини кубічної ґратки з напрямку (відносно головних осей)  $\varphi = 1/10$  та а).  $\psi = 1/40$ ; б).  $\psi = 1/100$ ; в).  $\psi = 1/300$ . У випадку (а) у проєктованій площині проявляються горизонтальні ланцюжки, у випадку (в) – вертикальні, а у випадку (б) проєктована площина стає рівномірно упакованою.

**3.1.2.2. Розсіювання на «струні струн».** Для загального опису розсіювання швидких заряджених частинок на орієнтованій атомній площині її можна розглядати як періодичну послідовність ланцюжків (див. Розд. 1.6).

Тепер буде зручно спрямувати вісь  $x$  у площині прицільних параметрів уздовж найщільніше упакованої проекції ланцюжків (цей напрямок не повинен збігатися з напрямком нахилу атомної площини, щоб орієнтація не стала осью). При цьому

$$\sum_{m,n} \chi_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_0^{(c)}(y - md_y) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_0^{(h)}(x, y - md_y), \quad (3.35)$$

де  $\chi_0^{(c)}$  та  $\chi_0^{(h)}$  задаються рівняннями (3.11), (3.12). Підсумовування здійснюються за допомогою формули<sup>4</sup>

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|y-md_y|/a} = \frac{\cosh \frac{d_y}{a} \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right)}{\sinh \frac{d_y}{2a}} \quad (3.36)$$

для суми внесків неперервного потенціалу ланцюжків, а також аналогічно для суми некогерентних внесків багаторазового розсіювання. Це дає

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \chi_0 &= -\frac{2\pi Z e^2 a \cosh \frac{d_y}{a} \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right)}{v d_x \sinh \frac{d_y}{2a}} \\ &\quad - \frac{2Z e^2}{v} \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi i n x / d_x} \frac{\cosh \frac{\pi n d_y}{d_x} \left( 1 - 2 \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right)}{\sinh \frac{\pi n d_y}{d_x}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

У другому рядку, внаслідок співвідношення  $d_x < d_y$  (забезпечуючого, що найбільш щільно упаковані ланцюжки орієнтовані вздовж  $x$ , а не вздовж  $y$ ), гіперболічний косинус та синус можуть бути замінені експонентами, що дає можливість завершити підсумовування:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \chi_0 &= -\frac{2\pi Z e^2 a \cosh \frac{d_y}{a} \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right)}{v d_x \sinh \frac{d_y}{2a}} \\ &\quad - \frac{2Z e^2}{v} \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi i n x / d_x} \exp \left[ \frac{\pi n d_y}{d_x} \left( \left| 1 - 2 \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right| - 1 \right) \right] \\ &= -\frac{2\pi Z e^2 a \cosh \frac{d_y}{a} \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right)}{v d_x \sinh \frac{d_y}{2a}} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Тут  $\{q\}$  означає дробову частину числа  $q$ , яка належить до інтервалу  $0 \leq \{q\} < 1$ .

$$+ \frac{2Ze^2}{v} \ln \left| 1 - e^{-2\pi ix/d_x} \exp \left[ \frac{\pi d_y}{d_x} \left( \left| 1 - 2 \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} \right| - 1 \right) \right] \right|. \quad (3.38)$$

Тут другий рядок, що представляє внесок від некогерентного багаторазового розсіювання, є фактично таким самим, як і для окремих ланцюжків [порівн. Рівн. (3.12b)]. Це природно, оскільки їхні області жорсткого розсіювання істотно не перекриваються. Перший член в рівнянні (3.38) представляє внесок від суми неперервних потенціалів ланцюжків, який, зрештою, прямує до неперервного потенціалу рівномірної площини. Дослідимо його ретельніше.

Розсіювання на сукупному неперервному потенціалі ланцюжка може бути описано класичною механікою. Обчислюючи індикатрису

$$q_y = \frac{\partial}{\partial y} \sum \chi_0 \simeq -\frac{2\pi Ze^2 \sinh \frac{d_y}{a} \left( \left\{ \frac{y}{d_y} \right\} - \frac{1}{2} \right)}{vd_x \sinh \frac{d_y}{2a}}, \quad (3.39)$$

яка обертається як

$$y = \frac{d_y}{2} - a \operatorname{arsinh} \left( \frac{vd_x}{2\pi Ze^2} q_y \sinh \frac{d_y}{2a} \right) \quad 0 < q_y < 0,$$

отримуємо диференціальний переріз розсіювання при проходженні частинки крізь одну елементарну комірку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dy}{dq_y} \right| &= \frac{a}{\sqrt{\left( \frac{vd_x}{2\pi Ze^2} \sinh \frac{d_y}{2a} \right)^{-2} + q_y^2}} \vartheta(q_{y \max} - |q_y|) \\ &\xrightarrow{d_y/2a \rightarrow 0} \frac{d_y}{2q_{y \max}} \vartheta(q_{y \max} - |q_y|). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Тут  $q_y$  змінюється в обмеженому інтервалі  $-q_{y \max} < q_y < q_{y \max}$ , з

$$q_{y \max} = q_y|_{y=0} = \frac{2\pi Ze^2}{vd_x} \quad (3.41)$$

(бачимо відсутність залежності від  $a$  та  $d_y$  через те, що внески від симетрично розташованих ланцюжків скорочуються). Повний переріз розсіювання, звичайно, дорівнює відстані між ланцюжками в площині прицільних параметрів:

$$\int_{-q_{y \max}}^{q_{y \max}} dq_y \left| \frac{dy}{dq_y} \right| = 2a \int_0^{q_{y \max}} \frac{dq_y}{\sqrt{\left( \frac{vd_x}{2\pi Ze^2} \sinh \frac{d_y}{2a} \right)^{-2} + q_y^2}}$$

$$= 2a \operatorname{arsinh} \left( \frac{vd_x q_{y \max}}{2\pi Z e^2} \sinh \frac{d_y}{2a} \right) = d_y, \quad (3.42)$$

оскільки класичне розсіяння відбувається з імовірністю 1 для будь-якого  $y$ .

Середньоквадратичний переданий імпульс, що відповідає рівнянню (3.40), дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_y} \int_{-q_{y \max}}^{q_{y \max}} dq_y q_y^2 \left| \frac{dy}{dq_y} \right| &= \frac{2a}{d_y} \int_0^{q_{y \max}} \frac{dq_y q_y^2}{\sqrt{\left( \frac{vd_x}{2\pi Z e^2} \sinh \frac{d_y}{2a} \right)^{-2} + q_y^2}} \\ &= \frac{q_{y \max}^2}{2} \left( \frac{2a}{d_y} \coth \frac{d_y}{2a} - \frac{1}{\sinh^2 \frac{d_y}{2a}} \right) \xrightarrow{d_y/2a \rightarrow 0} \frac{q_{y \max}^2}{3}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Це потрібно порівняти з відповідною величиною для жорсткої компоненти, яка була обчислена в розділі 3.1.1.2:

$$\frac{1}{d_y} \int dq_y q_y^2 \left| \frac{d\lambda^{(h)}}{dq_y} \right| = \frac{1}{d_y} \frac{\pi}{2d_x} \left( \frac{2Ze^2}{v} \right)^2 \sim \frac{\pi d_x}{d_y} q_{y \max}^2 \log \sim \frac{4\pi^3 Z^2 e^4}{d_x d_y}. \quad (3.44)$$

Зазвичай  $d_y \gtrsim d_x$ , але за рахунок коефіцієнта  $3\pi \log$ , некогерентний внесок (3.44) може домінувати над (3.43).

Тому площинна орієнтація вимагає не тільки щільної упаковки ланцюжків  $y/2a \ll 1$ , але і щоб  $d_x$  не було занадто малим порівняно з  $d_y$  [що відповідає умові (3.34)], інакше істотними стають осьові ефекти. При детальнішому розгляді, з урахуванням рівняння (3.41), бачимо, що (3.43) є обернено пропорційним *квадрату* кута нахилу площини. Тому в розсіюванні на атомній площині завжди може залишатися помітний когерентний ефект, отже, площинний неперервний потенціал ніколи не буває ідеально однорідним в обох напрямках.

На завершення, зазначимо, що отриманий критерій оптимальної площинної орієнтації (3.34) може бути корисним також і для каналювання, якщо прийняти до уваги, що траєкторія в останньому процесі є не прямою, а коливається, з  $\psi \sim \theta_c$ . Тоді оптимальний кут нахилу пучка до осі у вибраній площині має бути порядку  $\varphi \sim \sqrt{\theta_c}$ . Якщо ця умова не виконується, в процесі каналювання можуть проявлятися ефекти струн,

приводячи до посиленого деканалювання (наприклад, резонансне деканалювання [427, 428]).

### 3.2. Донат-розсіювання (дифузійна теорія)

Коли швидка заряджена частинка рухається у кристалі вздовж напрямку, близького до однієї з головних кристалографічних осей, рух частинки залежить переважно від неперервного потенціалу відповідних атомних ланцюжків, тоді як некогерентне багаторазове розсіювання залишається субдомінантним. Як зазначалося в Розд. 1.5.5, якщо частинка при цьому не захоплена до режиму каналювання (як це зазвичай буває у випадку позитивно заряджених частинок, які відштовхуються від атомних ядер), її взаємодія з ланцюжками відбувається в режимі багаторазового розсіювання, але внаслідок осової симетрії ланцюжків, поперечна енергія частинки відносно напрямку ланцюжків зберігається достатньо добре, тому розсіювання змінює в першу чергу азимутальний розподіл – виникає «донат-розсіювання» (від англ. doughnut – бублик). Практичне значення цього ефекту полягає в тому, що навіть без виконання умов каналювання рух швидких заряджених частинок тісно корелює з напрямком ланцюжків, а отже, може бути використаний для ефективного відхилення пучка за допомогою зігнутого кристала (див. Розд. 1.5.7.3).

Теорія проходження частинок крізь кристали в режимі донат-розсіювання зазвичай зосереджується на обчисленні кутових розподілів частинок на виході з кристала [346]. Цього часто може бути достатньо для практики, оскільки пучок, падаючий на кристал, завжди має макроскопічний поперечний розмір тоді як набутий поперечний просторовий розподіл при розсіюванні на атомних ланцюжках є мікроскопічним в межах кристала.<sup>5</sup> Але для оцінки супутніх когерентних процесів, таких як випромінювання, або для відхилення частинок за допомогою зігнутих кристалів, може знадобитися і знання координатного розподілу в кристалі. На відміну

---

<sup>5</sup>Проте, він, звичайно, розширюється після виходу з кристала – див., наприклад, [429].



від кутового розподілу заряджених частинок, який азимутально ізотропізується через скінченний час, після чого вже практично не еволюціонує, дифузія частинок в поперечних *просторових* напрямках триває необмежено. Щоб знайти відповідний розподіл, потрібно розв'язати рівняння конвективного руху для спільного розподілу швидкостей та координат.

Опис донат-розсіювання значно спрощується, якщо вважати поперечні координати розташування ланцюжків випадковими та рівномірно розподіленими. Це дозволяє описувати його статистично, за допомогою транспортного рівняння. Крім того, для опису поведінки функції розподілу  $f(\phi, \vec{r}_\perp, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\phi, \vec{r}, t)$  на великих проміжках часу можна використати наближення Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_\perp \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\perp} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad (3.45)$$

де  $D = \frac{nd}{2} v_\perp \int_{-\infty}^{\infty} db \phi^2(b)$  – кутова швидкість дифузії, пропорційна щільності ланцюжків  $nd$ , куту падіння на ланцюжок  $v_\perp$  та середньоквадратичному азимутальному куту розсіювання на кожному з них [145]. Відповідна початкова умова виражається як

$$f(\phi, \vec{r}_\perp, 0) = \delta(\phi) \delta(\vec{r}_\perp). \quad (3.46)$$

У декартових координатах Рівн. (3.45) набуває вигляду<sup>6</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\perp \cos \phi \frac{\partial f}{\partial x} + v_\perp \sin \phi \frac{\partial f}{\partial y} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad (3.47)$$

де  $x$  – координата, яка є поперечною до ланцюжків та лежить у площині, що містить вектор початкової швидкості частинки, а  $y$  – координата, поперечна як до ланцюжків, так і до початкової швидкості частинки. Рівняння, аналогічне (3.47), раніше розглядалося у задачі про пропускання сигналу оптичного лазера з фазовим шумом крізь полосовий частотний фільтр, і його формальний розв'язок був даний у роботі [430]. Тут ми застосуємо

<sup>6</sup>Корисним є також аналіз Рівн. (3.45) у циліндричних та у голоморфних координатах, але у поєднанні з початковою умовою (3.46) зручніше використовувати декартові координати.

його до донат-розсіювання. При цьому основну увагу буде приділено просторовій частині розподілу на великих часових інтервалах. Для розвитку фізичної інтуїції, втім, ми спершу викладемо простіший підхід, де розраховується еволюція лише найнижчих моментів кутових та координатних змінних.

**3.2.1. Кутовий розподіл.** Якщо не цікавитися координатним розподілом частинок, Рівн. (3.45) може бути проінтегровано за  $\vec{r}_\perp$ , що приводить до замкнутого рівняння в часткових похідних для чисто кутового розподілу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (3.48)$$

Найнижчі моменти відповідної функції розподілу можна знайти безпосередньо: спочатку помножимо Рівн. (3.48) на  $\cos \phi$  та проінтегруємо за всіма  $\phi$ . Для  $\langle \cos \phi \rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \cos \phi f(\phi, z)$  отримуємо замкнене рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \cos \phi \rangle = -D \langle \cos \phi \rangle. \quad (3.49a)$$

Те ж саме зробимо з рівнянням (3.46), отримуючи початкову умову

$$\langle \cos \phi \rangle |_{t=0} = \cos 0 = 1. \quad (3.49b)$$

Витікаюча задача Коші для  $\langle \cos \phi \rangle$  розв'язується як

$$\langle \cos \phi \rangle = e^{-Dt}. \quad (3.50)$$

Це означає, що

$$\langle [\vec{v}_\perp(t) - \vec{v}_\perp(0)]^2 \rangle = 2v_\perp^2 \langle 1 - \cos \phi \rangle = 2v_\perp^2 (1 - e^{-Dt}) \quad (3.51)$$

прямує до граничного значення  $2v_\perp^2$ . Зокрема, видно, що  $1/D$  відіграє роль середнього часу кутової ізотропізації.

Вищі моменти  $\cos \phi$  розпадаються швидше:

$$\langle \cos 2\phi \rangle = e^{-4Dt}, \quad (3.52)$$

$$\langle \cos^2 \phi \rangle = \frac{1}{2} (1 + e^{-4Dt}), \quad (3.53)$$

і т. д.

Неважко виразити і повний розв'язок рівняння (3.48), який задовольняє початковій умові та вимозі періодичності:

$$f(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi - Dtn^2} = \frac{1}{2\pi} \vartheta_3(\phi/2, e^{-Dt}), \quad (3.54)$$

де  $\vartheta_3$  – одна з еліптичних тета-функцій [417, 418].

При малих  $Dt$  головний внесок вносять великі  $n$ , а вимога періодичності ще не є важливою. Тоді, замінивши підсумовування за  $n$  інтегруванням, ми знаходимо, що  $f(\phi)$  апроксимується простим гауссіаном:

$$f(\phi, t) \underset{Dt \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{in\phi - Dtn^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{\phi^2}{4Dt}},$$

тоді як вираз (3.51) є близьким до лінійного закону.

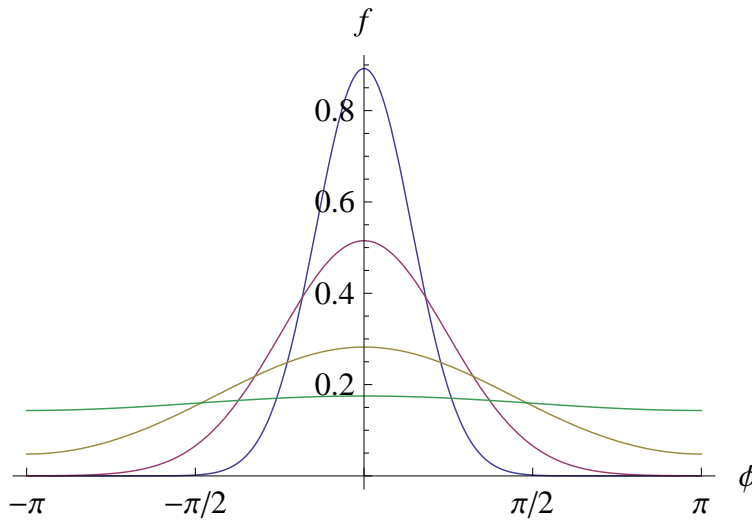


Рис. 3.6. Еволюція кутового розподілу донат-розсіяних частинок, відповідно до рівняння (3.54). Найвужчий розподіл відповідає  $Dt = 0.1$ , наступні: 0.3, 1, 3. В останньому випадку розподіл вже майже повністю ізотропний.

У протилежному випадку великих  $Dt$  доданки з  $|n| \geq 1$  у сумі (3.54) експоненційно убивають, тому розподіл наближається до рівномірного (див. Рис. 3.6). З урахуванням найповільнішої експоненційної поправки, можна

записати

$$f(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} e^{-Dt} \cos \phi + \mathcal{O}(e^{-4Dt}).$$

Зазначимо, що така асимптотика з деяким декрементом  $D$  може існувати навіть для розв'язку кінетичного рівняння за межами дифузійного наближення, хоча у вищих порядках значення показників можуть дещо відрізнятися (див. [300, 428]).

**3.2.2. Розподіл по  $x$ .** Переходячи до вивчення просторових розподілів, розглянемо спершу розподіл лише по  $x$ :  $f(\phi, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz dy f(\phi, \vec{r}, t)$ . Він задовольняє замкнутому транспортному рівнянню

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\perp} \cos \phi \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (3.55)$$

і початковій умові

$$f(\phi, x, 0) = \delta(\phi) \delta(x), \quad (3.56)$$

яка отримується інтегруванням рівнянь (3.46), (3.47) за  $y$ .

**3.2.2.1. Моменти.** Щоб отримати уявлення про поведінку розв'язку рівнянь (3.55), (3.56), дослідимо еволюцію його найнижчих моментів. Помноживши рівняння (3.55) на  $x$  та інтегруючи по всій осі  $x$  та по повному інтервалу  $\phi$ , приводимо його до

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle = v_{\perp} \langle \cos \phi \rangle, \quad \langle x \rangle|_{t=0} = 0.$$

Використовуючи тут відому часову залежність (3.50) для  $\langle \cos \phi \rangle$ , отримуємо замкнуте звичайне диференціальне рівняння, яке тривіально інтегрується:

$$\langle x \rangle = \frac{v_{\perp}}{D} (1 - e^{-Dt}). \quad (3.57)$$

Далі розглянемо корелятор  $\langle x \cos \phi \rangle$ , що описується рівняннями

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x \cos \phi \rangle = v_{\perp} \langle \cos^2 \phi \rangle - D \langle x \cos \phi \rangle, \quad \langle x \cos \phi \rangle|_{t=0} = 0.$$

Підставляючи сюди  $\langle \cos^2 \phi \rangle$  з Рівн. (3.53), отримуємо замкнуте рівняння для  $\langle x \cos \phi \rangle$ , яке має розв'язок

$$\langle x \cos \phi \rangle = \frac{v_{\perp}}{2} \int_0^t dt' e^{D(t'-t)} \left( 1 + e^{-4Dt'} \right) = \frac{v_{\perp}}{2D} \left( 1 - \frac{2}{3} e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-4Dt} \right). \quad (3.58)$$

Нарешті, знайдемо  $\langle x^2 \rangle$  з

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle = 2v_{\perp} \langle x \cos \phi \rangle, \quad \langle x^2 \rangle|_{t=0} = 0.$$

Підстановка сюди  $\langle x \cos \phi \rangle$  з Рівн. (3.58) та інтегрування за часом дають

$$\langle x^2 \rangle = 2v_{\perp} \int_0^t dt' \langle x \cos \phi \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{D^2} \left( Dt - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} e^{-Dt} + \frac{1}{12} e^{-4Dt} \right). \quad (3.59)$$

При малих  $t$  звідси отримуємо  $\langle x^2 \rangle = v_{\perp}^2 t^2 + \mathcal{O}(t^3)$ , що відповідає балістичному руху вздовж поперечного напрямку падіння на ланцюжки. При великих  $t$  дисперсія  $\langle x^2 \rangle$  зростає лише лінійно, що характерно для нормального дифузійного процесу. Проте, суттєвим є від'ємний зсув у цьому лінійному законі:

$$\langle x^2 \rangle \underset{Dt \gg 1}{\simeq} \frac{v_{\perp}^2}{D} \left( t - \frac{3}{4D} \right).$$

Він означає затримку початку просторового дифузійного режиму. Відповідна центральна дисперсія при малих  $t$  починається з порядку  $t^4$ :

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{3} v_{\perp}^2 D^2 t^4 + \mathcal{O}(v_{\perp}^2 D^3 t^5).$$

Може бути повчальним також обчислити  $\langle x^3 \rangle$ , що завжди є позитивною величиною.

**3.2.2.2. Повний розв'язок.** Враховуючи трансляційну інваріантність по  $x$ , повний розв'язок рівняння (3.55) можна представити у вигляді Фур'є-інтеграла

$$f(\phi, x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x e^{iq_x x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(q_x)t} \tilde{f}_n(\phi, q_x), \quad (3.60)$$

в підінтегральному виразі якого коефіцієнтні функції  $\tilde{f}_n(\phi, q_x)$  задовольняють незалежним звичайним диференціальним рівнянням

$$-\frac{\lambda_n}{D} \tilde{f}_n + i \frac{v_{\perp} q_x}{D} \cos \phi \tilde{f}_n = \frac{\partial^2 \tilde{f}_n}{\partial \phi^2}. \quad (3.61)$$

Заміною  $\phi = 2s$  ці рівняння приводяться до рівняння Матьє<sup>7</sup> [417, 431, 432]

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + (a - 2q \cos 2s) f = 0$$

з уявним параметром  $q = 2iv_{\perp} q_x / D$ . Тому парні [для відповідності парному початковому стану (3.56)] періодичні розв'язки є функціями Матьє типу

$$\tilde{f}_n = A_n \text{ce}_{2n} \left( \frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp} q_x}{D} \right), \quad (3.62)$$

в той час як  $\lambda_n$  може приймати лише послідовність дискретних значень:

$$\lambda_n = \frac{D}{4} a_{2n} \left( \frac{2iv_{\perp} q_x}{D} \right), \quad (3.63)$$

де  $a_{2n}$  – характеристичні значення рівняння Матьє. Зауважимо, що характеристичні значення з уявним аргументом самі є комплексними числами, і виявляють доволі складну поведінку. Вони мають точки розгалуження при  $\frac{2v_{\perp} q_x}{D} = \pm 1.47, \pm 16.47, \dots$  (див., наприклад, графіки в [433]).

Коефіцієнти  $A_n$  в Рівн. (3.62) можна визначити з початкової умови (3.56) шляхом перетворення Фур'є:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ce}_{2n} \left( \frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp} q_x}{D} \right) = \delta(\phi). \quad (3.64)$$

Для цього використовується ортогональність функцій  $\text{ce}_{2n}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \text{ce}_{2m} \left( \frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp} q_x}{D} \right) \text{ce}_{2n} \left( \frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp} q_x}{D} \right) = 0 \quad \text{for } m \neq n, \quad (3.65)$$

яка витікає з диференціального рівняння другого порядку (3.61). Ортогональність (3.65) виконується також і для функцій Матьє з комплексним параметром, в той час як комплексно-спряжені функції  $\text{ce}_{2m}$  та

<sup>7</sup>Рівняння Матьє у фізиці проходження швидких заряджених частинок крізь кристали використовувалось також іншими авторами, у застосуванні до інших задач, таких як квантове площинне каналювання електронів [206] та резонансне деканалювання на «струнах струн» [427, 428]. Проте, у згаданих випадках, на відміну від нашого, параметр  $q$  у рівнянні Матьє був дійсним.

$ce_{2n}^*$ , взагалі кажучи, не є взаємно ортогональними. Отже, тут ми маємо справу з комплексною нормалізацією базисних функцій, в якій множник  $\int_{-\pi}^{\pi} d\phi ce_{2n}^2\left(\frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)$  може бути комплексним числом (залежним від  $q_x$ ). Хоча він за визначенням міг би бути встановленим рівним незалежній від  $q_x$  константі, це не є загально прийнятим. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (3.64) записується як

$$A_n = \frac{ce_{2n}\left(0, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)}{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi ce_{2n}^2\left(\frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)}.$$

Підставляючи це та (3.63) до Рівн. (3.60), отримуємо

$$f(\phi, x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x e^{iq_x x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{Dt}{4} a_{2n}\left(\frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)} \frac{ce_{2n}\left(0, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right) ce_{2n}\left(\frac{\phi}{2}, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)}{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi' ce_{2n}^2\left(\frac{\phi'}{2}, \frac{2iv_{\perp}q_x}{D}\right)}. \quad (3.66)$$

Можна перевірити, що інтегрування цього виразу за  $x$  (тобто взяття підінтегрального виразу інтеграла Фур'є при  $q_x = 0$ ) приводить до спрощень  $a_{2n}(0) \equiv 4n^2$ ,  $ce_{2n}\left(\frac{\phi}{2}, 0\right) \equiv \cos n\phi$ , після чого ми повертаємося до рівняння (3.54).

Суто просторовий розподіл отримується інтегруванням формули (3.66) за всіма азимутами  $\phi$ , що дає

$$f(x, t) = \frac{D}{4\pi v_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x \frac{Dx}{2v_{\perp}}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{Dt}{4} a_{2n}(iQ_x)} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi ce_{2n}\left(\frac{\phi}{2}, iQ_x\right)}{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi ce_{2n}^2\left(\frac{\phi}{2}, iQ_x\right)} ce_{2n}(0, iQ_x). \quad (3.67)$$

Окремі доданки під інтегралом в (3.67) є сингулярними функціями  $Q_x$ , але їх сума є регулярною. Наприклад, сингулярності при  $Q_x = \pm 1.47$  скорочуються між доданками з  $n = 0$  та  $n = 1$ , оскільки сума  $a_0(iQ_x) + a_2(iQ_x)$  є регулярною поблизу  $Q_x = \pm 1.47$ , тощо.

З міркувань причинності можна очікувати, що обидва вирази (3.66) та (3.67) обертаються в нуль при  $|x| > v_{\perp}t$ . Це дійсно так, і завдяки цьому в інтервалі  $-v_{\perp}t < x < v_{\perp}t$  вони можуть бути розкладені в ряд Фур'є, а отже, інтеграл  $Q_x$  зводиться до суми по дискретних значеннях [430]. Але

ми не будемо тут застосовувати цей штучний, хоча і чисельно ефективний підхід.

З отриманого загального розв'язку видно, що, на відміну від багаторазового розсіяння на малі кути в аморфному середовищі, при донат-розсіянні просторовий розподіл, взагалі кажучи, не зводиться до масштабно-інваріантної функції, оскільки тут наявний певний масштаб – час ізотропізації. Втім, просторовий розв'язок повинен бути масштабно інваріантним задовго до, а також через великий час після кутової ізотропізації.

Для малих  $Dt$  в представленні (3.66) домінують великі  $n$  та  $Q_x$ , завдяки чому базисні функції набувають форми наближення ВКБ:

$$\begin{aligned} \text{ce}_{2n} \left( \frac{\phi}{2}, iQ_x \right) &\simeq \text{ce}_{2n} (0, iQ_x) \cos \int_0^{\phi/2} ds \sqrt{4n^2 - 2iQ_x \cos 2s} \\ &\equiv \text{ce}_{2n} (0, iQ_x) \cos \left[ \sqrt{4n^2 - 2iQ_x} E \left( \frac{\phi}{2}, \frac{1}{\sqrt{1/2 + in^2/Q_x}} \right) \right], \end{aligned}$$

де  $E$  – еліптичний інтеграл 2-го роду [417]. Оскільки функція розподілу сконцентрована в області малих  $\phi$ , в рівнянні (3.47) можна застосувати наближення  $\sin \phi \approx \phi$ ,  $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$ . При цьому ми отримуємо вузький розподіл, подібний до розподілу Янга в аморфному середовищі, розглянутому в Розділі 2.3.2.

Для проміжних  $Dt$  аналітичне обчислення суми (3.67) є найскладнішим, тому може бути простіше обчислити найнижчі моменти, як було зроблено в Розділі 3.2.2.1.

**3.2.2.3. Гауссівський ліміт просторової еволюції.** Формальний розв'язок (3.66) дозволяє дослідити особливо цікавий з практичного погляду ліміт  $Dt \rightarrow \infty$ . Оскільки числа  $\Re a_{2n}$  є позитивними і швидко зростають з  $n$ , при  $Dt/4 \gtrsim 1$  лише перший доданок суми є істотним. Більше того, типовими  $Q_x$  є ті, для яких  $\Re a_0$  є найменшим. Це околиця точки  $Q_x = 0$ , де

$$a_0(iQ_x) \underset{Q_x \rightarrow 0}{\simeq} \frac{Q_x^2}{2} + \mathcal{O}(Q_x^4).$$



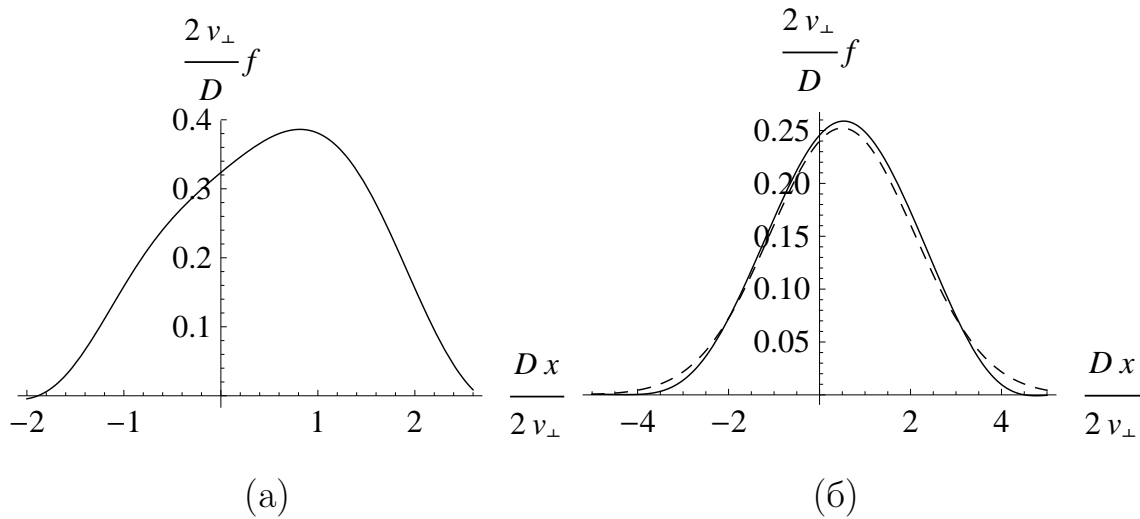


Рис. 3.7. Розподіл по  $x$  частинок під час донат-розсіяння: а). для  $Dt = 5$ ; б). для  $Dt = 10$ . Суцільні криві обчислені відповідно до Рівн. (3.67). Штрихова крива – апроксимація гауссіаном (3.69). Розподіл по  $y$  є схожим, але парним.

Нульова функція Матґе в цьому наближенні спрощується до

$$ce_0 \left( \frac{\phi}{2}, iQ_x \right)_{Q_x \rightarrow 0} \simeq \text{const} \left[ 1 - \frac{iQ_x}{2} \cos \phi + \mathcal{O}(Q_x^2) \right],$$

підстановка чого до Рівн. (3.66) дає

$$\begin{aligned} f(\phi, x, t) &\underset{Dt \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{D}{8\pi^2 v_\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x \frac{Dx}{2v_\perp}} e^{-\frac{DtQ_x^2}{8}} \left[ 1 - \frac{iQ_x}{2} (1 + \cos \phi) \right] \\ &= \frac{D}{8\pi^2 v_\perp} \left[ 1 - (1 + \cos \phi) \frac{v_\perp}{D} \frac{\partial}{\partial x} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x \frac{Dx}{2v_\perp}} e^{-\frac{DtQ_x^2}{8}} \\ &\underset{Dt \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_\perp} \sqrt{\frac{D}{t}} e^{-\frac{D}{2t} \left( \frac{x}{v_\perp} - \frac{1 + \cos \phi}{D} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Це – гауссіан, зміщений вперед по  $x$  (на величину, меншу від своєї ширини).

Відповідний суто координатний розподіл має вигляд (див. Рис. 3.7)

$$\begin{aligned} f(x, t) &\underset{Dt \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{D}{4\pi v_\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x \frac{Dx}{2v_\perp}} e^{-\frac{DtQ_x^2}{8}} \left( 1 - \frac{iQ_x}{2} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{v_\perp}{D} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{D}{4\pi v_\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x \frac{Dx}{2v_\perp}} e^{-\frac{DtQ_x^2}{8}} \\ &\simeq \frac{1}{v_\perp} \sqrt{\frac{D}{2\pi t}} e^{-\frac{D}{2t} \left( \frac{x}{v_\perp} - \frac{1}{D} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Невеликий «реліктовий» зсув  $\langle x \rangle = v_{\perp}/D$ , отриманий раніше в рівнянні (3.57) при  $Dt \rightarrow \infty$  – це середня відстань, пройдена пучком вздовж поперечного напрямку падіння до повної ізотропізації. Для  $f(\phi, x, t)$  зсув зникає при  $\phi = \pi$ .

Іншою особливістю Рівн. (3.69) є те, що  $D$  з'являється в чисельнику показника. Отже, для заданого  $t$ , чим більшим є  $D$ , тим *вужчим* є просторовий розподіл, завдяки тому, що балістичне розширення сильніше пригнічується. Це нагадує квантовий парадокс Зенона [434], в якому чим частіше проводиться вимірювання положення квантової частинки, тим повільніше розширюється її хвильовий пакет. Нарешті, слід відзначити, що розподіл координат розширюється з часом пропорційно до  $t^{1/2}$ , а не  $t^{3/2}$ , як при багаторазовому розсіюванні в аморфній речовині. Таким чином, кутова дифузія *затримує* просторову дифузію. Ця властивість є підґрунтям стохастичного механізму повороту пучків зігнутих кристалом (див. Розд. 1.5.7.3).

Форми точних розподілів (3.67) та їх порівняння з гауссовим розподілом (3.69) представлені на Рис. 3.7. Можна відзначити, що апроксимація гауссіаном стає справедливою лише після ізотропізації кутового розподілу (яка досягається при  $Dt \sim 1$ ). Це природно, оскільки для досягнення гауссової форми після ізотропізації повинно пройти кілька повних азимутальних обертів. Відповідна просторова дифузія може розглядатися також як аналог блукання Пірсона [435].

### 3.3. Площинне каналювання та деканалювання

У випадку площинної орієнтації кристала високоенергетична заряджена частинка, що падає на кристал, може або послідовно перетинати багато атомних площин, або коливатися між двома сусідніми площинами, якщо кут падіння частинки настільки малий, що частинка не може проникнути крізь площинний потенціальний бар'єр. Подібний коливальний рух називається каналюванням [306]. Він не зводиться до задач розсіяння, розглянутих у попередніх розділах, хоча поняття домінуючого неперервного

потенціалу є цілком придатним і тут.

В достатньо товстому кристалі каналювання руйнується дією некогерентного багаторазового розсіювання всередині кристала. Проте, останнє слабшає зі зростанням енергії частинки, тому каналювання може тривати доволі довго. Це особливо стосується позитивно заряджених частинок (протонів або позитронів), оскільки відштовхуючись від ядер атомів, які знаходяться поблизу кристалічних площин, вони можуть рухатися, не наближаючись до них надто близько і взаємодіючи переважно з усередненим неперервним потенціалом. У цьому випадку деканалювання протікає як поступове статистичне збільшення амплітуди коливань внаслідок некогерентного багаторазового розсіювання на міжплощинних валентних електронах, і, врешті решт, досягнення її критичного значення, де частинка вибивається (див. Розд. 1.5.3). Що ж стосується негативно заряджених частинок, то вони завжди інтенсивно розсіюються на атомних ядрах, розташованих у центрі потенціальної ями неперервного потенціалу, тому деканалювання для них проходить набагато швидше (див. Рис. 1.13). У цьому розділі ми обмежимося розглядом процесу каналювання та деканалювання позитивно заряджених частинок.

Оскільки деканалювання є різновидом процесів розпаду зв'язаного стану, для нього необхідно знати початковий розподіл каналюваних частинок. Він залежить від умов падіння частинок на кристал, для яких можна виділити три основних варіанти (див. Рис. 3.8). Випадок А є характерним для надвисоких енергій, коли колімація початкового пучка до кутів, значно менших за критичний кут каналювання [325]

$$\theta_c = \sqrt{\frac{2V_0}{E}}$$

є проблематичною і не вимагається. Випадок В більше властивий для помірно високих енергій, коли критичний кут каналювання є достатньо значним, і пучок цілком можливо колімувати до набагато менших кутів розходження. Випадок С є типовим для досліджень поверхонь кристалів за

допомогою пучків заряджених частинок, і, як правило, практикується з нерелятивістськими електронами або іонами [206, 349]. Ми зосередимося на розгляді геометрій високої енергії  $A$  і  $B$ . При цьому частинки з початкового пучка відразу потрапляють до каналу, але в залежності від поперечної енергії можуть бути як під-, так і надбар'єрними. На щастя, їх можна розрізнити. На виході з кристала каналювані частинки можуть давати піки в кутових розподілах частинок, або аномальні пробіги, тощо. Їх також можна спостерігати безпосередньо за допомогою детекторів втрат енергії [316], або шляхом кутової розгортки в зігнутих кристалах, з якої можна визначити час вибування частинки з режиму каналювання [320, 323, 324] (див. Розд. 1.5.3). Таким чином, підбар'єрні частинки можна відділити від надбар'єрних і досліджувати окремо.

Початковий розподіл частинок, захоплених до режиму каналювання в певному каналі з міжплощинним неперервним потенціалом<sup>8</sup>  $V(x)$ , можна описати дещо ідеалізованим виразом:

$$\frac{dN_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} = n_0(v_{\perp 0}) \vartheta(d/2 - |x_0|) \vartheta[V(d/2) - E_{\perp 0}], \quad (3.70)$$

де  $\vartheta$  – функція Хевісайда, і

$$E_{\perp 0} = E v_{0\perp}^2 / 2 + V(x_0).$$

Параметр  $d$  (границя області акцептансу в стан каналювання, яка для спрощення вибирається різкою) ефективно може бути дещо меншим від міжплощинної відстані, враховуючи ненульову ширину області ядерного розсіювання. Остання залежить від температури кристала, але відмінна від нуля навіть при нульовій температурі, внаслідок нульових коливань (див. Додаток Б).<sup>9</sup>

Внаслідок деканалювання, кількість частинок, що задовольняють умовам каналювання  $E_{\perp} < V(x_0)$ , монотонно зменшується. Тому природно

<sup>8</sup>Параметризації міжплощинних потенціалів, в тому числі з урахуванням залежності від температури кристала, див. в [109, 292, 306] та в Додатку Б.

<sup>9</sup>Втім, залежність деканалювання від температури кристала для площинної орієнтації є значно меншою, ніж для аксіальної [306].

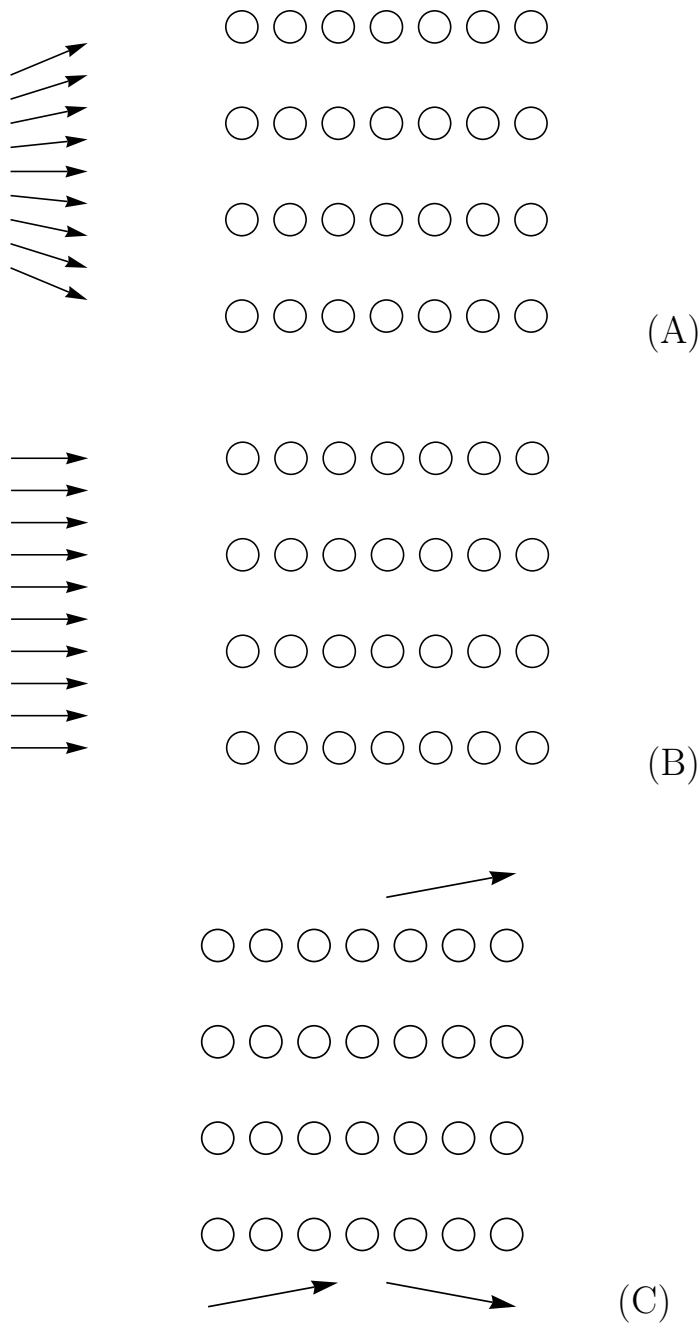


Рис. 3.8. Типи початкових пучків, які застосовуються в експериментах з каналювання. (А) Слабко колімований початковий пучок (з кутом колімації більшим за критичний кут каналювання), який спрямовується в торець кристала. (В) Ідеально колімований початковий пучок, що падає в торець кристала точно вздовж атомних площин. (С) Початковий пучок, який падає під невеликим кутом до бокової поверхні площинно орієнтованого кристала.

характеризувати її диференціальним розподілом ймовірності залишатися в каналі, початкове значення якого дорівнює

$$f(x_0, v_{\perp 0}, 0) = \frac{dw_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} = \frac{1}{N_{\text{ch}}} \frac{dN_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}}, \quad (3.71)$$

де

$$N_{\text{ch}} = \int_{-d/2}^{d/2} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} \frac{dN_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}}.$$

З причин, які стануть зрозумілими нижче, часто достатньо звести розподіл (3.71) до початкового розподілу по поперечній енергії:

$$\begin{aligned} f(E_{\perp 0}, 0) &= \frac{dw_{\text{ch}}}{dE_{\perp 0}} \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} \frac{dw_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} \delta \left[ E_{\perp 0} - \frac{Ev_{\perp 0}^2}{2} - V(x_0) \right] \end{aligned} \quad (3.72a)$$

$$= \int_{-\sqrt{2E_{\perp 0}/E}}^{\sqrt{2E_{\perp 0}/E}} dv_{\perp 0} \frac{2n_0(v_{\perp 0})}{N_{\text{ch}} |V'(x_0)|_{V(x_0)=E_{\perp 0}-Ev_{\perp 0}^2/2}}. \quad (3.72b)$$

У випадку А, підставляючи в (3.72b)  $n_0(v_{\perp 0}) = \text{const}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} f(E_{\perp}, 0) &= \frac{n_0}{N_{\text{ch}}} \int_{-x_{0\text{max}}(E_{\perp 0})}^{x_{0\text{max}}(E_{\perp 0})} dx_0 \sqrt{\frac{2}{E [E_{\perp 0} - V(x_0)]}} \\ &= \frac{T(E_{\perp 0})}{\int_0^{V(d/2)} dE'_{\perp 0} T(E'_{\perp 0})}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Природно, що чим довшим є період каналювання  $T(E_{\perp 0}) = \int_{-x_{0\text{max}}}^{x_{0\text{max}}} dx_0 \sqrt{2E/[E_{\perp 0} - V(x_0)]}$ , де  $\pm x_{0\text{max}}(E_{\perp 0})$  – точки повороту в міжплощинному проміжку, для яких  $V(x_0) = E_{\perp 0}$ , тим більше частинок захоплюється вздовж відповідної траєкторії у фазовому просторі, якщо початковий розподіл частинок в цьому просторі був однорідним.

У випадку В, підставляючи в (3.72b)  $n_0(v_{\perp 0}) \propto \delta(v_{\perp 0})$ , отримуємо [292]

$$f(E_{\perp}, 0) = \frac{2\text{const}}{N_{\text{ch}} |V'[x_{0\text{max}}(E_{\perp 0})]|} = \frac{1}{d |V'[x_{0\text{max}}(E_{\perp 0})]|}. \quad (3.74)$$

Проміжні між А і В випадки можна описати, беручи  $n_0(v_{\perp 0})$ , наприклад, у формі гауссіану зі скінченною шириною.

Подальший аналіз еволюції функції розподілу ймовірності розподілу частинок вимагає розв'язку доволі складних транспортних рівнянь. Аналіз теорії деканалювання з різних позицій можна знайти у монографіях [109, 206, 292, 336, 428]. Проте, в ній все ще залишається низка невирішених принципових питань, яким ми приділимо головну увагу.

**3.3.1. Рівняння Фоккера-Планка для деканалювання.** В умовах домінування неперервного потенціалу  $V(x)$ , некогерентне багаторазове розсіювання можна врахувати, додавши до правої частини рівняння конвективного транспорту (Ліувілля) дифузійний член по поперечних швидкостях частинки:

$$\frac{\partial f}{\partial l} + v_{\perp} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = D(x) \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2}, \quad (3.75)$$

з коефіцієнтом  $D(x) > 0$ , який залежить від локальної щільності електронів та атомних ядер. За припущення, що розсіювання на атомних ядрах є набагато сильнішим, ніж на електронах, для опису каналювання позитивно заряджених частинок можна спрощено покласти  $D|_{|x|<d/2} = D_e \propto n_e \alpha^2 E^{-2} \log = \text{const}$  всередині міжплощинного інтервалу, позбавленого ядер (розсіювання на електронах, рівномірно розподілених зі щільністю  $n_e$ ), і  $D|_{x=\pm d/2} = \infty$  (миттєве деканалювання на кордоні області ядерного розсіювання).

Для пучків, що відносяться до типу С, задача насправді може розглядатися як стаціонарна, з  $\partial f / \partial l = 0$  в рівнянні (3.75). У цьому випадку початкові умови взагалі відсутні, і параметри початкового пучка мають натомість входити до граничної умови. Крім того, переходячи до змінної

$$x' = \int dx D(x),$$

можна описати навіть суттєво неоднорідний розподіл ядер атомів, по флюктуюючим положенням. Одночасний опис надбар'єрних та каналюваних частинок може бути застосований для дослідження процесу захоплення в стан деканалювання, але це питання виходить за межі даного розділу.

**3.3.1.1. Наближення статистичної рівноваги.** У наближенні відсутності зіткнень, коли  $D \rightarrow 0$ , загальний розв'язок рівняння (3.75) можна записати як  $f = f\left(E_{\perp}, \int^x \frac{dx'}{v_{\perp}(E_{\perp}, x')} - l\right)$ . Цей клас, зокрема, включає в себе розподіли  $f = f(E_{\perp})$ , що залежать лише від поперечної енергії  $E_{\perp} = Ev_{\perp}^2/2 + V(x)$ , яка є інтегралом руху. Оскільки початкова умова потрапляння частинки до каналу може виявитися залежною лише від  $E_{\perp}$ , як це має місце для геометрії А, або, зрештою, наближатися до такого розподілу [випадок В, див. Розділ 3.3.4.3], привабливо шукати розв'язок транспортного рівняння (3.75) як функцію лише  $E_{\perp}$ . Однак, при  $D \neq 0$ , в умовах одночасної присутності дифузійного члена по швидкості та залежного від координати потенціалу, подібний розв'язок можна побудувати лише приблизно.

Щоб розв'язати непросте диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних з коефіцієнтами, залежними від швидкості та координат, та швидкісно-селективними граничними умовами (див. нижче Розділ 3.3.4), можна скористатися тим фактом, що розсіювання на електронах набагато слабше від взаємодії з неперервним потенціалом. За цих умов частинка встигає зробити багато коливань в каналі, перш ніж її поперечна енергія помітно зміниться. У найпростішому випадку, коли міжплощинний потенціал є близьким до параболічного,  $V(x) = E\omega^2 x^2/2$ , можна використати симетрію гармонічного осцилятора у фазовому просторі, записавши

$$\frac{\partial^2}{\partial v_{\perp}^2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rightarrow \frac{E}{2} \Delta_{\sqrt{2E_{\perp}} \sqrt{2E_{\perp}}}, \quad (3.76)$$

де останній оператор (радіальна компонента лапласіана) діє лише на поперечну енергію. Це наближення часто називається «статистичною рівновагою» [299], або адіабатичною апроксимацією [109].<sup>10</sup> У теорії стохастичних диференціальних рівнянь воно називається також усередненням за періо-

<sup>10</sup>Її не слід розуміти в термодинамічному сенсі, оскільки середня поперечна енергія монотонно зростає з  $l$ , і до того ж кількість частинок у режимі каналювання не зберігається строго. Тому це наближення точніше було б назвати квазірівноважним, але термін «статистична рівновага» в даному випадку став загально прийнятим.



дом [432, 436, 437]. Проте, воно потребує обґрунтування, що буде предметом аналізу в даному підрозділі.

Оператор у правій частині рівняння (3.76) може бути явно записаний як

$$\Delta_{\sqrt{2E_{\perp}}\sqrt{2E_{\perp}}} = \frac{1}{2\sqrt{E_{\perp}}} \frac{\partial}{\partial\sqrt{E_{\perp}}} \sqrt{E_{\perp}} \frac{\partial}{\partial\sqrt{E_{\perp}}} \quad (3.77a)$$

$$\equiv 2 \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} E_{\perp} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}}, \quad (3.77b)$$

після чого диференціальне рівняння набуває вигляду:<sup>11</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial l} = ED \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} E_{\perp} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} f. \quad (3.79)$$

Рівняння (3.79) в необмеженому інтервалі  $E_{\perp}$  має рівноважний «термалізований» розв'язок

$$f(E_{\perp}, l) = \frac{1}{EDl} e^{-\frac{E_{\perp}}{EDl}}, \quad (3.80)$$

з  $EDl$ , що відіграє роль поперечної температури, і кількістю частинок, яка зберігається, тобто відсутнім деканалюванням.

Більш послідовне обґрунтування заміни (3.76) спирається на наступні аргументи.

**Віріальна теорема.** Якщо припустити, що  $f = f(E_{\perp})$ , підстановка такої форми в праву частину рівняння (3.75) дає

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2} = \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} f = E \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} f = E \left( \frac{\partial f}{\partial E_{\perp}} + E v_{\perp}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial E_{\perp}^2} \right).$$

Взагалі кажучи, за присутності  $x$ -залежної потенціальної енергії,  $E v_{\perp}^2$  залежить не лише від  $E_{\perp}$ . З фізичного погляду, це (подвоєна) поперечна кінетична енергія. Але середнє значення останньої за часом, згідно з віріальною теоремою, може виражатися через повну поперечну енергію. Зокрема,

<sup>11</sup>Рівн. (3.79) у застосуванні до площинного деканалювання вперше вивчалось Вахо [317], який отримав його за допомогою емпіричних аргументів з теорії [438]. Однак, слід зазначити, що рівняння [299, 438]

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} \left[ D(E_{\perp}) \frac{\partial f}{\partial E_{\perp}} \right], \quad (3.78)$$

з  $D(E_{\perp}) = \frac{1}{2} \langle \Delta E_{\perp}^2 / \Delta t \rangle$  було виведено для аксіального каналювання, тоді як для площинного каналювання воно є евристичним [206, 292]. Див. також [437].

якщо використати той факт, що неперервний потенціал кристала кремнію в орієнтації (110) близький до параболічного, а для гармонічного осцилятора відомо, що середня кінетична (поперечна) енергія дорівнює половині загальної (поперечної) енергії, то, замінюючи

$$E v_{\perp}^2 \rightarrow E \langle v_{\perp}^2 \rangle = E_{\perp}, \quad (3.81)$$

ми повертаємося до рівняння (3.79). Відзначимо, що (3.81) фактично є проявом симетрії гармонічного осцилятора у фазовому просторі, як і у Рівн. (3.76).

**Швидке усереднення за часом у загальному випадку.** Якщо неперервний потенціал є суттєво ангармонічним, і взагалі не описується ніякою однорідною (тобто чисто ступінною) функцією  $x$ , то віріальна теорема не застосовна. У цьому випадку треба спиратися на загальніший метод швидкого усереднення за часом, тобто усереднення за періодом швидких коливань [432, 436, 437]. Його застосування в рівнянні (3.81) дає

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_{\perp}^2(l) dl = \frac{\oint dx v_{\perp}(x)}{\oint dx v_{\perp}^{-1}(x)} = \left( E \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} \ln J \right)^{-1}, \quad (3.82)$$

де  $J = E \oint dx v_{\perp}(x)$  – адіабатичний інваріант, побудований з укороченої дії.

У випадку гармонічного осцилятора маємо  $J \propto E_{\perp}$ , але в загальному випадку це нелінійна функція поперечної енергії. На практиці може бути достатнім врахувати поправку наступного порядку:  $E \langle v_{\perp}^2 \rangle = E_{\perp} + \kappa E_{\perp}^2$ . Тоді замість оператора Бесселя виникає гіпергеометричний диференціальний оператор.

### 3.3.2. Деканалювання в наближенні статистичної рівноваги.

Для дослідження процесу деканалювання потрібно доповнити рівняння в часткових похідних (3.79) відповідними початковими та крайовими умовами. Початковий стан (3.72b) або (3.73) задається в елементарній комірниці. Що стосується крайової умови, найпростіше її можна змоделювати

як<sup>12</sup> [439]

$$f(E_{\perp}, l)|_{E_{\perp}=V_0} = 0. \quad (3.83)$$

Подібний тип крайових умов часто використовується в аналітичних дослідженнях процесів виходу з потенціальної ями (див., наприклад, [440]). Проаналізуємо тепер наслідки Рівн. (3.79) у поєднанні зі спрощеною крайовою умовою (3.83).

Загальний розв'язок можна виразити як розкладення за повним набором базисних функцій, які повинні бути пропорційними функціям Бесселя нульового порядку, оскільки (3.77) є радіальною частиною двовимірного лапласіана:

$$f(E_{\perp}, l) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(j_{0,n} \sqrt{E_{\perp}/V_0}) e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}. \quad (3.84)$$

[Експоненційний множник походить з рівняння (3.79).] Щоб задовольнити умові (3.83),  $j_{0,n}$  має бути  $n$ -им нулем функції  $J_0$ , значення якого приблизно дорівнює<sup>13</sup>

$$j_{0,n} \approx -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Константи  $a_n$  повинні визначатися із відповідності з початковим станом

$$f(E_{\perp}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(j_{0,n} \sqrt{E_{\perp}/V_0}).$$

Застосовуючи співвідношення ортогональності для циліндричних стоячих хвиль

$$\int_0^1 d\epsilon J_0(j_{0,m} \sqrt{\epsilon}) J_0(j_{0,n} \sqrt{\epsilon}) = \delta_{mn} J_1^2(j_{0,n}),$$

отримуємо

$$a_n = \frac{1}{J_1^2(j_{0,n}) V_0} \int_0^{V_0} dE_{\perp} f(E_{\perp}, 0) J_0(j_{0,n} \sqrt{E_{\perp}/V_0}). \quad (3.85)$$

<sup>12</sup>Тут  $V_0$ , взагалі кажучи, залежить від температури. Припущенням про різку межу області деканалювання ми замінюємо в цьому підрозділі детальні розрахунки некогерентного розсіювання на атомних ядрах, подібні до тих, що проводилися в Розд. 3.1.

<sup>13</sup>Точніша формула  $j_{0,n} \approx -\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{1}{\pi(4n-1)}$  свідчить, що поправка  $\frac{1}{\pi(4n-1)}$  є малою для всіх  $n \geq 1$ .

Найважливішою для практики буває повна кількість частинок, які лишаються в каналі. Її можна отримати, інтегруючи вираз (3.84) по допустимому фазовому простору:

$$w_{\text{ch}}(l) = \int_0^{V_0} dE_{\perp} f(E_{\perp}, l) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2V_0 J_1(j_{0,n})}{j_{0,n}} e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}. \quad (3.86)$$

Похідна від цієї величини (швидкість деканалювання) теж є важливою величиною, яка може бути отримана диференціюванням рівняння (3.86) по  $l$ , або безпосередньо з Рівн. (3.79):

$$\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} = ED \int_0^{V_0} dE_{\perp} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} E_{\perp} \frac{\partial}{\partial E_{\perp}} f = EDV_0 \left. \frac{\partial f}{\partial E_{\perp}} \right|_{E_{\perp}=V_0} \quad (3.87a)$$

$$= -\frac{ED}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n j_{0,n} J_1(j_{0,n}) e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}. \quad (3.87b)$$

Подібно до закону Фіка, вона пропорційна градієнту функції розподілу на границі, з тією відмінністю, що градієнт береться по фазових змінних (по  $E_{\perp}$ ). Звернемо увагу, що в рівняннях (3.86) і (3.87b) множники  $J_1(j_{0,n})$  мають різні знаки.

При  $EDl/V_0 \gg 1$  (насправді вже для  $EDl/V_0 > 0.4$  – див. Рис. 3.10 нижче), сума (3.86) визначається своїм першим доданком:

$$w_{\text{ch}}(l) \underset{EDl/V_0 \gg 1}{\simeq} a_n \frac{2V_0 J_1(j_{0,n})}{j_{0,n}} e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0} \propto e^{-l/l_d}. \quad (3.88)$$

Звідси робимо висновок, що довжина деканалювання дорівнює<sup>14</sup>

$$l_d = \frac{4V_0}{j_{0,1}^2 ED} \approx 0.7 \frac{V_0}{ED}. \quad (3.89)$$

Як зазначалося у Розділі 1, експоненційний закон деканалювання в цілому узгоджується з експериментальними даними. Відзначимо ще, що оскільки  $ED \sim E^{-2}$ , довжина  $l_d$  є пропорційною до енергії частинки, що теж якісно узгоджується з експериментами [320, 321, 323]. Втім, числове значення

<sup>14</sup>Також існують альтернативні визначення довжини деканалювання, не пов'язані прямо з експоненційним законом виходу з режиму каналювання (3.88), які з цієї причини відрізняються від нашого числовим множником.

коефіцієнта може бути недооцінено рівнянням (3.89), як буде показано в підрозділі 3.3.4.2.

Слід пам'ятати також про наявність експоненційно згасаючих внесків вищого порядку, кожен з яких характеризується своєю власною довжиною деканалювання. Найважливішою з них є друга довжина  $l_{d2}$ , коротша від  $l_d$  на множник

$$l_d/l_{d2} = (j_{0,2}/j_{0,1})^2 \approx (7/3)^2 \approx 5.$$

Тепер проілюструємо поведінку розв'язків для двох конкретних типів початкового стану: А і В.

### 3.3.2.1. Початковий пучок зі значним кутовим розходженням.

Якщо каналювані частинки при вльоті до кристала рівномірно заповнюють у фазовому просторі диск, що відповідає площинному каналюванню, то задача про еволюцію такого розподілу відповідно до параболічного диференціального рівняння (3.79) та однорідної крайової умови (3.83) аналогічна задачі про охолодження рівномірно нагрітого циліндра із замороженими краями [415].

Початковий поперечний розподіл по енергії для цього випадку легко отримати із загального рівняння (3.73). Оскільки для гармонічного осцилятора рух є ізохронним, період каналювання  $T$  не залежить від  $E_{\perp 0}$ , тому

$$f(E_{\perp}, 0) = \frac{1}{V_0} \Theta(V_0 - E_{\perp}). \quad (3.90)$$

Підставляючи це до Рівн. (3.85), отримуємо

$$a_n = \frac{1}{J_1^2(j_{0,n})V_0} \int_0^1 d\epsilon J_0(j_{0,n}\sqrt{\epsilon}) = \frac{2}{j_{0,n}J_1(j_{0,n})V_0}. \quad (3.91)$$

Зауважимо, що знаки  $a_n$  чергуються завдяки множнику  $J_1^{-1}(j_{0,n})$ . Еволюція відповідного розподілу по поперечній енергії з глибиною проникнення показана на Рис. 3.9а.

З рівняння (3.86) отримуємо імовірність каналювання

$$w_{\text{ch}}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{j_{0,n}^2} e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}, \quad (3.92)$$

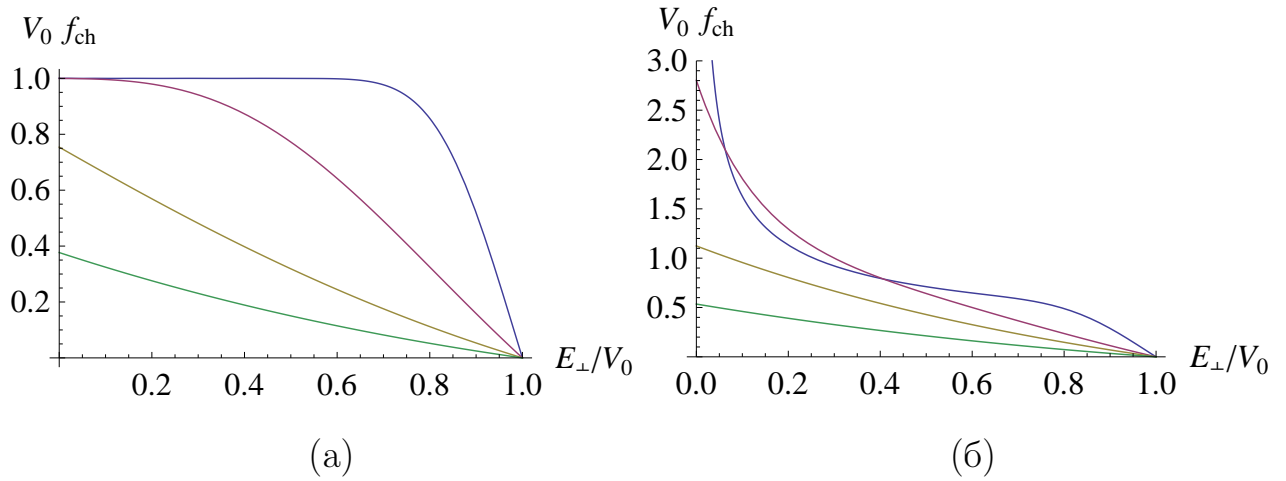


Рис. 3.9. а). Еволюція функції розподілу каналюваних частинок по поперечній енергії з глибиною проникнення, для початкового стану (3.90). Зверху вниз:  $EDl/V_0 = 0.01, 0.1, 0.5, 1$ . б). Те саме для початкового стану (3.95).

а з Рівн. (3.87b) – швидкість деканалювання:

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} = \frac{ED}{V_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}. \quad (3.93)$$

При  $EDl/V_0 \sim l/l_d \rightarrow 0$  швидкість (3.93) розбігається. Щоб визначити закон розбіжності, зазначимо, що при невеликих  $EDl/V_0$  сума в (3.93) визначається великими  $n$ , а доданки змінюються з  $n$  повільно. Це дозволяє замінити суму інтегралом, який легко обчислюється:

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \underset{l/l_d \rightarrow 0}{\simeq} \frac{ED}{V_0} \int_0^{\infty} dn e^{-\pi^2 n^2 EDl/4V_0} = \sqrt{\frac{ED}{\pi V_0 l}}. \quad (3.94)$$

Звідси видно, що в даному наближенні розподіл каналюваних частинок на початковій стадії має розбіжність типу квадратного кореня, тобто початок виходу з режиму каналювання є швидшим від будь-якої експоненти (див. Рис. 3.10) – порівн. з [323].

**3.3.2.2. Ідеально колімований та орієнтований початковий пучок.** Розглянемо тепер каналювані частинки, захоплені з пучка типу В. Їх початковий розподіл по поперечних енергіях для випадку гармонічного потенціалу легко визначити: В рівнянні (3.72b) маємо  $V \propto x^2 \propto E_{\perp 0}$ , а

отже,  $V' \propto x \propto \sqrt{E_{\perp 0}}$ . Таким чином,

$$f(E_{\perp}, 0) = \frac{1}{2\sqrt{V_0 E_{\perp}}} \Theta(V_0 - E_{\perp}). \quad (3.95)$$

Підставляючи це до рівняння (3.85), знаходимо коефіцієнти розкладення:

$$a_n = \frac{1}{J_1^2(j_{0,n})V_0} \int_0^1 d\sqrt{\epsilon} J_0(j_{0,n}\sqrt{\epsilon}) = \frac{\pi}{2V_0} \frac{\mathbf{H}_0(j_{0,n})}{J_1(j_{0,n})} > 0, \quad (3.96)$$

де  $\mathbf{H}_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sin zt$  – функція Струве [417]. Підставляючи далі (3.96) до (3.86), (3.87b), отримуємо

$$w_{\text{ch}}(l) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_0(j_{0,n})}{j_{0,n}} e^{-j_{0,n}^2 Dl/4V_0}, \quad (3.97)$$

і

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} = \frac{\pi ED}{4V_0} \sum_{n=1}^{\infty} j_{0,n} \mathbf{H}_0(j_{0,n}) e^{-j_{0,n}^2 EDl/4V_0}. \quad (3.98)$$

При  $EDl/V_0 \rightarrow 0$  сума (3.98) розбігається, але оскільки вона визначається великими  $n$ , її можна замінити інтегралом. При цьому

$$z \mathbf{H}_0(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} -\sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cos(z + \pi/4) + \frac{2}{\pi}, \quad (3.99)$$

і практично для всіх  $n \geq 1$ ,

$$\cos(j_{0,n} + \pi/4) \simeq (-1)^n.$$

Використовуючи це у Рівн. (3.98), знаходимо, що внесок першого члену (3.99) є скінченним, оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (-1)^{n-1} e^{-Tn^2}$  при  $T \rightarrow 0$  прямує до скінченної межі  $(1 - 2\sqrt{2}) \zeta(-1/2)$ , де  $\zeta$  – функція Рімана (незважаючи на те, що сума  $\sum_{n=1}^N \sqrt{n} (-1)^{n-1}$  є необмеженою при  $N \rightarrow \infty$ ). Що стосується внеску другого доданку, то він подібний до (3.94), але вдвічі менший:

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \underset{l/l_d \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ED}{\pi V_0 l}}. \quad (3.100)$$

Коефіцієнт  $1/2$  походить від дворазової різниці між граничними значеннями (3.90) та (3.95) при  $E_{\perp} = V_0 - 0$ .

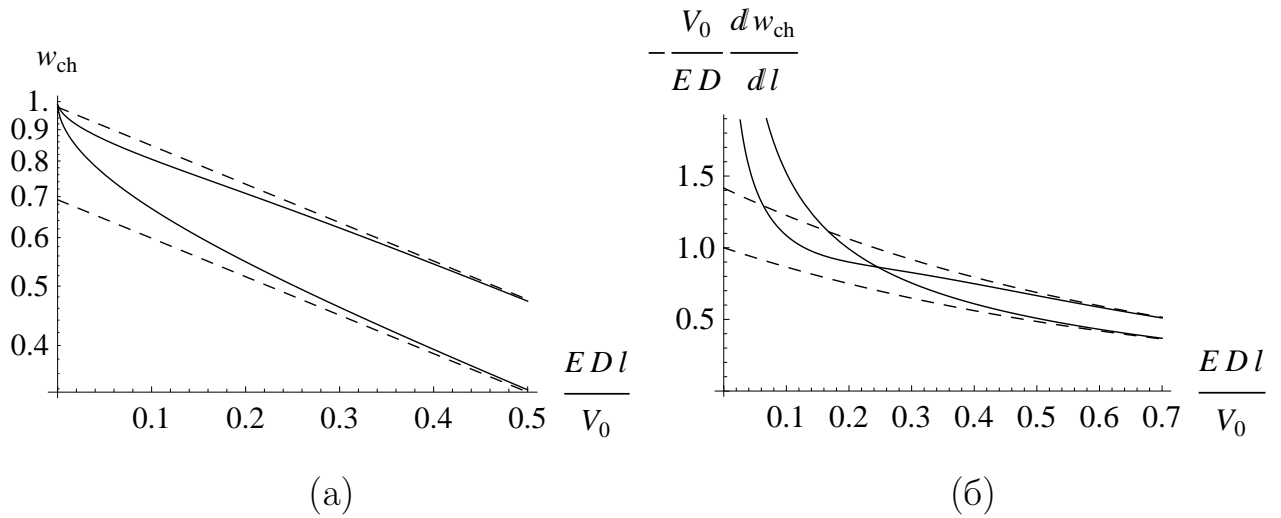


Рис. 3.10. а). Залежність імовірності виживання для каналюваних частинок від глибини проникнення. Верхні криві – для початкового стану (3.95). Нижні – для початкового стану (3.90). Суцільні криві – точні. Пунктирні – апроксимації великого часу. б). Те саме для швидкості деканалювання.

При великих  $l/l_d$  залежність  $w_{\text{ch}}(l)$  зводиться до найповільнішої експоненти в рівнянні (3.97),  $\text{const}e^{-l/l_d}$ , але наближається до неї знизу, оскільки член, наступний за головним, є від'ємним:  $\mathbf{H}_0(j_{0,2}) < 0$ . В цілому, на рисунку 3.10б помітна «друга хвиля» деканалювання, походження якої можна зрозуміти з Рис. 3.9б. На початковому етапі еволюції існують швидко деканалюючі частинки з  $E_{\perp}$ , близькою до  $V_0$ . Частинки, спочатку зосереджені при  $E_{\perp} \ll V_0$ , поступово збільшують свої поперечні енергії, і коли вони досягають  $V_0$ , швидкість деканалювання частково відновлюється.

**3.3.3. Броунівський рух гармонічного осцилятора.** Спробуємо тепер вийти за рамки квазірівноважного наближення. Спершу ми розглянемо рівняння Фоккера-Планка для гармонічного осцилятора з потенціалом  $V(x) = E\omega^2 x^2/2$ , де  $\omega^2 \propto E^{-1}$ , без крайових умов:

$$\frac{\partial f}{\partial l} + v_{\perp} \frac{\partial f}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = D \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2}. \quad (3.101)$$

Ця проблема має довгу історію [435,441]. Нами буде досліджений її загальний розв'язок і виведена повна функція Гріна разом із власними функціями



еволюції. Ці інгредієнти будуть використані в Розділі 3.3.4 для наближеного розв'язку крайової задачі.

**3.3.3.1. Загальний розв'язок.** Незважаючи на відсутність трансляційної інваріантності по  $x$  та  $v_{\perp}$ , загальний розв'язок Рівн. (3.101) можна шукати за допомогою перетворення Фур'є:

$$f = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{iqx+i\xi v_{\perp}} f(q, \xi, l),$$

оскільки воно знижує порядок рівняння:

$$\frac{\partial f}{\partial l} - q \frac{\partial f}{\partial \xi} + \omega^2 \xi \frac{\partial f}{\partial q} = -D\xi^2 f. \quad (3.102)$$

Останнє рівняння – лише 1-го порядку в часткових похідних. Щоб проінтегрувати його, зручно спершу розділити змінні в його лівій частині, переходячи від  $q, \xi$  до голоморфних динамічних змінних

$$\eta = q + i\omega\xi, \quad \bar{\eta} = q - i\omega\xi.$$

Це перетворює його на

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \ln f}{\partial l} - i\eta \frac{\partial \ln f}{\partial \eta} + i\bar{\eta} \frac{\partial \ln f}{\partial \bar{\eta}} = \frac{D}{4\omega^3} (\eta - \bar{\eta})^2 = \frac{D}{4\omega^3} (\eta^2 - 2\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}^2). \quad (3.103)$$

Тепер можна виразити загальний розв'язок неоднорідного рівняння як суму очевидного загального розв'язку однорідного рівняння,

$$\ln f_0 = \ln g(\eta e^{i\omega l}, \bar{\eta} e^{-i\omega l})$$

з довільною функцією  $g$ , та будь-якого розв'язку неоднорідного рівняння, наприклад,

$$\begin{aligned} \ln f_1 &= \frac{D}{4\omega^3} \left( i \int d\eta \eta - 2\omega l \eta \bar{\eta} - i \int d\bar{\eta} \bar{\eta} \right) + \text{const} \\ &= -\frac{D}{2\omega^2} q\xi - \frac{Dl}{2\omega^2} (q^2 + \omega^2 \xi^2) + \text{const}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Комбінуючи їх, отримуємо

$$f(q, \xi, l) = e^{\ln f_0 + \ln f_1} = g(\eta e^{i\omega l}, \bar{\eta} e^{-i\omega l}) e^{-\frac{D}{2\omega^2} q\xi - \frac{Dl}{2\omega^2} (q^2 + \omega^2 \xi^2)}.$$

Здійснюючи зворотний поворот у площині параметрів  $q, \omega\xi$  на кут  $\omega l$ , тобто переходячи до нових змінних

$$\eta' = \eta e^{i\omega l} = q' + i\xi', \quad \bar{\eta}' = \bar{\eta} e^{-i\omega l} = q' - i\xi',$$

що відповідає

$$q = q' \cos \omega l + \omega \xi' \sin \omega l, \quad \xi = \xi' \cos \omega l - \frac{q'}{\omega} \sin \omega l,$$

можна позбутися ще й залежності від  $l$  в аргументах  $g$ :

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dq d\xi e^{iqx+i\xi v} g(\eta e^{i\omega l}, \bar{\eta} e^{-i\omega l}) e^{-\frac{D}{2}q\xi - \frac{Dl}{2}(q^2 + \omega^2 \xi^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dq' d\xi' e^{i(q' \cos \omega l + \omega \xi' \sin \omega l)x + i(\xi' \cos \omega l - \frac{q'}{\omega} \sin \omega l)v_{\perp}} \\ &\quad \times g(q', \xi') e^{-\frac{D}{2\omega^2}(q' \cos \omega l + \omega \xi' \sin \omega l)(\xi' \cos \omega l - \frac{q'}{\omega} \sin \omega l) - \frac{Dl}{2\omega^2}(q'^2 + \omega^2 \xi'^2)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Таким чином, ми виразили  $f$  як фіксовану суперпозицію парціальних плоских хвиль. [Легко перевірити, що підінтегральний вираз у Рівн. (3.105) задовольняє диференціальному рівнянню (3.101) без необхідності інтегрування по частинах.] Зі зростанням  $l$ , ці хвилі обертаються по колу навколо початку координат і згасають. Швидкість загасання пропорційна квадрату хвильового вектора, але існує й залежність від його напрямку  $\psi$ .

Нарешті, переходячи до циліндричних координат

$$\begin{aligned} \omega x &= \sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \cos \varphi, & v_{\perp} &= \sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \sin \varphi, \\ q' &= \sigma \cos \psi, & \omega \xi' &= \sigma \sin \psi, \end{aligned} \quad (3.106)$$

можна придати розв'язку простіший вигляд:

$$f = \frac{1}{(2\pi)^2 \omega} \int_0^{\infty} d\sigma \sigma \int_{-\pi}^{\pi} d\psi g(\sigma, \psi) e^{i\sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \frac{\sigma}{\omega} \cos(\psi - \varphi - \omega l) - \frac{D\sigma^2}{2\omega^2} [l + \frac{\sin 2(\psi - \omega l)}{2\omega}]}. \quad (3.107)$$

Щоб зрозуміти властивості еволюції при зростанні  $l$ , розглянемо два граничних випадки.

При  $\omega l \ll 1$  розкладаємо залежну від  $l$  експоненту в (3.105) в ряд за ступенями  $\omega l$ :

$$\frac{1}{\omega^2} (q' \cos \omega l + \omega \xi' \sin \omega l) \left( \xi' \cos \omega l - \frac{q'}{\omega} \sin \omega l \right) + \frac{l}{\omega^2} (q'^2 + \omega^2 \xi'^2)$$

$$= \frac{q'\xi'}{\omega^2} - \frac{2\sin^2\omega l}{\omega^2} q'\xi' + \frac{q'^2}{\omega^2} \left( l - \frac{\sin 2\omega l}{2\omega} \right) + \xi'^2 \left( l + \frac{\sin 2\omega l}{2\omega} \right) \quad (3.108a)$$

$$= \frac{q'\xi'}{\omega^2} + 2\xi'^2 l - 2q'\xi' l^2 + \frac{2}{3} q'^2 l^3 + \mathcal{O}(\omega^2 l^2). \quad (3.108b)$$

Тут  $\xi'^2 l - q'\xi' l^2 + \frac{1}{3} q'^2 l^3 = \frac{1}{3q'} \xi'^3 - \frac{1}{3q'} (\xi' - q'l)^3$ , що також може бути отримано шляхом безпосереднього інтегрування рівняння (3.102). Якщо покласти  $e^{-\frac{D}{2\omega^2} q'\xi'} g(q', \xi') = \text{const}$ , з наближення (3.108b) отримуємо розв'язок Фермі з Розділу 2.3.1.

В протилежному випадку  $Dl \rightarrow \infty$  коефіцієнт  $e^{-\frac{Dl}{2\omega^2} (q'^2 + \omega^2 \xi'^2)}$  в підінтегральній функції (3.105) має різкий максимум в точці  $q' = 0, \xi' = 0$ . Отже, можна зробити відповідну заміну в підінтегральній функції всюди, окрім множника пласкої хвилі, який може швидко змінюватися при великих  $x$  та  $v_{\perp}$ . При цьому

$$\begin{aligned} f &\simeq \frac{g(0,0)}{(2\pi)^2} \iint dq' d\xi' e^{i(q' \cos \omega l + \omega \xi' \sin \omega l)x + i(\xi' \cos \omega l - \frac{q'}{\omega} \sin \omega l)v} e^{-\frac{Dl}{2\omega^2} (q'^2 + \omega^2 \xi'^2)} \\ &= \frac{g(0,0)}{(2\pi)^2} \iint dq' d\xi' e^{iq'x + i\xi'v} e^{-\frac{Dl}{2\omega^2} (q'^2 + \omega^2 \xi'^2)} \propto e^{-E_{\perp}/EDl}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

де  $g(0,0)$  дорівнює збережній повній імовірності

$$g(0,0) = \iint dx dv_{\perp} f(x, v_{\perp}, l).$$

Це відповідає встановленню квазірівноваги (3.80) (з середньою поперечною енергією, лінійно зростаючою з  $l$ , і сталою кількістю частинок).

**3.3.3.2. Задача Коші.** Зв'язок довільної функції  $g(q', \xi')$  з початковим станом  $f(x_0, v_{\perp 0}, 0)$  можна встановити, якщо покласти  $l = 0$  в Рівн. (3.105):

$$f(x_0, v_{\perp 0}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dq' d\xi' e^{iq'x_0 + i\xi'v_{\perp 0} - \frac{D}{2\omega^2} q'\xi'} g(q', \xi').$$

Це є звичайним перетворенням Фур'є, яке можна обернути:

$$g(q', \xi') = e^{\frac{D}{2} q'\xi'} \iint dx_0 dv_{\perp 0} e^{-iq'x_0 - i\xi'v_{\perp 0}} f(x_0, v_{\perp 0}, 0). \quad (3.110)$$

Представляючи сюди  $f(x_0, v_{\perp 0}, 0)$  у вигляді довільного дельта-розподілу

$$G(x_0, v_{\perp 0}, x, v_{\perp}, +0) = \delta(x - x_0) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0})$$

(у цьому випадку позначаємо  $f$  як  $G$ ), можна обчислити інтеграли (3.110), (3.105), і отримати функцію Гріна:<sup>15</sup>

$$G(x_0, v_{\perp 0}, x, v_{\perp}, l) = \frac{\omega^2}{2\pi D \sqrt{\omega^2 l^2 - \sin^2 \omega l}} \times e^{-\frac{\omega \left[ \omega(x-x_0) \cos \frac{\omega l}{2} - (v_{\perp} + v_{\perp 0}) \sin \frac{\omega l}{2} \right]^2}{2D(\omega l - \sin \omega l)} - \frac{\omega \left[ \omega(x+x_0) \sin \frac{\omega l}{2} + (v_{\perp} - v_{\perp 0}) \cos \frac{\omega l}{2} \right]^2}{2D(\omega l + \sin \omega l)}}. \quad (3.111)$$

У циліндричних координатах (3.106) вона має вигляд

$$G\left(\frac{E_{\perp 0}}{E}, \varphi_0, \frac{E_{\perp}}{E}, \varphi, l\right) = \frac{\omega^2}{2\pi D \sqrt{\omega^2 l^2 - \sin^2 \omega l}} \times e^{-\frac{\omega \left[ \sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \cos\left(\varphi + \frac{\omega l}{2}\right) - \sqrt{\frac{2E_{\perp 0}}{E}} \cos\left(\varphi_0 - \frac{\omega l}{2}\right) \right]^2}{2D(\omega l - \sin \omega l)} - \frac{\omega \left[ \sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \sin\left(\varphi + \frac{\omega l}{2}\right) - \sqrt{\frac{2E_{\perp 0}}{E}} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\omega l}{2}\right) \right]^2}{2D(\omega l + \sin \omega l)}}. \quad (3.112)$$

Цей вираз є симетричним відносно перестановки  $E_{\perp} \leftrightarrow E_{\perp 0}$ ,  $\varphi \leftrightarrow -\varphi_0$ , так само як (3.111) симетрично відносно  $x \leftrightarrow x_0$ ,  $v_{\perp} \leftrightarrow -v_{\perp 0}$ .

**3.3.3.3. Власні функції.** Навіть якщо початкова функція розподілу була циліндрично симетричною, ця симетрія порушується в процесі еволюції через наявність коефіцієнта  $e^{-\frac{D}{2\omega^2} q \xi}$  у інтегралі Фур'є. Але завдяки тому, що транспортне рівняння прямо не залежить від  $l$ , існують певні власні функції еволюції, які загасають з  $l$  чисто експоненційно. Такі власні функції можна знайти наступним чином.

Якщо в рівнянні покласти (3.107)  $g \propto \delta(\sigma - \sigma_0) e^{im\psi}$  (циліндрична симетрія в Фур'є-спряжених змінних), залежності від просторових змінних та  $l$  розділяються:

$$\begin{aligned} f &\propto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi e^{im\psi} e^{i\sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \frac{\sigma_0}{\omega} \cos(\psi - \varphi - \omega l) - \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^2} \left[ l + \frac{\sin 2(\psi - \omega l)}{2\omega} \right]} \\ &= \Phi_m \left( \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}, \sqrt{\frac{2E_{\perp}}{E}} \frac{\sigma_0}{\omega}, \varphi \right) e^{-\frac{D\sigma_0^2}{2\omega^2} l + im\omega l}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

<sup>15</sup>В додатку до статті [442] відповідна формула була отримана за умови  $\omega l \gg 1$ , коли у знаменниках показників експоненти можна покласти  $\omega l \pm \sin \omega l \approx \omega l$ , та в дещо іншому записі, існуючому у цьому наближенні, коли в чисельниках показників експоненти фігурують синуси та косинуси  $\omega l$ , а не  $\omega l/2$ . З друкарськими помилками ця формула також була опублікована в огляді [300]. Чисто координатний розподіл  $\int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp} G(x_0, v_{\perp 0}, x, v_{\perp}, l)$  був раніше отриманий Чандрасекаром [435], який враховував також загасання осцилятора. Обчислення моментів та якісну поведінку функції (3.111) можна знайти в [441].

де

$$\Phi_m \left( \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}, \rho, \varphi \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi e^{im\psi + i\rho \cos(\psi - \varphi) - \frac{D\sigma_0^2}{4\omega^3} \sin 2\psi}. \quad (3.114)$$

Останні функції не є аксіально симетричними,<sup>16</sup> і навіть не мають симетрії ні по  $x$ , ні по  $v_{\perp}$ . Однак, вони є симетричними функціями дійсних змішувань  $\omega x \pm v_{\perp}$  (або відносно діагональних напрямків  $\varphi = \pm\pi/4$  у фазовому просторі). При  $D \rightarrow 0$  функції  $\Phi_m$  прямують до виразів  $i^m J_m(\rho) e^{im\varphi}$ , найнижчий представник яких,  $J_0(\rho)$ , є базисною функцією в квазірівноважній апроксимації Розділу 3.3.3. З урахуванням найнижчої поправки, залежної від азимуту, ця основна функція має вигляд

$$\Phi_0 \left( \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}, \rho, \varphi \right) \underset{\frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3} \ll 1}{\simeq} J_0(\rho) + \frac{D\sigma_0^2}{4\omega^3} J_2(\rho) \sin 2\varphi. \quad (3.115)$$

Слід відзначити, що відношення функцій  $J_2(\rho)$  та  $J_0(\rho)$  прямує до  $-1$  при  $\rho \gg 1$ ; але, з іншого боку, як наслідок, нулі цих функцій співпадають при великих  $\rho$ , тому еліптичність функції  $\Phi_0$  візуально є сильнішою при  $\rho \lesssim 1$  (див. Рис. 3.11а).

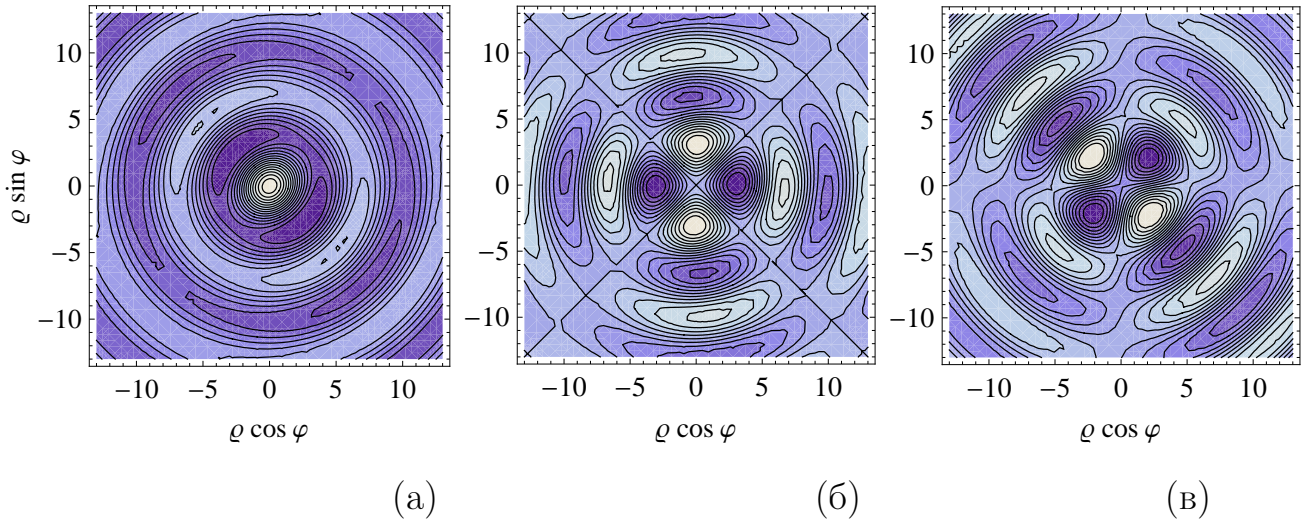


Рис. 3.11. Власні функції рівняння Фоккера-Планка для гармонічного осцилятора у фазовому просторі, для  $D\sigma_0^2/\omega^3 = 1$ : а).  $\Phi_0 \left( \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}, \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi \right)$ , б).  $\Re\Phi_2 \left( \frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}, \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi \right)$ , в).  $\Im\Phi_2$ .

<sup>16</sup>На відміну від рівняння (3.109), вони не набувають осрової симетрії навіть при  $l \rightarrow \infty$ , оскільки для них  $g(0, 0) = 0$ .

Аналогічно, функція  $\Phi_2$  при малих  $\frac{D\sigma_0^2}{2\omega^3}$  окрім  $-J_2(\rho)e^{2i\varphi}$  включає домішку компоненти  $J_0(\rho)$  (див. Рис. 3.11б,в).

Для функцій  $\Phi_m$  можна далі встановити співвідношення ортогональності, і розкласти по них будь-яку початкову умову. Проте, їх практична зручність залежить від простоти їхнього зв'язку з крайовими умовами. Функція Гріна є сильніше локалізованою, особливо для малих  $\omega l$ , тому вона повинна бути менш чутливою до крайових умов. Отже, працювати з нею може бути зручніше. З іншого боку, коса форма власних функцій еволюції є корисною для розуміння косої форми розв'язків в крайовій задачі на великих часах еволюції (див. наступний підрозділ).

**3.3.4. Крайова задача.** Тепер ми готові дослідити проблему деканалювання, коли рівняння (3.101) доповнюється реалістичнішою крайовою умовою, згідно з якою частинки не потрапляють іззовні до міжплощинного інтервалу  $-d/2 < x < d/2$  (полоси, а не кола аксептансу каналювання). Ця крайова умова ставиться наступним чином:<sup>17</sup>

$$f(d/2, v_{\perp}, l) = f(-d/2, -v_{\perp}, l) = 0 \quad \text{для} \quad v_{\perp} < 0. \quad (3.116)$$

Альтернативно, можна поставити вимогу, щоб

$$\text{для } |x| > d/2 \quad D(x) = 0, \quad \omega(x) = 0, \quad f(x, v_{\perp}, 0) = 0. \quad (3.117)$$

Розв'язок цієї задачі при  $|x| < d/2$  повинен збігатися з (3.116). Дійсно, для  $|x| > d/2$ ,

$$f \simeq \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dq' d\xi' e^{iq'(x-v_{\perp}l)+i\xi'v} g(q', \xi') = f_0(x - v_{\perp}l, v), \quad (3.118)$$

тобто якщо для  $x > d/2$  і  $v_{\perp} < 0$  (або  $x < -d/2$  та  $v_{\perp} > 0$ ) функція  $f(x, v_{\perp}, 0)$  дорівнювала нулю при  $l = 0$ , вона залишиться нульовою в цих квадрантах фазової площини і при всіх  $l > 0$ .

---

<sup>17</sup>Тут ефективна ширина міжплощинного інтервалу, у якому частинки можуть стабільно каналювати, є дещо меншою від відстані між центрами площин, і також трохи зменшується зі збільшенням температури кристала.

Задача еволюції (3.101), (3.117) допускає пряме комп'ютерне моделювання, але аналізувати його нелегко (навіть при  $\omega = 0$ , що відповідає аморфній мішені [214]). Тому ми не будемо ставити на меті отримати повний розв'язок, обмежившись асимптотичним аналізом та якісними зауваженнями.

**3.3.4.1. Початковий етап деканалювання.** Опис швидкості деканалювання спрощується для малих  $l$ , коли ще не проявляється кореляція між двома кордонами міжплощинного інтервалу. Тоді задача може розглядатися так, начебто існує лише один з кордонів. Швидкість виходу з міжплощинного інтервалу  $-d/2 < x < d/2$  може бути виражена як потік через кордон:

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} = 2 \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \left. \frac{dw_{\text{ch}}}{dx dv_{\perp}} \right|_{x=d/2} \quad (3.119)$$

(з коефіцієнтом 2, що враховує наявність двох однакових кордонів). В (3.119) функція розподілу може бути отримана з початкового розподілу  $\frac{dw}{dx_0 dv_{\perp 0}}$  як

$$\frac{dw_{\text{ch}}}{dx dv_{\perp}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} \frac{dw_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} G(x_0, v_{\perp 0}, x, v_{\perp}, l), \quad (3.120)$$

де функція Гріна (3.111) в головному порядку по  $\omega l \rightarrow 0$  може бути апроксимована розподілом Фермі (2.92а)

$$G \underset{\omega l \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\sqrt{3}}{2\pi D l^2} e^{-\frac{3[x-x_0-(v_{\perp}+v_{\perp 0})l/2]^2}{D l^3} - \frac{(v_{\perp}-v_{\perp 0})^2}{4D l}} \quad (3.121)$$

(вона не залежить від  $\omega$ , оскільки на початковій стадії дифузія є швидшою за будь-який регулярний рух, зокрема коливання).

Застосуємо це наближення до двох конкретних прикладів – початкових пучків типів А та В.

**Для пучка типу А** дископодібний початковий розподіл каналюваних частинок поблизу межі  $x = d/2$  можна апроксимувати як

$$\frac{dw_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} = \frac{4}{\pi \omega d^2} \vartheta \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 - \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2} \right] \simeq \frac{4}{\pi \omega d^2} \vartheta \left( \frac{d}{2} - \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 d} - x_0 \right). \quad (3.122)$$

Параметр  $\omega$  входить сюди через кривизну краю початкового розподілу, але скоротиться в кінцевому результаті.

Підставляючи (3.122) до рівнянь (3.120), (3.119), обчислюємо інтеграл

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \underset{l \rightarrow 0}{\simeq} \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2 \omega d^2 D l^2} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_{\perp 0} \times \int_{-\infty}^{\frac{d}{2} - \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 d}} dx_0 e^{-\frac{3[d/2 - x_0 - (v_\perp + v_{\perp 0})l/2]^2}{Dl^3} - \frac{(v_\perp - v_{\perp 0})^2}{4Dl}} \quad (3.123)$$

наступним чином. Інтегрування за  $x_0$  дає

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \simeq \frac{2}{\pi^{3/2} \omega d^2 \sqrt{Dl}} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_{\perp 0} e^{-\frac{(v_\perp - v_{\perp 0})^2}{4Dl}} \times \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{3}{Dl}} \left( \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 dl} - \frac{v_\perp + v_{\perp 0}}{2} \right) \right]. \quad (3.124)$$

Тут  $v_\perp, v_{\perp 0} \lesssim \sqrt{Dl}$ , отже, множник  $\sqrt{\frac{3}{Dl}} \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 dl}$  в аргументі додаткової функції помилок є позитивним і великим. При таких аргументах функція  $\text{erfc}$  швидко прямує до нуля, тому внесок  $v_{\perp 0}$  є навіть меншим, ніж  $\sim \sqrt{Dl}$ , що дозволяє знехтувати  $v_{\perp 0}$  порівняно з  $v_\perp$ :

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \simeq \frac{2}{\pi^{3/2} \omega d^2 \sqrt{Dl}} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-\frac{v_\perp^2}{4Dl}} \int_{-\infty}^\infty dv_{\perp 0} \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{3}{Dl}} \left( \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 dl} - \frac{v_\perp}{2} \right) \right]. \quad (3.125)$$

Заміни  $v_\perp = 2\sqrt{Dl}u$ ,  $v_{\perp 0} = \omega\sqrt{dl}(Dl)^{1/4}w$  приводять до ступінного закону

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \underset{l \rightarrow 0}{\simeq} C \frac{D^{3/4}}{d^{3/2}} l^{5/4}, \quad (3.126)$$

з коефіцієнтом

$$\begin{aligned} C &= \frac{8}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^\infty dw \int_0^\infty du u e^{-u^2} \text{erfc} \left[ \sqrt{3} (w^2 - u) \right] \\ &= \frac{3^{1/4} \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + 3^{-1/4} 2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) [4 + 3\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -3\right)]}{\pi^2} \\ &\approx 2.5. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Таким чином, замість  $l_d$  початковий етап деканалювання характеризується шкалою часу

$$l_i \sim d^{2/3} D^{-1/3} \propto E^{2/3}. \quad (3.128)$$



При цьому відношення  $l_i/l_d \propto E^{-1/3}$  зменшується з енергією.

Порівняння асимптотик (3.126) з числовим моделюванням ймовірності залишитися в каналі показано на Рис. 3.12.

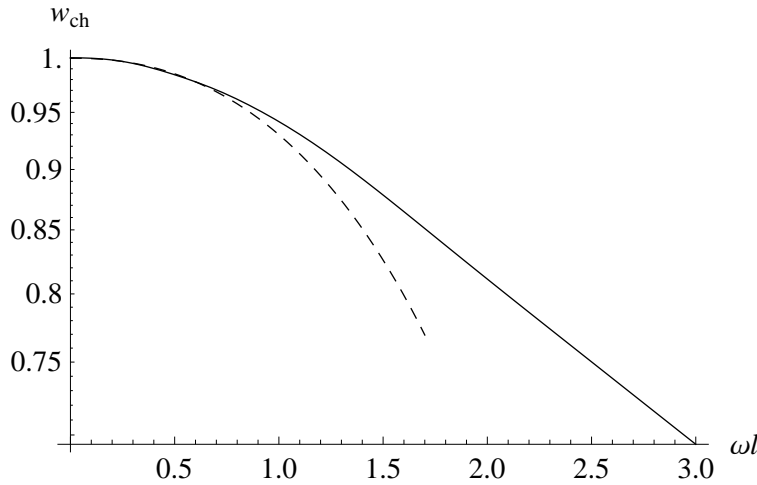


Рис. 3.12. Логарифмічний графік еволюції ймовірності залишитися в каналі для частинок, захоплених з пучка типу А, при  $\frac{ED}{2V_0\omega} = 0.1$ . Суцільна крива – числове моделювання на основі умови (3.117). Штрихова:  $1 + \int_0^l dl \frac{dw_{ch}}{dl}$ , з  $\frac{dw_{ch}}{dl}$ , обчисленим згідно до рівняння (3.126). При великих  $\omega l$  закон виходу з режиму каналювання є подібним до експоненційного (пряма лінія).

**Для випадку В**, коли початковий пучок є майже паралельним,

$$\frac{dw_{ch}}{dx_0 dv_{\perp 0}} = \frac{1}{d} \vartheta \left( \frac{d}{2} - |x_0| \right) \delta(v_{\perp 0}) \quad (3.129a)$$

$$\simeq \frac{1}{d} \vartheta \left( \frac{d}{2} - x_0 \right) \delta(v_{\perp 0}), \quad (3.129b)$$

використовуючи те саме наближення (3.121) для функції Гріна, отримуємо

$$\begin{aligned} -\frac{dw_{ch}}{dl} &= \frac{\sqrt{3}}{\pi D dl^2} \int_0^\infty dv_{\perp} v_{\perp} \int_{-\infty}^{d/2} dx_0 e^{-\frac{3[d/2-x_0-v_{\perp}l/2]^2}{Dl^3} - \frac{v_{\perp}^2}{4Dl}} \\ &= \frac{1}{2d\sqrt{\pi Dl}} \int_0^\infty dv_{\perp} v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{4Dl}} \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{3}{Dl}} \frac{v_{\perp}}{2} \right) \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}/2) \sqrt{Dl}}{\sqrt{\pi} d}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Типовий часовий масштаб тут дорівнює  $l_i$ , але показник ступеня є нижчим. Інакше кажучи, частинки деканалюють швидше, хоча їхній початко-

вий розподіл був краще колімованим. Так відбувається тому, що вони були дужче сконцентрованими поблизу межі  $x = \pm d/2$ ,  $v_{\perp} = 0$ . Втім, це зростання швидко припиняється, як тільки початковий розподіл повертається на помітний кут у фазовому просторі (див. Рис. 3.14 нижче).

У порівнянні зі ступінною поведінкою (3.94), (3.100), отриманою в рамках квазірівноважного наближення, поведінка (3.126), (3.130) не є розбіжною при  $l \rightarrow 0$ , але справедлива в коротшому інтервалі часу. Тому на малих довжинах ( $l \ll \omega^{-1}$ ) наближення статистичної рівноваги не придатне.

**3.3.4.2.  $\mathcal{O}(\sqrt{D})$ -поправка до довжини деканалювання.** Якісний аналіз все ж можливий при  $D/\omega \rightarrow 0$ . Приклад еволюції функції розподілу зображений на Рис. 3.13. Він демонструє, що для  $\omega l \gg 1$  розподіл прямує до арко-подібної форми, яка нагадує  $J_0$  або  $\Phi_0$  всередині кола аксептансу  $E_{\perp} \leq V_0$  (одичне пунктирне коло на Рис. 3.13), але поблизу цього кола поводить себе складніше. В околиці кола ширина розподілу зростає зі зростанням  $\varphi$  від  $-\pi$  до 0 і від 0 до  $\pi$ , і саме ця ширина визначає фактичну швидкість деканалювання. Тому ми знову повинні обчислити потік частинок через границю за допомогою рівняння (3.119).

Цього разу ми повинні поєднати початковий розподіл біля межі  $x = -d/2$

$$\frac{dw_{\text{ch}}}{dx_0 dv_{\perp 0}} \simeq \mathcal{A} \vartheta \left( x_0 + \frac{d}{2} - \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 d} \right) \quad (3.131)$$

[порівн. з Рівн. (3.122)] з граничною умовою при  $x = d/2$ . Це приблизно досягається за допомогою функції Гріна на половині періоду  $l = \pi/\omega$ :

$$G \left( x_0, v_{\perp 0}, x, v_{\perp}, \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 D} e^{-\frac{\omega}{2\pi D} [\omega^2(x+x_0)^2 + (v_{\perp} + v_{\perp 0})^2]}, \quad (3.132)$$

і дає

$$\begin{aligned} \left. \frac{dw_{\text{ch}}}{dx dv_{\perp}} \right|_{x=d/2} &= \mathcal{A} \frac{\omega^2}{2\pi^2 D} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} e^{-\frac{\omega}{2\pi D} (v_{\perp} + v_{\perp 0})^2} \int_{-d/2 + \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2 d}}^{\infty} dx_0 e^{-\frac{\omega^3}{2\pi D} (d/2 + x_0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} e^{-\frac{\omega}{2\pi D} (v_{\perp} + v_{\perp 0})^2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\pi D}} \frac{v_{\perp 0}}{\omega d} \right). \end{aligned} \quad (3.133)$$

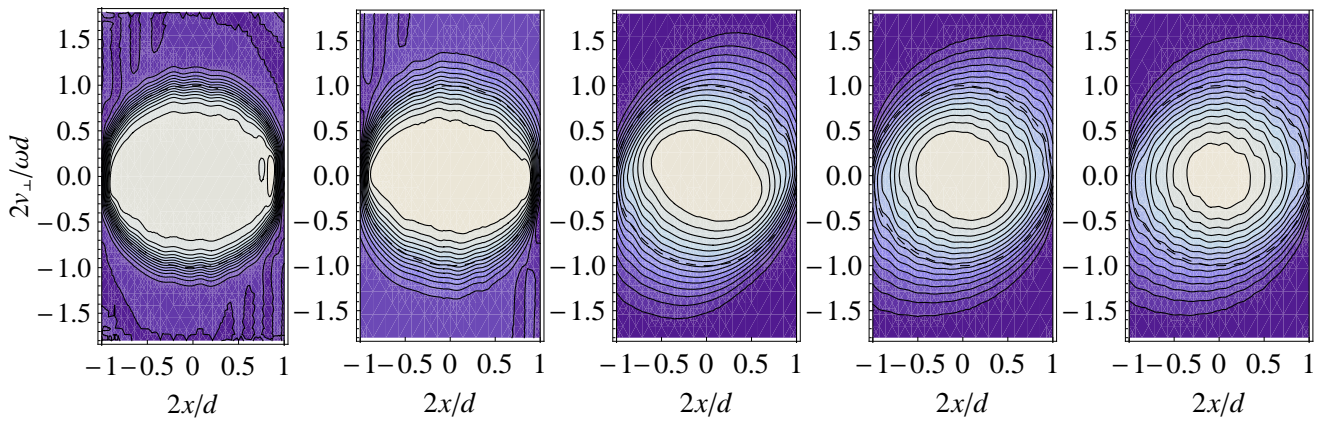


Рис. 3.13. Еволюційні стадії фазово-просторового розподілу ймовірності частинок у площинному каналі для початкового пучка типу А та сили дифузії  $\frac{ED}{2V_0\omega} = 0.1$ . Зліва направо,  $\omega l = 0.1, 0.3, 1, 1.5, 2$ . В подальшому розподіл вже не змінюється за формою зі збільшенням  $\omega l$ , відповідаючи квазірівноважному стану, який загасає по експоненті (див. Рис. 3.12).

Підставляючи цей вираз до формули (3.119), обчислюємо швидкість деканалювання для малих  $D$ :

$$\begin{aligned} -\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} &= \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \frac{\mathcal{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp 0} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\pi D}} \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega d} \right) \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} e^{-\frac{\omega}{2\pi D}(v_{\perp} + v_{\perp 0})^2} \\ &= \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\pi}} \frac{2\pi D}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dw \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2\pi D}{\omega}} \frac{w^2}{\omega d} \right) \left( \frac{1}{2} e^{-w^2} - w \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} w \right). \end{aligned} \quad (3.134)$$

При малих  $D$  головний внесок походить від великих  $w$ , тому

$$-\frac{dw_{\text{ch}}}{dl} \simeq \mathcal{A} \frac{2\pi D}{\omega} \int_{-\infty}^0 dw (-w) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2\pi D}{\omega}} \frac{w^2}{\omega d} \right) = d \sqrt{\frac{\omega D}{2}} \mathcal{A}. \quad (3.135)$$

Останній результат вказує, що швидкість деканалювання можна пов'язати зі стрибком функції розподілу, який в адиабатичному наближенні вважався нульовим. Якщо ж натомість ми виразимо стрибок  $\mathcal{A}$  двовимірної функції розподілу за допомогою функції розподілу по поперечній енергії,

$$\Delta f = \frac{2\pi}{\omega E} \mathcal{A},$$

і прирівняємо його до (3.87а), то отримаємо точнішу граничну умову:

$$\Delta f|_{E_{\perp}=V_0} = -\frac{2\pi V_0}{\omega d} \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \frac{\partial f}{\partial E_{\perp}} \Big|_{E_{\perp}=V_0-0}. \quad (3.136)$$

Оскільки  $D/\omega^3 \sim E^{-1/2} \rightarrow 0$ , права частина, а також  $\Delta f$ , прямують до нуля у відповідності до Рівн. (3.83), але доволі повільно:  $\sim \sqrt{D/\omega^3} \sim E^{-1/4}$ . На практиці права частина може бути значною, тому точнішою граничною умовою в наближенні статистичної рівноваги є (3.136). Аргументи базисних функцій тоді дещо відрізняються від  $j_{0,n} \sqrt{E_\perp/V_0}$ .

Зокрема, замінивши в (3.136)

$$f \propto J_0 \left[ j_{0,1}(1 - \delta_1) \sqrt{E_\perp/V_0} \right] \quad (3.137)$$

і лінійзуючи ліву частину за  $\delta_1$  та нехтуючи відповідною поправкою у правій частині, яка вже є пропорційною  $\sqrt{D}$ , отримуємо

$$\delta_1 = \frac{\pi}{\omega d} \sqrt{\frac{2D}{\omega}}. \quad (3.138)$$

При цьому довжина деканалювання дорівнює

$$l_d = \frac{4V_0}{ED j_{0,1}^2 (1 - 2\delta_1)}, \quad (3.139)$$

де

$$2\delta_1 = \pi \sqrt{\frac{ED}{V_0 \omega}}.$$

На практиці ця поправка може бути суттєвою, а отже, навіть в умовах відносно невеликих  $ED/V_0\omega$ , довжину деканалювання не можна обчислювати за допомогою простої формули (3.89).

**3.3.4.3. Осциляції деканалювання.** Якщо початковий стан залежить не тільки від  $E_\perp$ , але й від  $\varphi$ , як це має місце у випадку В, його еволюція буде включати також істотні компоненти  $\Phi_m$  з  $m \neq 0$ . Якщо, як це зазвичай буває, початкова умова є парною як по  $x$ , так і по  $v_\perp$ , непарні  $m$  випадають, і залишаються лише  $m = 0, 2, 4, \dots$ . При малих  $D$  функції  $\Phi_m$  є близькими до  $i^m J_m(\rho) e^{im\varphi}$ , які мають нулі уздовж концентричних кіл у фазовому просторі. Отже, довжина деканалювання для кожної з таких компонент приблизно визначається коренем відповідної функції Бесселя  $J_m$ :

$$j_{m,n} \approx -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} + \pi n,$$

і дорівнює

$$l_d^{(m)} = \frac{4V_0}{j_{m,1}^2} ED.$$

Ці вищі компоненти деканалюють швидше, ніж головний член  $m = 0$ .

Важливішим є те, що відповідна швидкість монотонного експоненційного розпаду не співпадає з фізичною швидкістю деканалювання. Остання фізично пов'язана зі значеннями функції розподілу на кордонах  $x = \pm d/2$ , які при малих  $D$  пов'язані з функцією розподілу при  $\varphi \approx 0 \pmod{\pi}$ . Через те, що значення  $\Phi_m$  з  $m \neq 0$  при фіксованих значеннях  $\varphi$  залежать від  $l$ , вони викликають значні коливання швидкості деканалювання, з періодом  $\pi/\omega$ .

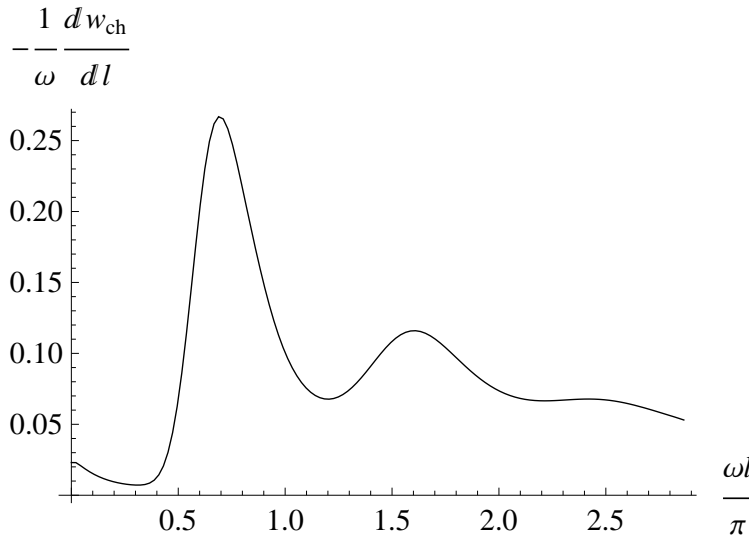


Рис. 3.14. Швидкість деканалювання для сили дифузії  $\frac{ED}{2V_0\omega} = 0.1$  та початкового розподілу  $\frac{dw_{ch}}{dx_0 dv_{\perp 0}} \propto \operatorname{erfc} [500 ((2x/d)^2 - 1)] e^{-100(2v_{\perp 0}/\omega d)^2}$ , моделюючого  $\delta$ -розподіл (3.129а) (тип пучка В).

Точніше, існує послідовність періодичних піків при

$$\omega l = \pi k - \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

з  $0 < \varphi_k < \varphi_{k+1} < \pi/2$ . Вони розширюються зі збільшенням  $Dl$ , і навпаки, стають вузькими та більш численними при зменшенні  $D$ . Висоти піків зменшуються як  $e^{-l/l_d^{(2)}}$ , де

$$l_d^{(2)} \approx l_{d2} \approx l_d/5.$$

Приклад показано на Рис. 3.14. Коливання такого роду були виявлені експериментально [318, 443, 444] та в чисельному моделюванні [445]. У цьому випадку, наближення статистичної рівноваги порушується не лише при  $\omega l \lesssim 1$ , але і при  $l \lesssim l_d^{(2)}$ . Але ми не будемо далеко заглиблюватися в це питання.

### 3.4. Проходження заряджених частинок крізь зігнуті кристали. Об'ємне відбиття

Окрім звичайних, прямих монокристалів, у фізиці високих енергій застосовуються також зігнуті (див. Розд. 1.5.7). Якщо кристал достатньо тонкий (не товщий декількох міліметрів), але при цьому ширший від пучка, його можна зігнути на невеликий кут, і частинки, що проходять крізь кристал, за певних умов будуть відхилятися на цей кут. Завдяки тому, що кут відхилення є фіксованим, для високоенергетичних частинок він все ж набагато перевищує кути, на які можна відхилити пучок за допомогою лабораторних магнітів. До того ж поворот здійснюється у набагато меншому просторі.

Як і у випадку з прямими кристалами, можливі різні орієнтації кристала відносно пучка, і різні масштаби малих кутів падіння, тому існують різні механізми відхилення пучків зігнутими кристалами. При площинній орієнтації та за найменших кутів падіння реалізується каналювання, яке виводить пучок захоплених частинок зігнутими каналами. Теорія каналювання в умовах згину кристала [321, 353] є подібною до тієї, що й без згину, з головною відмінністю, що деканалювання виникає переважно на одній з двох обмежуючих площин (для позитивно заряджених частинок), а глибина потенціальної ями зменшується. (Також суттєвим може виявитися перезахоплення частинок.) Історія розвитку даного підходу була окреслена у Розд. 1.5.7.1.

При площинній орієнтації та більших, надбар'єрних кутах падіння, в якійсь точці всередині зігнутого кристала кут руху відносно атомних пло-

щин все ж може стати порядку критичного (див. Рис. 3.15). Тоді замість захоплення частинки площиною виникає, навпаки, відбиття в бік протилежний згину, що називається об'ємним відбиттям [356] (див. Розд. 1.5.7.2). Хоча відповідний кут відхилення є співмірним з критичним кутом каналювання, і тому зменшується зі зростанням енергії частинки як  $E^{-1/2}$ , але на цей однаковий кут відхиляються практично всі частинки пучка (повний акцептанс), тому можливо використовувати послідовно декілька таких відбиттів.

Нарешті, при осьовій орієнтації каналювання є нестійким на значних товщинах кристалів, які представляють практичний інтерес, тому використовується механізм багаторазового розсіювання на ланцюжках (донат-розсіювання – див. Розд. 1.5.5). Завдяки тому, що, як було продемонстровано в Розд. 3.2, в донат-розсіюванні просторова дифузія пригнічується порівняно з аморфним середовищем, при згині такий кристал також може відводити пучок надбар'єрних частинок, подібно до каналювання. Але при цьому пучок набуває більшого розходження. Розрахунок кінетики за таких умов сьогодні переважно проводиться за допомогою чисельного моделювання [364, 446].

Не намагаючись охопити всі можливі механізми повороту, в цьому розділі ми розглянемо об'ємне відбиття, яке є цікавим також із загального погляду класичної механіки.

**3.4.1. Опис викривлення кристалів.** Розглянемо частинку, що падає на зігнутий кристал під невеликим кутом  $\theta_0$  до осі  $Oz$ , яка є ортогональною великим граням кристала (будемо вважати, що ці грані розташовуються при  $z \approx -L/2$  та  $z \approx L/2$ ). Припустимо, що кристал має площинну орієнтацію, тобто всередині кристала міститься набір атомних площин, орієнтованих також приблизно, хоча і не строго вздовж  $Oz$  (див. Рис. 3.15). Для простоти будемо вважати, що частинка взаємодіє лише з неперервним потенціалом площин, який не залежить від координати  $y$ , і

знехтуємо некогерентним розсіюванням (як відзначалося в попередніх під-розділах, точність такого наближення покращується зі збільшенням енергії частинки).

Відстань між зігнутими площинами практично не змінюється при малому значенні кривизни кристала, і рівняння, яке визначає кожну площину, має вигляд

$$x_n(z) = C_n + \xi(z). \quad (3.140)$$

Константи  $C_n = C_0 + nd$  є рівновіддаленими, з інтервалом, який дорівнює відстані  $d$  між еквівалентними площинами.

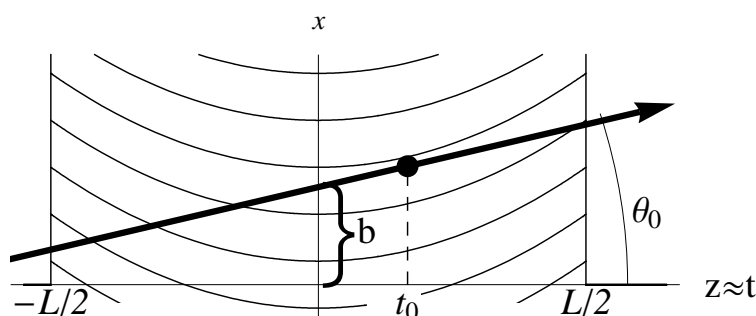


Рис. 3.15. Схематичне зображення проходження частинки високої енергії крізь тонкий зігнутий кристал. Відхилення частинки відбувається в околиці точки  $t_0$ , де кут руху частинки відносно зігнутих атомних площин стає малим.

Якщо в прямому кристалі неперервний міжплощинний потенціал дорівнював періодичній функції  $V(x)$  (з періодом  $d$ ) і викликав силу  $F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$ , діючу на частинку, після невеликого згинання кристала сила набуває вигляду

$$F_{\text{bent}}(x, z) = F[x - \xi(z)], \quad (3.141)$$

але все ще може розглядатися як спрямована вздовж  $x$ .

**3.4.2. Об'ємне відбиття.** Загальне рівняння, яке описує рух частинки в неперервному потенціалі площинно орієнтованого зігнутого кристала, має вигляд

$$E\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}V[x - \xi(t)] \quad (3.142)$$



(кожна крапка над літерами означає  $d/dt$ ). Перехід до змінної

$$r(t) = x(t) - \xi(t) \quad (3.143)$$

(тобто, фактично, до неінерціальної системи відліку, яка слідує за вигином кристала), дозволяє розділити залежності від  $r$  та  $t$  у правій частині рівняння (3.142):

$$\ddot{r} = -\frac{1}{E}V'(r) - \ddot{\xi}(t). \quad (3.144)$$

Останній доданок тут має значення локального відцентрового прискорення.

На жаль, в загальному випадку, тобто для довільних функцій  $V(r)$  та  $\xi(t)$ , рівняння (3.144) все одно неможливо розв'язати точно (нелінійний та неавтономний рух [432, 447], який, взагалі кажучи, є хаотичним [448, 449]). Тому ми обмежимося випадком кристала постійної кривизни, який найчастіше використовується на практиці:

$$\ddot{\xi}(t) = -\frac{1}{R} = \text{const}, \quad (3.145)$$

де  $R = \text{const}$  – радіус згину кристала. Тоді відцентрова сила може розглядатися як викликана статичним відцентровим потенціалом  $-Er/R$ , залежним від координати  $r$  (див. Рис. 3.16). При цьому рівняння (3.144) має стандартний інтеграл руху в центрально-симетричному полі:

$$E_{\perp} = E\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) - E\frac{r}{R} \quad (3.146)$$

– поперечну енергію. Для відомого з початкової умови значення  $E_{\perp} = E\dot{r}^2(0)/2 + V[r(0)] - Er(0)/R$  траєкторія частинки виражається як

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2\frac{E_{\perp}-V(r)}{E} + 2\frac{r}{R}}}. \quad (3.147)$$

Знак тут визначається напрямком радіального руху частинки. Після досягнення радіальної точки повороту, де підкорінний вираз рівняння (3.147) обертається в нуль,  $\dot{r}$  змінює свій знак.

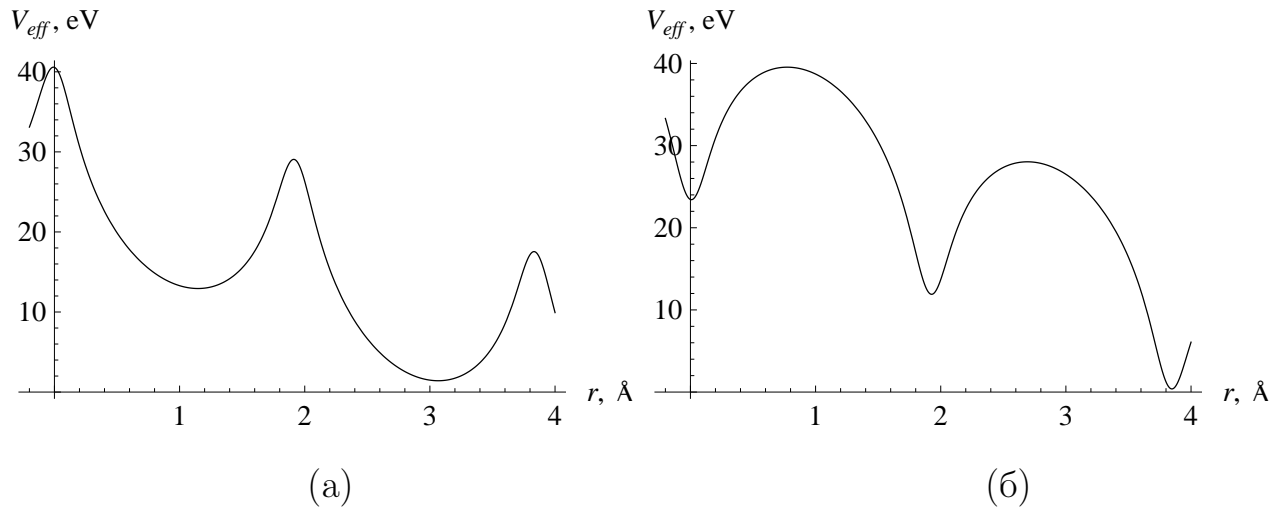


Рис. 3.16. Ефективний потенціал зігнутого кристала кремнію в орієнтації (110), для  $R/R_c = 10$ . а). Для позитивно зарядженої частинки. б). Для негативно зарядженої частинки. Частинка з поперечною енергією  $E_{\perp}$  приходить з боку великих  $r$ , відбивається в точці, де  $E_{\perp} = V_{\text{eff}}(r)$ , і повертається до великих  $r$ .

Для визначення кута відхилення при проходженні частинок крізь весь зігнутий кристал слід обчислити різницю

$$\theta = \dot{x}(L) - \dot{x}(0) = \dot{r}(L) - \dot{r}(0) + \dot{\xi}(L) - \dot{\xi}(0) = \dot{r}(L) - \dot{r}(0) - L/R, \quad (3.148)$$

де  $L$  – товщина кристала, а  $L/R$  – кут згину кристала. Для достатньо товстого кристала існує ліміт

$$\theta_{VR} = \lim_{L \rightarrow \infty} \{ \dot{r}(L) - \dot{r}(0) - L/R \}, \quad (3.149)$$

на обчисленні якого ми зосередимося.

**3.4.3. Кут об'ємного відбиття в товстому кристалі.** Підставляючи до рівняння (3.149)  $\dot{r}(0)$  та  $\dot{r}(L)$  з інтеграла руху [з урахуванням того, що  $\dot{r}(0) < 0$ , тоді як  $\dot{r}(L) > 0$ ] і виражаючи  $L = \int dt = \int dr/\dot{r}$ , перетворюємо (3.149) в ліміт по змінній  $r$ :

$$\theta_{VR} = \lim_{r(L) \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V[r(L)]}{E} + 2 \frac{r(L)}{R}} - \frac{1}{R} \int_{r_{\min}(E_{\perp})}^{r(L)} \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E} + 2 \frac{r}{R}}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{r(0) \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V[r(0)]}{E}} + 2 \frac{r(0)}{R} - \frac{1}{R} \int_{r_{\min}(E_{\perp})}^{r(0)} \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}} \right\} \\
& = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2 \frac{r}{R}} - \frac{1}{R} \int_{r_{\min}(E_{\perp})}^r \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}} \right\}. \quad (3.150)
\end{aligned}$$

Тепер використаємо той факт, що потенціал  $V(r)$  є періодичним. Для цього розіб'ємо інтеграл в (3.150) на суму інтегралів по окремим міжплощинним інтервалам:

$$\begin{aligned}
\int_{r_{\min}(E_{\perp})}^r \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}} & = \int_{r_{\min}(E_{\perp})}^d \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}} \\
& + \sum_{n=1}^{\lfloor r/d \rfloor} \int_0^d \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r+nd}{R}} \quad (3.151)
\end{aligned}$$

[за припущення, що  $E_{\perp}$  змінюється в таких межах, і початок координати  $r$  вибраний так, що  $r_{\min}(E_{\perp})$  належить до інтервалу  $0 < r_{\min}(E_{\perp}) < d$ ].<sup>18</sup> Перший інтеграл у правій частині рівняння (3.151) також може бути розповсюджений на той самий інтервал  $0 < r \leq d$ , що і для решти інтегралів, якщо взяти лише його дійсну частину:

$$\int_{r_{\min}(E_{\perp})}^d \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}} = \Re \int_0^d \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + 2 \frac{r}{R}}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\theta_{VR} = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2 \frac{r}{R}} - \frac{1}{\sqrt{2Rd}} \Re \sum_{n=0}^{\lfloor r/d \rfloor} \int_0^d \frac{dr}{\sqrt{\frac{R}{d} \frac{E_{\perp} - V(r)}{E}} + \frac{r}{d} + n} \right\}, \quad (3.153)$$

<sup>18</sup>Тобто, для заданого  $R$  потрібно знайти один з локальних максимумів функції  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) - Er/R$ , вибрати відповідне  $r$  рівним 0, і розглядати  $E_{\perp}$  в інтервалі від цього максимуму до наступного нижчого максимуму. Якщо всі локальні максимуми  $V_{\text{eff}}(r)$  є еквівалентними, це відповідає інтервалу

$$V_{\text{eff}}(d) = V_{\text{eff}}(0) - Ed/R < E_{\perp} < V_{\text{eff}}(0). \quad (3.152)$$

Якщо ж ями міжплощинного інтервалу є нееквівалентними, як це має місце для кремнію в орієнтації (111), необхідно розрізняти випадки коли кожна з цих ям є останньою в послідовності.

де  $\lfloor r/d \rfloor$  означає цілу частину числа  $r/d$ , округлену в менший бік. В достатньо товстому кристалі поверхневим ефектом, що виражається різницею  $r - d\lfloor r/d \rfloor$ , можна знехтувати (див., однак, [16]).

Зміна порядку сумування та інтегрування дозволяє виконати в (3.153) підсумовування за  $n$  у замкнутому вигляді, беручи до уваги, що ліміт

$$\lim_{n_{\max} \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{s+n}} - 2\sqrt{n_{\max}} \right) = \zeta \left( \frac{1}{2}, s \right), \quad (3.154)$$

представляє узагальнену дзета-функцію Рімана (див. Додаток В) з параметром  $1/2$ . В результаті, для потенціалу загального вигляду  $V(r)$  та довільного відношення  $R/R_c$ , граничний кут об'ємного відбиття як функція  $R$  та  $E_{\perp}$  виражається формулою

$$\theta_{VR}(R, E_{\perp}) = -\sqrt{\frac{2}{Rd}} \Re \int_0^d dr \zeta \left( \frac{1}{2}, \frac{R E_{\perp} - V(r)}{E} + \frac{r}{d} \right). \quad (3.155)$$

Аргумент функції  $\zeta$  в підінтегральному виразі змінюється від  $\frac{R E_{\perp} - V_{\text{eff}}(0)}{E} = \frac{R E_{\perp} - V_{\text{eff}}(d) - Ed/R}{E} \in [-1; 0]$  [оскільки  $E_{\perp}$  знаходиться в інтервалі (3.152)] до  $\frac{R E_{\perp} - V_{\text{eff}}(d)}{E} = \frac{R E_{\perp} - V_{\text{eff}}(0) + Ed/R}{E} \in [0; 1]$ , але проміжні значення при проходженні дна потенціальної ями, взагалі кажучи, можуть бути більшими від 1.

Для всіх  $s > -1$  функція (3.154) з точністю  $\sim 0.02$  може бути апроксимована як<sup>19</sup>

$$\zeta \left( \frac{1}{2}, s \right) \approx \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s+1}} + \frac{1}{2\sqrt{s+2}} - 2\sqrt{s+2}, \quad (3.156)$$

що отримується шляхом заміни суми в (3.154) (після виділення перших двох сингулярних членів) на інтеграл за допомогою формули Ейлера-Маклорена [417, 426]. Крім того, при  $s > 1$ , коли  $\zeta \left( \frac{1}{2}, s \right) \simeq -2\sqrt{s} + 1/2\sqrt{s} + \mathcal{O}(s^{-3/2})$ , цей вираз допускає ще простіше асимптотичне представлення:

$$\zeta \left( \frac{1}{2}, s \right) \simeq -2\sqrt{s} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(s^{-3/2}) \quad (3.157)$$

(див. Рис. 3.17).

<sup>19</sup>Похибка в (3.156) приблизно складає  $\frac{1}{24(s+2)^{3/2}}$ , і при  $s > -1$  єю можна знехтувати.

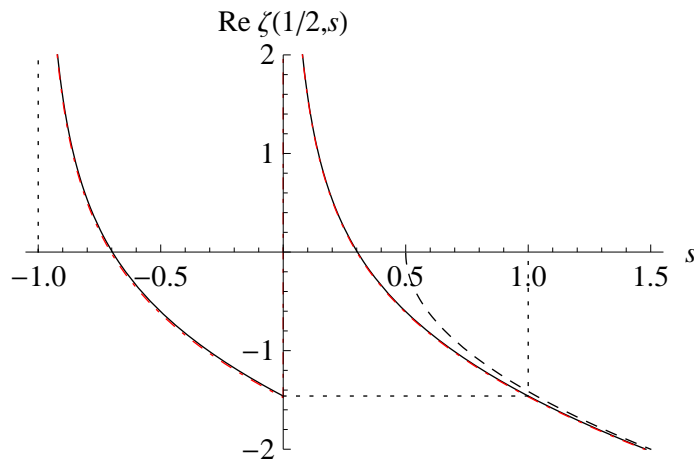


Рис. 3.17. Суцільна крива – поведінка дійсної частини узагальненої дзета-функції  $\zeta\left(\frac{1}{2}, s\right)$ , визначеної Рівн. (3.154). Штрих-пунктирна крива (що практично не відрізняється від суцільної) – її наближення (3.156). Штрихова крива – наближення (3.157), яке стає хорошим при  $s > 1$ .

Як видно з Рівн. (3.155), (3.157), кути об'ємного відбиття типово є позитивними, тобто частинка відхиляється в бік, протилежний згину кристала. Корисно дати якісне пояснення фізичної причини цього. З погляду неінерційної системи відліку, пов'язаної із зігнутим кристалом, присутність ям, накладених на слабко і рівномірно нахилений відцентровий потенціал, пришвидшує проходження частинкою радіальної складової її шляху, а значить, відповідає відбиттю в бік, протилежний згину.<sup>20</sup> (Якщо б, навпаки, часова затримка була позитивною, очевидно, що згин кристала захоплював би частинку за собою, і тоді відхилення відбувалося б у бік згину.) З погляду інерційної лабораторної системи відліку, інтерпретація була дана в [14].

**Граничний кут відхилення при  $R \gg R_c$ .** Для застосувань об'ємного відбиття найпривабливішим є випадок, коли  $R$  значно перевищує критичний радіус  $R_c = E/|F_{\max}| \sim Ed/V_0$ . Тоді головний внесок в фор-

<sup>20</sup>В цьому аспекті можна вбачати аналогію об'ємного відбиття із задачею Якова Бернуллі про брахістохрону. Але на відміну від останньої, поперечний рух в об'ємному відбитті не є двовимірним, конкуренція між глибиною прискорюючого потенціалу та довжиною шляху відсутня, і тому чим глибший міжплощинний потенціал, тим швидшим є поперечний рух, і тим більшим є кут об'ємного відбиття.

мулі (3.155) дають великі аргументи  $\zeta$ -функції, а отже, можна застосувати асимптотичне наближення (3.157) для дзета-функції, і знехтувати членами  $r/d \sim 1$  і  $-1/2$  в аргументі. Це веде в головному порядку до загального виразу

$$\lim_{R \rightarrow R_c} \theta_{VR} = \theta_{VR\infty} = \sqrt{\frac{2}{E} \frac{2}{d} \int_0^d dr \sqrt{\max V - V(r)}}, \quad (3.158)$$

який не залежить ні від  $E_{\perp}$  (тобто від прицільних параметрів), ні від  $R$ , і може бути представлений як

$$\theta_{VR\infty} = 2 \langle \theta_c(r) \rangle_r, \quad (3.159)$$

де  $\theta_c(r) = \sqrt{2 [\max V - V(r)] / E}$  – «локальний» критичний кут, який сприймає надбар'єрна частинка підчас проходження крізь міжплощинний інтервал, а  $\langle \dots \rangle_r = \frac{1}{d} \int_0^d dr \dots$  означає усереднення по періоду неперервного потенціалу. Таким чином, кутовий розподіл у цьому наближенні стискається до  $\delta$ -функції:

$$\frac{dw}{d\theta_{VR}} \underset{R \gg R_c}{\simeq} \delta(\theta_{VR} - \theta_{VR\infty}).$$

В інтегралі по періоду (3.158) початок координат вже може вибиратися будь-де. З (3.158) також очевидно, що  $\theta_{VR} \leq 2\theta_c$  (рівність досягається для прямокутної потенціальної ями – до такої форми поступово прямує неперервний потенціал кристалів важких елементів, хоча навіть для вольфраму потенціальна яма ще далека від прямокутної).

**Середній кут відхилення для довільного  $R/R_c$ .** Представлення (3.155), навіть без наближення (3.156), дозволяє отримати точну формулу для характеристики, найважливішої на практиці – середнього кута об'ємного відбиття. Припускаючи статистичну рівновагу, тобто вважаючи початковий розподіл частинок рівномірним по  $E_{\perp}$  в масштабах відносно невеликого періоду по поперечній енергії  $\Delta E_{\perp} = \frac{Ed}{R}$  [450], середнє по пучку значення кута об'ємного відбиття отримується усередненням представлення (3.155) по  $E_{\perp}$  в інтервалі  $[-\Delta E_{\perp}, 0]$ . Використовуючи тотожність (В.12)

$$\int_{s-1}^s ds' \zeta\left(\frac{1}{2}, s'\right) = -2\sqrt{s-1},$$

після інтегрування по повному інтервалу  $E_{\perp}$  ми позбавляємося від  $\zeta$ -функції і отримуємо

$$\bar{\theta}_{VR}(R) = \frac{1}{\Delta E_{\perp}} \int_{-\Delta E_{\perp}}^0 dE_{\perp} \theta_{VR}(R, E_{\perp}) = \frac{2\sqrt{2}}{d} \Re \int_0^d dr \sqrt{-\frac{V(r)}{E} + \frac{r-d}{R}}. \quad (3.160)$$

Ця формула справедлива лише для орієнтації кристала, в якій всі потенціальні ями є еквівалентними [такої як у кремнії в орієнтації (110)]. Проте, її можна переписати у вигляді

$$\sqrt{\frac{E}{2}} \frac{d}{2} \bar{\theta}_{VR}(E, R) = \Re \int_0^d dr \sqrt{\max_{r'>r} V_{\text{eff}}(r') - V_{\text{eff}}(r)}, \quad (3.161)$$

в якому вона виявляється справедливою і для батоямного міжплощинного потенціалу [наприклад, як у кремнії в орієнтації (111) для позитивно заряджених частинок].

Інтеграл (3.160) обчислюється точно у випадку гармонічного міжплощинного потенціалу:

$$\frac{\bar{\theta}_{VR}}{\theta_c} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{R_c}{R}\right)^2 \quad (\text{pos. ch. particles}), \quad (3.162)$$

$$\frac{\bar{\theta}_{VR}}{\theta_c} = 1 - \frac{R_c}{R} \left(1 + \ln \frac{R}{R_c}\right) \quad (\text{neg. ch. particles}), \quad (3.163)$$

де  $V_0$  – глибина потенціальної ями,  $\theta_c = \sqrt{2V_0/E}$ ,  $R_c = \frac{Ed}{4V_0}$ . Відзначимо, що при  $R \rightarrow R_c$  обидва вирази (3.162), (3.163) обертаються в нуль, причому квадратично. Ці формули добре узгоджуються з експериментальними даними щодо об'ємного відбиття в кристалах кремнію з орієнтацією (110) (див. Рис. 1.186 і [451]), і в асимптотичній формі при  $R \gg R_c$  використовуються в Монте-Карло програмі FLUKA, розробленій в ЦЕРН [380]. Поведінка цих функцій зображена на Рис. 3.18.

**Кутовий розподіл.** В межах поточного аналітичного розгляду, базуючись на формулах (3.155), (3.156), та використовуючи реалістичні міжплощинні потенціали з урахуванням залежності від температури, були також розраховані кутові розподіли позитивно та негативно заряджених ча-

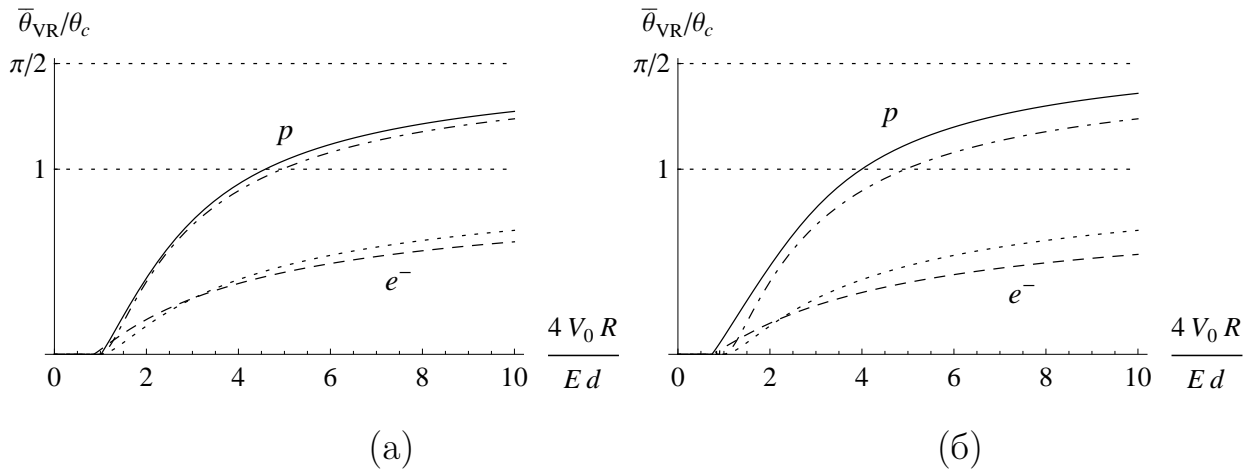


Рис. 3.18. Залежність середнього кута об'ємного відбиття від радіусу згину кристала: а). для кремнію в орієнтації (110); б). для вольфраму в тій же орієнтації. Суцільні криві – обчислення з реалістичним потенціалом [292] для позитивно зарядженої частинки; штрихові криві – для негативно зарядженої частинки. Для порівняння, штрих-пунктирні та точкові криві показують відповідні залежності для гармонічного міжплощинного потенціалу тієї ж глибини, Рівн. (3.162) та (3.163).

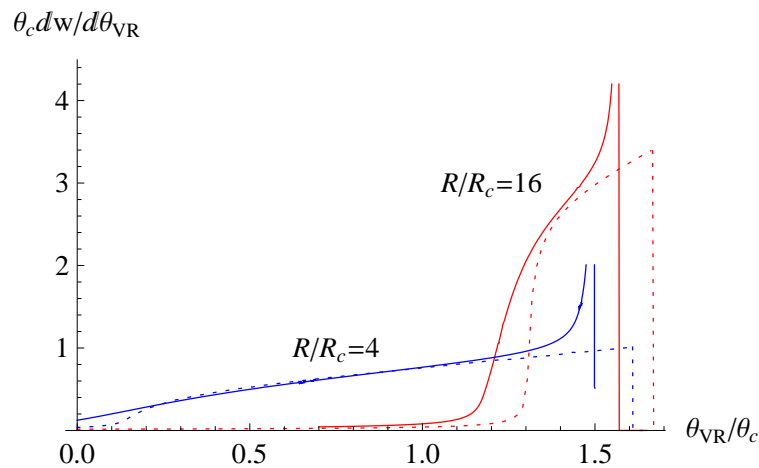


Рис. 3.19. Кутовий розподіл об'ємно відбитих частинок в реалістичному неперервному потенціалі кристала кремнію в орієнтації (110). Сині криві – для  $R = 4R_c$ ; червоні – для  $R = 16R_c$ . Суцільні криві – кімнатна температура. Точкові – для потенціалу статичної ґратки (без коливань атомів відносно положень рівноваги).



стинок при об'ємному відбитті<sup>21</sup> (див. Рис. 3.19). Було також знайдено різницю між кількістю ядерних непружних або пружних некогерентних розсіянь для об'ємно-відбитих частинок та частинок у відповідному прямому кристалі або аморфній речовині [10, 11]:

$$\Delta P = n_{at}\sigma_A\Delta L; \quad \Delta L = \pm R\theta_{VR}.$$

Нахилені періодичні потенціали, подібні до ефективного потенціалу зігнутого кристала, також зустрічаються в інших областях фізики – див., наприклад, [315, 452–454] і посилання в них.

### 3.5. Висновки до Розділу 3

На відміну від попереднього Розділу, де роль елементарного акту відіграло розсіяння на окремому атомі, в проблемах проходження швидких частинок крізь кристали базовим є поняття неперервного потенціалу. Але в той час як сама по собі важливість потенціалу кристала, усередненого вздовж кристалографічного напрямку, близького до напрямку руху частинки, не викликає сумніву, не так очевидно, чим саме при цьому нехтується, і що саме залишається в якості компоненти некогерентного розсіяння. У послідовному підході (Розд. 3.1), поняття неперервного потенціалу виявляється нерозривно пов'язаним з процедурою виокремлення некогерентної компоненти. Це автоматично дає також розділення відповідних просторових масштабів.

Для взаємодії швидкої частинки з атомною площиною (Розд. 3.1.2) ситуація виявляється ще складнішою, аніж з ланцюжком. «Аморфної» орієнтації площини, строго кажучи, взагалі не існує, але можна знайти оптимальну орієнтацію. Складнішим виявляється поняття компоненти некогерентного розсіяння, але виникають і залишкові когерентні ефекти, що не зводяться до дії неперервного потенціалу. З урахуванням всіх цих ефе-

<sup>21</sup>У чисельному моделюванні, але нехтуючи некогерентним багаторазовим розсіюванням, вони досліджувалися в [450].

ктів, поняття неперервного потенціалу атомної площини з інтуїтивного стає строго обґрунтованим.

Коли ми застосовуємо поняття неперервного потенціалу, з'являються якісно нові фізичні явища – розсіювання на атомних ланцюжках та каналювання. Послідовна взаємодія з атомними ланцюжками може протікати як багаторазове розсіювання, зі своєрідним диференціальним перерізом, і без кулонівських ускладнень (Розд. 3.2). Але азимутальний характер цього розсіювання приводить до того, що просторова дифузія виявляється пов'язаною з дифузією по швидкостях нетривіальним чином, і в цілому є пригніченою (Рівн. 3.69).

В задачі каналювання (Розд. 3.3) теж присутній замкнений характер руху частинки в фазовому просторі, і теж виникає розділення часових масштабів. Окрім цього, в умовах коли потенціал має скінченну глибину, задача додатково ускладнюється. Реалістичний опис деканалювання вимагає розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння в часткових похідних (Розд. 3.3.4). Подібні задачі (такі як задача Крамерса [452,453]) є традиційними для молекулярної фізики. Тут же ми зустрічаємося з ними в галузі фізики високих енергій, де вони мають свою специфіку.

Нарешті, в зігнутому кристалі радіус згину задає ще один масштаб, з яким конкурує критичний радіус каналювання, пропорційний енергії частинки. Тому нетривіальні ефекти виникають тут навіть без некогерентного розсіювання. Цікаво, що явище об'ємного відбиття (Розд. 3.4), хоча і існує завдяки згину кристала, стає чітко вираженим за умови  $R \gg R_c$ .

Даний Розділ може слугувати ілюстрацією того, що навіть в задачах про взаємодію заряджених частинок з кристалами теоретичний опис є цілком можливим, а складність, в свою чергу, дарує велике різноманіття та додає цікавості.

## РОЗДІЛ 4

**ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОНІВ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЙ**

Відхилення заряджених частинок, особливо найлегших – електронів та позитронів, супроводжується також електромагнітним випромінюванням. Хоча мала величина заряду електрона часто може виправдати нехтування випроміненням<sup>1</sup> від нього (як це робилося в попередніх розділах), але коли випромінення все ж випускається і виходить з мішені, воно може детектуватися на значних відстанях від неї, і надавати певну інформацію про рух електрона в оточуючому середовищі, або, якщо воно достатньо інтенсивне, його можна використовувати для прикладних цілей.

У класичній електродинаміці випромінювання розглядається як детерміновані розбіжні хвилі в електромагнітному полі навколо електрона, описувані рівняннями Максвелла. У квантовій електродинаміці реальні електромагнітні кванти можуть мати лише позитивні частоти (пропорційні до їх енергій) та випромінюються статистично – певний фотон може бути або випроміненим, або ні, з причин, невідомих для сучасної теорії. Втім, існують чіткі правила для обчислення імовірностей випромінення, що виводяться з квантової гамільтонової динаміки, і квантова електродинаміка, побудована за цими принципами, узгоджується з усіма наявними на сьогодні експериментальними даними.

На найдетальнішому рівні електромагнітне випромінення описується спектральним та кутовим розподілами, а також поляризацією. Поляризація – це асиметрія (найімовірніший напрямок та відсоткове перевищення) потоку фотонів по своїй внутрішній векторній змінній, оскільки фотони, як і класичні електромагнітні хвилі, описуються векторним полем, що вказує напрямок сили, з якою вони діяли б на статичний електричний заряд.

---

<sup>1</sup>Див. виноску 1 до Розд. 2.

Завдяки калібрувальній інваріантності рівнянь Максвелла, реальні фотони можуть мати лише поляризацію, поперечну до напрямку їх руху.

Кутовий розподіл випромінення від ультра-релятивістського електрона зазвичай є сильно сконцентрованим навколо імпульсу електрона: типові кути випромінення мають порядок  $\gamma^{-1}$ , де  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1$  – Лоренц-фактор електрона.<sup>2</sup> При  $\gamma \lesssim 10^3 \div 10^4$  такі кути ще можуть бути розрізненими за допомогою звичайних детекторів. Це іноді використовується, наприклад, для виділення областей з високою поляризацією, оскільки вона корелює з кутами вильоту фотонів. Але для вищих  $\gamma$ , при яких проводяться експерименти на сучасних прискорювачах електронів, вимірювання кутових розподілів випромінення є технічно вибагливим і зазвичай не проводиться.

Таким чином, головною спостережуваною характеристикою потоку гама-квантів від високоенергетичних електронів є спектр. Зазвичай він вимірюється за допомогою електромагнітних калориметрів на основі явища фотон-електрон-позитронних злив. Такі детектори мають низьку просторову, а отже і кутову роздільну здатність, і нечутливі до поляризації. Існують спеціально розроблені підходи для безпосереднього обчислення спектрів випромінення (див. Розд. 4.2, 4.3.4), але ми почнемо з найдетальнішої характеристики випромінення – спектрально-кутового розподілу з урахуванням поляризації.

#### **4.1. Елементарний процес гальмівного випромінення.**

##### **Спектральний, кутовий та поляризаційний розподіли**

Розглядаючи взаємодію електронів з речовиною, ми будемо в першу чергу цікавитися процесами випромінювання гальмівного типу, коли зовнішнє поле діє на електрон на обмеженій просторовій ділянці. При високих енергіях характерною рисою радіаційних процесів є те, що вони можуть розпочинатися задовго до і продовжуватися довго після взаємодії електро-

---

<sup>2</sup>В цьому Розділі ми будемо працювати в системі одиниць  $c = \hbar = 1$ .

на з мішенню. Наприклад, підчас проходження крізь мішень і розсіювання на атомах, електрон накопичує переданий імпульс, який підіймає його над масовою поверхнею. Потім віртуальний електрон може розпастися, випромінюючи реальний фотон. Альтернативно, реальний електрон може спочатку випромінити фотон і тим самим спуститися під масову поверхню, але потім повернутися на неї шляхом поглинання поздовжнього (разом з деяким поперечним) імпульсу від мішені, якого йому бракує. Нарешті, в достатньо протяжному та інтенсивному полі існує й можливість випромінення в проміжку між розсіяннями (відхиленнями).

Іншою специфікою ультра-релятивістського радіаційного процесу є те, що якщо електрон з віртуальністю порядку своєї маси  $m$  випромінює фотон, енергія якого в системі спокою віртуального електрона теж становить  $\sim m$ , то в лабораторній системі, де електрон рухається з енергією  $E \gg m$ , енергія фотона, відповідно, досягатиме величини  $\omega \sim E$ . Віртуальність порядку маси для високоенергетичного електрона досягається шляхом поглинання навіть крихітного поздовжнього імпульсу, тому такі процеси в зіткненнях з окремими атомами є типовими. Таким чином, для належного опису процесу гальмівного випромінювання необхідно враховувати можливість для випроміненого фотона мати енергію  $\omega \sim E$ . В цьому полягає головна відмінність короткохвильових (тобто квазікласичних) радіаційних процесів при високій енергії від класичної електродинаміки.

Окрім цього, оскільки кулонівське поле атомного ядра є сингулярним, воно в принципі здатне передавати електрону поперечні імпульси до  $q_{\perp} \sim m$ . Це додає кінематичних ускладнень, але перерізи, інтегральні за  $\vec{q}_{\perp}$ , можуть обчислюватися методами, аналогічними викладеним в Розд. 2.1, 2.2.

У наступному підрозділі ми детально розглянемо елементарний процес гальмівного випромінювання, коли фотон випромінюється або до, або після розсіяння, і за дипольних умов, тобто наближення еквівалентних фотонів  $q_{\perp} \ll m$ . В подальшому, у підрозділі 4.1.4, ми узагальнимо опис на неди-

польні умови  $q_{\perp} \sim m$ . Решта цього Розділу буде присвячена випромінюванню в протяжних полях, де ступінь недипольності залежить від частоти.

**4.1.1. Кінематика.** Розглянемо елементарний процес гальмівного випромінювання, коли релятивістський електрон з початковим 4-імпульсом  $p = (E, \vec{p})$  розсіюється на компактному атомному кластері (не обов'язково сферично-симетричному) і випромінює одиничний  $\gamma$ -квант у напрямку, близькому до  $\vec{p}$ . Якщо  $q$  – це 4-імпульс, переданий електрону від атомного кластера,<sup>3</sup>  $p' = (E', \vec{p}')$  – кінцевий 4-імпульс електрона, а  $q' = (\omega, \vec{k})$  – 4-імпульс випроміненого фотона, то кінематичні вектори задовольняють закону збереження енергії-імпульсу:

$$p + q = p' + q',$$

та умовам масових поверхонь

$$p^2 = p'^2 = m^2, \quad q'^2 = 0.$$

Ми будемо також слідкувати за кінцевою поляризацією фотона, але завжди усереднювати за спінами електрона, зазвичай не спостережуваними на практиці. Поляризація фотонів, якими електрон обмінюється з мішенню, є важливою в будь-якому випадку. Атомна мішень може розглядатися як статичне джерело віртуальних фотонів з однаковими поляризаціями, що описуються часоподібним вектором  $e_{\mu}$ , таким, що в калібровці Лоренца

$$e \cdot q = 0, \quad e^2 = 1. \quad (4.1)$$

У лабораторній системі (системі спокою мішені) вектор поляризації віртуальних фотонів виглядає особливо просто:

$$\begin{aligned} e &= (1, \vec{0}) \\ q &= (0, -\vec{q}) \end{aligned} \quad (\text{lab frame}). \quad (4.2)$$

<sup>3</sup>Щоб мати змогу розглянути процес подібно до комптонівського розсіяння, ми приписуємо 4-імпульс  $q$  до початкового стану. Але для подальшого застосування його до гальмівного випромінювання в речовині, ми будемо позначати просторові компоненти цього 4-вектора як  $-\vec{q}$ , так що  $\vec{q}$  – кінцевий імпульс віддачі атома [див. Рівн. (4.2)].

Поляризація випроміненого фотона  $e'_\mu$  у будь-якій калібровці задовольняє умовам

$$e' \cdot q' = 0, \quad e'^2 = -1.$$

Ми будемо також вважати, що енергії початкового та кінцевого електронів, так само як і випроміненого фотона, в лабораторній системі є великими порівняно з масою електрона (ультрарелятивістський ліміт). Лоренц-інваріантно це виражається співвідношенням  $e \cdot p \sim e \cdot p' \gg m$ . При цьому типові значення 4-імпульсу фотона є такими, що проміжний електрон не набуває надмірної віртуальності:  $p \cdot q \sim p \cdot q' \lesssim m^2$ .

В подальшому зручно буде користуватися також перемасштабованими кутами вильоту фотонів відносно імпульсу електрона як у початковому, так і у кінцевому станах:

$$\vec{\Theta} = \frac{E}{m} \left( \frac{\vec{k}}{\omega} - \frac{\vec{p}}{E} \right), \quad \vec{\Theta}' = \frac{E'}{m} \left( \frac{\vec{k}}{\omega} - \frac{\vec{p}'}{E'} \right). \quad (4.3)$$

Ці поперечні вектори є інваріантами як відносно невеликих евклідових поворотів, так і відносно поздовжніх лоренцівських бустів.

#### 4.1.2. Факторизація імовірностей розсіяння та випромінення.

У найпростішому випадку пертурбативного розсіяння, а саме однофотонного обміну між електроном та мішенню, згідно з правилами Фейнмана, амплітуда всього процесу (а отже, і її квадрат, до якого пропорційний диференціальний переріз) складається з двох множників, один з яких описує взаємодію з мішенню, а інший – випромінення реального фотона при визначеній передачі імпульсу. Ця факторизація насправді залишається дійсною і поза рамками теорії збурень по взаємодії з мішенню, завдяки різновиду імпульсного наближення при високій енергії [455–458]. Нагадаємо, як властивість непертурбативної факторизації виникає формально в різних популярних підходах.

**Просторово-часові міркування.** У лабораторній системі довжина формування фотона [124]

$$l_0 = q_z^{-1} \sim \frac{\gamma(1 - x_\omega)}{x_\omega m} \quad (4.4)$$

[де

$$x_\omega = \frac{\omega}{E} < 1, \quad (4.5)$$

а  $q_z$  – поздовжня компонента типового  $q$  у процесі, детальніше – див. рівняння (4.36) нижче] релятивістськи розтягується (принаймні у Лоренц-фактор  $\gamma$  разів). Натомість, атомне поле зосереджене у області обмеженого розміру  $\sim r_a$ . Завдяки цьому для ультра-релятивістських електронів досягається умова

$$r_a \ll l_{\text{form}}, \quad \text{i. e.,} \quad q_z r_a \ll 1, \quad (4.6)$$

яка забезпечує можливість факторизації підпроцесів розсіяння та фрагментації (випромінювання фотона). Даний тип факторизації, не потребуючи малості  $x_\omega$ , пов'язаний з приблизною колінеарністю 4-векторів  $p$ ,  $p'$  і  $q'$  в лабораторній системі (завдяки чому компонента  $q_z$  стає малою). Тому тут факторизація належить до колінеарного типу [459], і, на відміну від суто інфрачервоної факторизації, може бути справедливою і при великих енергіях фотона.

Той самий висновок можна зробити і в системі, де електрон не є ультра-релятивістським. Тут він еволюціонує разом зі своїм власним електромагнітним полем протягом часу  $\sim m^{-1}$ , але релятивістський атом мішені стає Лоренц-стиснутим у поздовжньому напрямку до розміру  $\sim r_a/\gamma$ , і діє на випромінюючий електрон як коротке збурення, приводячи до тієї ж умови (4.6).

Однак, ці якісні міркування не розкривають ще один аспект електродинаміки, важливий при високій енергії – її векторний характер. Він може бути виявлений в аналізі діаграм Фейнмана в імпульсному представленні.

**Факторизація з погляду імпульсного представлення.** В діаграмах Фейнмана одноразові передачі поздовжнього імпульсу від мішені  $q_z^{(i)}$



мають величину порядку  $r_a^{-1}$  (хоча  $\sum_i q_z^{(i)} = q_z$  має бути  $\ll r_a^{-1}$ ), тому вони роблять знаменники електронних пропагаторів релятивістськи великими. Достатня компенсація, втім, надходить від великих, пропорційних до енергії чисельників, характерних для теорій із векторним зв'язком. Це та сама причина, що забезпечує скінченні значення будь-яких малокутових високоенергетичних перерізів у калібрувальних теоріях – див., наприклад, [460].

Зокрема, випромінений реальний фотон типово змінює віртуальність електрона (квадрат його 4-імпульсу у віртуальному стані) на величину  $\lesssim m^2$ . Однак, якщо реальний фотон випромінюється між обмінами імпульсом з мішенню, він розщеплює електронний пропагатор на два великих множники у знаменнику без повної компенсації у чисельнику. Тому головний внесок дають діаграми Фейнмана, в яких реальний фотон є першим або останнім у послідовності – див. Рис. 4.1. Це дозволяє факторизувати амплітуду всього процесу на амплітуду розсіяння (майже на масовій поверхні) та непертурбативну амплітуду випромінення при одноразовому розсіянні [253, 257, 455–457].

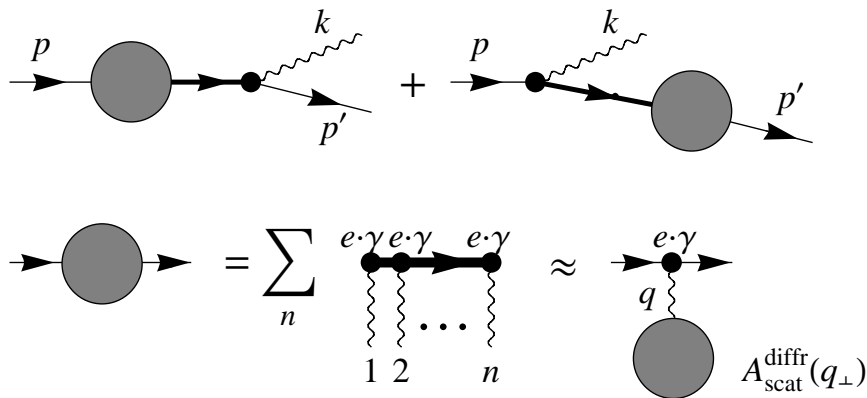


Рис. 4.1. Факторизація амплітуди випромінення фотона при розсіянні електрона на статичному джерелі електричного поля. Товщина лінії відображає віртуальність електрона або швидкість процесу: найтонші лінії представляють реальні електрони, лінії середньої товщини – розповсюдження між розсіянням та випроміненням фотона, товсті лінії – розповсюдження між розсіяннями.

Діраківська матрична структура самої амплітуди розсіяння на малі кути виявляється дуже простою. У кожному внеску до амплітуди від розповсюдження електрона між розсіяннями (скажімо, на початковому кінці)

$$e \cdot \gamma \frac{p \cdot \gamma - \sum q^{(i)} \cdot \gamma + m}{(p - \sum q^{(i)})^2 - m^2} e \cdot \gamma$$

спіновий чисельник може бути переписаний як

$$e \cdot \gamma \left( p \cdot \gamma - \sum q^{(i)} \cdot \gamma + m \right) e \cdot \gamma = 2e \cdot p e \cdot \gamma + \left( -p \cdot \gamma + \sum q^{(i)} \cdot \gamma + m \right) e^2. \quad (4.7)$$

З  $e \cdot p/m = \gamma$  (Лоренц-фактор) та  $\bar{u}' e \cdot \gamma u / \bar{u}' u \sim \gamma$ , другий член в правій частині Рівн. (4.7), як правило, має порядок малості  $\mathcal{O}(\gamma^{-2})$  відносно першого, і ним можна знехтувати в межах точності наближення факторизації (4.6). Після проведення такої процедури в усіх порядках матрична амплітуда розсіяння набуває вигляду  $e \cdot \gamma A_{\text{scat}}^{\text{diff}}(q_{\perp})$ , де  $A_{\text{scat}}^{\text{diff}}(q_{\perp})$  – це *незалежна від спіну* амплітуда розсіяння на малі кути, що включає всі порядки теорії збурень [460]. З фізичного погляду, вона може інтерпретуватися як дифракційна (потенціальна, пружна), тому її незалежність від спіну є не дивною.

В підсумку, факторизаційна теорема [143, 257] для процесу гальмівного випромінювання від високоенергетичного електрона може бути записана як

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{rad}} &= \frac{1}{2E} |T_{fi}|^2 \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^2 2E'} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \\ &\approx d\sigma_{\text{scat}}^{\text{diff}}(\vec{q}_{\perp}) dW_{\text{rad}}(\vec{q}_{\perp}, q'). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тут

$$d\sigma_{\text{scat}}^{\text{diff}} = |A_{\text{scat}}^{\text{diff}}|^2 \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^2} \quad (4.9)$$

є дифракційним [13, 20, 46, 460] (для малих кутів) диференціальним перерізом розсіяння, який не залежить від спіну електрона, а

$$dW_{\text{rad}} = \frac{\pi\alpha}{EE'} |M_{\text{rad}}|^2 d\Gamma_k \quad (4.10)$$

позначає диференціальну ймовірність випромінення одиничного фотона в елемент Лоренц-інваріантного об'єму фазового простору

$$d\Gamma_k = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}. \quad (4.11)$$

$M_{\text{rad}}$  – це інваріантний матричний елемент (його спінова частина), структура якого визначається правилами Фейнмана:

$$M_{\text{rad}} = \bar{u}' \left[ \frac{e'^* \cdot \gamma(p \cdot \gamma + q \cdot \gamma + m)e \cdot \gamma}{2p \cdot q + q^2} - \frac{e \cdot \gamma(p \cdot \gamma - q' \cdot \gamma + m)e'^* \cdot \gamma}{2p \cdot q'} \right] u. \quad (4.12)$$

Він охоплює всі ефекти, пов'язані зі спіном електрона, і є калібрувально інваріантним, тобто не змінюється при заміні  $e \rightarrow e + cq$ ,  $e'^* \rightarrow e'^* + c'q'$  за умови, що біспінори  $u$  та  $\bar{u}' = u^\dagger \gamma^0$  задовольняють рівнянням Дірака для вільних електронів:

$$(p \cdot \gamma - m)u = 0, \quad \bar{u}'(p' \cdot \gamma - m) = 0.$$

Залежність блоку (4.12) від спіну електрона стає істотною, коли енергія випроміненого фотона за порядком величини дорівнює початковій енергії електрона. У граничному випадку м'яких фотонів  $\omega \rightarrow 0$  така залежність зникає:

$$M_{\text{rad}}^{\text{soft}} = \left( \frac{p'}{p' \cdot q'} - \frac{p}{p \cdot q'} \right) \cdot e'^* \bar{u}' e \cdot \gamma u. \quad (4.13)$$

Для порівняння, у безспіновому випадку [461]

$$M_{\text{rad}}^{\text{spin0}} \propto E \frac{p' \cdot e'}{p' \cdot q'} - E' \frac{p \cdot e'}{p \cdot q'} - e'_0. \quad (4.14)$$

**4.1.3. Дипольне наближення (наближення еквівалентних фотонів).** Подальшого кінематичного спрощення можна досягти для випромінення при розсіянні на атомах, або в складеній з атомів речовині, оскільки в цьому випадку типові передачі імпульсу є відносно малими:

$$|q^2| \sim r_a^{-2} \ll m^2. \quad (4.15)$$

Хоча тут  $q^2 \neq 0$ , ця віртуальність є значно меншою від інших кінематичних інваріантів у даній задачі:  $p \cdot q \sim p' \cdot q \sim m^2$ . Нехтування  $q^2$  порівняно з  $m^2$  приводить до наближення еквівалентних фотонів [198, 229]:

$$M_{\text{rad}} \approx M_{\text{Compt}}. \quad (4.16)$$

Використовуючи калібрувальну інваріантність, квадрат амплітуди реального комптонівського розсіяння  $M_{\text{Compt}}$ , усереднений за початковими та просумований за кінцевими спіновими станами електрона,<sup>4</sup> можна виразити у вигляді

$$\left\langle |M_{\text{Compt}}|^2 \right\rangle_{\text{el. spin}} = 4(e_p \cdot e'_p)^2 + e_p^2 e'_p{}^2 \frac{(p \cdot q - p \cdot q')^2}{p \cdot q p \cdot q'}, \quad (4.17)$$

що є доволі простим у порівнянні з початковою структурою амплітуди (4.12). Тут  $e_p$  та  $e'_p$  позначають 4-вектори поляризації фотонів у калібровці, в якій вони є ортогональними до початкового 4-імпульсу електрона  $p$  (тобто мають лише просторові компоненти в системі спокою початкового електрона):

$$e_p = e - q \frac{e \cdot p}{p \cdot q}, \quad (4.18)$$

$$e'_p = e' - q' \frac{e' \cdot p}{p \cdot q'}. \quad (4.19)$$

Квадрат вектора поляризації кінцевого фотона дорівнює  $-1$  в будь-якій калібровці, але квадрат (4.18) при  $q^2 \neq 0$  є відмінним від одиниці, і навіть необмеженим, якщо  $e \cdot p \rightarrow \infty$ . В ненормованості вектора  $e_p$  (і Лоренц-інваріантному запису) полягає єдина відмінність формули (4.17) від відомих формул для Комптон-ефекту з лінійно поляризованими фотонами [144, 158, 257, 462]. Величина квадрата  $e_p$  визначає потік еквівалентних фотонів від атома до електрона.

Завдяки тому, що вектори поляризації  $e_p$  та  $e'_p$  входять до Рівн. (4.17) лише у вигляді взаємного скалярного добутку, поляризаційні властивості гальмівного випромінення виражаються через них найпростіше. Але саме

<sup>4</sup>Ефекти поляризації ферміонів досліджувалися в [13, 21, 22, 42, 47].

по собі існування настільки простого виразу є нетривіальним, адже існують й інші кінематичні вектори, з яких можна утворити скалярні добутки. Звісно,  $\langle |M_{\text{Compt}}|^2 \rangle_{\text{el. spin}}$  можна аналогічно виразити і через змінні в системі спокою електрона у кінцевому стані, але це було б менш зручно, оскільки зазвичай кінцевий електрон не реєструється,<sup>5</sup> тобто за його станами проводиться інтегрування.

Варто також зауважити, що у класичному ліміті  $q, q' \rightarrow 0$  комптонівського розсіяння другий, незалежний від поляризації фотона доданок у (4.17), який містить квадрат  $p \cdot q - p \cdot q' = q \cdot q'$  у чисельнику, зникає. Перший доданок, що містить добуток векторів поляризації фотона, тоді описує томсонівське розсіяння. У квантовому випадку корелятор поляризацій не змінюється, але вступає в гру член, незалежний від поляризації фотона, завдячуючий ефектам, пов'язаним зі спіном електрона та віддачею при випромінюванні, що загалом знижує ступінь поляризації.<sup>6</sup>

**4.1.3.1. Інтерпретація у системі спокою початкового електрона. Стереографічна проекція.** Визначимо тепер кутовий розподіл поляризованого випромінювання в системі спокою початкового електрона. В ній

$$p = (m, \vec{0}), \quad (4.20)$$

а вектор  $q$  прямує до скінченного 4-вектора, який належить до світлового фронту:

$$q_{q_{\perp} \ll m} \simeq \left( \frac{p \cdot q}{m}, -\frac{p \cdot q}{m}, \vec{q}_{\perp} \right), \quad \frac{p \cdot q}{m} \sim m, \quad q^2 = -\vec{q}_{\perp}^2. \quad (4.21)$$

Що стосується поляризації початкового фотона, в початковій калібровці (4.2) 4-вектор  $e$  є ортогональним до 4-вектора  $q$ , і у високоенергетичному ліміті  $e \cdot p/m \rightarrow \infty$  в IERF він стає майже світлоподібним:

$$e \simeq \frac{1}{m}(e \cdot p, -e \cdot p, \vec{0}_{\perp}). \quad (4.22)$$

<sup>5</sup>Див., однак, [251, 252].

<sup>6</sup>Для комптонівського розсіяння на скалярній зарядженій частинці, в калібровці (4.18), (4.19) амплітуда процесу пропорційна лише до  $e_p \cdot e'_p$  [461].

Але в калібровці (4.18), натомість, він є переважно поперечним:

$$e_p \simeq \left( 0, 0, -\vec{q}_\perp \frac{e \cdot p}{p \cdot q} \right), \quad (4.23)$$

і не зовсім ортогональним до  $q$  ( $e_p \cdot q \neq 0$ ). Нарешті, у імпульса кінцевого фотона в системі спокою початкового електрона всі компоненти є сумірними:

$$q' = \left( \Omega, K_z, \vec{K}_\perp \right), \quad \vec{K}_\perp = \vec{k}_\perp, \quad K_z = \Omega \cos \Psi, \quad (4.24)$$

а  $e'_p$  є одиничним просторовим вектором, ортогональним до  $\vec{K}$ :

$$e'_p = (0, \vec{e}'_p), \quad \vec{e}'_p \cdot \vec{K} = 0, \quad |\vec{e}'_p| = 1. \quad (4.25)$$

Скалярний добуток (4.23) та (4.25), що входить до рівняння (4.17), дорівнює

$$e_p \cdot e'_p \approx -\frac{\vec{q}_\perp}{q_z} \cdot \vec{e}'_p \quad (\text{IERF}), \quad (4.26)$$

[де використано  $e \cdot p / p \cdot q \approx 1/q_z$ , з урахуванням визначення компонент  $q$  рівнянням (4.2)]. Ця структура свідчить, що поляризація  $\vec{e}'_p$  в системі спокою початкового електрона розподіляється вздовж меридіанів сфери напрямків випромінювання, з полярною віссю, спрямованою вздовж вектора  $\vec{q}_\perp$ .

Все, що нам потрібно тепер – це пов'язати  $\vec{e}'_p$  з  $\vec{e}'$  в лабораторній системі. Для цього можна формально застосувати зворотне калібрувальне перетворення (4.19) разом з відповідним лоренцівським бустом. Але існує більш корисна геометрична інтерпретація [18], яка полягає в наступному.

Оскільки  $\vec{e}'_p$  і  $\vec{e}'$  є векторами поляризації одного й того ж фотона в різних калібровках та системах відліку, вони мають однакову компоненту, поперечну до площини  $(\vec{K}, Oz)$ , яка не змінюється ані бустом вздовж  $Oz$ , ані калібрувальним перетворенням, яке є зсувом вздовж 4-вектора  $\vec{K}$ . Оскільки, до того ж, завдяки тотожності  $|\vec{e}'_p| = |\vec{e}'| = 1$ , компоненти у площині  $(\vec{K}, Oz)$  мають однакові модулі, вони повинні бути пов'язані чистим поворотом [18]. Значення відповідного кута повороту є очевидним: оскільки  $\vec{e}'$

є майже ортогональним до  $Oz$ , тоді як  $\vec{e}'_p$  є ортогональним до  $\vec{K}$ , цей кут повороту дорівнює просто куту  $\vec{\Psi}$  між  $Oz$  та  $\vec{K}$ :

$$\vec{e}'_p = R_{\vec{\Psi}(\vec{\Theta})} \vec{e}'_p. \quad (4.27)$$

( $R_{\vec{\Psi}(\vec{\Theta})}$  є добутком оператора калібрувального перетворення та оператора буста.) З урахуванням цього, рівняння (4.26) може бути представлено як

$$e_p \cdot e'_p = -\frac{\vec{q}_\perp}{q_z} \mathbf{G} \vec{e}' \quad (\text{IERF}), \quad (4.28)$$

де

$$\mathbf{G} = P_\perp R_{\vec{\Psi}} P_\perp \quad (4.29a)$$

$$\begin{aligned} &= \left( P_\perp - P_{\vec{k}_\perp} \right) + \cos \Psi P_{\vec{k}_\perp} \\ &\equiv P_\perp - (1 - \cos \Psi) P_{\vec{k}_\perp}, \end{aligned} \quad (4.29b)$$

$P_\perp$  – оператор проєкції на площину, ортогональну до  $Oz$  (він стоїть по обидва боки від  $R_{\vec{\Psi}}$ , оскільки як  $\vec{q}_\perp$ , так і  $\vec{e}'$  належать до цієї площини), а  $P_{\vec{k}_\perp}$  – проєктор на напрямок  $\vec{k}_\perp$  (при цьому  $P_\perp - P_{\vec{k}_\perp}$  не змінюється дією оператора  $R_{\vec{\Psi}}$ ).

Щоб виразити  $\mathbf{G}$  через  $\vec{\Theta}$ , залишається явним чином пов'язати  $\Psi$  з  $\Theta$ . За визначенням,

$$\vec{\Theta} = \gamma \frac{\vec{k}_\perp}{\omega} = \gamma \vec{\theta}, \quad (4.30)$$

де  $\omega$  – енергія фотона в лабораторній системі. Вона пов'язана з енергією та компонентами імпульсу в системі спокою початкового електрона формулою релятивістського ефекту Доплера:

$$\omega = \gamma (\Omega + K_z). \quad (4.31)$$

Рівняння (4.30) та (4.31) разом дають:

$$\vec{\Theta}(\vec{K}) = \frac{\vec{k}_\perp}{\Omega + K_z} \quad (\text{light aberration rule}). \quad (4.32)$$

Чисельник та знаменник в Рівн. (4.32) можна розглядати як сторони прямокутного трикутника, гострі кути якого лежать на сфері напрямків

випромінення фотона на Рис. 4.2. Тому

$$\Theta = \tan \frac{\Psi}{2}. \quad (4.33)$$

Якщо в рівнянні (4.29b) записати  $1 - \cos \Psi = 2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} = \frac{2 \tan^2 \frac{\Psi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\Psi}{2}}$  і виразити його добуток з проектором  $P_{\vec{k}_\perp}$  через  $\vec{\Theta}$  як

$$(1 - \cos \Psi) P_{\vec{k}_\perp} = \frac{2}{1 + \Theta^2} \vec{\Theta} \otimes \vec{\Theta}, \quad (4.34)$$

то отримуємо явне представлення для  $\mathbf{G}$  в термінах кута випромінення у лабораторній системі:

$$G_{im}(\vec{\Theta}) = \delta_{im} - \frac{2}{1 + \Theta^2} \Theta_i \Theta_m \quad (4.35a)$$

$$= (1 + \Theta^2) \frac{\partial}{\partial \Theta_i} \frac{\Theta_m}{1 + \Theta^2}. \quad (4.35b)$$

З (4.35a) видно, що це оператор, який змінює в площині  $\vec{\Theta}$  радіальні компоненти векторів, але не змінює азимутальних.

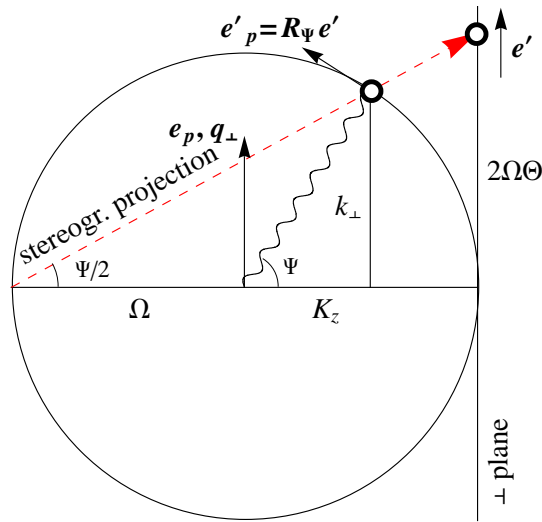


Рис. 4.2. Відповідність між кутами випромінення та поляризацією фотона в системі спокою початкового електрона ( $\vec{\Psi}$ ,  $\vec{e}'_p$ ) і в поперечній («високоенергетичній») площині ( $\vec{\Theta}$ ,  $\vec{e}'$ ). Інші позначення див. у тексті. Вектори, виділені жирним шрифтом, мають також компоненти, перпендикулярні до площини рисунку. Штрихова лінія відображає стереографічну проекцію, що визначається співвідношенням (4.32).



Таким чином, виявляється, що Рівн. (4.33), отримане з правил спеціальної теорії відносності у 4-вимірному псевдоевклідовому просторі допускає просту геометричну інтерпретацію у звичайному евклідовому 3-вимірному просторі [18]. А саме, якщо прямокутний трикутник, обидва гострі кути якого лежать на сфері, розширити до площини, що є дотичною до сфери у її передній точці (див. Рис. 4.2), його вертикальна сторона буде дорівнювати  $2\Omega \tan \frac{\Psi}{2}$  (де  $2\Omega$  – діаметр сфери), тобто  $2\Omega\Theta$ . Для фіксованого радіусу сфери  $\Omega$  це пропорційно до  $\Theta$ . Тому кут випромінення в лабораторній системі можна отримати з кута в системі спокою початкового електрона шляхом проектування сфери кутів випромінення з екваторіальної точки на задньому кінці осі  $z$  на площину, дотичну до сфери у передній точці осі  $z$ . У математиці таке відображення називається стереографічною проекцією. Ця дещо формально виведена, але насправді дуже проста геометрична конструкція визначає топологію розподілу поляризації в цілому, як буде показано нижче.

**4.1.3.2. Визначення кутового розподілу за напрямками поляризації для певного напрямку переданого імпульсу.** Підставляючи всі складові (4.28), (4.35а) до Рівн. (4.17), а його, в свою чергу, до рівняння (4.10), та беручи до уваги рівності

$$q_z = \frac{mx_\omega (1 + \vec{\Theta}^2)}{2\gamma(1 - x_\omega)} \quad (4.36)$$

та

$$d\Gamma_k = \frac{d\omega \omega^2 d\vec{o}_{\vec{k}}}{2\omega (2\pi)^3} \simeq \frac{dx_\omega m^2 x_\omega^2}{x_\omega 16\pi^3} d^2\Theta, \quad (4.37)$$

зрештою отримуємо компактний вираз для диференціальної ймовірності гальмівного випромінення в лабораторній системі:

$$\begin{aligned} x_\omega \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega d^2\Theta} &= \frac{m^2 x_\omega^2}{16\pi^3} \frac{4\pi\alpha}{4EE'} \left\langle (M_{\text{Compt}})^2 \right\rangle_{\text{el. spin}} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2 m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ 4(1 - x_\omega) (G_{im} \hat{q}_{m\perp} e'_i)^2 + x_\omega^2 \right\}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

де

$$\hat{q}_\perp = \frac{\vec{q}_\perp}{|\vec{q}_\perp|}.$$

Стосовно інтерпретації рівняння (4.38) [а також (4.42) нижче] з позицій методу еквівалентних фотонів, варто зауважити, що окрім загальної пропорційності до  $\vec{q}_\perp^2$  і, таким чином, до потоку еквівалентних фотонів, як  $dW_{\text{dip}}/d\Gamma_k$ , так і  $dW_{\text{unpol}}/d\Gamma_k$ , все ще залежать від напрямку  $\hat{q}_\perp$ , а значить, і від  $\vec{q}_\perp$  в цілому, попри умову  $\vec{q}_\perp^2 \ll m^2$ . Вплив залишкових азимутальних кореляцій на реакції, викликані еквівалентними фотонами, в принципі, відомий для інших задач [463]. Його не слід розглядати як суттєве порушення факторизації (оскільки фізичні умови для неї задовольняються) – радше, це модифікація внаслідок поляризації, яку несе потік еквівалентних фотонів. Ця поляризація визначається вектором  $\hat{q}_\perp$ . Відзначений ефект зникає, якщо проінтегрувати  $dW_{\text{dip}}/d\Gamma_k$  за азимутальними напрямками вектора  $\vec{\Theta}$  і просумувати за незалежними станами  $\vec{e}'$  (як це зазвичай робиться у випадку інклюзивного утворення периферичних частинок [464], або втрат енергії швидких заряджених частинок у речовині, до яких застосовувалося початкове формулювання методу еквівалентних фотонів [199]).

Оскільки поляризація є векторною величиною, її можна виражати по-різному. Популярним є вираження її через параметри Стокса – проєкції поляризації на фіксовані декартові осі. Проте, для практики важливіше знати абсолютну величину та напрямок поляризації, тому корисніше представляти розподіл напрямків поляризації за допомогою кривих, тангенційних в кожній точці до вектора поляризації (криві напрямку). Їх побудова вимагає розв'язку певного диференціального рівняння, який неважко отримати для фундаментального випадку, коли імпульс, переданий мішені, є визначеним.

Криві напрямків поляризації для випадку фіксованого напрямку  $\vec{q}_\perp$  визначаються диференціальним рівнянням

$$d\vec{\Theta} \parallel G\vec{q}_\perp. \quad (4.39a)$$

Якщо вибрати напрямок  $\vec{q}_\perp$  вздовж осі  $y$ , рівняння (4.39a) запишеться як

$$\frac{d\Theta_y}{d\Theta_x} = \frac{G_{yy}(\Theta_x, \Theta_y)}{G_{xy}(\Theta_x, \Theta_y)} = -\frac{1 + \Theta_x^2 - \Theta_y^2}{2\Theta_x\Theta_y}, \quad (4.39b)$$

що може бути переписано як  $\Theta_x \frac{d\vec{\Theta}^2}{d\Theta_x} = \vec{\Theta}^2 - 1$ , і має загальний розв'язок

$$\vec{\Theta}^2 + \text{const}[\vec{q}_\perp \times \vec{\Theta}]_z = 1, \quad (4.40)$$

де  $[\vec{q}_\perp \times \vec{\Theta}]_z \propto \Theta_x$ . Це – сімейство кіл, які проходять через дві вузлові точки

$$\vec{\Theta} = \pm \hat{q}_\perp \quad (4.41)$$

(див. Рис. 4.3) [18]. У знайдених вузлах поляризація випромінення має обертатися в нуль. Це також узгоджується зі зникненням  $G_{\hat{q}_\perp} \approx \hat{q}_\perp \mp \vec{\Theta}$  у рівнянні (4.38).

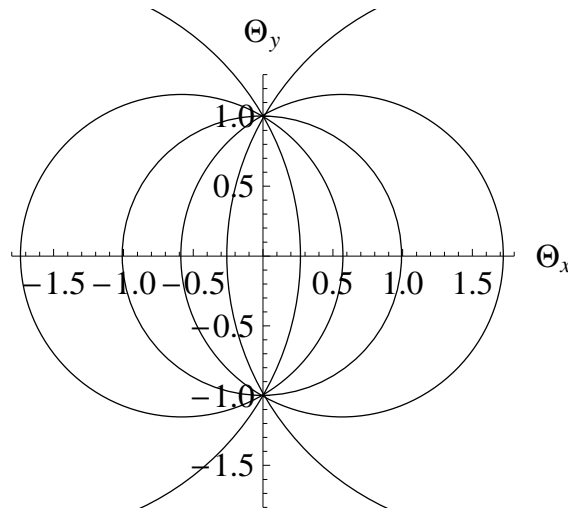


Рис. 4.3. Напрямки поляризації фотонів у площині вектора  $\vec{\Theta}$  (в лабораторній системі). Вісь  $y$  обрано вздовж напрямку  $\vec{q}_\perp$ . Криві напрямків поляризації представляють собою математичні кола. Ступінь поляризації є функцією  $x_\omega$ .

Розподіл поляризації фотонів вздовж ідеальних кіл природніше пояснюється за допомогою поняття стереографічної проекції, введеного в підрозділі 4.1.3.1. Як було зазначено вище, в системі спокою початкового електро-

на<sup>7</sup> поляризація дипольного випромінення розподіляється по сфері напрямків випромінення фотонів вздовж меридіональних кіл з полюсами в  $\vec{\Theta} \pm \hat{q}_\perp$ . З теорії стереографічної проекції [465] відомо, що така проекція відбиває будь-яке коло на сфері у коло на тангенційній площині. Тому меридіональні кола на сфері відбиваються на площині у сімейство кіл, що проходять через пару точок (4.41), які є проекціями полюсів сфери. Це й зумовлює форму розполілу на Рис. 4.3. Таким чином, існування вузлів поляризації, що може виглядати дивним з погляду диференціального рівняння, доволі тривіально передбачається стереографічною проекцією.

У застосуваннях особливе значення має коло з центром у початку координат, оскільки воно є інваріантним відносно поворотів переданого імпульсу. Його існування впливає з осової симетрії стереографічної проекції для даної кривої напрямків на сфері відносно осі  $z$ . З рівняння (4.29b) також очевидно, що при  $\Psi = \pi/2$ , що відповідає  $|\vec{\Theta}| = 1$ , оператор  $\mathbf{G} = \mathbf{P}_\perp - \mathbf{P}_{\vec{k}_\perp}$  стає проектором на напрямок, ортогональний до площини випромінення, тобто до вектора  $\vec{\Theta}$  [це впливає також з представлення (4.35a)].<sup>8</sup> Висловлюючись більш фізично, при  $\vec{K} \perp Oz$  компонента вектора поляризації, яка належить до площини випромінення, має бути спрямована вздовж  $Oz$ , але відповідна проекція на поперечну площину, що містить  $\hat{q}_\perp$ , зникає.

**4.1.3.3. Інтенсивність неполяризованого випромінення та ступінь поляризації.** Імовірність неполяризованого випромінення можна отримати підсумовуванням рівняння (4.38) за незалежними напрямками вектора  $\vec{e}'$ :

$$x_\omega \frac{dW_{\text{unpol}}}{dx_\omega d^2\Theta} = \sum_{\vec{e}'} x_\omega \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega d^2\Theta}$$

<sup>7</sup>Нагадаємо, що кінцевий електрон в цій системі, взагалі кажучи, є релятивістським ( $x_\omega \sim 1$ ), і його система спокою є суттєво нееквівалентною системі спокою початкового електрона. Втім, це не порушує дипольного характеру випромінювання.

<sup>8</sup>Завдячуючи цьому, напрямок поляризації стає незалежним від  $\vec{q}_\perp$ , що стабілізує ступінь поляризації (див. Розділ 4.1.3.4).

$$= \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\vec{q}_\perp^2}{m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ 2(1 - x_\omega) \left( \mathbf{G}\hat{q}_\perp \right)^2 + x_\omega^2 \right\}. \quad (4.42)$$

Корисними є два представлення  $(\mathbf{G}\hat{q}_\perp)^2$ :

$$(\mathbf{G}\hat{q}_\perp)^2 = 1 - \frac{4}{(1 + \Theta^2)^2} \left( \vec{\Theta} \cdot \hat{q}_\perp \right)^2 \quad (4.43a)$$

$$\equiv \frac{\left( \vec{\Theta} + \hat{q}_\perp \right)^2 \left( \vec{\Theta} - \hat{q}_\perp \right)^2}{(1 + \Theta^2)^2}, \quad (4.43b)$$

перше з яких свідчить, що  $(\mathbf{G}\hat{q}_\perp)^2$  має верхню межу 1 (яка досягається на «екваторіальній» лінії  $\vec{\Theta} \perp \hat{q}_\perp$ ), в той час як друге представлення демонструє можливість обернення  $(\mathbf{G}\hat{q}_\perp)^2$  в нуль у полюсах  $\vec{\Theta} = \pm \hat{q}_\perp$ . В загальному випадку,

$$0 \leq (\mathbf{G}\hat{q}_\perp)^2 \leq 1.$$

Кутовий розподіл величини (4.42) представлений на Рис. 4.4.

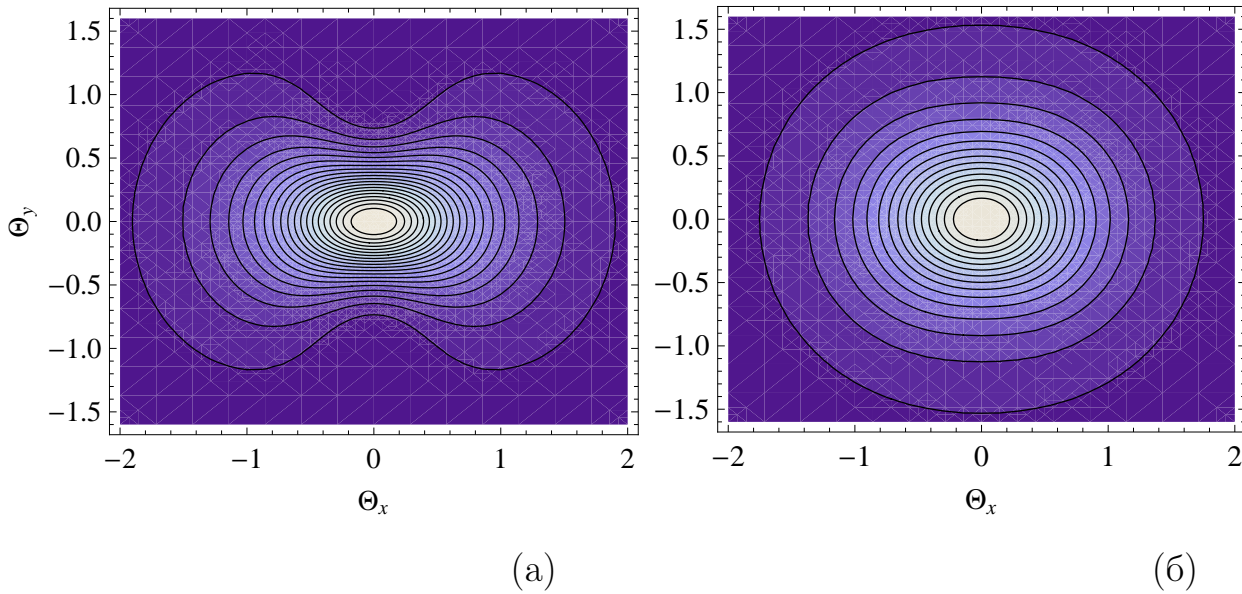


Рис. 4.4. Кутовий розподіл інтенсивності неполяризованого гальмівного випромінювання, що визначається виразом (4.42). а).  $x_\omega = 0.2$ ; б).  $x_\omega = 0.8$ . Напрямок вектора  $\vec{q}_\perp$  вибрано вздовж осі  $y$ .

При великих  $\Theta$  інтенсивність випромінювання (4.38) спадає як  $\Theta^{-4}$ , тобто слідує тому ж закону, що і диференціальний переріз розсіяння Резерфорда. Це – загальний наслідок пропорційності амплітуди одному домінуючому пропагатору, в даному випадку – електронному, а не фотонному.

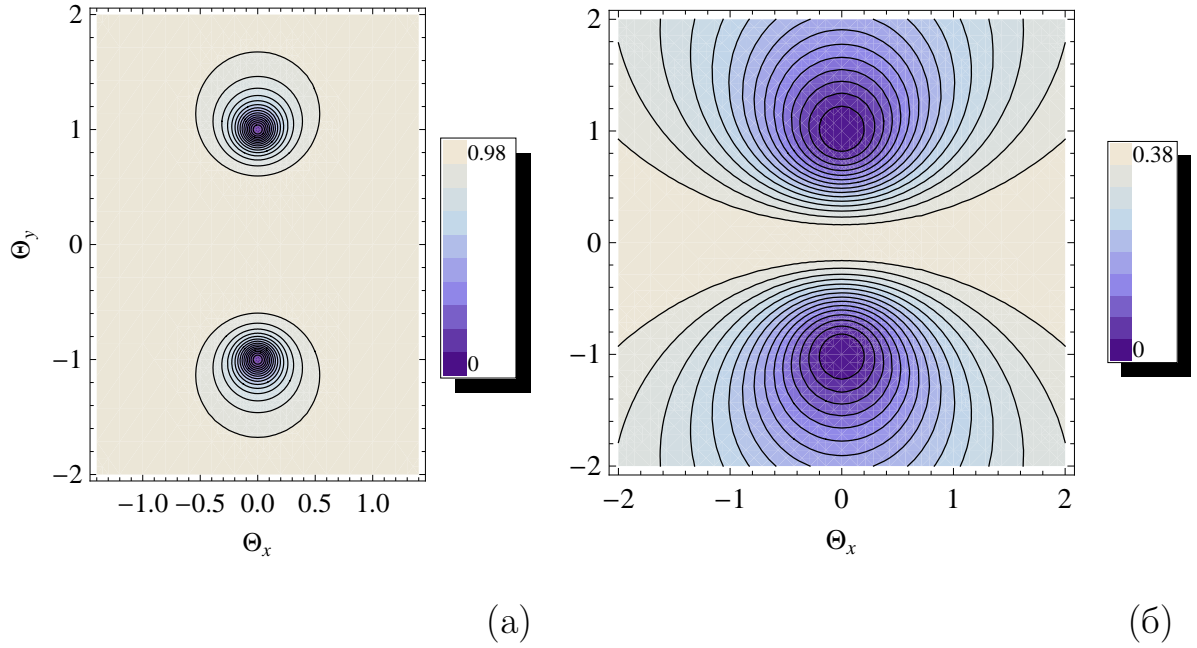


Рис. 4.5. Кутовий розподіл ступеня поляризації дипольного випромінення при передачі імпульсу вздовж осі  $y$ , рівняння (4.43). а).  $x_\omega = 0.2$ ; б).  $x_\omega = 0.8$ . Локальні напрямки поляризації показані на Рис. 4.3.

Ступінь поляризації випромінення, що відповідає рівнянню (4.38), дорівнює [18]

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\max dW_{\text{dip}} - \min dW_{\text{dip}}}{\max dW_{\text{dip}} + \min dW_{\text{dip}}} \\
 &= \left\{ 1 + \frac{x_\omega^2}{2(1-x_\omega)} \frac{(1+\Theta^2)^2}{(\vec{\Theta} + \hat{q}_\perp)^2 (\vec{\Theta} - \hat{q}_\perp)^2} \right\}^{-1}. \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Її кутовий розподіл зображений на Рис. 4.5.

**4.1.3.4. Кутовий розподіл поляризації випромінення в ізотропній мішені.** При розсіюванні на окремих атомах (або в аморфній мішені товщиною  $dz$ ) всі напрямки вектора  $\vec{q}_\perp$  є рівноймовірними. Усереднення рівняння (4.38) за ними, тобто заміна  $\hat{q}_\perp i \hat{q}_\perp j \rightarrow \frac{1}{2} \delta_{ij}$ , приводить до резуль-

татів класичних робіт<sup>9</sup> [231, 466, 467]:

$$x_\omega \frac{dW_{\text{isotr}}}{dx_\omega d^2\Theta dz} = \frac{d\langle \vec{q}_\perp^2 \rangle}{dz} \frac{\alpha}{4\pi^2 m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ (1 - x_\omega) \left[ 1 - \frac{4(\vec{\Theta} \cdot \vec{e}')^2}{(1 + \Theta^2)^2} \right] + x_\omega^2 \right\}. \quad (4.45)$$

Звідси випливає, що випромінення поляризовано перпендикулярно до  $\vec{\Theta}$  (азимутально), зі ступенем [231]

$$\begin{aligned} P_{\text{isotr}}(\Theta, x_\omega) &= \frac{dW_{\text{isotr}}(\vec{e}' \perp \vec{\Theta}) - dW_{\text{isotr}}(\vec{e}' \parallel \vec{\Theta})}{dW_{\text{isotr}}(\vec{e}' \perp \vec{\Theta}) + dW_{\text{isotr}}(\vec{e}' \parallel \vec{\Theta})} \\ &= \frac{2\Theta^2}{1 + \Theta^4 + \frac{x_\omega^2}{2(1-x_\omega)} (1 + \Theta^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Поведінку  $P_{\text{isotr}}(\Theta)$  зображено на Рис. 4.6 для декількох значень  $x_\omega$ . Стівідсоткова поляризація при  $\Theta = 1$  і  $x_\omega \rightarrow 0$  відповідає інваріантному відносно поворотів одиничному колу напрямків поляризації на Рис. 4.3. При цьому інтенсивність неполяризованого випромінення дорівнює

$$x_\omega \sum_{\vec{e}'} \frac{dW_{\text{isotr}}}{dx_\omega d^2\Theta dz} = \frac{d\langle \vec{q}_\perp^2 \rangle}{dz} \frac{\alpha}{2\pi^2 m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ 2(1 - x_\omega) \frac{1 + \Theta^4}{(1 + \Theta^2)^2} + x_\omega^2 \right\}. \quad (4.47)$$

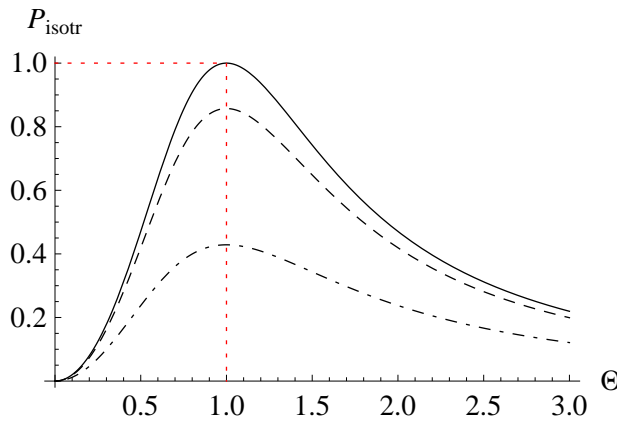


Рис. 4.6. Кутовий розподіл ступеня поляризації дипольного випромінення в ізотропній мішені для долей енергії фотона  $x_\omega = 0, \frac{1}{3}$  і  $\frac{2}{3}$  (зверху вниз). Вектор поляризації спрямований перпендикулярно до  $\vec{\Theta}$ .

<sup>9</sup>Тут ми вважаємо, що факторизація залишається справедливою навіть для макроскопічної мішені. Це рівносильно розгляду мішені як тонкої, тобто нехтуванню, наприклад, ефектами пригнічення випромінювання, такими як ЛПМ при низьких  $\omega$ , які будуть розглянуті нижче.

Функція

$$\frac{1}{2}G_{im}G_{im} = \frac{1 + \Theta^4}{(1 + \Theta^2)^2} \equiv 1 - \frac{2\Theta^2}{(1 + \Theta^2)^2}, \quad (4.48)$$

що визначає при малих  $x_\omega$  праву частину рівняння (4.47), має мінімум при  $\Theta = 1$ , саме там, де розташовані провали неусередненого  $dW_{\text{dip}}/d\Gamma_k$  (див. Рис. 4.4). Проте, у кутовому розподілі азимутально усередненого випромінювання насправді не виникає ніякого мінімуму чи «плеча» поблизу цієї точки (див. Рис. 4.7а, 1.8б), оскільки ще є множник  $1/(1 + \Theta^2)^2$ , який спадає швидше, ніж (4.48) зростає після мінімуму. Тим не менш, певний відбиток функції (4.48) у поведінці кутового розподілу випромінювання Бете-Гайтлера можна побачити, побудувавши логарифм кутового розподілу як функцію логарифму  $\Theta$ .

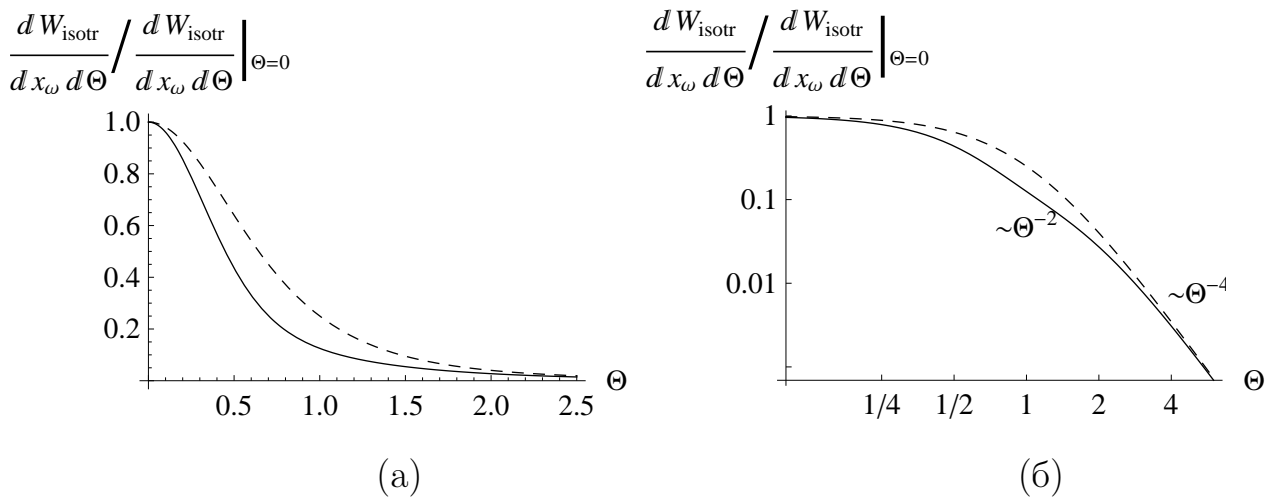


Рис. 4.7. а). Кутовий розподіл дипольного гальмівного випромінювання в ізотропній мішені, нормований на значення при  $\Theta = 0$  [рівняння (4.47)]. Нижня (суцільна) крива – інфрачервоний ліміт  $x_\omega \rightarrow 0$ . Верхня (штрихова) крива – ліміт великої віддачі  $x_\omega \rightarrow 1$ , що дорівнює коефіцієнту  $1/(1 + \Theta^2)^2$  у диференціальній інтенсивності. б). Те саме в логарифмічному масштабі по обох осях. На останньому графіку кутовий розподіл м'якого випромінювання має два «коліна»: при  $\Theta \approx \frac{1}{2}$  і  $\Theta \approx 2$  (порівн. з Рис. 4.4а), в той час як жорстке випромінювання має лише одне – при  $\Theta \approx 1$ .

На подібному графіку (див. Рис. 4.7б) лінійна поведінка відповідає убуттю за ступінним законом. У порівнянні з поведінкою множника



$1/(1 + \Theta^2)^2$ , що має на двічі логарифмічному графіку лише одне «колiно» при  $\Theta \approx 1$ , кутовий розподіл випромiнення в iзотропнiй мiшенi при  $x_\omega \ll 1$  вiзуально має два колiна: приблизно при  $\Theta_1 \approx 0.5$  i при  $\Theta_2 \approx 2$ . Мiж цими двома колiнами поведiнка близька до  $\sim \Theta^{-2}$ . Вище  $\Theta_2$  ступiнь спадання стає  $\sim \Theta^{-4}$  (що нагадує закон Резерфорда). Цю двоколiнну форму кутового розподiлу випромiнення [18] може бути необхідним враховувати при вимiрюваннях з малою статистикою, адже на другому колiнi диференцiальний поперечний перерiз зменшується майже в  $10^2$  разiв. Але зi збiльшенням  $x_\omega$ , розподiл наближається до одноколiнного граничного вигляду.

#### 4.1.3.5. Спектр, iнтегральний по кутах, i середня поляризацiя.

Якщо кутовий розподiл випромiнення не вимiрюється в експериментi (як це буває при  $\gamma > 10^4$ ), i використовується лише природна колiмацiя випромiнення вiд ультрарелятивiстської частинки, необхідно проiнтегрувати рiвняння (4.38) за малими кутами випромiнення, тобто по всiй площинi вектора  $\vec{\Theta}$  (оскiльки iнтеграл за  $\vec{\theta}$  достатньо швидко збiгаються). Це iнтегрування проводиться елементарно за допомогою

$$\int d\phi_{\vec{\Theta}} \Theta_i \Theta_j = \pi \delta_{ij} \Theta^2,$$

$$\int d\phi_{\vec{\Theta}} \Theta_i \Theta_j \Theta_l \Theta_m = \frac{\pi}{4} (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \Theta^4, \quad (4.49)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\Theta^2 (\Theta^2)^m}{(1 + \Theta^2)^{2+n}} = \frac{m!(n-m)!}{(n+1)!}, \quad (4.50)$$

i приводить до

$$\begin{aligned} x_\omega \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega} &= \pi \int_0^\infty d\Theta^2 \int d\phi_{\vec{\Theta}} x_\omega \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega d^2\Theta} \\ &= \frac{\alpha \vec{q}_\perp^2}{4\pi m^2} \left\{ \frac{2}{3} (1 - x_\omega) \left[ 1 + 2(\hat{q}_\perp \cdot \vec{e}')^2 \right] + x_\omega^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Енергетичний спектр неполяризованого випромiнення [який також може бути легко отриманий шляхом iнтегрування рiвняння (4.47)] має вигляд

$$\frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega}(x_\omega) = x_\omega \sum_{\vec{e}'} \frac{dW_{\text{dip}}}{dx_\omega}$$

$$= \frac{2\alpha\bar{q}_\perp^2}{3\pi m^2} \left( 1 - x_\omega + \frac{3}{4}x_\omega^2 \right) \quad (4.52a)$$

$$\equiv \frac{\alpha\bar{q}_\perp^2}{2\pi m^2} \frac{E'}{E} \left( \frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \frac{2}{3} \right). \quad (4.52b)$$

Він відомий як спектр Бете-Гайтлера (точніше, його високоенергетична межа), і представлений на Рис. 4.8 суцільною кривою (порівн. з експериментальним Рис. 1.8a).

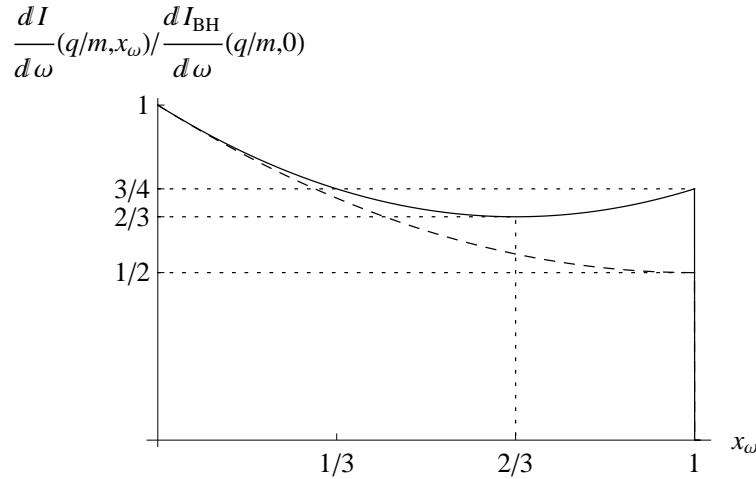


Рис. 4.8. Спектр гальмівного випромінення при фіксованому модулі передачі імпульсу. Суцільна крива,  $q_\perp/m \rightarrow 0$ , Рівн. (4.52a) – порівн. з Рис. 1.8. Штрихова крива,  $q_\perp/m \rightarrow \infty$  [Рівн. (4.76) з (4.73с), (4.74с)].

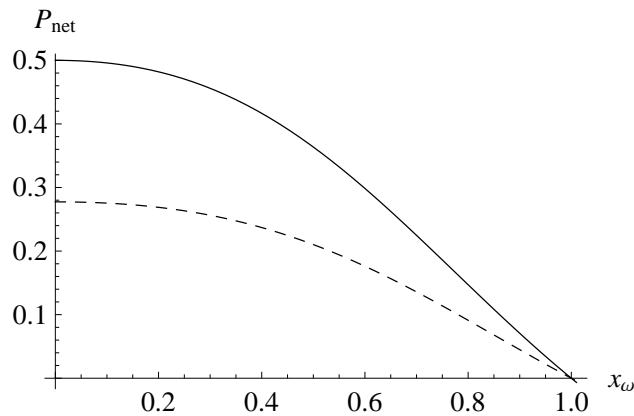


Рис. 4.9. Спектральний розподіл поляризації спектра гальмівного випромінення при фіксованому векторі передачі імпульсу. Напрямок поляризації є паралельним до  $\vec{q}_\perp$ . Суцільна крива,  $q_\perp/m \rightarrow 0$ , Рівн. (4.53). Штрихова крива,  $q_\perp/m = 10$ , Рівн. (4.78).

Нарешті, середня поляризація конуса випромінення, як впливає з рівняння (4.51), спрямована паралельно до  $\vec{q}_\perp$ , а її ступінь дорівнює [18]

$$\begin{aligned} P_{\text{net}} &= \frac{dW_{\text{dip}}(\vec{e}' \parallel \vec{q}_\perp) - dW_{\text{dip}}(\vec{e}' \perp \vec{q}_\perp)}{dW_{\text{dip}}(\vec{e}' \parallel \vec{q}_\perp) + dW_{\text{dip}}(\vec{e}' \perp \vec{q}_\perp)} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{3x_\omega^2}{2(1-x_\omega)}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Інфрачервона межа ( $x_\omega \rightarrow 0$ ) рівняння (4.53) збігається з поляризацією 50% дипольного випромінення класичної зарядженої частинки у плоскому ондуляторі [292]. Залежний від  $x_\omega$  доданок у знаменнику описує зменшення поляризації, зумовлене віддачею фотона. Поведінка функції  $P_{\text{net}}(x_\omega)$  для даного, дипольного випадку показана на Рис. 4.9 суцільною кривою.

Значна середня поляризація конуса випромінення може використовуватися для отримання поляризованих пучків гама-випромінення без побудови надвузької колімаційної системи [285]. Недоліком некогерентного гальмівного випромінення є його неперервний спектр, але цю властивість можна покращити, використовуючи мішені, в яких електрон рухається періодично.

**4.1.4. Недипольне випромінювання.** Як зазначалося вище, кулонівські поля атомних ядер, в принципі, здатні передавати електрону імпульси до  $q_\perp \sim m$ . Існують також когерентні, хоча і протяжні, дефлектори високоенергетичних заряджених частинок на кути  $\gtrsim \gamma^{-1}$ . При цьому, незважаючи на гладкість повороту, при малих  $\omega$  спектр випромінення залежить лише від повного кута відхилення електрона. Тому варто звернути увагу також загальний випадок, коли  $q_\perp \gtrsim m$ . Можна відзначити, що випадок  $q_\perp \gg m$  певною мірою є подібним до опису глюонного гальмівного випромінювання при жорсткому розсіянні кварків у квантовій хромодинаміці (КХД) [468], для яких маси та ефекти сильного зв'язку в адронах є погано відомими, і тому в першому наближенні ними цілковито нехтується.

Для диференціального перерізу недипольного поляризованого гальмівного випромінення в кулонівському полі в борнівському наближенні Глюк-

стерн, Халл та Брейт [466] отримали формулу, яка після виділення домінуючих членів та певного перегрупування може бути виражена у факторизованому вигляді (4.8), з [див. також [252], Рівн. (8.2)]

$$\frac{dW_{\text{rad}}}{d\Gamma_{q'}} = \frac{\pi\alpha}{EE'} \left\{ \left( 2E \frac{\vec{p}' \cdot \vec{e}'}{p' \cdot q'} - 2E' \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}'}{p \cdot q'} \right)^2 + \frac{\vec{q}^2 \omega^2}{p' \cdot q' p \cdot q'} \right\} \{1 + \mathcal{O}(\gamma^{-2})\}. \quad (4.54)$$

Блок

$$2E \frac{\vec{p}' \cdot \vec{e}'}{p' \cdot q'} - 2E' \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}'}{p \cdot q'} \quad (4.55)$$

у рівнянні (4.54) часто інтерпретується як точна амплітуда гальмівного випромінення *безспіновою* зарядженою частинкою на статичному потенціалі [порівн. з Рівн. (4.14) в калібровці  $e'_0 = 0$ ]. Останній же член у (4.54) пов'язується з ефектами електронного спіну.

**4.1.4.1. Система спокою початкового електрона та стереографічна проекція [38].** Залежний від поляризації блок навіть у недипольному випадку може бути представлений в термінах корелятора векторів поляризації фотона в системі спокою початкового електрона (IERF):

$$E \frac{\vec{p}' \cdot \vec{e}'}{p' \cdot q'} - E' \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}'}{p \cdot q'} = \tilde{e} \cdot e'_p, \quad (4.56)$$

якщо ввести 4-вектор

$$\tilde{e} = e - q \frac{p \cdot e}{p' \cdot q'} \equiv e - q \frac{p \cdot e}{p \cdot q + q^2/2}, \quad (4.57)$$

який зводиться до  $e_p$  [Рівн. (4.18)] за дипольних умов, коли  $q^2/m^2 \rightarrow 0$ . У компонентах,

$$\tilde{e} = \frac{p \cdot e}{p \cdot q - \frac{q_\perp^2}{2}} \left( -\frac{q_\perp^2}{2m}, \frac{q_\perp^2}{2m}, \vec{q}_\perp \right) \quad (\text{IERF}), \quad (4.58)$$

тому при  $q_\perp \sim m$  цей вектор не є поперечним, а належить до світлового фронту.

Кутовий розподіл поляризації в системі спокою початкового електрона має вісь уздовж вектора

$$\left( \frac{q_\perp^2}{2m}, \vec{q}_\perp \right), \quad (4.59)$$

нахиленого до  $\vec{q}_\perp$  під кутом

$$\alpha = \arctan \frac{q_\perp}{2m}. \quad (4.60)$$

Стереографічна проекція проектує ці напрямки на вузли

$$\vec{\Theta}_{*\pm} = \frac{\vec{q}_\perp}{|\vec{q}_\perp|} \tan \left( \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4.61)$$

Деякі якісні риси дипольного наближення, такі як існування провалів інтенсивності та орієнтація поляризації вздовж системи кіл, що перетинаються в двох точках, зберігаються також і в недипольному випадку. Щоб продемонструвати це, перепишемо блок (4.55) в термінах кутів випромінювання відносно напрямків  $\vec{p}$  і  $\vec{p}'$ :

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{k}}{\omega} - \frac{\vec{p}}{E}, \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \vec{\theta}' &= \frac{\vec{k}}{\omega} - \frac{\vec{p}'}{E'} \\ &\equiv \frac{E\vec{\theta} + \vec{q}_\perp}{E'}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Тоді маємо

$$2E \frac{\vec{p}' \cdot \vec{e}'}{p' \cdot q'} - 2E' \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}'}{p \cdot q'} = \frac{4EE'}{m\omega} \left( \frac{\gamma^{-1}\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} - \frac{\gamma'^{-1}\vec{\theta}'}{\gamma'^{-2} + \theta'^2} \right) \cdot \vec{e}'. \quad (4.64)$$

Використання тут в дужках рівняння (4.63) та  $\vec{\theta} = \gamma^{-1}\vec{\Theta}$  перетворює його на

$$\frac{\gamma^{-1}\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} - \frac{\gamma'^{-1}\vec{\theta}'}{\gamma'^{-2} + \theta'^2} = \frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} - \frac{\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_\perp}{m}}{1 + \left( \vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_\perp}{m} \right)^2}. \quad (4.65)$$

Остання векторна різниця має нулі при

$$\vec{\Theta}_{*\pm} = \frac{\vec{q}}{2m} \left( \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q_\perp^2}} - 1 \right) \quad \left( \vec{\Theta}_{*+} \cdot \vec{\Theta}_{*-} = -1 \right), \quad (4.66)$$

що в дипольному граничному випадку  $q_\perp \ll m$  узгоджується з Рівн. (4.41).

В точках (4.66) знаходяться нулі поляризації.

Що стосується розподілу напрямків поляризації, потрібно зазначити, що форма (4.65) при довільному  $q_{\perp}/m$  може бути представлена у вигляді

$$\frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} - \frac{\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}}{1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}\right)^2} = \mathcal{C}(\vec{q}_{\perp}, \vec{\Theta}) \left[ \frac{\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*-}}{(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*-})^2} - \frac{\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*+}}{(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*+})^2} \right], \quad (4.67)$$

зі скалярною ваговою функцією

$$\mathcal{C}(\vec{q}_{\perp}, \vec{\Theta}) = \frac{(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*-})^2 (\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_{*+})^2}{(1 + \vec{\Theta}^2) \left[ 1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}\right)^2 \right] \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q_{\perp}^2}}}. \quad (4.68)$$

Векторна функція в дужках у правій частині Рівн. (4.67) має вигляд 2d-диполя скінченного розміру. Для останнього загальновідомо (наприклад, з теорії функцій комплексної змінної), що його силові лінії є сімейством кіл, які проходять через локації точкових джерел. Ці точки збігаються з провалами інтенсивності (4.66). Проте, розподіл по колах у недипольному випадку не має настільки важливих практичних наслідків як у дипольному випадку (див. Розділ 4.1.3.4), оскільки центри  $\vec{\Theta}_{\text{centr}}$  цих кіл лежать на лінії

$$\left( \vec{\Theta}_{\text{centr}} - \frac{\vec{\Theta}_{+} + \vec{\Theta}_{-}}{2} \right) \cdot (\vec{\Theta}_{+} + \vec{\Theta}_{-}) = 0 \quad \left( \frac{\vec{\Theta}_{+} + \vec{\Theta}_{-}}{2} = -\frac{\vec{q}_{\perp}}{2m} \right),$$

і при  $q_{\perp}/2m \sim 1$  зміщення всіх центрів від початку координат не є малими порівняно з радіусами кіл.

**4.1.4.2. Спектр, проінтегрований за кутами.** Спектр поляризованого випромінення можна отримати шляхом інтегрування (4.54) по всьому конусу кутів випромінення фотонів, тобто, ефективно, по всій площині  $\vec{\Theta}$ , оскільки інтеграл достатньо швидко збігається:

$$x_{\omega} \frac{dW_{\text{rad}}}{dx_{\omega}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int d^2\Theta \left\{ 4(1 - x_{\omega}) \left[ \left( \frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} - \frac{\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}}{1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}\right)^2} \right) \cdot \vec{e}' \right]^2 + \frac{\vec{q}_{\perp}^2 x_{\omega}^2}{m^2(1 + \Theta^2) \left[ 1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_{\perp}}{m}\right)^2 \right]} \right\}. \quad (4.69)$$

Використовуючи значення інтегралів

$$\int \frac{d^2\Theta}{(1+\Theta^2) \left[1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_\perp}{m}\right)^2\right]} = \frac{2\pi m}{|\vec{q}_\perp| \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} \quad (4.70)$$

та

$$\begin{aligned} & \int d^2\Theta \left[ \left( \frac{\vec{\Theta}}{1+\Theta^2} - \frac{\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_\perp}{m}}{1 + \left(\vec{\Theta} + \frac{\vec{q}_\perp}{m}\right)^2} \right) \cdot \vec{e}' \right]^2 \\ &= 2\pi \left[ \frac{2m}{|\vec{q}_\perp|} \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} - 1 + \frac{(\vec{q}_\perp \cdot \vec{e}')^2}{q_\perp^2} \left( 1 - \frac{2m}{|\vec{q}_\perp| \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

отримуємо

$$x_\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{dx_\omega} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ (1 - x_\omega) \left[ F_1 + \left( 2 \frac{(\vec{q}_\perp \cdot \vec{e}')^2}{q_\perp^2} - 1 \right) F_3 \right] + x_\omega^2 F_2 \right\}, \quad (4.72)$$

де «радіаційні формфактори» електрона мають структуру

$$F_1(|\vec{q}_\perp|/m) = \frac{2m \left(1 + 2 \frac{q_\perp^2}{4m^2}\right)}{|\vec{q}_\perp| \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} - 1 \quad (4.73a)$$

$$\equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+1)!}{(2n+1)!} \left( -\frac{q_\perp^2}{m^2} \right)^n \quad (4.73b)$$

$$\underset{|\vec{q}_\perp|/m \rightarrow \infty}{\simeq} 2 \ln \frac{|\vec{q}_\perp|}{m} - 1 + \frac{2m^2}{q_\perp^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{q_\perp^4}\right), \quad (4.73c)$$

$$F_2(|\vec{q}_\perp|/m) = \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} \quad (4.74a)$$

$$\equiv -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)n!}{(2n)!} \left( -\frac{q_\perp^2}{m^2} \right)^n \quad (4.74b)$$

$$\underset{|\vec{q}_\perp|/m \rightarrow \infty}{\simeq} \ln \frac{|\vec{q}_\perp|}{m} - \frac{2 \ln |\vec{q}_\perp|/m - 1}{q_\perp^2/m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{q_\perp^4}\right), \quad (4.74c)$$

$$F_3(|\vec{q}_\perp|/m) = 1 - \frac{2m}{|\vec{q}_\perp| \sqrt{1 + \frac{q_\perp^2}{4m^2}}} \operatorname{arsh} \frac{|\vec{q}_\perp|}{2m} \quad (4.75a)$$

$$\equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \left( -\frac{\vec{q}_{\perp}^2}{m^2} \right)^n \quad (4.75b)$$

$$\underset{|\vec{q}_{\perp}|/m \rightarrow \infty}{\simeq} 1 - \frac{4m^2}{\vec{q}_{\perp}^2} \ln \frac{|\vec{q}_{\perp}|}{m} + \mathcal{O} \left( \frac{m^4}{q_{\perp}^4} \right), \quad (4.75c)$$

і лише два з них є лінійно незалежними:  $F_2 = \frac{F_1 + F_3}{2}$ . На відміну від пружних формфакторів складених частинок, зі збільшенням  $|\vec{q}_{\perp}|/m$  ці формфактори (що визначають «кількість фотонів в електроні») не убують, а навпаки, зростають. Разом зі ступенями  $x_{\omega}$  в правій частині Рівн. (4.72), вони утворюють структурну функцію електрона.<sup>10</sup>

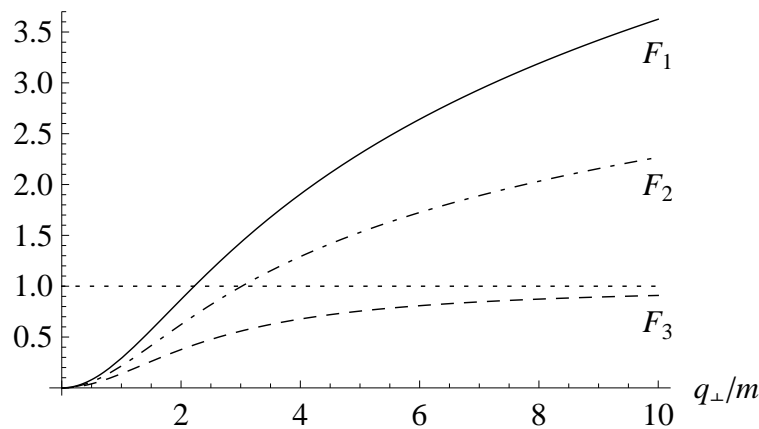


Рис. 4.10. Функції, що входять до спектра, проінтегрованого за кутами (4.72). Суцільна крива,  $F_1$  [Рівн. (4.73a)]. Штрих-пунктирна,  $F_2$  [Рівн. (4.74a)]. Штрихова,  $F_3$  [Рівн. (4.75a)].

Логарифми в рівняннях (4.73с), (4.74с) фізично виникають через те, що хоча при розсіянні на великий кут конуси випромінення (струмені) від початкового та кінцевого напрямків руху електрона є добре розділеними, область безпосередньо між ними заповнена посиленням інтерференційним

<sup>10</sup>При  $|\vec{q}_{\perp}|/m \rightarrow \infty$  в головному логарифмічному наближенні, коли  $F_3$  можна знехтувати, а  $F_2 \approx F_1/2 = \ln |\vec{q}_{\perp}|/m$ , Рівн. (4.72) набуває вигляду

$$\frac{dW_{\text{rad}}}{dx_{\omega}} \underset{|\vec{q}_{\perp}|/m \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\alpha}{2\pi} P_{\gamma e}^{(0)}(x_{\omega}) \ln \frac{\vec{q}_{\perp}^2}{m^2},$$

де  $P_{\gamma e}^{(0)}(x_{\omega}) = \frac{1+(1-x_{\omega})^2}{x_{\omega}}$  – функція розщеплення електрона на електрон та фотон, яка входить до рівняння еволюції для структурних функцій [469] (в КХД відомого як ДГЛАП [178, 468]). Рівн. (4.73с), (4.74с), (4.75с) дають також асимптотичні доданки, незалежні від  $|\vec{q}_{\perp}|/m$  та «вищі твісти» (ступінні поправки).



випроміненням, загальна кількість якого значно більша, ніж у струменях. Інтегрування за цією проміжною областю дає великий логарифм.

Спектр неполяризованого випромінення

$$\sum_{\vec{e}'} x_{\omega} \frac{dW_{\text{rad}}}{dx_{\omega}} = \frac{2\alpha}{\pi} \{(1 - x_{\omega})F_1 + x_{\omega}^2 F_2\} \quad (4.76)$$

збігається з відомим результатом [257], а середня поляризація (спрямована вздовж  $\vec{q}_{\perp}$ ) дорівнює

$$\begin{aligned} P_{\text{net}}(|\vec{q}_{\perp}|/m, x_{\omega}) &= \frac{dW_{\text{rad}}(\vec{e}' \parallel \vec{q}_{\perp}) - dW_{\text{rad}}(\vec{e}' \perp \vec{q}_{\perp})}{dW_{\text{rad}}(\vec{e}' \parallel \vec{q}_{\perp}) + dW_{\text{rad}}(\vec{e}' \perp \vec{q}_{\perp})} \\ &= \frac{F_3}{F_1 + \frac{x_{\omega}^2}{1-x_{\omega}} F_2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Остання функція монотонно зменшується зі збільшенням  $q_{\perp}/m$ , а також  $x_{\omega}$ . Зменшення внаслідок збільшення  $q_{\perp}/m$  (недипольні ефекти) є повільнішим – лише логарифмічним (див. Рис. 4.9):

$$P_{\text{net}} \Big|_{|\vec{q}_{\perp}|/m \gg 1} \simeq \frac{1}{\left(2 + \frac{x_{\omega}^2}{1-x_{\omega}}\right) \ln \frac{|\vec{q}_{\perp}|}{m} - 1}. \quad (4.78)$$

**4.1.5. Гальмівне випромінювання при розсіянні на атомі. Зв'язок між радіаційною довжиною в аморфному середовищі та кутом екранування Мольєра.** При проходженні електрона крізь тонкий шар аморфної речовини можна вважати гальмівне випромінювання в ньому некогерентною сумою внесків від випромінень при розсіяннях на окремих атомах. Умови факторизації тоді добре виконуються, але потрібно ще згорнути відомий нам спектр з диференціальним перерізом розсіяння на атомі:

$$\frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega} = \int d\sigma(q)\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}. \quad (4.79)$$

Останній залежить від функції екранування, але як і у Розд. 2, ми можемо врахувати її феноменологічно.

Щоб досягти в інтегралі (4.79) точності, наступної за головною логарифмічною, для його обчислення можна вибрати значення  $q_1$ , яке розбиває

область інтегрування так, що  $r_B^{-1} = me^2 \ll q_1 \ll m$ :

$$\frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega} = 2\pi \int_0^{q_1} dq q \frac{d\sigma}{d^2q} \omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega} + 2\pi \int_{q_1}^{\infty} dq q \frac{d\sigma}{d^2q} \omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}. \quad (4.80)$$

Тоді можна застосувати у першому інтегралі дипольне наближення для  $\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}$  [тобто зберегти перші члени у рядах (4.73b), (4.74b), (4.75b)], а в другому – використати резерфордівську асимптотику (2.4) для  $d\sigma/d^2q$ :

$$\frac{d\sigma}{d^2q} \underset{q \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{4Z^2 e^4}{q^4}.$$

Перший інтеграл в (4.80) обчислюється як

$$\begin{aligned} \int_0^{q_1} dq q^3 \frac{d\sigma}{d^2q} &= \int_0^{q_1} d \ln q q^4 \frac{d\sigma}{d^2q} \\ &= \ln q_1 \lim_{q \rightarrow \infty} q^4 \frac{d\sigma}{d^2q} - \int_0^{\infty} \ln q d \left( q^4 \frac{d\sigma}{d^2q} \right) \\ &= 4Z^2 e^4 \left( \ln \frac{q_1}{E\chi'_a} + \gamma_E - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

де в останньому рядку ми використали визначення (2.42) для мольєрівського кута екранування:

$$\ln E\chi'_a = \int_0^{\infty} \ln q d \left( \frac{d\sigma}{d\sigma_{\text{Ruth}}} \right) + \gamma_E - 1. \quad (4.82)$$

Таким чином,

$$2\pi \int_0^{q_1} dq q \frac{d\sigma}{d^2q} \omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega} = \frac{8Z^2 e^6}{3m^2} \left( 1 - x_\omega + \frac{3}{4} x_\omega^2 \right) \left( \ln \frac{q_1}{E\chi'_a} + \gamma_E - 1 \right). \quad (4.83)$$

Другий інтеграл в (4.80) спрощується до

$$\int_{q_1}^{\infty} dq q \frac{d\sigma}{d^2q} \omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega} \simeq \frac{4Z^2 e^6}{\pi} \int_{q_1}^{\infty} \frac{dq}{q^3} \left[ (1 - x_\omega) F_1 \left( \frac{q}{m} \right) + x_\omega^2 F_2 \left( \frac{q}{m} \right) \right], \quad (4.84)$$

де формфактори  $F_1$  та  $F_2$  визначаються рівняннями (4.73a), (4.74a), а  $F_3$  випадає після усереднення по напрямках  $\vec{q}_\perp$  внаслідок сферичної симетрії атома. Беручи інтеграли

$$\int_{\xi_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^3} F_1(\xi) = \frac{(1 + \xi_1^2) \sqrt{4 + \xi_1^2} \text{arsh}(\xi_1/2) - \xi_1}{3\xi_1^3} - \frac{1}{3} \ln \xi_1 \underset{\xi_1 \ll 1}{\simeq} \frac{1}{3} \left( \frac{13}{12} - \ln \xi_1 \right), \quad (4.85)$$

$$\int_{\xi_1}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^3} F_2(\xi) = \frac{\sqrt{4 + \xi_1^2} \operatorname{arsh}(\xi_1/2)}{4\xi_1} - \frac{1}{4} \ln \xi_1 \underset{\xi_1 \ll 1}{\simeq} \frac{1}{4} (1 - \ln \xi_1), \quad (4.86)$$

отримуємо

$$2\pi \int_{q_1}^{\infty} dq q \frac{d\sigma}{d^2q} \omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega} = \frac{8Z^2 e^6}{3m^2} \left[ (1 - x_\omega) \left( \frac{13}{12} - \ln \frac{q_1}{m} \right) + \frac{3}{4} x_\omega^2 \left( 1 - \ln \frac{q_1}{m} \right) \right]. \quad (4.87)$$

Об'єднуючи частини (4.83) та (4.87) і скорочуючи допоміжний параметр  $q_1$ , виражаємо релятивістський гальмівний спектр через  $Z$  та незалежний від енергії добуток  $\gamma\chi'_a$ , який вичерпно характеризує атом в тому, що стоїть гальмівного випромінювання на ньому:

$$\frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega} = \frac{8Z^2 e^6}{3m^2} \left[ (1 - x_\omega) \left( \ln \frac{1}{\gamma\chi'_a} + \gamma_E + \frac{1}{12} \right) + \frac{3}{4} x_\omega^2 \left( \ln \frac{1}{\gamma\chi'_a} + \gamma_E \right) \right]. \quad (4.88)$$

Завдяки доданку  $\frac{1}{12}$  у першому члені та його відсутності у другому, форма недипольного спектра випромінювання дещо відрізняється від форми дипольного спектра (4.51) у наближенні, наступному за головним логарифмічним.<sup>11</sup>

Відповідна радіаційна довжина дорівнює

$$X_0 = \frac{E}{n \sum_{\vec{e}} \int_0^E d\omega \frac{d\kappa_{\text{rad}}}{d\omega}} = \frac{m^2}{4nZ^2 e^6 \left( \ln \frac{1}{\gamma\chi'_a} + \gamma_E + \frac{1}{18} \right)} \equiv \frac{m^2}{4nZ^2 e^6 \left( \ln \frac{1}{\gamma\chi'_a} + \frac{5}{9} \right)}, \quad (4.89)$$

де  $n$  – щільність атомів у речовині мішені. Цим рівнянням визначається зв'язок між радіаційною довжиною та мольєрівським кутом екранування.

#### 4.1.6. Поправка $\mathcal{O}(x_\omega)$ у факторизованому спектрі. Теорема

**Лоу.** Спектрально-кутові розподіли (4.38) і (4.54) виявляють ту властивість, що у граничному випадку м'яких фотонів  $x_\omega \rightarrow 0$  вони наближаю-

<sup>11</sup> Якщо приблизно замінити  $\ln \frac{1}{\gamma\chi'_a} + \gamma_E \rightarrow \ln 183Z^{-1/3} - f(Z\alpha)$ , де  $f(Z\alpha)$  визначається формулою (1.12), то вираз (4.88) зводиться до відомої формули, отриманої Бете і Гайтлером у моделі Томаса-Фермі для функції екранування [155, 217, 230, 278, 279]. Але на відміну від (4.88), формула Бете і Гайтлера є неточною для легких елементів, і не враховує непружного розсіяння. Слід також мати на увазі, що теорія Бете-Гайтлера гальмівного випромінювання при одноразовому розсіянні була побудована раніше, ніж теорія багаторазового розсіяння Мольєра.

ться до результату класичної електродинаміки з точністю до  $\mathcal{O}(x_\omega)$  включно:

$$\frac{dI}{d\omega d^2\Theta} = (1 - x_\omega) \frac{dI}{d\omega d^2\Theta} \Big|_{x_\omega=0} + \mathcal{O}(x_\omega^2), \quad (4.90)$$

тоді як у порядку  $\mathcal{O}(x_\omega^2)$  (вищих порядків не існує) кутові розподіли все ж відрізняються (порівн. Рис. 4.4а і 4.4б). Зміст співвідношення (4.90) може розглядатися як аналогічний загальній теоремі Лоу [470] в застосуванні до ультрарелятивістського випадку.

Нагадаємо, що структура (4.90) походить від блоку

$$\left( E' \frac{p^\mu}{p \cdot k} - E \frac{p'^\mu}{p' \cdot k} \right) \cdot e'^*_\mu \quad (4.91)$$

у рівнянні (4.54), який виникає також в амплітуді випромінення безспінової зарядженої частинки (в калібровці  $e' \cdot e = 0$ , у якій внесок діаграми типу «чайки» відсутній). Такий блок відповідає припущенню теореми Лоу про те, що властивість факторизації не порушується негайно зі збільшенням  $k$ . В ультрарелятивістському випадку процедура розкладання спрощується, оскільки амплітуда розсіяння є практично пропорційною до енергії частинки, тому енергетичні множники у рівнянні (4.91) фактично представляють амплітуди розсіяння. Оскільки амплітуда випромінення є пропорційною до  $(1 - x_\omega)$ , в диференціальній імовірності випромінення вона дає множник  $\propto (1 - x_\omega)^2$ , але він ще помножується на Лоренц-інваріантний елемент фазового простору, який містить фактор, обернено пропорційний до  $E'$ . Це призводить до скорочення одного ступеня величини  $1 - x_\omega$ .

Результат (4.90) досягається, коли ми розкладаємо складові блоку (4.91) відповідно до рівняння (4.64), з урахуванням умови, що кінцевий електрон повинен належати до масової поверхні. У теоремі Лоу [144, 257, 470] принцип розкладання дещо відрізняється, спираючись на аргументи калібрувальної інваріантності замість умови масової поверхні для електрона.<sup>12</sup> Як наслідок, ця теорема не виключає зміни кутового розподілу випромінення

<sup>12</sup>Наслідки, що виникають для теореми Лоу при послідовному врахуванні належності електрона до масової поверхні, аналізувалися в [471].

в порядку  $\mathcal{O}(x_\omega)$ . Втім, загальною рисою таких розкладень є те, що вони мають кінематичний характер і зберігають калібрувальну інваріантність, тому результат (4.90) може розглядатися як такий, що є в дусі теореми Лоу. В подальшому, в Розділі 4.5.1, ми покажемо як отримати поправку  $\mathcal{O}(x_\omega)$  до спектра випромінення в просторово протяжному полі, поза рамками теореми факторизації.

## 4.2. Вихід за межі припущення факторизації у квантовому дипольному наближенні

Поширеним ускладненням при застосуванні теорії гальмівного випромінювання до проходження заряджених частинок крізь речовину є порушення умови факторизації розсіяння (4.6) внаслідок значної товщини мішені. На щастя, існує можливість послабити цю умову [253], водночас значною мірою зберігаючи діраківську матричну структуру матричного елемента випромінення. При цьому добуток переданого імпульсу  $\vec{q}_\perp$  та амплітуди розсіяння  $A_{\text{scat}}$  замінюється перекриттям хвильових функцій початкового та кінцевого електрона, яке включає інтегрування за поздовжніми координатами.<sup>13</sup>

Точне представлення матричного елемента в термінах перекриття хвильових функцій початкового та кінцевого електрона у статичному полі мішені має вигляд [144, 257, 472]:

$$T = \sqrt{4\pi}ie \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \bar{\psi}'(\vec{r}) \vec{e}^{\prime*} \cdot \vec{\gamma} \psi(\vec{r}), \quad (4.92)$$

де  $\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$  є збережним струмом переходу,<sup>14</sup> якщо хвильові функції  $\psi(\vec{r})$  та  $\bar{\psi}'(\vec{r})$  задовольняють точним рівнянням Дірака у атомному потенціалі мішені:

$$\{\gamma^0[E - V(\vec{r})] + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\} \psi = 0, \quad (4.93)$$

<sup>13</sup>Єдина умова полягає в тому, що кути відхилення в мішені не повинні за порядком величини досягати  $\gamma^{-1}$  в межах довжини формування фотона (4.4).

<sup>14</sup>Це автоматично гарантує калібрувальну інваріантність амплітуди випромінення.

$$\bar{\psi}' \left\{ \gamma^0 [E - V(\vec{r})] - i\vec{\gamma} \cdot \overleftarrow{\nabla} - m \right\} = 0. \quad (4.94)$$

Ці хвильові функції містять всю інформацію про динаміку електрона, у тому числі електронні пропагатори та вершини фотонного обміну з мішенню, які фігурували в явному вигляді в пертурбативному матричному елементі (4.12). Спробуємо тепер вивести таку структуру безпосередньо з рівнянь для хвильових функцій, утримуючись від надмірних спрощень позовжньої динаміки.

**4.2.1. Високоенергетичні хвильові функції.** Оскільки при високих енергіях електрон відхиляється в гладкому потенціальному полі на малі кути, його хвильова функція є відносно повільною модуляцією швидко осцилюючої початкової пласкої хвилі  $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ . Заміна функції  $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\Phi(\vec{r})$  у рівнянні (4.93) приводить його до вигляду

$$\left\{ \gamma^0 [E - V(\vec{r})] - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m \right\} \Phi = 0, \quad (4.95)$$

де головні доданки  $(E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m)\Phi \simeq 0$  забезпечують те, що спінова частина  $\Phi$  близька до початкового біспінора та описується вільним рівнянням Дірака  $(p \cdot \gamma - m)u_p = 0$ , зберігаючи певні масові ефекти навіть в ультрарелятивістському випадку  $v \rightarrow 1$ :

$$\Phi \propto u_p.$$

Враховуючи, що  $E$  та  $p$  є великими, може бути зручно використовувати представлення для матриць Дірака, в якому  $\gamma^0\gamma^3$  стає діагональною, як наприклад, кіральне представлення. Але ми не будемо вдаватися до фіксації представлення матриць.

Для дослідження високоенергетичного ліміту багатокomпонентного рів-

няння (4.95) його часто трансформують у квадратне рівняння<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} & \{\gamma^0[E - V(\vec{r})] - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m\} \{\gamma^0[E - V(\vec{r})] - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m\} \Phi \\ & = \{2E [i\vec{v} \cdot \nabla - V] + V^2 + \Delta + i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \nabla V\} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

З (4.96) очевидно, що у головному наближенні за енергією еволюція хвильової функції визначається тим самим рівнянням ейконала

$$[i\vec{v} \cdot \nabla - V(\vec{r})] \Phi = 0, \quad (4.97)$$

що і для безспінової зарядженої частинки [див. Рівн. (2.13)]. З урахуванням початкової умови для діраківського електрона, його розв'язком є

$$\Phi \simeq \varphi(\vec{r}) u_p, \quad (4.98)$$

зі скалярним модулюючим множником

$$\varphi(\vec{r}) = e^{i\chi_0(\vec{r})}, \quad \chi_0(z, \vec{r}_\perp) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^z dz' V(z', \vec{r}_\perp),$$

де вісь  $z$  для  $\varphi$  спрямована вздовж  $\vec{p}$ .

У застосуванні до випромінювання, однак, наближення (4.98) є недостатньо точним. Оскільки випромінювання суттєво залежить від кутів відхилення електрона, воно може залежати й від супровідного руху спіну. Тому необхідно врахувати і спінову поправку порядку  $\mathcal{O}(E^{-1})$  до (4.98):

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \left(1 - \frac{i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \nabla}{2E}\right) \varphi(\vec{r}) u_p. \quad (4.99)$$

Останнє наближення, отримане в [253] як узагальнення наближення Фаррі-Зоммерфельда-Мауе [240, 241] для руху діраківського електрона в кулонівському полі, враховує повертання спіну електрона підчас його відхилення у зовнішньому полі.<sup>16</sup> Дійсно, розглядаючи

$$\vec{q}(\vec{r}) = \nabla \chi_0(z, \vec{r}_\perp)$$

<sup>15</sup>Єдина некратна одиничній матриця  $\gamma^0 \vec{\gamma}$  у другому рядку Рівн. (4.96) може бути зроблена блоково-діагональною в кіральному представленні, у якому (4.96) розпадається на пару двокомпонентних незалежних диференціальних рівнянь другого порядку для лівої та правої компонент біспінора. Тому масові ефекти (взаємодія контактного типу між компонентами біспінора) не переплітаються з нетривіальною динамікою в зовнішньому електромагнітному полі.

<sup>16</sup>Знову відзначимо, що воно не зміщує ліву та праву компоненти біспінора.

як класичний (в ліміті  $\chi_0 \gg 1$ ) імпульс, переданий електрону вздовж траєкторії, яка характеризується прицільним параметром  $\vec{r}_\perp$ , можна представити спірну структуру в (4.99) як

$$\left(1 - \frac{i\gamma^0 \vec{\gamma}}{2E} \cdot \nabla\right) \varphi u_p = (p \cdot \gamma + q \cdot \gamma + m) \frac{\gamma^0}{2E} u_p \varphi. \quad (4.100)$$

Якщо  $(p + q)^2 = m^2$ , як це було б для справжнього класичного руху, множник  $p \cdot \gamma + q \cdot \gamma + m$  в (4.100) гарантує, що

$$(p \cdot \gamma + q \cdot \gamma - m)\psi = 0.$$

Таким чином, структура (4.99) з фізичного погляду є достатньо природною. Її справедливість підтверджується безпосередньою підстановкою до рівняння Дірака (4.95) в головному наближенні:

$$\begin{aligned} & [p \cdot \gamma - \gamma^0 V(\vec{r}) + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m] (p \cdot \gamma - \vec{\gamma} \cdot \nabla \chi_0 + m) \varphi \frac{\gamma^0}{2E} u_p \\ & \underset{E \rightarrow \infty}{\simeq} [-p \cdot \gamma \vec{\gamma} \cdot \nabla \chi_0 + (i\vec{\gamma} \cdot \nabla - \gamma^0 V) p \cdot \gamma] \varphi \frac{\gamma^0}{2E} u_p \\ & \simeq [-\{p \cdot \gamma, \vec{\gamma} \cdot \nabla \chi_0\}_+ - \gamma^0 V(\vec{r}) p \cdot \gamma] \frac{\gamma^0}{2E} u_p \varphi \\ & \simeq [\vec{v} \cdot \nabla \chi_0 - V] \gamma^0 u_p \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.101)$$

З іншого боку, матрична структура правого боку рівняння (4.100) є такою самою, як і у теорії збурень. Це теж не дивно, оскільки ми врахували еволюцію спіну пертурбативним чином, і неважливо – за оберненими ступенями високої енергії чи за малою константою зв'язку з полем.

**4.2.2. Матричний елемент випромінення.** Підставляючи (4.99) та відповідне наближення для хвильової функції електрона в кінцевому стані до матричного елемента (4.92), отримуємо

$$\begin{aligned} T_{u.r.} = & \sqrt{4\pi}ie \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{u}' \left\{ \vec{e}^* \cdot \vec{\gamma} \varphi'^* \varphi \right. \\ & \left. + \frac{i}{2E} \varphi'^* \vec{e}^* \cdot \vec{\gamma} \nabla_\perp \cdot \vec{\gamma} \gamma^0 \varphi - \frac{i}{2E'} \gamma^0 \nabla_\perp \varphi'^* \cdot \vec{\gamma} \vec{e}^* \cdot \vec{\gamma} \varphi \right\} u. \end{aligned} \quad (4.102)$$



Як незабаром буде видно, всі доданки тут мають однаковий порядок величини.

На перший погляд, рівняння (4.102) включає різні види перекриттів між скалярними частинами хвильових функцій, але в дипольному наближенні всі вони виявляються взаємопов'язаними. Справді,

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} [\nabla_{\perp}\varphi'^*(\vec{r})] \varphi(\vec{r}) &= - \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^* \nabla_{\perp}\varphi - i\vec{q}_{\perp} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^* \varphi \\ &\approx \left[ -1 + \frac{\vec{q}_{\perp}}{q_z} (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \right] \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^* \nabla_{\perp}\varphi \\ &= - \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^* \nabla_{\perp}\varphi \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{q_{\perp}}{m}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

В скалярному перекритті [перший член у фігурних дужках в (4.102)] може здатися спокусливим покласти  $\vec{v}' \parallel \vec{v}$ , але тоді добуток  $\varphi'^* \varphi$  буде незалежним від  $z$ , даючи  $\int dz e^{iq_z z} \dots = 0$ . Тому, щоб отримати ненульовий внесок, потрібно врахувати різницю між  $\vec{v}$  та  $\vec{v}'$ . Щоб виділити її, проінтегруємо по частинах за поздовжньою координатою:

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) &\approx \frac{i}{q_z} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} (\vec{v}' \cdot \nabla) [\varphi'^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r})] \\ &\equiv \frac{i}{q_z} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^*(\vec{r}) (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \nabla \varphi(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{i}{q_z} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} [(\vec{v}' \cdot \nabla \varphi'^*) \varphi + \varphi'^* \vec{v} \cdot \nabla \varphi] \\ &= \frac{i}{q_z} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left\{ \varphi'^* (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \nabla \varphi + \mathcal{O}\left(\frac{q^2 + V^2}{E'} \varphi'^* \varphi\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.104a)$$

$$= \frac{i}{q_z} (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \varphi'^* \nabla_{\perp}\varphi \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{q_{\perp}}{x_{\omega} m}\right) \right\}, \quad (4.104b)$$

де при переході до Рівн. (4.104a) ми використали хвильове рівняння (4.97) для  $\varphi$  та відповідне рівняння для  $\varphi'$ , а при переході до рівняння (4.104b) – оцінку  $|\vec{v}' - \vec{v}| \sim \frac{x_{\omega} m}{E'} \sim \frac{q_z}{m}$  [порівн. з Рівн. (4.109)].

Проведений аналіз приводить до висновку [257], що повне перекриття (4.102) може бути представлене в термінах векторного перекриття всього одного, векторного типу

$$\vec{\mathcal{J}}_{\perp}(q_z, \vec{q}_{\perp}) = q_z \int d^3r e^{iq_z z + i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \varphi'^*(\vec{r}) \nabla_{\perp}\varphi(\vec{r}) \quad (4.105)$$

між скалярними частинами хвильових функцій:

$$T_{\text{dip}} = \sqrt{4\pi} e \frac{1}{q_z} \bar{u}' \left\{ \frac{1}{q_z} (\vec{v} - \vec{v}') \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\perp} \bar{e}'^* \cdot \vec{\gamma} - \frac{1}{2E} \bar{e}'^* \cdot \vec{\gamma} \vec{\mathcal{J}}_{\perp} \cdot \vec{\gamma} \gamma^0 - \frac{1}{2E'} \gamma^0 \vec{\mathcal{J}}_{\perp} \cdot \vec{\gamma} \bar{e}'^* \cdot \vec{\gamma} \right\} u. \quad (4.106)$$

Цей матричний елемент не факторизується, якщо, попри умову  $q_z \ll q_{\perp}$ , в експоненті неприпустимо нехтувати компонентою  $q_z$ , оскільки на масштабі характерних поздовжніх відстаней  $L_{\text{corr}}$  може бути  $q_z L_{\text{corr}} \sim 1$ .

Щоб пересвідчитися, що вираз (4.106) узгоджується з відомим результатом у факторизаційному ліміті, експоненту  $e^{iq_z z}$  слід покласти рівною одиниці (після попереднього інтегрування за  $z$  по частинах, щоб забезпечити обернення в нуль підінтегральної функції на нескінченності). Це дає:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_{\perp} &= i \int d^2 r_{\perp} e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \int dz e^{iq_z z} \frac{\partial}{\partial z} [\varphi'^*(\vec{r}) (\nabla_{\perp}) \varphi(\vec{r})] \\ &\xrightarrow{q_z L_{\text{corr}} \ll 1} i \int d^2 r_{\perp} e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} 1(\nabla_{\perp}) \varphi(\vec{r}_{\perp}, z \gg L_{\text{corr}}) \\ &= \vec{q}_{\perp} \int d^2 r_{\perp} e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \varphi(\vec{r}_{\perp}, z \gg L_{\text{corr}}). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Згідно з принципом Гюйгенса для квантового розсіяння електронів (див., наприклад, [166, 425]), останній інтеграл дорівнює амплітуді пружного розсіяння, якщо його вибрати його нормування як у Розділі 2, Рівн. (2.12). Тому

$$\vec{\mathcal{J}}_{\perp} \xrightarrow{q_z L_{\text{corr}} \ll 1} \vec{q}_{\perp} A_{\text{scat}}^{\text{diffr}}(\vec{q}_{\perp}). \quad (4.108)$$

Порівнюючи це з

$$M_{\text{rad}} = \bar{u}' \left\{ \left( \frac{E}{p' \cdot k} - \frac{E'}{p \cdot k} \right) e'^* \cdot \gamma + \frac{e'^* \cdot \gamma q \cdot \gamma \gamma^0}{2p' \cdot k} + \frac{\gamma^0 q \cdot \gamma e'^* \cdot \gamma}{2p \cdot k} \right\} u, \quad (4.109)$$

слід зауважити, що в різниці  $\frac{E}{p' \cdot k} - \frac{E'}{p \cdot k}$  не можна просто замінити  $p' \cdot k \approx E q_z$ ,  $p \cdot k \approx E' q_z$ , оскільки це призвело б до повного скорочення. Таким чином, як і у рівнянні (4.104), слід врахувати ще й кут між  $\vec{v}$  та  $\vec{v}'$ . Тоді

$$\frac{E}{p' \cdot k} - \frac{E'}{p \cdot k} \approx \frac{E p' \cdot q - E' p \cdot q}{E E' q_z^2} \approx \frac{1}{q_z^2} (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \vec{q}_{\perp}. \quad (4.110)$$

Можна також приблизно покласти  $q \cdot \gamma \approx \vec{q}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp$  у другому рядку (4.109), оскільки  $q_z \ll q_\perp$ :

$$M_{\text{rad}} \stackrel{\text{dip}}{\approx} \frac{1}{q_z} \vec{u}' \left\{ \frac{1}{q_z} (\vec{v} - \vec{v}') \cdot \vec{q}_\perp \vec{e}^{*\prime} \cdot \vec{\gamma} - \frac{\vec{e}^{*\prime} \cdot \vec{\gamma} \vec{q}_\perp \cdot \vec{\gamma} \gamma^0}{2E} - \frac{\gamma^0 \vec{q}_\perp \cdot \vec{\gamma} \vec{e}^{*\prime} \cdot \vec{\gamma}}{2E'} \right\} u. \quad (4.111)$$

Останній вираз, вочевидь, має таку ж діраківську матричну структуру, як і (4.106), але скрізь з  $\vec{q}_\perp$  замість  $\vec{\mathcal{J}}_\perp$ .

Зворотньо, можна розуміти правило (4.108) як рецепт для виходу за межі наближення факторизації: потрібно зробити у факторизованому матричному елементі

$$T_{\text{fact}} = \sqrt{4\pi} e A_{\text{scat}}^{\text{diffr}}(\vec{q}_\perp) M_{\text{rad}},$$

де  $M_{\text{rad}}$  визначається рівнянням (4.111), заміну

$$\vec{q}_\perp A_{\text{scat}}^{\text{diffr}}(\vec{q}_\perp) \xrightarrow{q_z L_{\text{corr}} \sim 1} \vec{\mathcal{J}}_\perp(q_z, \vec{q}_\perp), \quad (4.112)$$

де  $q_z = q_z(\omega, \vec{\Theta})$  визначається рівнянням (4.36). Тут множник  $e^{iq_z z}$  характеризує ефекти чутливості до поздовжньої когерентності. Окрім цього, формула (4.105) описує ще й поперечну когерентність, хоча остання може зникнути при інтегруванні за кінцевими станами електрона, як буде показано у наступному підрозділі.

Подальше обчислення імовірності, усередненої за спінами, може бути проведене будь-якими методами, але оскільки відповідна диференціальна ймовірність є білінійною формою як по  $\vec{e}'$ , так і по  $\vec{q}_\perp$ , відповідь вже відома – це подібна до комптонівського перерізу форма (4.38). Зробивши в останній заміну (4.112), запишемо результат:

$$d\sigma_{\text{rad}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ 4(1 - x_\omega) \left| \vec{e}' \mathbf{G} \vec{\mathcal{J}}_\perp \right|^2 + x_\omega^2 |\vec{\mathcal{J}}_\perp|^2 \right\} \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \frac{dx_\omega}{x_\omega} d^2 \Theta. \quad (4.113)$$

Тут слід зазначити, що, на відміну від  $\vec{q}_\perp$ , в принципі,  $\vec{\mathcal{J}}_\perp$  може бути комплексним вектором (який не приводиться до дійсного шляхом виділення в усіх компонентах спільного комплексного множника). В такому випадку

поляризація випромінення матиме кругову компоненту. Подібна можливість відкривається при проходженні електронів крізь кристали.

**4.2.3. Інтегрування за кінцевими станами електрона. Поперечна декогерентність.** При обчисленні  $\vec{\mathcal{J}}_{\perp}$  вже можна знехтувати в (4.105), у головному наближенні за високою енергією, кутом між  $\vec{v}$  і  $\vec{v}'$ . Підставляючи

$$\varphi(\vec{r}) \approx e^{-i \int_{-\infty}^z dz' V(z', \vec{r}_{\perp})}, \quad (4.114a)$$

$$\varphi'^*(\vec{r}) \approx e^{-i \int_z^{\infty} dz' V(z', \vec{r}_{\perp})} \quad (4.114b)$$

до Рівн. (4.105), отримуємо [292]

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_{\perp} &= -iq_z \int d^3 r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} + i\chi_0(\infty, \vec{r}_{\perp})} \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^z dz' V(z', \vec{r}_{\perp}) \\ &= \int d^2 r_{\perp} e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp} + i\chi_0(\infty, \vec{r}_{\perp})} \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} V(z, \vec{r}_{\perp}) \end{aligned} \quad (4.115)$$

(у другому рядку ми проінтегрували за  $z$  по частинах). Для інтеграла від форми, білінійної по  $\vec{\mathcal{J}}_{\perp}(\vec{q}_{\perp})$ , можна отримати доволі просту структуру:

$$\int \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^2} \vec{\mathcal{J}}_m \vec{\mathcal{J}}_n^* = \int d^2 r_{\perp} F_m F_n^*, \quad (4.116)$$

де

$$\vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp}) = -\nabla_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} V(z, \vec{r}_{\perp}). \quad (4.117)$$

Завдяки тому, що початкова та кінцева ейкональні фази об'єдналися і дають незалежний від  $z$  вираз  $\int_{-\infty}^{\infty} dz V$ , який випав з поздовжнього інтеграла (4.117) і скоротився в поперечному інтегралі (4.116), результат стає зрештою еквівалентним першому борнівському наближенню:

$$\int d^2 q_{\perp} |\vec{\mathcal{J}}_{x,y}|^2 = \int d^2 q_{\perp} \vec{q}_{x,y}^2 \left| \int d^3 r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \right|^2. \quad (4.118)$$

Водночас, вираз (4.116) допускає квазікласичну інтерпретацію: він є середнім за прицільними параметрами значенням квадрату інтеграла вздовж майже прямих траєкторій частинок з фіксованим прицільним параметром. Тому на відміну від поперечної когерентності, яка повністю руйнується

інтегруванням за кінцевими станами електрона, поздовжня когерентність при цьому залишається.

Використовуючи Рівн. (4.116) у (4.113), отримуємо

$$\int d^2 q_{\perp} \frac{d\sigma_{\text{rad}}}{d^2 q_{\perp}} = \int d^2 r_{\perp} \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{m^2 (1 + \Theta^2)^2} \times \left\{ 4(1 - x_{\omega}) \left| \vec{e}' \mathbf{G} \vec{F}_{\perp} \right|^2 + x_{\omega}^2 |\vec{F}_{\perp}|^2 \right\} \frac{dx_{\omega}}{x_{\omega}} d^2 \Theta. \quad (4.119)$$

Таким чином, ми приходимо до представлення

$$dW_{\text{rad}}(\vec{r}_{\perp}) = \int d^2 q_{\perp} \frac{d\sigma_{\text{rad}}}{d^2 q_{\perp} d^2 r_{\perp}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{m^2 (1 + \Theta^2)^2} \left\{ 4(1 - x_{\omega}) \left| \vec{e}' \mathbf{G} \vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp}) \right|^2 + x_{\omega}^2 |\vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp})|^2 \right\} \frac{dx_{\omega}}{x_{\omega}} d^2 \Theta, \quad (4.120)$$

або, після підсумовування за поляризаціями фотона,

$$dW_{\text{rad}}(\vec{r}_{\perp}) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{1}{m^2 (1 + \Theta^2)^2} \times \left\{ 2(1 - x_{\omega}) \left| \mathbf{G} \vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp}) \right|^2 + x_{\omega}^2 |\vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp})|^2 \right\} \frac{dx_{\omega}}{x_{\omega}} d^2 \Theta. \quad (4.121)$$

Це схоже на результат класичної електродинаміки, але враховує віддачу при випромінюванні фотона завдяки явній залежності від  $x_{\omega}$ . Наголосимо також, що тут  $\vec{F}_{\perp}$  залежить від  $\omega$  і  $\theta$  через  $q_z$  [див. Рівн. (??)].

**4.2.4. Спектр, проінтегрований за кутами.** Щоб обчислити відповідний спектр, проінтегрований за кутами, може бути доцільним позбавитися від множників  $(1 + \Theta^2)^{-n}$  шляхом інтегрування по частинах:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp})}{m(1 + \Theta^2)} &= \frac{x_{\omega}}{2\gamma(1 - x_{\omega})} \frac{1}{q_z} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} (-\nabla_{\perp} V) \\ &= -\frac{ix_{\omega}}{2\gamma(1 - x_{\omega})} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} \int_{-\infty}^z dz' (-\nabla_{\perp} V) \\ &\equiv -\frac{ix_{\omega}}{2\gamma(1 - x_{\omega})} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} \vec{q}_{\perp}(z), \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\left| \vec{\Theta} \cdot \vec{F}_{\perp}(q_z, \vec{r}_{\perp}) \right|^2 = \frac{1}{m^2 (1 + \Theta^2)^4} \left| \frac{x_{\omega}}{2\gamma(1 - x_{\omega})} \vec{\Theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} \vec{q}_{\perp}(z) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^2 \iint_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 e^{iq_z(z_2-z_1)} \frac{\vec{\Theta} \cdot \vec{q}_\perp(z_1)}{(1+\Theta^2)^2} \vec{\Theta} \cdot \frac{d}{dz_2} \int_{z_1}^{z_2} dz \vec{q}_\perp(z) \\
&= -im \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^3 \iint_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 e^{iq_z(z_2-z_1)} \frac{\vec{\Theta} \cdot \vec{q}_\perp(z_1)}{1+\Theta^2} \vec{\Theta} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz \vec{q}_\perp(z) \\
&= \frac{im}{2} \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^3 \\
&\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 e^{iq_z(z_2-z_1)} \frac{1}{1+\Theta^2} \frac{d}{dz_1} \left( \vec{\Theta} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz \vec{q}_\perp(z) \right)^2 \\
&= -\frac{m^2}{2} \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^4 \iint_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 e^{iq_z(z_2-z_1)} \left( \vec{\Theta} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz \vec{q}_\perp(z) \right)^2. \quad (4.123)
\end{aligned}$$

Після цього інтегрування за  $\vec{\Theta}$  вже не становить труднощів:

$$\begin{aligned}
x_\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{dx_\omega}(\vec{r}_\perp) &= \frac{\alpha}{2\pi^2} \int d^2\Theta \left[ (2-2x_\omega+x_\omega^2) \left| \frac{\vec{F}_\perp(q_z, \vec{r}_\perp)}{m(1+\Theta^2)} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - 8(1-x_\omega) \frac{|\vec{\Theta} \cdot \vec{F}_\perp|^2}{m^2(1+\Theta^2)^4} \right] \\
&= \frac{\alpha}{2\pi^2} \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^2 \iint_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 e^{i\frac{mx_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)}(z_2-z_1)} \\
&\quad \times \int d^2\Theta e^{-\frac{m\omega}{2i\gamma(1-x_\omega)}\Theta^2(z_2-z_1)} \left[ [1-(1-x_\omega)^2] \vec{q}_\perp(z_1) \cdot \vec{q}_\perp(z_2) \right. \\
&\quad \left. + 4(1-x_\omega)m^2 \left[ \frac{x_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]^2 \left( \vec{\Theta} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz' \vec{q}_\perp(z') \right)^2 \right] \\
&= \omega \frac{i\alpha}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1 dt_2}{t_2-t_1} e^{\frac{imx_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)}(t_2-t_1)} \left[ \frac{1-(1-x_\omega)^2}{4(1-x_\omega)} \vec{\chi}(t_1) \cdot \vec{\chi}(t_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{imx_\omega}{2\gamma(1-x_\omega)} \frac{1}{2(t_2-t_1)} \left( \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}(t) \right)^2 \right], \quad (4.124a)
\end{aligned}$$

де  $\vec{\chi} = \vec{q}/E$ . В дійсній формі,

$$\begin{aligned}
\omega \frac{dW_{\text{rad}}}{d\omega}(\vec{r}_\perp) &= -\frac{\omega\alpha}{\pi(1-x_\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \\
&\quad \times \left[ \frac{1-(1-x_\omega)^2}{2} \frac{\vec{\chi}(t_1) \cdot \vec{\chi}(t_2)}{t_2-t_1} \sin \frac{mx_\omega(t_2-t_1)}{2\gamma(1-x_\omega)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega}{2\gamma^2} \left( \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}(t) \right)^2 \cos \frac{mx_\omega(t_2-t_1)}{2\gamma(1-x_\omega)} \right]. \quad (4.124b)
\end{aligned}$$

Це представлення може застосовуватися для обчислення будь-яких дипольних спектрів гальмівного випромінення. Але слід враховувати, що підінтегральна функція в ньому, взагалі кажучи, не прямує до нуля при  $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$ , що сповільнює збіжність інтеграла. Для покращення збіжності можна додати в квадратних дужках (4.124а) доданки, що залежать лише від  $t_1$  або  $t_2$ , оскільки вони зникають при інтегруванні за іншою змінною, завдяки осцилюючому множнику  $e^{i\frac{m\omega}{2\gamma(1-x\omega)}(t_2-t_1)}$ . Зокрема, можна зробити в (4.124а) заміни

$$\vec{\chi}(t_2) \cdot \vec{\chi}(t_1) \rightarrow -\frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2,$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}(t) \right]^2 \rightarrow \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}(t) \right]^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}^2(t), \quad (4.125)$$

та скомбінувати

$$\frac{1}{2v} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}^2(t) - \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{\chi}(t) \right]^2 \right\} \simeq v\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|. \quad (4.126)$$

Однак, навіть після цього вираз у квадратних дужках ще не зникає, коли одночасно  $t_1 \rightarrow -\infty$  та  $t_2 \rightarrow +\infty$ . Важливіше те, що після таких перетворень відкривається можливість виходити за межі дипольного наближення шляхом експоненціювання доданка (4.126) [див. Рівн. (4.144) нижче].

Формули, які враховують віддачу фотона, знаходять яскраві застосування для процесів випромінення, що протікають при проходженні електронів та позитронів крізь кристали [14–16].

### 4.3. Випромінювання у класичному випадку

Якщо типові енергії випромінених фотонів є малими порівняно з енергією електрона ( $x_\omega \ll 1$ ), процес випромінювання можна описувати в рамках класичної електродинаміки. Електрон у цьому випадку описується як класичний точкоподібний заряд  $e$ , що рухається вздовж певної траєкторії  $\vec{r}(t)$  зі швидкістю  $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ , залежною від часу  $t$ , а фотон – як розбіжна класична електромагнітна хвиля.

Втім, слід пам'ятати, що в чисто класичній електродинаміці зворотний вплив випромінювання на траєкторію зарядженої частинки (радіаційне тертя) не може бути врахований повністю послідовним чином, оскільки неперервний обмін енергією між неперервно розподіленим полем у 3-вимірному просторі та точкоподібною частинкою неможливий. Дійсно, для нескінченно короткого проміжку часу  $dt$  енергія електромагнітного поля, яка може бути причинно пов'язана з точковою частинкою, міститься у сфері радіусу  $dt$ , і тому є пропорційною до  $(dt)^3$ , але це є нескінченно малою величиною порівняно зі зміною кінетичної енергії частинки, яка повинна бути  $\sim dt$ . В подальшому, в цьому розділі зворотним впливом класичного випромінювання ми будемо просто нехтувати.

**4.3.1. Спектрально-кутовий розподіл.** У класичній електродинаміці спектрально-кутовий розподіл енергії випромінювання (якщо напрямок випромінювання фотонів позначати одиничним вектором  $\vec{n}$ ) виражається через траєкторію зарядженої частинки  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$  добре відомим чином [108]:<sup>17</sup>

$$\frac{dI}{d\omega d^2n} = \left| \frac{e\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega[t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)]} \vec{n} \times \vec{v}(t) \right|^2 \quad (4.127a)$$

$$= \left| \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega[t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)]} \frac{d}{dt} \frac{\vec{n} \times \vec{v}(t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \right|^2. \quad (4.127b)$$

(Для простоти, в подальшому ми не будемо торкатися питань поляризації.)

Очевидно, що вираз (4.127) не залежить від вибору початку відліку  $t$  або  $\vec{r}$ : зсув  $t \rightarrow t + t_0$ ,  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$  призводить лише до появи додаткового незалежного від  $t$  фазового множника  $e^{i\omega t_0 - i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}$  в підінтегральному виразі, який скорочується після взяття квадрата модуля інтеграла.

<sup>17</sup>Нагадаємо, що в класичній електродинаміці, на відміну від квантової, від'ємні частоти електромагнітних хвиль не заборонені енергетично, але їх внесок дорівнює внеску від позитивних частот (оскільки класичне електромагнітне поле є дійсним). Тому, за визначенням, в Рівн. (4.127) проведене підсумовування по знакам частоти.



**4.3.2. Правило сум для енергії. Локальність класичного випромінювання електромагнітної енергії.** Припускаючи, що класичний вираз (4.127) є справедливим практично для всіх  $\omega$  (що вимагає достатньої гладкості траєкторії частинки, для того щоб типові  $\omega$  були набагато меншими від  $E/\hbar$ ), після прямого інтегрування за  $\omega$  в (4.127b) отримуємо:

$$\frac{dI}{d^2n} = \int_0^\infty d\omega \frac{dI}{d\omega d^2n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{dI}{d\omega d^2n} = \frac{e^2}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\vec{n} \times \vec{v}(t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \right]^2.$$

Звідси видно, що енергія, яка випромінюється в одиницю тілесного кута за одиницю часу:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d^2ndt} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\vec{n} \times \vec{v}(t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \right]^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} \left[ \vec{n} \times \dot{\vec{v}} + \frac{\vec{n} \times \vec{v}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}} \vec{n} \cdot \dot{\vec{v}} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Розкриття квадрату останнього векторного виразу дає відому формулу (яка виводиться в підручниках з потенціалу Ліенара-Віхерта [64, 108]):

$$\frac{dI}{d^2ndt} = \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{\dot{v}^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} + 2 \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}})(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^4} - (1 - v^2) \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}})^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^5} \right\}. \quad (4.129)$$

Слід зауважити, що (4.128) також можна переписати як

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d^2ndt} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} \left( \dot{\vec{v}} - \frac{(\vec{n} - \vec{v})}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}} \vec{n} \cdot \dot{\vec{v}} \right)^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} \left( \mathbf{G} \dot{\vec{v}} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.130)$$

де  $\mathbf{G}$  – той самий дипольний тензор (4.35а), що і в Розд. 4.1, 4.2, оскільки локально (без перетворення Фур'є) класичне випромінювання є завжди дипольним. Порівняно з повним виходом випромінення в акті розсіяння [Рівн. (4.42) при  $x_\omega \rightarrow 0$ ], у інтенсивності випромінення за одиницю часу (4.130) присутній додатковий множник  $(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^{-1}$ . Інтегрування (4.130) за (типово малими) кутами випромінення дає

$$\frac{dI}{dt} = 2e^2 \gamma^4 \dot{v}^2 \int_0^\infty d\Theta^2 \frac{1 + \Theta^4}{(1 + \Theta^2)^5} = \frac{2}{3} e^2 \gamma^4 \dot{v}^2, \quad (4.131)$$

що також відповідає локально дипольному виразу.

У фізичних задачах часто доводиться мати справу з випадками, в яких електрон зазнає різких відхилень, коли прискорення  $\dot{v}(t)$  формально має особливість типу дельта-функції. Інтеграл за часом у (4.131) у таких точках формально розбігається. Проте, з фізичного погляду, у спектральних розподілах присутність різких відхилень проявляє себе лише як плато, що простягається до великих  $\omega$ , але в кінцевому підсумку обрізається квантовою умовою збереження енергії.

Щоб уникнути нескінченності радіаційних втрат енергії в рамках класичної електродинаміки, можна працювати з різницями інтенсивностей випромінювання від різних траєкторій електрона. Наприклад, розглянемо різницю радіаційних втрат енергії при дворазовому розсіянні та суму втрат енергії при двох таких самих одноразових розсіяннях. Якщо ці розсіяння не перекриваються у часі, очевидно, що дана різниця дорівнює нулю, оскільки  $\dot{v}_{12}^2(t) - \dot{v}_1^2(t) - \dot{v}_2^2(t) \equiv 0$ . Але цю тотожність можна представити і як менш тривіальне правило сум для *спектрів* випромінювання:

$$\int_0^\infty d\omega \left( \frac{dI_{12}}{d\omega} - \frac{dI_1}{d\omega} - \frac{dI_2}{d\omega} \right) = 0. \quad (4.132)$$

Тут  $\frac{dI_1}{d\omega}$ ,  $\frac{dI_2}{d\omega}$  не залежать від  $\omega$ , тоді як  $\frac{dI_{12}}{d\omega}$  наближається до їх суми при  $\omega \rightarrow \infty$ . Отже, інтеграли від окремих доданків у (4.132) розбігаються, але інтеграл від їх різниці збігається. Різниця у підінтегральному виразі описує ефект інтерференції між розсіяннями (див., наприклад, Рис. 1.5б).

На практиці, однак, може статися, що класичний інтеграл (4.132) насправді збігається лише за межами квантового краю спектра, якщо послідовні розсіяння відбуваються занадто близько одне від одного (наприклад, на атомному масштабі). Це може призвести до порушення фізичного правила сум  $\int_0^E d\omega \left( \frac{dI_{12}}{d\omega} - \frac{dI_1}{d\omega} - \frac{dI_2}{d\omega} \right) = 0$  і спричинити некомпенсовані ефекти зменшення втрат енергії (які будуть обговорюватись нижче в підрозділі 4.4.2; див. також Рис. 1.5а). Такі ефекти можуть інтерпретуватися як нелокальність випромінювання електромагнітної енергії у квантовому випадку.

**4.3.3. Ультрарелятивістське представлення малих кутів (світлового фронту).** Перехід у Рівн. (4.127а) до наближення малих кутів

$$\vec{n} \times \vec{v}(t) = -\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{v}(t)), \quad \vec{n} - \vec{v}(t) = \vec{\theta} - \vec{\chi}(t),$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}(t) = \int_0^t dt' v_n(t') = \int_0^t dt' \left( v - \frac{v_{\perp n}^2}{2v} \right) = vt - \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t') \right]^2,$$

(приймаючи, що  $\vec{r}(0) = 0$ ) приводить його до вигляду

$$\frac{dI}{d\omega d^2\theta} = \left| \frac{e\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t) \right] e^{i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}t + \int_0^t dt' [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t')]^2 \right\}} \right|^2. \quad (4.133)$$

Перевагою останньої формули є її гауссова залежність від  $\vec{\theta}$  та  $\vec{\chi}$ . Це значно полегшує подальші процедури інтегрування та усереднення.

**4.3.4. Спектр випромінення: представлення у вигляді подвійного інтеграла за часом.** Коли експериментальна інформація щодо виходу випромінення від ультрарелятивістських електронів обмежується спектром фотонів, випромінюваних у вузький конус навколо напрямку вперед, Рівн. (4.133) слід проінтегрувати по площині ефективних  $\vec{\theta}$ . Відзначимо, що після зведення інтеграла за  $t$  в (4.133) у квадрат, його залежність від  $\vec{\theta}$  залишається гауссовою, і тому інтегрування за  $\vec{\theta}$  може бути проведене в загальному вигляді.

Для досягнення цієї мети, порядок інтегралів за часом та кутом в (4.133) має бути змінений:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} &= \left( \frac{e\omega}{2\pi} \right)^2 2\Re \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \\ &\times \int d^2\theta \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t_1) \right] \cdot \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t_2) \right] e^{-i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt' [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t')]^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Інтегрування за  $\vec{\theta}$  приводить до виразу, сингулярного при  $t_2 \rightarrow t_1$ . Щоб зменшити ступінь сингулярності, вигідно спершу застосувати калібрувальне перетворення для зниження ступеня  $\theta$  у передекспоненційному множнику. А саме, можна додати до нього члени, пропорційні до  $\frac{d}{dt_1} [t_1 - \vec{n} \cdot \vec{r}(t_1)] = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t_1) \simeq \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t_1) \right]^2$  та  $1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t_2)$ .

Зокрема, віднімання

$$\begin{aligned} [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t_1)] \cdot [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t_2)] - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t_1)]^2 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t_2)]^2 \\ = -\gamma^{-2} - \frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2 \end{aligned} \quad (4.135)$$

усуває не лише другі, але й перші ступені  $\theta$ , після чого передекспоненційний фактор стає повністю незалежним від  $\theta$ . Це відповідає калібровці Фейнмана для випроміненого фотона замість початкової радіаційної калібровки, оскільки

$$\gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2 = 1 - \vec{v}(t_1) \cdot \vec{v}(t_2) = \gamma^{-2} g_{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad (4.136)$$

де  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  – метричний тензор в просторі Мінковського,  $u_\mu = dr_\mu/ds = \gamma(1, \vec{v})$  – 4-вектор швидкості, а  $ds = \sqrt{dt^2 - d\vec{r}^2} = dt/\gamma$  – диференціал власного часу електрона. Точний зв'язок між калібровкою Фейнмана та радіаційною калібровкою має вигляд

$$d_{\mu\nu}^{\text{rad}} = g_{\mu\nu} - \frac{b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu}{b \cdot k} + \frac{b^2 k_\mu k_\nu}{(b \cdot k)^2}, \quad (4.137)$$

де  $b = (1, \vec{0})$ , але останній член в (4.137) при згортанні з  $u_\mu(t_1)u_\nu(t_2)$  дає внесок 4-го порядку малості по кутах, яким ми нехтуємо в даному наближенні.

Інтегрування залежної від  $\vec{\theta}$  експоненти

$$e^{-i\frac{\omega}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t)]^2} = e^{-i\frac{\omega}{2} \left\{ \theta^2 (t_2 - t_1) - 2\vec{\theta} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{\chi}(t') + \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{\chi}^2(t') \right\}} \quad (4.138)$$

все ще дає сингулярну функцію від  $t_1$  та  $t_2$ , поводитися з якою потрібно обережно. Діючи послідовно, зауважимо, що інтеграл від експоненти (4.138) з чисто уявним показником буде збігатися абсолютно, якщо зробити заміну  $t_2 - t_1 \rightarrow t_2 - t_1 - i\epsilon$ , з  $\epsilon > 0$ . Отже, результат інтегрування за  $\vec{\theta}$  може бути представлений у регуляризованому вигляді [292]

$$\frac{dI}{d\omega} = -\omega \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)]^2 \right\}$$

$$\times \Im \frac{1}{t_2 - t_1 - i\epsilon} e^{-i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}(t_2 - t_1) - \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{\chi}(t') \right]^2 + \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{\chi}^2(t') \right\}}, \quad (4.139)$$

де після обчислення інтегралів за часом слід покласти  $\epsilon \rightarrow +0$ . Комбінацію, що входить до показника експоненти у (4.139), можна переписати з використанням рівності (4.126), що демонструє інваріантність відносно евклідових поворотів.

Фізично, різниця (4.126) представляє собою часову затримку, тобто відставання електрона від фронту електромагнітної хвилі внаслідок викривлення його траєкторії всередині мішені. Ця затримка додається до затримки  $(1 - v)(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)/2\gamma^2$ , яка виникає через різницю між модулем швидкості електрона і швидкістю світла. Як ми побачимо нижче, дана інтерпретація відіграє суттєву роль в теорії спектрів випромінювання, особливо у недипольному випадку.

З використанням співвідношення (4.126), формула (4.139) може бути записана у вигляді:

$$\frac{dI}{d\omega} = \omega \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_{-\infty}^{s_2} ds_1 u_\mu(t_1) u_\nu(t_2) \Im e^{-i\omega(t_2 - t_1)} D_{\mu\nu}(\omega, |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|), \quad (4.140)$$

де

$$D_{\mu\nu}(\omega, r) = -\frac{g_{\mu\nu}}{r - i\epsilon} e^{i\omega r}$$

– пропагатор фотона в калібровці Фейнмана та частотно-координатному представленні [144] (належним чином регуляризований при  $r = 0$ , що може бути не обов'язковим в квантовій електродинаміці, але необхідно у класичній). Рівн. (4.140) фактично виражає співвідношення унітарності (порівн., наприклад, з [144]) між проінтегрованою за кутами імовірністю випромінювання *реального* фотона  $\frac{1}{\hbar\omega} \frac{dI}{d\omega}$  та уявною частиною пропагатора *віртуального* фотона, вставленого між двома точками на траєкторії електрона, як це показано на діаграмах 4.11. Запис (4.140) є калібрувально інваріантним, тому він повинен бути справедливим в будь-якій калібровці для пропагатора фотона, але використання калібровки Фейнмана на практиці зазвичай є найпростішим.

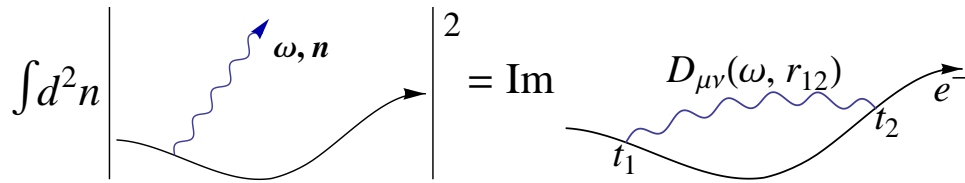


Рис. 4.11. Діаграмна ілюстрація представлення (4.140) для спектра випромінювання в термінах співвідношення унітарності.

Внесок нескінченно малого доданка  $-i\epsilon$  в знаменнику  $D_{\mu\nu}$  можна виокремити як

$$\begin{aligned} & -\mathfrak{Im} \frac{1}{t_2 - t_1 - i\epsilon} e^{-i\omega[t_2 - t_1 - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|]} \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\sin \omega [t_2 - t_1 - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|]}{t_2 - t_1} - \pi \delta(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (4.141)$$

Точка сингулярності останньої дельта-функції фактично потрапляє на край проміжку інтегрування в (4.139). Враховуючи симетрію між  $t_1$  і  $t_2$ , внесок цієї дельта-функції має розглядатися як *половинний*. Тоді спектр випромінювання при рівномірному та прямолінійному русі електрона дорівнює нулю, як і належить бути.

На практиці може бути зручно замінити дельта-функцію (миттєвий множник) у (4.141) на регулярну функцію, яка дає еквівалентний ефект. Можливим варіантом є

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} = \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^\infty dt_2 \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2 - \tau)]^2 \right\} \right. \\ \left. \times \sin \omega [\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2 - \tau)|] \right. \\ \left. - \gamma^{-2} \sin \mathcal{K}\tau \right) \end{aligned} \quad (4.142)$$

з  $\mathcal{K} \rightarrow \infty$ , або (оскільки  $\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sin \mathcal{K}\tau = \frac{\pi}{2}$  не залежить від  $\mathcal{K}$ )

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} = \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^\infty dt_2 \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2 - \tau)]^2 \right\} \right. \\ \left. \times \sin \omega [\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2 - \tau)|] \right. \\ \left. - \gamma^{-2} \sin \omega(1 - v)\tau \right). \end{aligned} \quad (4.143)$$

Перевага останньої форми полягає в тому, що для заряду, який рухається рівномірно і прямолінійно, нулю дорівнює вся підінтегральна функція, а не лише інтеграл від неї. (До того ж, завдяки тому, що підінтегральний вираз убуває при  $|t_2| \rightarrow \infty$ , з'являється можливість змінювати порядок інтегрувань.)

**4.3.5. Врахування віддачі при випромінюванні ( $\omega \sim E$ ).** Структура виразу (4.143) має багато спільного з виразом (4.124a) [з урахуванням перетворень (4.125)–(4.126)], отриманим за умов дипольного випромінювання, який водночас враховує ефекти віддачі фотона ( $x_\omega \sim 1$ ). Якщо віддача при випроміненні здатна викликати лише переверот спіну електрона, але не сильно змінює його траєкторію (наприклад, в полі одного атома, крізь який будь-яка високоенергетична частинка проходить практично прямолінійно, або ж в однорідному полі чи середовищі, в якому всі напрямки руху еквівалентні), результати Розділів 4.1.4.2 та 4.3.4 можуть бути об'єднані. Відповідна формула, яку ми тут наведемо для довідки, має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} = & \omega \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \\ & \times \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{E^2 + E'^2}{4EE'} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2 \right\} \sin \frac{\omega E}{E'} [t_2 - t_1 - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|] \right. \\ & \left. - \gamma^{-2} \sin \frac{\omega E}{E'} (1 - v)(t_2 - t_1) \right). \quad (4.144) \end{aligned}$$

Вперше вона була виведена (в комплексному представленні) Байером та Катковим у [264] за допомогою так званого квазікласичного операторного підходу [143,292], а згодом отримана і в рамках інших підходів [269,473,474].

**4.3.6. Представлення прицільних параметрів.** Гауссова форма (4.133) спектрально-кутового розподілу випромінювання не лише полегшує інтегрування за кутами випромінювання фотонів, але й дозволяє перейти до Фур'є-спряженої величини – прицільного параметра, що може бути вельми корисним у задачах з обмеженими мішенями (див. нижче Розділ 4.5).

Зокрема, виконуючи перетворення Фур'є підінтегрального виразу в (4.133):

$$\frac{e\omega}{2\pi} \left[ \vec{\theta} - \vec{\chi}(t) \right] e^{i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}t + \int_0^t dt' [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t')]^2 \right\}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\xi}} \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t), \quad (4.145)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t) &= \frac{e\omega}{(2\pi)^2} e^{i\frac{\omega}{2\gamma^2}t} \left[ -i\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} - \vec{\chi}(t) \right] \int d^2\theta e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\xi} + i\frac{\omega}{2} \int_0^t dt' [\vec{\theta} - \vec{\chi}(t')]^2} \\ &= \frac{ie}{2\pi t} e^{i\frac{\omega}{2\gamma^2}t} \left[ -i\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} - \vec{\chi}(t) \right] e^{i\frac{\omega}{2} \left\{ \int_0^t dt' \vec{\chi}^2(t') - \frac{1}{t} \left[ \int_0^t dt' \vec{\chi}(t') - \vec{\xi}/\omega \right]^2 \right\}} \\ &\equiv \frac{ie}{2\pi t^2} \left\{ \int_0^t dt' [\vec{\chi}(t') - \vec{\chi}(t)] - \frac{\vec{\xi}}{\omega} \right\} \\ &\quad \times e^{i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}t + \int_0^t dt' \vec{\chi}^2(t') - \frac{1}{t} \left[ \int_0^t dt' \vec{\chi}(t') - \vec{\xi}/\omega \right]^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

При цьому спектр випромінення, проінтегрований за кутами, може бути виражений безпосередньо через інтеграл за прицільними параметрами:

$$\frac{dI}{d\omega} = \int d^2\xi \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t) \right|^2. \quad (4.147)$$

Варто зазначити, що осцилююча експонента в (4.146) не може мати стаціонарних точок на дійсній осі часу, оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \gamma^{-2}t + \int_0^t dt' \vec{\chi}^2(t') - \frac{1}{t} \left[ \int_0^t dt' \vec{\chi}(t') - \vec{\xi}/\omega \right]^2 \right\} \\ = \gamma^{-2} + \frac{1}{t^2} \left\{ \int_0^t dt' [\vec{\chi}(t') - \vec{\chi}(t)] - \frac{\vec{\xi}}{\omega} \right\}^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Враховуючи це, для обчислення інтеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t)$  може бути доцільним виводити шлях інтегрування в комплексну площину  $t$ .

Співвідношення (4.148) також дозволяє виконати інтегрування по частинах:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t) &= \frac{e}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\frac{\omega}{2} \left\{ \gamma^{-2}t + \int_0^t dt' \vec{\chi}^2(t') - \frac{1}{t} \left[ \int_0^t dt' \vec{\chi}(t') - \vec{\xi}/\omega \right]^2 \right\}} \\ &\quad \times \frac{d}{dt} \frac{\frac{\vec{\xi}}{\omega} - \int_0^t dt' [\vec{\chi}(t') - \vec{\chi}(t)]}{\gamma^{-2}t^2 + \left\{ \frac{\vec{\xi}}{\omega} - \int_0^t dt' [\vec{\chi}(t') - \vec{\chi}(t)] \right\}^2}. \end{aligned} \quad (4.149)$$



Інтеграл за часом  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t)$  можна обчислити в найпростіших випадках, таких як різке одноразове розсіяння, або рух по колу, що ми продемонструємо нижче.

#### 4.3.6.1. Випромінювання при одноразовому розсіянні [7].

Якщо електрон рухався вільно всюди, окрім точки  $t = 0$ , таким чином, що при  $t < 0$  кут руху дорівнював  $\vec{\chi}(t) = \vec{\chi}_1$ , а при  $t > 0$  дорівнював  $\vec{\chi}(t) = \vec{\chi}_2$ , інтеграл за часом точно обчислюється:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t) &= -\frac{ie\vec{\xi}}{2\pi\omega} \left[ e^{i\vec{\chi}_1 \cdot \vec{\xi}} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2} e^{i\left(\frac{\omega t}{\gamma^2} - \frac{\xi^2}{\omega t}\right)} + e^{i\vec{\chi}_2 \cdot \vec{\xi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{i\left(\frac{\omega t}{\gamma^2} - \frac{\xi^2}{\omega t}\right)} \right] \\ &= -\frac{ie\vec{\xi}}{2\pi} \left[ e^{i\vec{\chi}_1 \cdot \vec{\xi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{-i\left(\frac{t}{\gamma^2} - \frac{\xi^2}{t}\right)} + e^{i\vec{\chi}_2 \cdot \vec{\xi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{i\left(\frac{t}{\gamma^2} - \frac{\xi^2}{t}\right)} \right] \\ &= \frac{e}{\pi} \frac{\vec{\xi}}{\gamma\xi} K_1(\xi/\gamma) \left( e^{i\vec{\chi}_1 \cdot \vec{\xi}} - e^{i\vec{\chi}_2 \cdot \vec{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (4.150)$$

Цю формулу можна так само просто отримати і за допомогою перетворення Фур'є після інтегрування за часом амплітуди випромінення, яка входить до

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int d^2n \left( \frac{\vec{n} \times \vec{v}_1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_1} - \frac{\vec{n} \times \vec{v}_2}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_2} \right)^2 \\ &= \frac{e^2}{\pi^2} \int d^2\theta \left[ \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}_1}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi}_1)^2} - \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}_2}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi}_2)^2} \right]^2, \end{aligned} \quad (4.151)$$

Підставляючи Фур'є-інтеграл

$$\frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi})^2} = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\xi e^{-i(\vec{\theta} - \vec{\chi}) \cdot \vec{\xi}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} K_0(\xi/\gamma). \quad (4.152)$$

до Рівн. (4.151), або (4.150) до (4.147), приходимо до представлення прицільних параметрів для спектра гальмівного випромінення при одноразовому розсіянні:

$$\frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \int d^2\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} K_0(\xi/\gamma) \right]^2 \left| 1 - e^{i(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{\xi}} \right|^2 \quad (4.153a)$$

$$= \frac{4e^2}{\pi} \int_0^{\infty} d\rho \rho K_1^2(\rho) [1 - J_0(\rho\gamma\chi)], \quad (4.153b)$$

де в (4.153b) змінна, що описує прицільний параметр, була перемасштабована як  $\rho = \xi/\gamma$ . Обчислення останнього інтеграла приводить знову до явного виразу (4.73a).

Оскільки  $\hbar\omega(\vec{\theta} - \vec{\chi})$  – це поперечний імпульс фотона, його Фур'є-спряжену величину  $\vec{\xi}/\omega$  можна інтерпретувати як прицільний параметр фотона відносно початкового електрона. В свою чергу,  $\frac{e}{\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} K_0(\xi/\gamma)$  з погляду формалізму світлового конуса [457] можна інтерпретувати як віртуальну електрон-фотонну компоненту фізичної електронної хвильової функції (в наближенні малих  $x_\omega$ ), з векторним індексом, що описує поляризацію фотона. Тоді  $\frac{e}{\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} K_0(\xi/\gamma) \left(1 - e^{i(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{\xi}}\right)$  – вже реальна відповідна компонента хвильової функції після розсіяння електрона на певний кут. Вона відмінна від нуля лише при  $\vec{v}_2 \neq \vec{v}_1$ . Інтеграл від квадрата її модуля дає повну ймовірність випромінення фотона з енергією  $\omega$  після розсіяння, тобто спектр гальмівного випромінення.

**4.3.6.2. Синхротронне випромінювання.** Якщо ультрарелятивістський електрон рухається в однорідному магнітному полі, його траєкторія в наближенні малих кутів може бути записана як  $\vec{\chi}(t) = \vec{a}t$  з  $a = 1/R$ . Підставивши цю залежність до Рівн. (4.146), отримуємо

$$\vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t) = \frac{e}{2\pi i} \left( \frac{\vec{\xi}}{\omega t^2} + \frac{\vec{a}}{2} \right) e^{\frac{i}{2} \left[ \frac{a^2 \omega}{12} t^3 + t(\omega \gamma^{-2} + \vec{a} \cdot \vec{\xi}) - \frac{\xi^2}{\omega t} \right]}. \quad (4.154)$$

Інтеграл за часом від подібної функції належить до категорії функцій, які виникають, наприклад, у теорії гідродинамічної стійкості [475]. Якщо перехід до прицільних параметрів застосовувати лише для однієї з поперечних координат, результат зводиться до добутків функцій Ейрі [476].

Аналіз інтеграла від функції (4.154) спрощується, якщо  $\vec{\xi} \parallel \vec{a}$  (цей випадок може охарактеризувати поведінку всього розподілу – див. Рис. 4.12 нижче). Тоді, вибравши  $\vec{a} = (-1/R, 0)$  (зі знаком, що відповідає доцентровому прискоренню), і маючи на увазі, що в  $\vec{f}$  залишається лише  $x$  -

компонента, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f_x(\xi_x, \omega, t) = \frac{e}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( \frac{\xi_x}{\omega t^2} - \frac{1}{2R} \right) e^{i \left[ \frac{\omega t^3}{12R^2} + t \left( \omega \gamma^{-2} - \frac{\xi_x}{R} \right) - \frac{\xi_x^2}{\omega t} \right]}. \quad (4.155)$$

Після перемасштабувань  $\omega = \frac{2\gamma^3}{R} \Omega_s$ ,  $\xi_x = \gamma \Omega_s \Xi$ ,  $t = sR/\gamma$ , цей інтеграл приймає вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f_x(\xi_x, \omega, t) = \frac{e}{4\pi i \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} ds \left( \frac{\Xi}{s^2} - 1 \right) e^{i \Omega_s \left[ \frac{s^3}{12} + s \left( 1 - \frac{\Xi}{2} \right) - \frac{\Xi^2}{4s} \right]}. \quad (4.156)$$

Його обчислення полегшується підняттям шляху інтегрування до верхньої півплощини комплексного  $s$ , де показник експоненти має сідлові точки, що задовольняють рівнянню  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{s^3}{12} + s \left( 1 - \frac{\Xi}{2} \right) - \frac{\Xi^2}{4s} \right] = 0$ , тобто при  $s = s_{\pm} = i \pm \sqrt{\Xi - 1}$ .

Конфігурація сідлових точок залежить від величини  $\Xi$ , і оскільки ця залежність має точку розгалуження  $\Xi = 1$ , можливі два варіанти.

Якщо  $\Xi > 1$ , то шлях інтегрування за найкрутішим спуском проходить через обидві сідлові точки, внески яких інтерферують. Розкладення показника експоненти в ряд Тейлора в околицях цих точок дає

$$\frac{s^3}{12} + s \left( 1 - \frac{\Xi}{2} \right) - \frac{\Xi^2}{4s} \simeq \frac{2}{3} \left[ i \mp (\Xi - 1)^{3/2} \right] + \frac{i \sqrt{\Xi - 1}}{\pm i + \sqrt{\Xi - 1}} (s - s_{\pm})^2,$$

звідки в межах наближення сідлових точок отримуємо осциляційну поведінку

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i \gamma}{e} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_x(\xi_x, \omega, t) &= \frac{2i \sqrt{\pi/\Omega_s}}{\Xi^{1/4} (\Xi - 1)^{1/4}} e^{-\frac{2\Omega_s}{3}} \\ &\times \left\{ \left( \frac{\sqrt{\Xi - 1} + i}{\sqrt{\Xi - 1} - i} \right)^{1/4} e^{\frac{2i\Omega_s}{3} (\Xi - 1)^{3/2}} - \left( \frac{\sqrt{\Xi - 1} - i}{\sqrt{\Xi - 1} + i} \right)^{1/4} e^{-\frac{2i\Omega_s}{3} (\Xi - 1)^{3/2}} \right\} \\ &\equiv -\frac{4\sqrt{\pi/\Omega_s}}{\Xi^{1/4} (\Xi - 1)^{1/4}} e^{-\frac{2\Omega_s}{3}} \sin \left[ \frac{2\Omega_s}{3} (\Xi - 1)^{3/2} + \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \sqrt{\Xi - 1} \right]. \quad (4.157) \end{aligned}$$

Звідси можна зробити висновок, що при  $\Omega_s \gtrsim 1$  типові  $\Xi$  будуть порядку одиниці, тоді як в інфрачервоному ліміті  $\Omega_s \ll 1$  вони стають великими:

$$\Xi \sim \Omega_s^{-2/3}. \quad (4.158)$$

Проте, коли  $\Omega_s \rightarrow 0$ , точність наближення сідлових точок погіршується: оскільки показник експоненти в підінтегральному виразі не має різкого максимуму, дві його сідлові точки зливаються.

Якщо ж  $\Xi < 1$ , то всі сідлові точки лежать на уявній осі, але шлях найкращого спуску може проходити лише через найвищу з них:  $s_0 = i(1 + \sqrt{1 - \Xi})$ . Розкладаючи показник експоненти поблизу неї як

$$\frac{s^3}{12} + s \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) - \frac{\Xi^2}{4s} \simeq \frac{2i}{3} \left[1 + (1 - \Xi)^{3/2}\right] + \frac{i\sqrt{1 - \Xi}}{1 + \sqrt{1 - \Xi}}(s - s_0)^2,$$

і обчислюючи гауссів інтеграл за  $s$ , отримуємо монотонну залежність:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i \gamma}{e} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_x(\xi_x, \omega, t) &\simeq \left(\frac{\Xi}{s_0^2} - 1\right) e^{-\frac{2\Omega_s}{3}[1+(1-\Xi)^{3/2}]} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-\Omega_s \frac{\sqrt{1-\Xi}}{1+\sqrt{1-\Xi}}(s-s_0)^2} \\ &= -\frac{2}{(1-\Xi)^{1/4}} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_s (1+\sqrt{1-\Xi})}} e^{-\frac{2\Omega_s}{3}[1+(1-\Xi)^{3/2}]}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Це наближення є справедливим навіть при малих  $\Omega_s$ , якщо  $1 - \Xi \gtrsim 1$ .

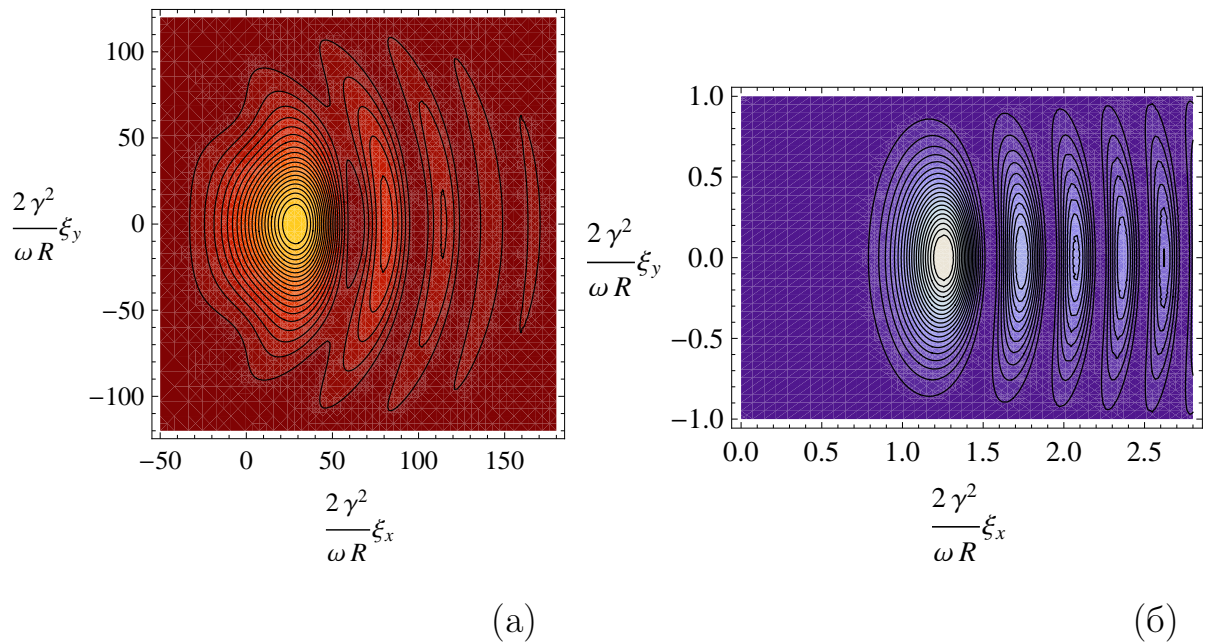


Рис. 4.12. Розподіл синхротронного випромінювання по прицільних параметрах  $\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{f}(\vec{\xi}, \omega, t)\right|\right|^2$ , де  $\vec{f}$  визначається Рівн. (4.154): а). при  $\Omega_s = \frac{\omega R}{2\gamma^3} = 0.01$ ; б).  $\Omega_s = 10$ .

Результат чисельного обчислення виразу (4.154) показано на Рис. 4.12. Однією з його особливостей є те, що найяскравіша світлова пляма зсунута

відносно миттєвого положення електрона. Фізична причина цього полягає в тому, що вона відповідає місцю зовні від орбіти електрона, де знаходиться критичний радіус, при якому власне поле електрона зривається і вивільняється як випромінення [476] (див. Рис. 4.13):

$$\Delta b_{\text{strip}} = R/v - R \simeq R/2\gamma^2. \quad (4.160)$$

Спостерігач, який дивиться з напрямку уздовж  $\vec{v}(0)$ , при типових або великих  $\omega$  практично не побачить випроміненого світла на прицільних параметрах, менших за (4.160). Це також пояснює існування точки розгалуження  $\Xi = 1$ , присутньої в Рівн. (4.157), (4.159). Поперечний масштаб (4.160) [або більш загальні, залежні від  $\omega$  масштаби, такі як (4.158)] можуть бути суттєвими в задачах випромінювання у складніших, неоднорідних полях.

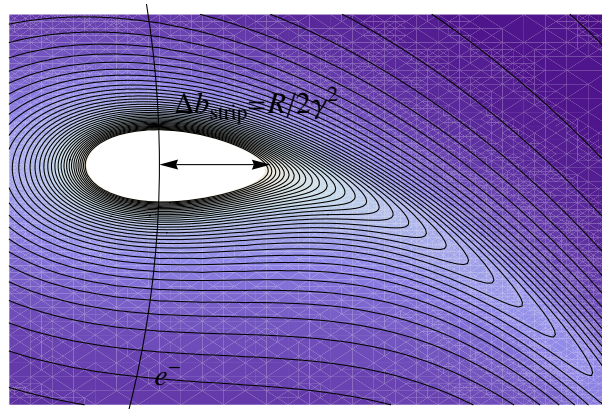


Рис. 4.13. Загаяне електромагнітне поле електрона, який рухається по орбіті радіусу  $R$  зі швидкістю  $v = 0.9c$ . Відрив поля випромінення виникає на скінченній поперечній відстані (4.160) відносно точки знаходження електрона, коли зовнішній край  $R/v$  власного поля електрона рухається зі швидкістю світла.

#### 4.4. Випромінювання у квазі-нескінченному однорідному середовищі

Коли електрон проходить крізь квазінескінченне, однорідне середовище, фотони випромінення мають достатньо часу щоб повністю сформува-

тися в середовищі, тому підінтегральний вираз у (4.143) стає практично незалежним від  $t_2$ . У цьому випадку має досліджуватися спектр випромінювання за одиницю часу:

$$\frac{dI}{d\omega dt} = \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{v}(\tau) - \vec{v}(0)]^2 \right\} \sin \omega [\tau - |\vec{r}(\tau) - \vec{r}(0)|] - \gamma^{-2} \sin \omega (1 - v)\tau \right). \quad (4.161)$$

Він містить лише одноразовий інтеграл, тому його аналіз значно спрощується. Нижче ми розглянемо дві еталонні задачі, після чого запропонуємо їх узагальнення.

**4.4.1. Синхротронне випромінювання.** Найпростіший приклад застосування формули (4.161) – це випромінювання від ультрарелятивістського електрона, який рухається по круговій орбіті в однорідному магнітному полі. Про нього вже йшла мова в підрозділі 4.3.6.2. З фізичного погляду зауважимо, що синхротронне випромінювання сконцентроване в області частот [64]

$$\omega \sim \frac{eHE^2}{m^3}, \quad (4.162)$$

що є малими порівняно з енергією електрона, якщо  $H \lesssim 1$  Тесла (умова, що виконується для лабораторних магнітів), тобто  $\frac{eH}{m^2} \lesssim 2 \times 10^{-10}$ , та для енергій електронів  $E < 100$  Тев, що є досяжними на сьогоднішній день. Тому цю задачу правомірно розглядати в контексті класичної електродинаміки.

Якщо радіус орбіти електрона дорівнює  $R$ , то отримуємо

$$[\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2 - \tau)]^2 \simeq \frac{\tau^2}{R^2}, \quad (4.163)$$

а з виразу (4.126)

$$|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2 - \tau)| = 2R \sin \frac{v}{2R} \tau \underset{\tau \leq T \ll R}{\simeq} v\tau - \frac{\tau^3}{24R^2}. \quad (4.164)$$

Підставляючи ці інгредієнти до спектра (4.161),

$$\frac{dI}{d\omega dt} = \frac{\omega e^2}{\pi \gamma^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma^2 \tau^2}{2R^2} \right) \sin \omega \left[ (1 - v)\tau + \frac{\tau^3}{24R^2} \right] - \sin \omega (1 - v)\tau \right\}, \quad (4.165)$$

перемасштабуванням  $\tau = sR/\gamma$  приводимо його до функції однієї змінної:

$$\frac{dI}{d\omega dt} = \frac{2e^2\gamma}{\pi R} J_{\text{syn}}(\Omega_s), \quad (4.166)$$

де

$$\Omega_s = \frac{\omega R}{2\gamma^3} = \frac{3}{4} \frac{\omega}{\omega_c} \quad (4.167)$$

та

$$\begin{aligned} J_{\text{syn}} &= \Omega_s \left[ \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left( 1 + \frac{s^2}{2} \right) \sin \Omega_s \left( s + \frac{s^3}{12} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= -\pi(2\Omega_s)^{1/3} \text{Ai}' \left[ (2\Omega_s)^{2/3} \right] - \pi\Omega_s \int_{(2\Omega_s)^{2/3}}^\infty d\alpha \text{Ai}(\alpha), \end{aligned} \quad (4.168)$$

а  $\text{Ai}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \cos(\alpha z + \frac{1}{3}z^3)$  – функція Ейрі [417]. Фізичний зміст змінної  $\Omega_s$  стає яснішим, якщо представити її як

$$\Omega_s = \frac{1}{l_0(\omega) \frac{d\gamma}{dt}}. \quad (4.169)$$

Звідси видно, що вона є відношенням довжини, на якій кут відхилення електрона стає близьким до  $\gamma^{-1}$ , до довжини формування фотона

$$l_0 = \frac{2\gamma^2}{\omega}. \quad (4.170)$$

При  $\Omega_s \rightarrow 0$  функцію (4.168) можна розкласти в ступінний ряд:

$$J_{\text{syn}} = \frac{3^{1/6}}{2^{2/3}} \Gamma(2/3) \Omega_s^{1/3} - \frac{\pi}{3} \Omega_s + \mathcal{O}(\Omega_s^{7/3}), \quad (4.171)$$

що відповідає розкладенню спектра

$$\frac{dI}{d\omega dt} \simeq 3^{1/6} \Gamma(2/3) \frac{e^2 \omega^{1/3}}{\pi R^{2/3}} - \frac{e^2 \omega}{3\gamma^2}. \quad (4.172)$$

Головний член в (4.172) не залежить від  $\gamma$ , тоді як член наступного порядку не залежить від  $R$ . Перша властивість є загальною особливістю сильно недипольного випромінювання, коли траєкторія електрона діє як суцільна антена (див., наприклад, [468]), тобто як довгий «дріт», який є достатньо сильно деформованим в межах довжини формування фотона, щоб електричний струм вздовж нього, який представляє собою пролітаючий електрон, вже міг розглядатися як такий, що тече зі швидкістю світла.

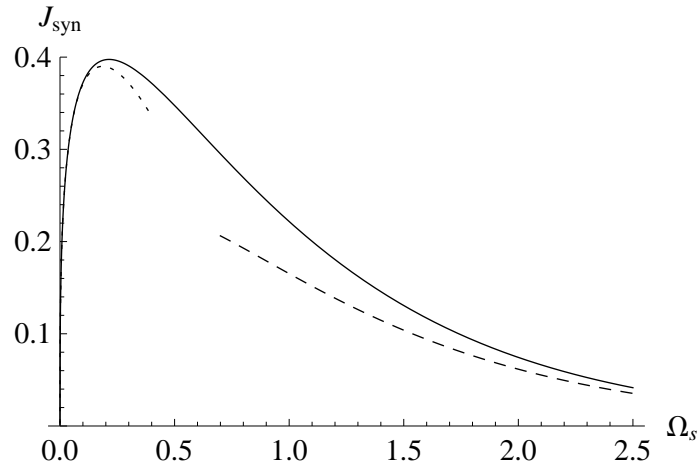


Рис. 4.14. Спектр класичного випромінення від ультрарелятивістського електрона в однорідному магнітному полі. Суцільна крива – вираз (4.168). Пунктирна – асимптотика при низьких  $\omega$ , визначена формулою (4.171). Штрихова – асимптотика при високих  $\omega$ , визначена формулою (4.173).

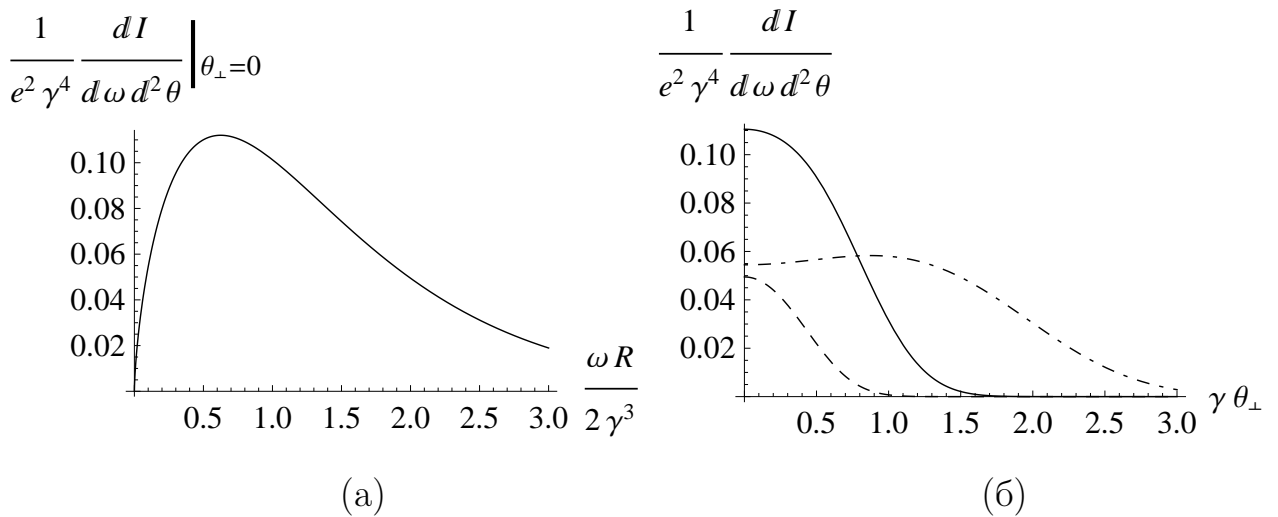


Рис. 4.15. а). Спектр випромінення строго у площині синхротрона ( $\theta_{\perp} = 0$ ), що визначається виразом (4.174). У порівнянні зі спектром, проінтегрованим за кутами, який зображено на Рис. 4.14, він є жорсткішим. б). Кутовий розподіл синхротронного випромінення на різних частотах. Штрихпунктирна крива,  $\Omega_s = 0.1$ . Суцільна крива,  $\Omega_s = 0.75$ . Штрихова крива,  $\Omega_s = 2$ .



При  $\Omega_s \rightarrow \infty$  спектр (4.168) убуває експоненційно:

$$J_{\text{syn}} \simeq \sqrt{\frac{\pi\Omega_s}{8}} e^{-\frac{4}{3}\Omega_s}. \quad (4.173)$$

Такий закон може бути пов'язаний з тим, що зі збільшенням  $\omega$  когерентний внесок дають все менші ділянки гладкої траєкторії, де вона сприймається як все більш прямолінійна.

З (4.133) можна також одержати спектрально-кутовий розподіл випромінювання:

$$\frac{dI}{d\omega d^2\theta} = 4e^2\gamma^2 \left\{ \Omega_s^{2/3} \text{Ai}'^2 \left[ (1 + \Theta_{\perp}^2)\Omega_s^{2/3} \right] + \Theta_{\perp}^2 \Omega_s^{4/3} \text{Ai}^2 \left[ (1 + \Theta_{\perp}^2)\Omega_s^{2/3} \right] \right\}, \quad (4.174)$$

з  $\Theta_{\perp} = \gamma\theta_{\perp}$ , де  $\theta_{\perp}$  – компонента кута випромінювання фотона, перпендикулярна до площини руху електрона. Відповідні залежності побудовані на Рис. 4.15. Природно, що кутовий розподіл у даному випадку не залежить від  $\theta_{\parallel}$ , тому він може бути також представлений як

$$\frac{dI}{d\omega d^2\theta} = R \frac{dI}{d\omega d\theta_{\perp} dt}. \quad (4.175)$$

Слід відзначити, що на відміну від (4.175) або (4.166),<sup>18</sup> передуючий множник у (4.174) не містить  $R$ . Варто також зауважити, що при  $\Omega_s \ll 1$ , (4.174) фактично стає функцією однієї змінної  $\Theta_{\perp}^2 \Omega_s^{2/3} = \theta_{\perp}^2 (\omega R/2)^{2/3}$ , яка не залежить від  $\gamma$ . Це означає перехід до радіофізичного режиму.

**4.4.2. Випромінювання в аморфному середовищі. ЛПМ-ефект.** Інший тип руху електрона виникає при його проходженні крізь квазібезмежну аморфну речовину, що відповідає фізично товстій мішені. Тут спектр випромінювання має ще усереднюватися за випадковими траєкторіями електрона, але якщо вважати, що процес багаторазового розсіювання є еквівалентним нормальній дифузії, така процедура не становить принципових труднощів.

<sup>18</sup>Рівн. (4.166), (4.168) можна отримати з (4.174) за допомогою представлення одноразовим інтегралом квадрата функції Ейрі  $\text{Ai}^2(s) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{q}} \cos\left(\frac{q^3}{12} + qs + \frac{\pi}{4}\right)$ , а також співвідношення  $\text{Ai}'^2(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} - s\right) \text{Ai}^2(s)$ , що дозволяє аналогічно виразити квадрат похідної від цієї функції.

Як вперше зазначили Ландау та Померанчук [140], вплив багаторазового розсіювання на випромінювання полягає в тому, що при достатньо низьких  $\omega$ , коли задіяні великі поздовжні масштаби, і недипольні ефекти стають визначальними, порушується властивість факторизації для процесу гальмівного випромінювання. Тоді при  $\omega \rightarrow 0$  питомий спектр поводить себе як  $\frac{dI}{d\omega dt} \sim \sqrt{\omega}$ . Це певною мірою аналогічно ситуації з синхротронним випромінюванням, але показник ступеня відрізняється від показника у виразі (4.171), оскільки часова затримка для багаторазового розсіювання є квадратичною, а не кубічною функцією [див. Рівн. (4.164) та (4.190) нижче].

**4.4.2.1. Точне гауссове усереднення.** Слідуючи аналогії з синхротронним випромінюванням, на основі виразів (4.169), (4.170) можна відразу оцінити характерні частоти, на яких проявляється ЛПМ-ефект:

$$\omega_D \sim \frac{2\gamma^2}{l_{\text{scat}}}, \quad (4.176)$$

де

$$l_{\text{scat}} = \frac{l}{\Sigma^2(l)} \sim \frac{\alpha}{2\pi} X_0 \sim \frac{1}{8\pi Z^2 \alpha^4} a_B \quad (4.177)$$

– це масштаб довжин, на якому кут багаторазового розсіювання стає близьким до кута випромінювання  $\gamma^{-1}$ . Якщо  $\omega_D \ll E$ , тобто  $E \ll m^2 l_{\text{scat}} (\gamma^{-1}) \gtrsim 100$  Гев (навіть у мішенях з  $Z\alpha \sim 1$ ), ЛПМ ефект можна описувати класичною електродинамікою. Щоправда, при енергії електронів  $E = 200$  Гев, доступній на сьогоднішній день у ЦЕРН, квантові ефекти віддачі фотона вже стають помітними, і можуть бути враховані за допомогою формули (4.144). Але для простоти ми продовжимо наше обговорення в контексті класичної електродинаміки.

Для акуратного обчислення інтегрального за кутами спектра випромінювання, вираз (4.161) потрібно усереднити з ваговою функцією розподілу для електрона в аморфному середовищі. Якщо з цією метою використовувати представлення (4.134), для нього потрібна лише функція розподілу

по кутах розсіяння, але усереднення тоді повинно виконуватися за імовірностями розсіяння у всіх точках між  $t_1$  та  $t_2$ , що еквівалентно обчисленню континуального інтеграла [477, 478]. Простішим може бути використати представлення, залежне від координат (4.161), і згорнути його з функцією розподілу по кутах та координатах, заданою Рівн. (2.133) Розділу 2. Підставляючи її до загальної формули для усередненого спектра

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle = \int_0^\infty dr \int d^2 v_\perp f(\vec{v}_\perp, r, \tau) \times \omega \frac{e^2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left( \gamma^{-2} + \frac{1}{2} \vec{v}_\perp^2 \right) \sin \omega(\tau - r) - \frac{\pi}{2\gamma^2} \right\}, \quad (4.178)$$

отримуємо

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle = \frac{-i\omega e^2}{16\pi^2 v} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_z q_z}{\sinh^2 2D\tau \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}}} \int_{-\infty}^\infty dr e^{iq_z(r-v\tau)} \sin \omega(\tau - r) \times \int_0^\infty dv_\perp^2 \left( \gamma^{-2} + \frac{1}{2} \vec{v}_\perp^2 \right) \exp \left[ -\frac{\vec{v}_\perp^2}{2} \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \coth 2D\tau \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right] - \frac{\omega e^2}{2\gamma^2}. \quad (4.179)$$

(Інтегрування за  $r$  було розширене до  $-\infty$ , оскільки розподіл все одно практично зникає при  $r < 0$ .)

Представлення (4.179) містить 4 інтеграли, але 3 з них обчислюються тривіально: інтеграл за  $dv_\perp^2$  є просто експоненційним:

$$\int_0^\infty dv_\perp^2 \left( \gamma^{-2} + \frac{1}{2} \vec{v}_\perp^2 \right) \exp \left[ -\frac{\vec{v}_\perp^2}{2} \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \coth 2D\tau \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right] = \frac{16Dv}{-iq_z} \left[ \gamma^{-2} \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \tanh 2D\tau \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} + \tanh^2 2D\tau \sqrt{-\frac{iq_z}{8Dv}} \right], \quad (4.180)$$

а інтегрування за  $r$  призводить до появи двох дельта-функцій:

$$\int_{-\infty}^\infty dr e^{iq_z(r-v\tau)} \sin \omega(\tau - r) = \frac{\pi}{i} \delta(q_z - \omega) e^{i(1-v)\omega\tau} - \frac{\pi}{i} \delta(q_z + \omega) e^{-i(1-v)\omega\tau}, \quad (4.181)$$

які у свою чергу беруть інтеграл за  $q_z$ . Таким чином, залишається лише

інтеграл за  $\tau$ , що виражає результат у вигляді

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle = \frac{2\omega e^2 D}{\pi} \Im \int_0^\infty d\tau e^{i\omega(1-v)\tau} \times \left( \frac{2}{\gamma^2} \frac{\sqrt{-\frac{i\omega}{8D}}}{\sinh 4D\tau \sqrt{-\frac{i\omega}{8D}}} + \frac{1}{\cosh^2 2D\tau \sqrt{-\frac{i\omega}{8D}}} \right) - \frac{\omega e^2}{2\gamma^2}. \quad (4.182)$$

(Ми поклали  $v \rightarrow 1$  всюди, де це не призводить до повних скорочень).

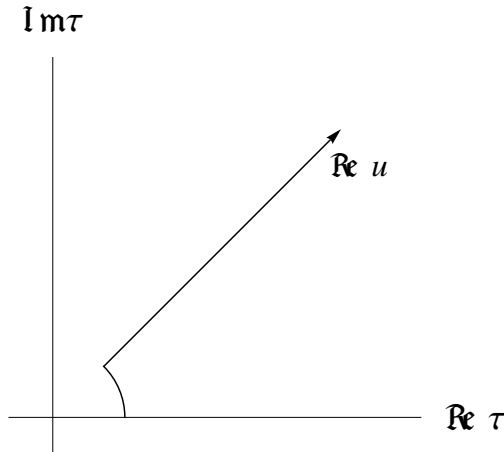


Рис. 4.16. Деформація контуру інтегрування при переході від Рівн. (4.182) до (4.183).

Щоб привести інтеграл (4.182) до дійсного вигляду, можна перейти в ньому до змінної  $4D\tau \sqrt{-\frac{i\omega}{8Dv}} = u$ , або, в оберненому вигляді,  $\tau = \frac{u}{\sqrt{-2i\omega D}}$ . Це відповідає повороту шляху інтегрування на кут  $\pi/4$ . Однак, слід мати на увазі, що підінтегральний вираз є сингулярним у початку координат. Тому, строго кажучи, потрібно доповнити шлях інтегрування дугою навколо початку координат, як зображено на Рис. 4.16. Виявляється, що коли радіус цієї дуги прямує до нуля, відповідний внесок не зникає, а наближається до скінченного значення  $\omega e^2/4\gamma^2$ . З урахуванням цього, отримуємо

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle = \frac{2e^2\gamma^2 D}{\pi} \Re \int_0^\infty du e^{i \frac{(1-v)u}{\sqrt{-\frac{2iD}{\omega}}}} \times \left( \frac{1-i\omega}{\gamma^4} \frac{1}{2D} \frac{1}{\sinh u} + \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{-\frac{i\omega}{2D}} \frac{1}{\cosh^2 u/2} \right) + \frac{\omega e^2}{4\gamma^2} - \frac{\omega e^2}{2\gamma^2}. \quad (4.183)$$

Використовуючи позначення Мигдала  $s = \frac{1-v}{4}\sqrt{\frac{\omega}{D}} \equiv \frac{1}{8\gamma^2}\sqrt{\frac{\omega}{D}}$ , можна зрештою представити результат у вигляді

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle &= \frac{2e^2\gamma^2 D}{\pi} \Re \int_0^\infty du e^{-2us+2ius} \\ &\times \left( -32is^2 \frac{1}{\sinh u} + 4s\sqrt{-2i} \frac{1}{\cosh^2 u/2} \right) - \frac{\omega e^2}{4\gamma^2} \\ &= \left\langle \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega dt} \right\rangle \Phi_M(s). \end{aligned} \quad (4.184)$$

Тут  $\left\langle \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega dt} \right\rangle = \frac{2e^2\gamma^2}{3\pi} \frac{d\langle \chi^2 \rangle}{dt} = \frac{8e^2\gamma^2}{3\pi} D$ , та

$$\begin{aligned} \Phi_M(s) &= 24s^2 \int_0^\infty du e^{-2us} \frac{\sin 2us}{\sinh u} \\ &+ 3s \int_0^\infty du e^{-2us} \frac{\cos 2us + \sin 2us}{\cosh^2 u/2} - 6\pi s^2 \end{aligned} \quad (4.185a)$$

$$\equiv 24s^2 \left( \int_0^\infty du e^{-2us} \sin 2us \cos u - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.185b)$$

$$= 6s^2 \left\{ 4\Im \psi \left[ (1+i)s \right] - \frac{1}{s} - \pi \right\} \quad (4.185c)$$

– функція Мигдала, нормована умовою  $\Phi_M(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$  [в Рівн. (4.185c)  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ]. Ця функція зображена на Рис. 4.17. Представлення (4.185a) також можна порівняти з рівнянням (19) у Додатку VI в книзі Тер-Мікаеляна [124].

Член наступного наближення у виразі

$$\Phi_M(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} 1 - \frac{1}{84s^4} + \mathcal{O}(s^{-8}) \quad (4.186)$$

в добутку з  $\left\langle \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega dt} \right\rangle$  є кубічним по  $D$ . Отже, він повинен бути пов'язаний з октупольним внеском до випромінення (квадрупольний внесок при фіксованому  $\omega$  існує лише в мішенях скінченної товщини – див. Розділ 4.5.2).

У протилежному випадку м'якого випромінення  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$\Phi_M(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} 6s - 6\pi s^2 + \mathcal{O}(s^3), \quad (4.187)$$

звідки отримуємо

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle \underset{\omega \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2e^2}{\pi} \sqrt{\omega D} - \frac{e^2\omega}{4\gamma^2}. \quad (4.188)$$

Аналогічно ситуації з виразом (4.172), головний член тут не залежить від  $\gamma$  (що відображає радіофізичний характер цього ліміту), тоді як член наступного наближення не залежить від  $D$ .

Отже, згортка загального проінтегрованого за кутами спектра випромінювання (4.178) з функцією розподілу (2.133), яка містить розв'язок кінетичної частини задачі, дозволяє доволі просто отримати результат Мигдала. Більш традиційне виведення формули Мигдала базується на транспортному рівнянні для функції розподілу, яке включає також фотонні змінні [141]. У випадку нормальної дифузії такий підхід є складнішим; однак, якщо ставити на меті врахування аномального характеру кулонівського багатозразового розсіювання, метод радіаційного транспортного рівняння може виявитися потужнішим [149].

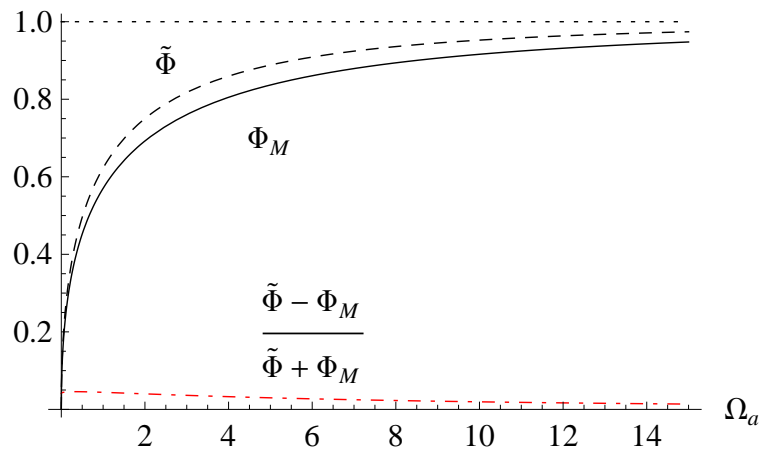


Рис. 4.17. Суцільна крива – функція Мигдала  $\Phi_M \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Omega_a}{3}} \right)$ , з  $\Phi_M(s)$  заданою Рівн. (4.185с) – порівн. з Рис. 1.5а. Штрихова крива – Рівн. (4.193). Штрих-пунктирна червона лінія показує відносну різницю  $\frac{\tilde{\Phi} - \Phi_M}{\tilde{\Phi} + \Phi_M}$ .

Щоб визначити область застосовності даного результату, отриманого для «товстої» мішені, зазначимо, що для формування профілю пригнічення ЛПМ товщина мішені повинна задовольняти умові  $T > l_{\text{scat}}$ , що є макроскопічною величиною.

**4.4.2.2. Процедура швидкого усереднення.** Існує також спрощений підхід, який походить з роботи [140] та дуже полегшує процедуру усе-

реднення. У цьому підході спектр випромінення в аморфному середовищі розраховується шляхом заміни у формулі (4.143)  $[\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2 - \tau)]^2$  і  $|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2 - \tau)|$  їхніми усередненими значеннями. Строго кажучи, такий підхід може бути виправданим якщо, по-перше, сукупний розподіл ймовірності по  $v_{\perp}^2$  та  $r$  хоча б приблизно факторизується в добуток розподілів окремо по  $v_{\perp}^2$  та  $r$ , а по-друге, оскільки залежність від  $r$  в формулі (4.143) все одно є нелінійною, якщо розподіл ймовірності по  $r$  є достатньо вузьким. Виконання цих умов можна перевірити, поглянувши на Рис. 2.8б. На ньому видно, що розподіл по  $r$  є відносно вузьким і концентрується при ненульових  $r - vt$ , тому процедура швидкого усереднення може спрацювати задовільним чином. Вона повинна поліпшуватися на малих різницях часу, тобто при високих частотах фотонів, хоча Ландау і Померанчук, навпаки, пропонували його для складнішого ліміту малих  $\omega$ . Тепер випробуємо даний підхід, порівнюючи його з відомим точним результатом для даної задачі.

Обчислюючи необхідні середні значення

$$\langle [\vec{v}(\tau) - \vec{v}(0)]^2 \rangle = \left\langle \frac{d\chi^2}{d\tau} \right\rangle \tau = 4D\tau \quad (4.189)$$

та, за допомогою Рівн. (4.126),

$$\langle |\vec{r}(\tau) - \vec{r}(0)| \rangle \simeq v\tau - \frac{1}{12} \left\langle \frac{d\chi^2}{d\tau} \right\rangle \tau^2 = v\tau - \frac{1}{3} D\tau^2, \quad (4.190)$$

і підставляючи їх до виразу (4.161), отримуємо<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega dt} &\approx \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ (\gamma^{-2} + 2D\tau) \sin \omega \left[ (1-v)\tau + \frac{1}{3} D\tau^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \gamma^{-2} \sin \omega (1-v)\tau \right\} \\ &= \left\langle \frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega dt} \right\rangle \tilde{\Phi} \left( \frac{3\omega}{\gamma^4 \left\langle \frac{d\chi^2}{d\tau} \right\rangle} \right), \end{aligned} \quad (4.191)$$

<sup>19</sup>Наступні формули не були отримані Ландау та Померанчуком (див. також [479]), але вони в дусі їх підходу. Функція  $\tilde{\Phi}$  також зустрічається в інших задачах про випромінювання, і таким чином, разом з  $\Phi_M$  вона може розглядатися як еталонна.

із формфактором

$$\tilde{\Phi}(\Omega_a) = \frac{\Omega_a}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{z} [(1 + 3z) \sin \Omega_a (z + z^2) - \sin \Omega_a z]. \quad (4.192)$$

Останній інтеграл обчислюється в замкнутому вигляді [1]:

$$\tilde{\Phi}(\Omega_a) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \left| 3 - \sqrt{i\pi\Omega_a} e^{i\Omega_a/4} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{i\Omega_a}{4}} \right|^2, \quad (4.193)$$

де  $\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty dt e^{-t^2}$  – додаткова функція помилок [417] (див. Рис. 4.17).

При  $\Omega_a \rightarrow \infty$  формфактор наближається до одиниці, оскільки це відповідає дипольному режиму. З урахуванням наступної (октупольної) поправки,

$$\tilde{\Phi}(\Omega_a) \underset{\Omega_a \rightarrow \infty}{\simeq} 1 - \frac{8}{\Omega_a^2}. \quad (4.194)$$

З іншого боку, на інфрачервоній границі  $\Omega_a \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\Phi} \simeq \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi\Omega_a}{2}}$ . Від точної асимптотики  $\Phi_M \simeq \frac{\sqrt{3\Omega_a}}{2}$ , відомої з теорії Мигдала [див. (4.187), де  $s = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Omega_a}{3}}$ ], вона відрізняється коефіцієнтом  $\sqrt{\frac{3\pi}{8}} = 1.085$ . Проте, на практиці такою невеликою різницею часто можна знехтувати (див. Рис. 4.17).

**4.4.2.3. Компенсуючий приріст при великих  $\omega$  (дробовий ефект).** З погляду тотожності (4.132) та її узагальнення на довільну кількість просторово розділених розсіювань як  $\int_0^\infty d\omega \left( \frac{dI}{d\omega} - \frac{dI_{\text{БН}}}{d\omega} \right) = 0$ , може здатися дивним, чому точний результат (4.184) містить функцію  $\Phi_M$ , яка скрізь менша за одиницю [480]. Це потребує додаткового роз'яснення [30].

У [7] було детально вивчено випромінення при дворазовому розсіянні через скінченний інтервал часу  $t_{21}$ . У цьому випадку спектр випромінення виявився пригніченим при  $\omega \rightarrow 0$ , але це пригнічення було точно скомпенсоване посиленням при типових  $\omega$ , обернено пропорційних до  $t_{21}$ :

$$\omega_a \sim \frac{2\gamma^2}{t_{21}}.$$

Для гальмівного випромінювання у конденсованій речовині можна, таким чином, очікувати на появу подібного посилення при  $\omega_a \sim 2\gamma^2/a_{\text{В}}$ , де міжа-



томна відстань оцінюється як така, що за порядком величини дорівнює радіусу Бора  $a_B$ . Оскільки останній є мікроскопічною величиною, відповідні  $\omega$  є набагато жорсткішими, ніж типова частота  $\omega_D$ , визначена формулою (4.176), і тому можуть вже виходити за межі квантової границі спектра  $\omega = E$ . А саме, ця границя досягається вже при  $\gamma \sim \frac{\omega}{E} m_e a_B \gtrsim 1/e^2 \sim 10^2$ , і у більшості експериментів з генерації гальмівного випромінювання остання умова виконується.

Вищезгадане посилення, звісно, присутнє і при помірних  $\omega$ , але відносна величина посилення оцінюється як

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega dt} \right\rangle_{\omega_a \ll \omega \ll E} \approx \left\langle \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega dt} \right\rangle (1 + \Delta)$$

з

$$\Delta \sim \frac{\omega_D}{\omega_a} \sim \frac{a_B}{l_{\text{scat}}} \sim 8\pi Z^2 \alpha^4 \lll 1.$$

Таким чином, фактична непомітність анти-ЛПМ, або дробового ефекту у фізичних твердих мішенях обумовлюється не лише раннім квантовим кінцем спектра, але і малою величиною широко розподіленого дробового внеску. Натомість, в атомних ядрах, де розсіяння окремими конститuentами є значно сильнішим, цей ефект може бути помітним [481].

#### 4.4.3. Масштабна інваріантність в однорідних середовищах. ГЧ та УФ асимптотики у першому та другому наближеннях.

Асимптотичну поведінку спектрів випромінювання при  $\omega \rightarrow 0$  і  $\omega \rightarrow \infty$  можна пов'язати з поведінкою відповідно при  $\tau \rightarrow \infty$  і  $\tau \rightarrow 0$  корелятора  $[\vec{v}(\tau) - \vec{v}(0)]^2$  та затримки  $v\tau - |\vec{r}(\tau) - \vec{r}(0)|$ . Проаналізуємо цей зв'язок у загальному випадку [1], припустивши наступну властивість масштабної інваріантності руху частинки (в однорідному середовищі):

$$\langle [\vec{v}(\tau) - \vec{v}(0)]^2 \rangle = c_v \tau^n, \quad (4.195)$$

де кутові дужки означають усереднення. Підстановка цього виразу до рівняння (4.126) дає:

$$\langle v\tau - |\vec{r}(\tau) - \vec{r}(0)| \rangle = \frac{c_v}{2\tau} \int_0^\tau ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 (s_2 - s_1)^n = c_r \tau^{n+1}, \quad (4.196)$$

де

$$c_r = \frac{c_v}{2(n+1)(n+2)}.$$

Для синхротронного випромінювання  $n = 2$ , тоді як ЛПМ-ефекту  $n = 1$ . Для донат-розсіювання [див. Розд. 3.2, Рівн. (3.51)]  $n \simeq 1$  для  $t \ll D^{-1}$ , але  $n \rightarrow 0$  для  $t \gg D^{-1}$ .

Для приблизного визначення поведінки спектра випромінювання в ГЧ ліміті можна застосувати спрощений спосіб усереднення спектра, описаний в Розд. 4.4.2.2, коли усереднені вирази (4.195), (4.196) підставляються до передекспоненційного множника та показника експоненти формули (4.143) чи (4.161). В підрозділі 4.4.2.2 ми бачили, що для  $n = 1$  цей підхід дає правильний показник ступеня, але дещо неточний коефіцієнт. Оскільки випадок  $n = 1$  не є особливим, ми можемо очікувати, що так буде і в загальному випадку.

Підставляючи величини (4.195), (4.196) до інтеграла (4.161), можна вивести асимптотичне розкладення для спектра у граничному випадку  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\frac{dI}{d\omega dt} \underset{\omega \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^2 \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}}{2\pi(n+1)} \Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{c_v \omega^{\frac{1}{n+1}}}{c_r^{\frac{n}{n+1}}} - \frac{e^2 \omega}{2\gamma^2} \frac{n}{n+1} + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (4.197)$$

Головний член тут не залежить від  $\gamma$  і, таким чином, за своєю природою є радіофізичним (див. [4]). Але оскільки він залежить від  $c_v$ ,  $c_r$  нелінійним чином, числовий коефіцієнт при цьому члені може бути неточним. Що стосується поправки, наступної за головною, вона виявляється незалежною від величини коефіцієнтів  $c_v$ ,  $c_r$ , пропорційних інтенсивності розсіяння в середовищі, і, таким чином, однаковою для мішеней однакової структури (яка визначає показник  $n$ ) з різних матеріалів (наприклад, однаково орієнтованих кристалів Si чи Ge або аморфних Al чи Au, тощо). Оскільки вона взагалі не залежить від  $c_v$ ,  $c_r$ , можна очікувати, що ця поправка є точною, незважаючи на неточність методу усереднення, яким вона була отримана. Дійсно, для  $n = 1$  її можна отримати як з точної формули Мигдала [див. Рівн. (4.188)], так і з приблизної формули (4.193).

В протилежному, УФ ліміті головний внесок походить від малих  $\tau$ , де кути відхилення є меншими від  $\gamma^{-1}$ , і тому недипольність випромінювання не встигає розвинути. Завдяки цьому можна використати дипольну формулу (4.124) для спектра, хоча такий самий результат витікає і в процедурі спрощеного усереднення. Остання процедура, втім, дозволяє отримати також поправку:

$$\frac{dI}{d\omega dt} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{e^2 \gamma^2}{\pi} (c_v - 4nc_r) \left( \frac{2\gamma^2}{\omega} \right)^{n-1} \Gamma(n) \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{e^2}{2\gamma} \sqrt{\frac{\omega n}{\pi}} \Re e \left( \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\omega \tau_0}{2\gamma^2} \frac{n}{n+1}} \right), \quad (4.198)$$

де  $\tau_0 = e^{i\pi(1/n-1/2)} [2(n+1)\gamma^2 c_r]^{-1/n}$ . В загальному випадку цей вираз містить головний член зі ступінною залежністю від  $\omega$  (проте, лінійний по  $c_v$ ,  $c_r$ , завдяки чому на значення коефіцієнта у ньому не впливає спрощеність процедури усереднення). Але при  $n = 2$  (плавна траєкторія електрона) коефіцієнт при цьому доданку дорівнює нулю ( $\sin \frac{\pi n}{2} = 0$ ), тому убавання описується другим доданком з (4.198), який є експоненціальним. Слід зауважити, що він залежить від  $c_r$  нелінійно, і тому можна бути впевненим у його поведінці лише при  $n \approx 2$ , але саме в цьому випадку він найбільше потрібен.

Використовуючи ці правила та фізично обґрунтовані значення  $n$  при  $\tau \rightarrow \infty$  і  $\tau \rightarrow 0$ , можна знайти асимптотику спектра відповідно при  $\omega \rightarrow 0$  та  $\omega \rightarrow \infty$ . Для проміжних частот можна сподіватися, що спектр буде інтерполюватися достатньо гладко. Іноді ІЧ та УФ асимптоти можуть також охоплювати майже весь спектр [1].

Питання, чи може  $n$  бути нецілим числом на практиці, потребує детального дослідження. Комп'ютерне моделювання вказує на те, що це можливо (див., наприклад, [388]).

#### 4.5. Випромінювання в обмежених мішенях. Крайові ефекти

Для обмежених мішеней подвійний інтеграл у (4.143) не зводиться до одноразового і, взагалі кажучи, є значно складнішим. Деяких спрощень все

ж можна досягти коли «об'ємні» ефекти вдається відокремити від «крайових» і розглядати їх окремо. В однорідній мішені об'ємний внесок повинен бути пропорційним товщині мішені, тому його відокремлення від крайового внеску може спиратися на відповідний асимптотичний аналіз при великих або малих товщинах мішені (порівняно з характерною товщиною, на якій кут відхилення стає близьким до характерних кутів випромінення  $\gamma^{-1}$ ). Корисним може бути також розкладення за ступенями відношення  $T/l_f$ , де звичайним чином визначена довжина формування фотона [124, 143, 257]

$$l_f = \frac{2}{\omega(\gamma^{-2} + \theta^2)}, \quad (4.199)$$

залежить, окрім частоти фотона  $\omega$ , ще й від кута випромінення фотона  $\theta$ , а через нього, опосередковано, й від кута розсіяння електрона. У цьому підрозділі ми обговоримо вищезгадані можливості.

**4.5.1. Поправка  $\mathcal{O}(\omega)$  до інфрачервоної факторизаційної теореми.** У ліміті малих  $\omega$  експонента в (4.127а) може бути замінена на одиницю, після чого інтеграл за часом тривіально обчислюється, приводячи до виразу (4.151). Інтегрування за кутами випромінення фотона тоді дає

$$\frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi} F_1(\gamma\chi_{fi}), \quad (4.200)$$

де  $F_1$  визначається виразом (4.73а). Ця функція залежить лише від кінцевого кута відхилення в одиницях оберненого Лоренц-фактора  $\gamma\chi_{fi}$ , де  $\chi_{fi} = |\vec{v}(\infty) - \vec{v}(-\infty)|$ .

Ситуація стає цікавішою, якщо ставити на меті обчислити поправку наступного порядку до (4.200). Прямолінійний підхід полягає у розкладанні амплітуди випромінення за ступенями  $\omega$  шляхом лінеаризації експоненти в (4.127а):

$$e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}(t)} = 1 + i\omega[t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)] + \mathcal{O}(\omega^2).$$

Квадрат модуля відповідної амплітуди тоді дає дійсну поправку  $\mathcal{O}(\omega^2)$ , але інтеграл за кутами від неї розбігається, роблячи такий підхід безплідним. Таким чином, в даному випадку не можна розкласти весь фазовий

множник. Як буде показано нижче, розкладення  $dI/d\omega$  за межами ліміту інфрачервоної факторизації починається з порядку  $\mathcal{O}(\omega)$ .

Для розкладення спектра за ступенями  $\omega$  краще підходить представлення (4.143):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} = & \omega \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \\ & \times \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2 \right\} \sin \omega [\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|] - \gamma^{-2} \sin \omega (1 - v)\tau \right), \end{aligned} \quad (4.201)$$

що містить структуру (4.126) в аргументі синуса. Для наших цілей останню зручніше переписати як

$$\begin{aligned} v\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| = & \frac{1}{2v} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} dt [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)] \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i] \right. \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_2} dt [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)] \cdot [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i] \right\}. \end{aligned} \quad (4.202)$$

ГЧ границя впливає з виразів (4.201), (4.202) шляхом підстановки траєкторії у вигляді кута  $[\vec{\chi}(t < 0) = \vec{\chi}_i, \vec{\chi}(t > 0) = \vec{\chi}_f]$ :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\text{ВН}}}{d\omega} = & \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \\ & \times \left\{ \left[ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} (\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i)^2 \right] \sin \omega \left[ (1 - v)\tau - \frac{t_1 t_2}{2v\tau} \chi_{fi}^2 \right] - \gamma^{-2} \sin \omega (1 - v)\tau \right\}. \end{aligned} \quad (4.203)$$

Перехід до змінних  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $w = t_2/\tau$  [4] спрощує останній вираз до одноразового алгебраїчного інтеграла, обчислення якого дає (4.200). Щоб знайти поправку, таким чином, потрібно відняти (4.203) від (4.201) та обчислити різницю у ліміті  $\omega \rightarrow 0$ .

Для проведення розрахунку зручно виділити скінченний інтервал подовжньої координати або часу  $0 < t < T$ , який цілком вміщує область відхиляючого поля, так що за його межами можна покласти  $\vec{\chi}(t \leq 0) = \vec{\chi}_i$ ,  $\vec{\chi}(t \geq T) = \vec{\chi}_f$ . У подвійному інтегралі за часом тоді можна замінити

нижню межу для  $t_2$  на 0 і розбити інтеграл за  $t_1$  на пару  $\int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \dots = \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots + \int_0^{t_2} dt_1 \dots$ :

$$\frac{dI}{d\omega} - \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega} = I_1 + I_2$$

3

$$\begin{aligned} I_1 = & \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty dt_2 \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \\ & \times \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}_i]^2 \right\} \sin \omega [\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|] \right. \\ & \left. - \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i]^2 \right\} \sin \omega \left[ (1-v)\tau - \frac{t_1 t_2}{2v\tau} \chi_{fi}^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (4.204)$$

та

$$\begin{aligned} I_2 = & \omega \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty dt_2 \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \\ & \times \left( \left\{ \gamma^{-2} + \frac{1}{2} [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}(t_1)]^2 \right\} \sin \omega [\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|] - \gamma^{-2} \sin \omega (1-v)\tau \right). \end{aligned} \quad (4.205)$$

В  $I_1$ , згідно до (4.202), нелінійна частина фази першого синуса може бути записана як

$$\begin{aligned} & v\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| \\ & = \frac{1}{2v} \left\{ \frac{1}{\tau} \left( -t_1 \vec{\chi}_{fi} + \int_{-\infty}^\infty dtt \frac{d}{dt} \vec{\chi} \right) \cdot \left( t_2 \vec{\chi}_{fi} - \int_{-\infty}^\infty dtt \frac{d}{dt} \vec{\chi} \right) \right. \\ & \quad \left. - \int_{-\infty}^\infty dt [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)] \cdot [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i] \right\} \\ & = -\frac{t_1 t_2}{2v\tau} \chi_{fi}^2 + \mathcal{O}(T \chi_{fi}^2), \end{aligned} \quad (4.206)$$

що виявляється близьким до такої ж частини у другому синусі. Будучи поділений на  $l_f(\omega)$ , перший член у (4.206) все ще може не зникати при  $T/l_f \rightarrow 0$ , оскільки типові  $t_1$ , так само як і  $t_2$ , зростають пропорційно до  $l_f(\omega)$ . Але  $\omega \frac{t_1 t_2}{2v\tau} \chi_{fi}^2 \sim \frac{T}{l_f} \gamma^2 \chi_{fi}^2$  у цьому граничному випадку зникає. Отже, відбувається повне скорочення двох останніх рядків у виразі (4.204) при

$t_2 > T$ . У різниці цих членів, що збігається при  $t_2 < T$ , можна зберегти у фазі синусів тільки доданок  $\omega(1-v)\tau$ , після чого отримуємо:

$$I_1 \simeq \omega \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty dt_2 \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1}{t_2 - t_1} \left\{ [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}_i]^2 - [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i]^2 \right\} \sin \omega(1-v)\tau. \quad (4.207)$$

Тепер перехід до змінної інтегрування  $s = \omega(1-v)\tau$ ,

$$I_1 \simeq \omega \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty dt_2 \left\{ [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}_i]^2 - [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i]^2 \right\} \int_{\omega(1-v)t_2}^\infty \frac{ds}{s} \sin s, \quad (4.208)$$

демонструє, що цей внесок наближається до

$$I_1 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \omega \frac{e^2}{4} \int_0^\infty dt_2 \left\{ [\vec{\chi}(t_2) - \vec{\chi}_i]^2 - [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i]^2 \right\}. \quad (4.209)$$

В  $I_2$  головний внесок походить від  $\int_T^\infty dt_2 \int_0^T dt_1 \dots$  [адже  $\omega \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \dots = \mathcal{O}(\omega^2)$ , оскільки на обмеженому проміжку інтегрування та при  $\omega \rightarrow 0$  синус в підінтегральному виразі теж можна вважати пропорційним до  $\omega$ ]. Тут ми знову можемо лінеаризувати фазу (тепер завдяки тому, що для обмеженого  $t_1$  маємо  $\omega \frac{t_1 t_2}{2v\tau} \chi_{fi}^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ ), і в граничному випадку  $\omega \rightarrow 0$  отримуємо

$$\begin{aligned} I_2 &\simeq \omega \frac{e^2}{2\pi} \int_0^T dt_1 [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t_1)]^2 \int_T^\infty \frac{dt_2}{t_2 - t_1} \sin \omega(1-v)\tau \\ &= \omega \frac{e^2}{2\pi} \int_0^T dt_1 [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t_1)]^2 \int_{\omega(1-v)(T-t_1)}^\infty \frac{ds}{s} \sin s \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \omega \frac{e^2}{4} \int_0^T dt_1 [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t_1)]^2. \end{aligned} \quad (4.210)$$

Поєднуючи (4.209) та (4.210), і враховуючи тотожність

$$(\vec{\chi} - \vec{\chi}_i)^2 + (\vec{\chi}_f - \vec{\chi})^2 - (\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i)^2 = -2(\vec{\chi}_f - \vec{\chi}) \cdot (\vec{\chi} - \vec{\chi}_i),$$

приходимо до результату [3]

$$\frac{dI}{d\omega} \underset{\omega \rightarrow 0}{\simeq} \frac{dI_{\text{BH}}}{d\omega} (\gamma |\vec{\chi}_f - \vec{\chi}_i|) + C_1 \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.211)$$

з

$$C_1 = -\frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^\infty dt [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i] \cdot [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)]. \quad (4.212)$$

Тут нижня та верхня межі були замінені на нескінченності, за припущення, що підінтегральний вираз достатньо швидко прямує до нуля при  $t < 0$  і  $t > T$ .

Аналізуючи характер внесків у Рівн. (4.211), можна зазначити, що головний інфрачервоний внесок (4.200), безумовно, належить до категорії крайових ефектів, оскільки об'ємні внески взагалі зникають в ліміті  $\omega \rightarrow 0$  [порівн. з виразами (4.171), (4.187)]. Щодо ГЧ-поправки наступного порядку  $C_1\omega$ , ситуація менш однозначна і залежить від характеру руху електрона. Наприклад, у випадку ондуляторного випромінювання, коли сила, що діє на електрон, має вигляд  $\vec{F}_\perp(t) = \vec{F}_0 \cos \frac{2\pi t}{T_1}$  в часовому інтервалі  $0 < t < NT_1$ , де  $N \gg 1$  – число періодів коливань, маємо

$$\frac{C_1}{NT_1} \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} e^2 \left( \frac{F_0 T_1}{4\pi E} \right)^2. \quad (4.213)$$

Оскільки  $C_1 \propto N$ , цей внесок слід вважати об'ємним. У іншому випадку монотонного відхилення електрона, як у магніті довжини  $T$  (див. нижче Розділ 4.5.3.2), коефіцієнт  $C_1$  зростає з ростом  $T$  кубічно, і може бути пов'язаний зі внеском інтерференції між краями поля.

У будь-якому випадку, отриману поправку, завдяки її простоті, можна використовувати для точнішого поєднання інфрачервоної (або узагальненої факторизаційної) межі гальмівного спектра з його поведінкою при більших  $\omega$ , зондуючи внутрішню частину мішені.

**4.5.2. Радіаційний формфактор у тонкій аморфній пластинці.** Одним з важливих прикладів розділення об'ємних та граничних ефектів з категорії недипольного випромінювання є гальмівне випромінювання при проходженні електрона крізь аморфну пластинку скінченної товщини. Крайові ефекти при цьому можна виділити навіть при порівняно слабкому розсіюванні (тонка фольга). Дійсно, внесок Бете-Гайтлера відповідає дипольному наближенню, тобто враховує лише одноразові розсіювання електрона на малі кути, які потім усереднюються за розташуванням точок розсіяння в мішені. Через те, що тут не виникає будь-якої інтерференції



між розсіяннями, цей внесок є пропорційним до  $T$  (див., наприклад, [479]). Наближення ж наступного порядку (квадрупольне) враховує двоточкові кореляції, тобто внески подвійного розсіяння. Обчислюючи їх, після відповідного усереднення отримуємо нелінійну залежність від  $T$ , що відображає крайові ефекти.

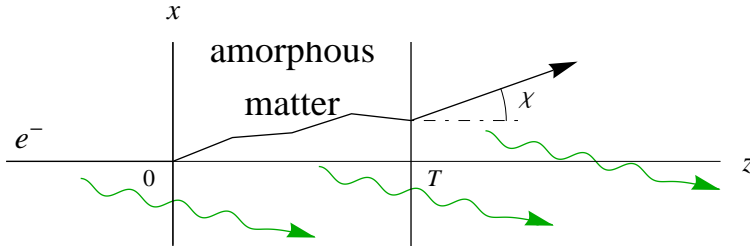


Рис. 4.18. Схема випромінювання електрона, який проходить крізь обмежену аморфну пластинку. В загальному випадку має місце інтерференція між фотонами, утвореними у внутрішній та двох зовнішніх частинах пластинки.

Таким чином, спочатку ми маємо обчислити спектр випромінювання електрона при подвійному розсіянні на довільні кути  $\vec{\chi}_1$  та  $\vec{\chi}_2$ . Позначивши проміжок часу між розсіяннями як  $t_{21}$ , подібно до виразу (4.151), маємо

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} = & \frac{e^2}{\pi^2} \int d^2\theta \left\{ \left[ \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} - \frac{\vec{\theta} + \vec{\chi}_1}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} + \vec{\chi}_1)^2} \right]^2 \right. \\ & + \left[ \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}_2}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi}_2)^2} - \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right]^2 \\ & + 2 \left[ \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} - \frac{\vec{\theta} + \vec{\chi}_1}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} + \vec{\chi}_1)^2} \right] \\ & \cdot \left. \left[ \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}_2}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi}_2)^2} - \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right] \cos \frac{\omega t_{21}}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right\}. \quad (4.214) \end{aligned}$$

Розкладаючи далі цей вираз по ступенях малих  $\vec{\chi}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi})^2} - \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} \underset{\chi \ll \gamma^{-1}}{\approx} & 2\vec{\theta} \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\chi}}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^2} - \frac{\vec{\chi}}{\gamma^{-2} + \theta^2} \\ & + 4\vec{\theta} \frac{(\vec{\theta} \cdot \vec{\chi})^2}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^3} - \vec{\theta} \frac{\chi^2}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^2} - 2\vec{\chi} \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\chi}}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^2}, \quad (4.215) \end{aligned}$$

де перший рядок – це дипольне наближення, а другий представляє квадрупольний внесок. Відзначимо, що якщо вираз (4.215) усереднити за напрямками  $\vec{\chi}$ , то дипольний внесок зникає, а квадрупольний зводиться до

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi_{\vec{\chi}} \left[ \frac{\vec{\theta} - \vec{\chi}}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta} - \vec{\chi})^2} - \frac{\vec{\theta}}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right] \underset{\chi \ll \gamma^{-1}}{\simeq} -2\gamma^{-2} \chi^2 \frac{\vec{\theta}}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^3}. \quad (4.216)$$

Функцію (4.214) тепер потрібно усереднити, використовуючи функцію розподілу по  $\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2$ . У (4.216) це просто зводиться до заміни величини  $\chi^2$  на  $\overline{\chi^2}$ . Підстановка цього до (4.214) дає

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\omega} \right\rangle &= \left\langle \frac{dI_1}{d\omega} \right\rangle + \left\langle \frac{dI_2}{d\omega} \right\rangle \\ &- \frac{8e^2}{\pi} \left( \gamma^2 \overline{\chi_1^2} \right) \left( \gamma^2 \overline{\chi_2^2} \right) \int_0^\infty \frac{d\Theta^2 \Theta^2}{(1 + \Theta^2)^6} \cos \frac{\omega t_{21}}{2\gamma^2} (1 + \Theta^2) \end{aligned} \quad (4.217)$$

або [7]

$$\left\langle \frac{dI}{d\omega} \right\rangle \underset{\Sigma_{1,2} \ll 1}{\simeq} \left( \left\langle \frac{dI_1}{d\omega} \right\rangle + \left\langle \frac{dI_2}{d\omega} \right\rangle \right) \left\{ 1 + \frac{3}{5} \frac{1}{\Sigma_1^{-2} + \Sigma_2^{-2}} g_{\text{qq}} \left[ \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\gamma^2} \right] \right\}, \quad (4.218)$$

з

$$\left\langle \frac{dI_1}{d\omega} \right\rangle \simeq \frac{2e^2}{3\pi} \Sigma_1^2 \left( 1 - \frac{3}{10} \Sigma_1^2 \right), \quad (4.219)$$

$$g_{\text{qq}}(\Omega_T) = -20 \int_0^\infty \frac{d\Theta^2 \Theta^2}{(1 + \Theta^2)^6} \cos \Omega_T (1 + \Theta^2), \quad g_{\text{qq}}(0) = -1,$$

та  $\Sigma_{1,2}^2 = \gamma^2 \overline{\chi_{1,2}^2}$ .

Нарешті, щоб отримати спектр випромінення в однорідній аморфній пластинці, потрібно усереднити форму (4.218) по поздовжніх координатах точок розсіяння в пластинці. При цьому  $\left\langle \frac{dI_1}{d\omega} \right\rangle$  та  $\left\langle \frac{dI_2}{d\omega} \right\rangle$  слід брати в дипольному наближенні [без квадрупольної поправки у виразі (4.219)]. Це забезпечує правильний ліміт Бете-Гайтлера при  $\Omega_T \rightarrow \infty$  (який за своєю суттю є дипольним), тоді як в інфрачервоному граничному випадку правильність (4.214) з квадрупольною точністю буде забезпечена автоматично [див. нижче вираз (4.224)].

Усереднення можна провести, замінюючи  $\Sigma_{1,2}^2 \rightarrow d\Sigma^2/dt_{1,2}$  та застосовуючи до (4.218) операцію  $\frac{1}{T} \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1$  (де  $\frac{1}{T} \int_0^T$  – розподіл імовірності

по координаті другого розсіяння, а за координатами точки першого розсіяння треба проінтегрувати, а не усереднити, що дасть належне значення в дипольному наближенні):

$$\frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{2e^2}{3\pi} \frac{1}{T} \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \left\{ \frac{d\Sigma^2}{dt_1} + \frac{d\Sigma^2}{dt_2} + \frac{3}{5} \frac{d\Sigma^2}{dt_1} \frac{d\Sigma^2}{dt_2} g_{\text{qq}} \left[ \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\gamma^2} \right] \right\}. \quad (4.220)$$

Для однорідної мішені  $d\Sigma^2/dt = \Sigma^2/T$ , звідки

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} &\simeq \frac{2e^2}{3\pi} \Sigma^2 \left\{ 1 + \frac{3}{5} \frac{\Sigma^2}{T^2} \frac{1}{T} \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 g_{\text{qq}} \left[ \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\gamma^2} \right] \right\} \\ &= \frac{2e^2}{3\pi} \Sigma^2 \left\{ 1 \right. \\ &\quad \left. - 12 \frac{\Sigma^2}{T} \int_0^\infty \frac{d\Theta^2 \Theta^2}{(1 + \Theta^2)^6} \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \cos \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\gamma^2} (1 + \Theta^2) \right\} \\ &= \frac{2e^2}{3\pi} \Sigma^2 \left\{ 1 - 24 \left( \frac{2\gamma^2}{\omega T} \right)^2 \frac{\Sigma^2}{T} \int_0^\infty \frac{d\Theta^2 \Theta^2}{(1 + \Theta^2)^8} \sin^2 \frac{\omega T (1 + \Theta^2)}{4\gamma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.221)$$

Цей результат можна компактніше записати як

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 \overline{\chi^2} \left[ 1 - \frac{3\gamma^2 \overline{\chi^2}}{10} F_q \left( \frac{\omega T}{2\gamma^2} \right) + \mathcal{O} \left( \gamma^4 \overline{\chi^4} \right) \right], \quad (4.222)$$

де функцію

$$F_q(\Omega_T) = \frac{80}{\Omega_T^2} \int_0^\infty \frac{duu}{(1+u)^8} \sin^2 \left[ \frac{\Omega_T}{2} (1+u) \right], \quad (4.223)$$

нормовану умовою  $F_q(0) = 1$ , можна розглядати як квадрупольний радіаційний формфактор аморфної пластинки. Як можна переконатися, в інфрачервоному ліміті

$$\frac{dI}{d\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 \overline{\chi^2} \left( 1 - \frac{3}{10} \gamma^2 \overline{\chi^2} \right), \quad (4.224)$$

що узгоджується із виразом (4.219). При  $\Omega_T \rightarrow \infty$ , формфактор убуває як

$$F_q(\Omega_T) \underset{\Omega_T \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{20}{21\Omega_T^2}.$$

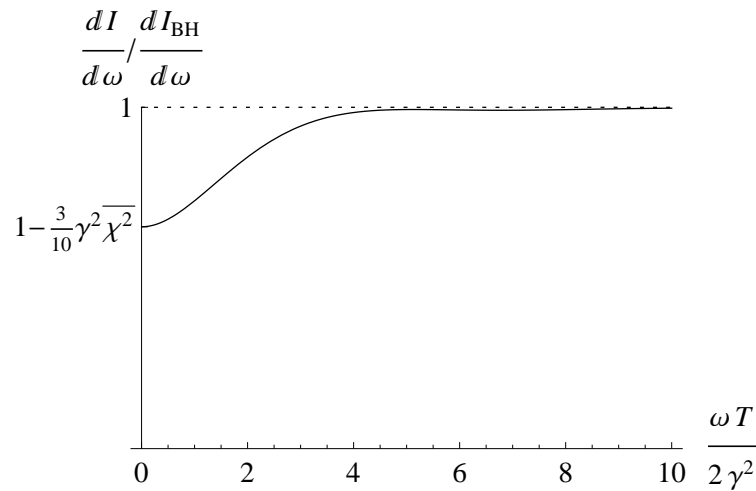


Рис. 4.19. Спектр випромінення в слабо розсіюючій аморфній пластинці (за умови  $\gamma^2 \overline{\chi^2} \ll 1$ ), побудований за формулами (4.222) та (4.223).

Поведінка спектра (4.222), (4.223) проілюстрована на Рис. 4.19. На відміну від ЛПМ-пригнічення у товстій мішені, діапазон частот, що пригнічуються, тут не залежить від матеріалу мішені, і є обернено пропорційним до її товщини  $T$ . Спільною рисою з пригніченням ЛПМ є те, що  $F_q > 0$ , а отже,  $\int_0^\infty d\Omega_T F_q(\Omega_T) \neq 0$ , попри те, що  $\int_0^\infty d\Omega_T g_{qq}(\Omega_T) = 0$ . Знов, це стає можливим тому, що усереднення у квазіоднорідному середовищі дозволяє злиття точок розсіяння електрона:  $t_1 \rightarrow t_2$ .

**4.5.3. Випромінювання у товстих мішенях.** Перейдемо тепер до класу задач, у яких мішень є товстою. Щоб виробити керівний принцип для виділення граничних ефектів для цього випадку, зауважимо перш за все, що інтерференція випромінення від просторово розділених ділянок вздовж траєкторії частинки є незначною, тому головний («об'ємний») внесок має бути пропорційним до товщини мішені. Обчислюючи його та віднімаючи, за визначенням отримаємо усі можливі крайові внески.

Проте, крайові внески, в свою чергу, теж можуть бути розділені на дві підкатегорії: одні з них просто відображають той факт, що спектральні внески від околиць країв мішені відрізняються від тих, що походять з глибини внутрішньої частини мішені. Такі внески повинні бути незалежними від товщини мішені. Інший тип внесків враховує інтерференцію між краями

мішені, яка викликає коливання в спектрі з періодом, залежним від товщини мішені. Ці два типи крайових внесків повинні залежати від частоти фотона на різних масштабах, і дану обставину можна використати для їх розділення.

Далі ми спершу дослідимо ефекти, пов'язані з наявністю одного краю мішені, на прикладі задачі про вліт електрона у напівнескінченний магніт. Після цього будуть розглянуті ефекти інтерференції границь для задачі проходження електрона крізь магніт скінченної довжини. Насамкінець ми дамо узагальнення принципу розділення спектральних масштабів на будь-які задачі недипольного випромінювання в скінченних мішенях.

**4.5.3.1. Випромінювання при вльоті електрона у напівнескінченний магніт.** Щоб проілюструвати особливості випромінювання при наявності одного краю мішені, розглянемо спочатку ідеалізовану задачу, коли електрон влітає у напівнескінченну область, яка містить однорідне магнітне поле. Траєкторія електрона в цьому випадку складається з двох частин:  $\vec{\chi}(t) = 0$  при  $t \leq 0$  та  $\vec{\chi}(t) = \vec{a}t$  при  $t \geq 0$ . Підставляючи цю залежність до Рівн. (4.133), отримуємо:

$$\frac{dI}{d\omega d^2\theta} = \frac{e^2}{\pi^2} \left| \frac{\vec{\theta}}{i(\gamma^{-2} + \theta^2)} + \frac{\omega}{2} \int_0^\infty dt (\vec{\theta} - \vec{a}t) e^{i\frac{\omega}{2}\{(\gamma^{-2} + \theta^2)t - \vec{a} \cdot \vec{\theta} t^2 + \frac{a^2}{3} t^3\}} \right|^2, \quad (4.225)$$

або, переходячи до змінних  $s = \gamma t/R$  та  $\Omega_s$ , що визначається виразом (4.167):

$$\frac{dI}{d\omega d^2\Theta} = \frac{e^2}{\pi^2} \left| \frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} + i\Omega_s \int_0^\infty ds (\vec{\Theta} - \vec{a}Rs) e^{i\Omega_s\{(1 + \Theta^2)s - R\vec{a} \cdot \vec{\Theta} s^2 + \frac{s^3}{3}\}} \right|^2. \quad (4.226)$$

Останній інтеграл належить до категорії неповних функцій Ейрі [482].

Зразки кутових розподілів випромінювання для такої траєкторії, побудованих за формулою (4.226), зображені на Рис. 4.20 для різних  $\Omega_s$  (див. також [483]). Світла смуга, що простягається до  $\Theta_x = \gamma\theta_x \rightarrow -\infty$ , представляє собою «об'ємне» синхротронне випромінювання, незалежне від  $\theta_x$ ,

тоді як яскрава пляма навколо нульового значення  $\vec{\theta}$  представляє крайові ефекти. Крайовий розподіл випромінювання легко описати у двох граничних випадках.

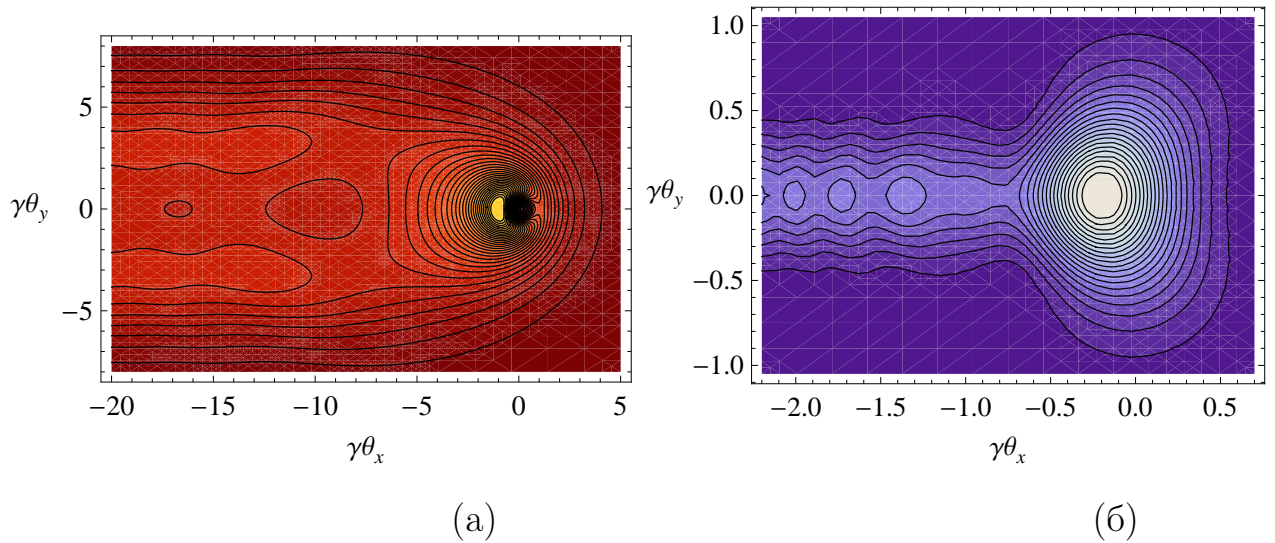


Рис. 4.20. Кутювий розподіл випромінювання електрона, який влітає у напів-нескінченний магніт. а).  $\Omega_s = 0.005$ ; б).  $\Omega_s = 5$ .

**При малих  $\Omega_s$**  (див. Рис. 4.20а) рівняння (4.226) можна представити у вигляді:

$$\frac{dI}{d\omega d^2\Theta} = \frac{e^2}{\pi^2} \left| \frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} + \Omega_s^{1/3} \vec{S} \left( \Omega_s^{1/3} \vec{\Theta} \right) \right|^2, \quad (4.227)$$

<sup>20</sup>

$$\vec{S}(\vec{\Psi}) = i \int_0^\infty ds' \left( \vec{\Psi} + \hat{e}_x s' \right) e^{i(\Psi^2 s' + \Psi_x s'^2 + \frac{s'^3}{3})}. \quad (4.228)$$

Звідси видно, що внесок від синхротронного випромінювання розподіляється по широкому діапазону кутів  $\Theta \sim \Omega_s^{-1/3}$  [порівн. з виразом (4.174)], і спадає за ступінним законом при  $\Omega_s \rightarrow 0$ , у той час як випромінювання від початкової прямої лінії дає пік незмінної інтенсивності при  $\Theta \lesssim 1$ :

$$\frac{dI_b}{d\omega d^2\Theta} \underset{\Omega_s \rightarrow 0}{\simeq} \left| \frac{e}{\pi} \frac{\vec{\Theta}}{1 + \Theta^2} \right|^2. \quad (4.229)$$

Тому останній може розглядатися як домінуючий внесок від крайових ефектів. Однак, інтеграл від нього за кутами логарифмічно розбігався би при

<sup>20</sup>Інтеграл (4.228) виражається через прості спеціальні функції при  $\Psi_x = 0$  або  $\Psi_y = 0$ .

великих  $\Theta$ , якби не обрізався деструктивною інтерференцією зі внеском від синхротронного випромінення, виникаючого при  $\Theta \gtrsim \Omega_s^{-1/3}$ :

$$\vec{S}(\vec{\Psi}) \underset{|\vec{\Psi}| \gg 1}{\simeq} -\frac{\vec{\Psi}}{\Psi^2}.$$

Отже, в межах головної логарифмічної точності крайовий внесок до спектра, проінтегрованого за кутами, можна обчислити за допомогою обрізки за порядком величини:

$$\frac{dI_b}{d\omega} \underset{\Omega_s \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2e^2}{\pi} \int_0^{\sim \Omega_s^{-1/3}} \frac{d\Theta \Theta^3}{(1 + \Theta^2)^2} \simeq \frac{2e^2}{3\pi} \ln \frac{1}{\Omega_s}. \quad (4.230)$$

Логарифмічна інфрачервона сингулярність, присутня у виразі (4.230), аналогічна тій, що має місце для гальмівного випромінення в скінченній аморфній мішені [157], або для перехідного випромінення [79]. В загальному випадку вона походить від прямої частини траєкторії електрона, яка простягається до нескінченності. Однак, як буде продемонстровано нижче, в мішенях, обмежених з обох боків, така розбіжність зникає.

**При великих  $\Omega_s$**  (Рис. 4.20б) об'ємний внесок стає експоненційно малим [порівн. з (4.173)], тоді як крайовий внесок можна отримати за допомогою подвійного інтегрування по частинах:

$$\frac{dI}{d\omega d^2\theta} = \left( \frac{e}{2\pi\omega} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \frac{d}{dt} \frac{[\vec{n} \times \vec{v}(t)]}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}(t)} \right|^2. \quad (4.231)$$

Тут  $\ddot{\vec{v}}(t) = \vec{a}\delta(t)$ , тому домінуючий внесок при великих  $\omega$  походить від членів, що містять дельта-функцію, оскільки вона замінює швидко осцилюючу експоненту на одиницю:

$$\begin{aligned} \frac{dI_b}{d\omega d^2\theta} \underset{\Omega_s \rightarrow \infty}{\simeq} & \left( \frac{e}{2\pi\omega} \right)^2 \left\{ \frac{[\vec{n} \times \vec{a}]}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^2} + \frac{[\vec{n} \times \vec{v}]\vec{n} \cdot \vec{a}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} \right\}^2 \\ & \simeq \left( \frac{e}{2\pi\omega} \right)^2 \left\{ \frac{[\vec{v} \times \vec{a}]}{\left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2}\right)^2} + \frac{[\vec{\theta} \times \vec{v}]\vec{\theta} \cdot \vec{a}}{\left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2}\right)^3} \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.232)$$

Інтегрування цього виразу за  $\vec{\theta}$  дає

$$\frac{dI_b}{d\omega} = \frac{dI}{d\omega} - \frac{dI_{\text{syn}}}{d\omega} = \frac{14e^2\gamma^6}{15\pi\omega^2} a^2. \quad (4.233)$$

Закон убутання  $\frac{dI}{d\omega} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \omega^{-2}$  в скінченному магніті з різкими краями вперше був знайдений в [75]. Тут ми визначили коефіцієнт для нього, а також кутовий розподіл.

**4.5.3.2. Випромінювання в скінченному магніті.** Тепер ми готові розглянути реалістичнішу задачу про випромінювання швидкого електрона, який пролітає крізь довгий, але скінченний магніт (наприклад, одна відхиляюча секція з вігглерної системи). Така проблема вивчалася на загальних засадах в [75], наша ж мета буде полягати у відокремленні внесків, пов'язаних з одним краєм та з інтерференцією країв, на основі асимптотики для довгого магніту.

Позначимо розмір області квазіоднорідного магнітного поля (напруженістю  $H$ ) через  $T$  (див. Рис. 4.21). Незважаючи на те, що при високій енергії кінцевий кут відхилення електрона  $\chi = T/R$ , де  $R = E/eH$  – радіус викривленої частини траєкторії електрона, є малим порівняно з одиницею, він може значно перевищувати характерний кут випромінювання  $\gamma^{-1}$ ,

$$X := \gamma\chi = \frac{\gamma T}{R} \gg 1. \quad (4.234)$$

Цього достатньо для формування випромінювання синхротронного типу.

Для обчислення спектра випромінювання в цьому випадку зручною є формула (4.143), де інтегрування за кутами випромінювання фотона або за прицільними параметрами вже проведено точно. Враховуючи те, що вона відповідає іншій калібровці, фізичне походження особливостей інтерференції тут може бути дещо менш прозорим, однак формальна процедура відокремлення внесків полегшується. Фізичний зміст виникаючих при цьому структур буде пояснено пізніше.

**Парціальні інтеграли.** Якщо, як у Розділі 4.5.3.1, вибрати початок відліку часу співпадаючим з моментом вльоту електрона у магніт, частини траєкторії електрона до, всередині, та після мішені описуватимуться формулами

$$t \leq 0 : \quad \vec{\chi}(t) = 0; \quad (4.235a)$$



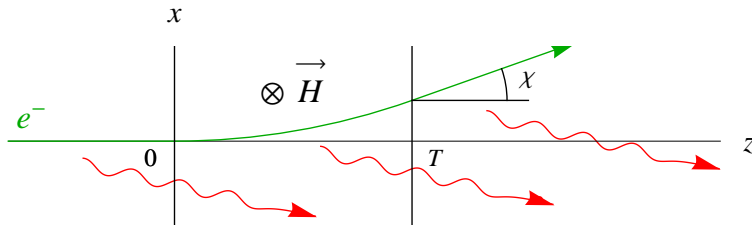


Рис. 4.21. Схема випромінення електрона, який проходить крізь магніт скінченної довжини. В загальному випадку існує інтерференція між фотонами, які випромінюються всередині та зовні магніту.

$$0 \leq t \leq T : \quad \vec{\chi}(t) = \vec{a}t; \quad (4.235b)$$

$$t \geq T : \quad \vec{\chi}(t) = \vec{a}T, \quad (4.235c)$$

з  $|\vec{a}| = 1/R$ . Використовуючи їх, легко обчислити інгредієнти  $[\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2 - \tau)]^2$  та  $v\tau - |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2 - \tau)|$  формули для спектра (4.143) у кожному сегменті площини  $t_1, t_2$ . В результаті отримуємо 4 подвійних інтеграли:

$$\frac{\pi}{2e^2} \frac{dI}{d\omega} = I_{ei} + I_{ie} + I_{ii} + I_{ee}. \quad (4.236)$$

Тут

$$I_{ei} = \frac{\omega}{2\gamma^2} \int_0^T dt_2 \int_{t_2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma^2 t_2^2}{2R^2} \right) \sin \omega \left[ (1-v)\tau + \frac{t_2^3}{2R^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{t_2}{4\tau} \right) \right] - \sin \omega (1-v)\tau \right\} \quad (4.237)$$

описує інтерференцію між вхідним краєм та внутрішньою частиною [при  $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq T$  величина  $\vec{\chi}(t_1)$  повинна обчислюватися за допомогою виразу (4.235a), тоді як  $\vec{r}(t_2)$  – за допомогою (4.235b)]. Завдяки симетрії магніту відносно його центру,

$$I_{ie} = I_{ei}.$$

Внесок

$$I_{ii} = \frac{\omega}{2\gamma^2} \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma^2 \tau^2}{2R^2} \right) \sin \omega \left[ (1-v)\tau + \frac{\tau^3}{24R^2} \right] - \sin \omega (1-v)\tau \right\} \quad (4.238)$$

утворюється цілковито всередині магніту [при  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  як  $\vec{\chi}(t_1)$ , так і  $\vec{\chi}(t_2)$  повинні обчислюватися за формулою (4.235b)]. Нарешті,

$$I_{ee} = \frac{\omega}{2\gamma^2} \int_T^\infty dt_2 \int_{t_2}^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma^2 T^2}{2R^2} \right) \times \sin \omega \left[ (1-v)\tau + \frac{T^2}{2R^2} \left( t_2 - 2T/3 - \frac{(t_2 - T/2)^2}{\tau} \right) \right] - \sin \omega(1-v)\tau \right\} \quad (4.239)$$

представляє собою інтерференцію між вхідним та вихідним кінцями електронної траєкторії [де  $\vec{\chi}(t_1)$  обчислюється за допомогою (4.235а), тоді як  $\vec{\chi}(t_2)$  – за допомогою (4.235с)]. Подвійний вхідний та подвійний вихідний внески до інтеграла (4.143) зникають внаслідок повного скорочення у підінтегральному виразі.

**Розділення масштабів.** Обчислення інтегралів (4.237)–(4.239) спрощується за умови (4.234) товстої мішені (тобто сильно недипольного випромінювання) та приводить до представлення

$$\frac{\pi}{2e^2} \frac{dI}{d\omega} = X J_{\text{syn}}(\Omega_s) + 2J_{\text{edge}}(\Omega_s) + J_{\text{interf}}(\Omega_s, X), \quad (4.240)$$

де  $\Omega_s$  визначається виразом (4.167). Структура (4.240) організована за принципом, сформульованим на початку Розділу 4.5.3: перший член, пропорційний до товщини мішені та профілю синхротронного спектра  $J_{\text{syn}}(\Omega_s)$ , заданому рівнянням (4.168), представляє собою «об'ємний» внесок. Другий член, незалежний від  $X$ ,

$$2J_{\text{edge}}(\Omega_s) = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[ \frac{\pi}{2e^2} \frac{dI}{d\omega} - X J_{\text{syn}}(\Omega_s) \right],$$

є внеском від одного краю (коефіцієнт 2 враховує наявність двох таких країв). Він може бути виражений, наприклад, одноразовим інтегралом

$$2J_{\text{edge}}(\Omega_s) = (2\Omega_s)^{\frac{2}{3}} \pi \text{Gi} \left[ (2\Omega_s)^{\frac{2}{3}} \right] - 1 + \int_1^\infty \frac{dw}{w - \frac{3}{4}} \left\{ 1 + \Omega_s^{\frac{2}{3}} \left[ 2 \left( 1 - \frac{3}{4w} \right)^{\frac{2}{3}} - w \left( 1 - \frac{3}{4w} \right)^{-\frac{1}{3}} \right] \right\}$$

$$\times \pi \text{Gi} \left( \Omega_s^{\frac{2}{3}} w \left( 1 - \frac{3}{4w} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \Big\} - 2, \quad (4.241)$$

який містить функцію Скорера [417]

$$\begin{aligned} \text{Gi}(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \sin \left( \alpha t + \frac{1}{3} t^3 \right) \\ &\equiv \text{Bi}(\alpha) \int_\alpha^\infty dz \text{Ai}(z) + \text{Ai}(\alpha) \int_0^\alpha dz \text{Bi}(z) \\ &\equiv \frac{1}{3} \text{Bi}(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2\pi} {}_1F_2 \left( 1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{\alpha^3}{9} \right), \end{aligned}$$

яка задовольняє неоднорідному рівнянню Ейрі

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - \alpha \right) \text{Gi}(\alpha) = -\frac{1}{\pi}, \quad \text{Gi}(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0,$$

і природно виникає замість функції Ейрі  $\text{Ai}(\alpha)$  в описі ефектів від одного краю.

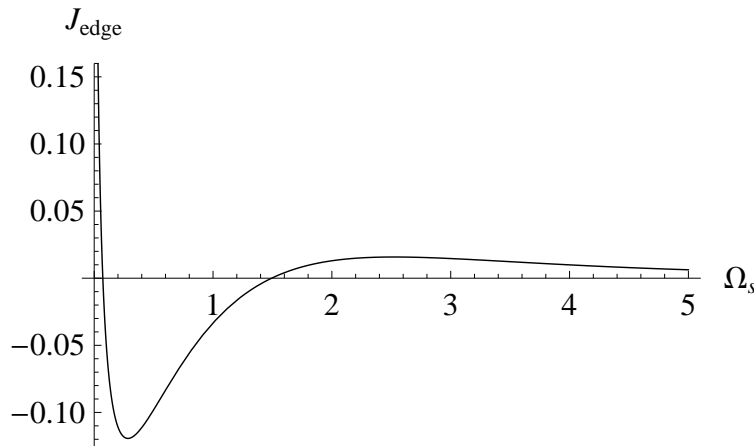


Рис. 4.22. Внесок випромінення від одного різкого краю однорідного магніту,  $J_{\text{edge}}$ , Рівн. (4.241). Логарифмічне зростання при  $\Omega_s \rightarrow 0$  відповідає Рис. 4.20а та Рівн. (4.230). «Хвіст» зі ступінною поведінкою при  $\Omega_s \gg 1$  відповідає Рис. 4.20б.

Нарешті, третій член у (4.240), що за побудовою зникає при  $X \rightarrow \infty$ ,  $\Omega_s = \text{const}$ ,

$$J_{\text{interf}}(\Omega_s, X) \xrightarrow{X \rightarrow \infty, \Omega_s = \text{const}} 0, \quad (4.242)$$

представляє собою ефекти інтерференції між краями. Він має структуру

$$J_{\text{interf}}(\Omega_s, X) = 2A_1 (\Omega_s X^3) F_\perp(\Omega_s X^2) + A_2 (\Omega_s X^3), \quad (4.243)$$

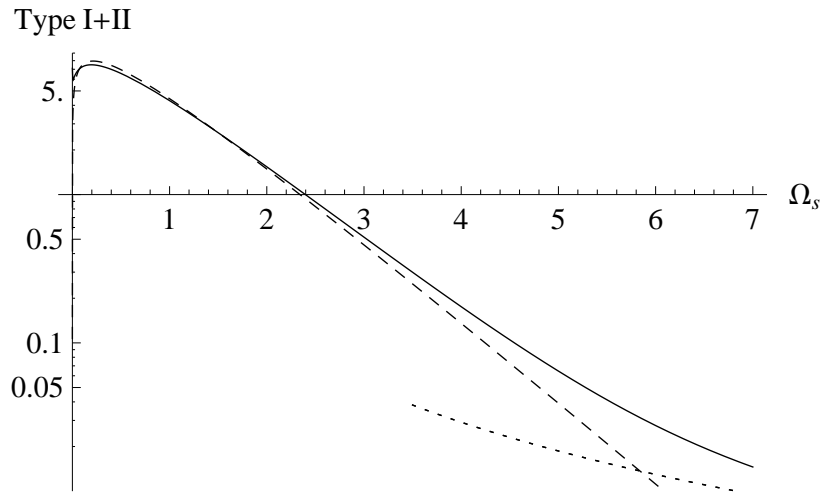


Рис. 4.23. Двічі логарифмічний графік спектра випромінення в області високих  $\Omega_s$ , при  $X = 30$ . Суцільна крива – вираз (4.240). Штрихова – чиста синхротронна компонента  $X J_{\text{syn}}$ . Пунктирна – ступінна асимптотика  $\frac{7}{15\Omega_s^2}$ .

де формфактор власного поля електрона  $F_{\perp}$  визначається виразом

$$F_{\perp}(z) = zK_1(z), \quad (4.244)$$

а «формфактори антени» мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\Omega_s X^3} \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u)^2} \left[ \sin \frac{\Omega_s X^3}{3} (1+u) - \sin \frac{\Omega_s X^3}{2} \left( \frac{2}{3} + u \right) \right] \\ &= \cos \frac{\Omega_s X^3}{6} \text{Ci} \left( \frac{\Omega_s X^3}{2} \right) + \sin \frac{\Omega_s X^3}{6} \text{si} \left( \frac{\Omega_s X^3}{2} \right) - \frac{2}{3} \text{Ci} \left( \frac{\Omega_s X^3}{3} \right), \end{aligned} \quad (4.245)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u} \left[ \cos \frac{\Omega_s X^3}{12} (1+3u) - \cos \frac{\Omega_s X^3}{12} (1+u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{1+u} \cos \frac{\Omega_s X^3}{12} (1+u)^3 \right] \\ &= \text{Ci} \left( \frac{\Omega_s X^3}{12} \right) - \cos \left( \frac{\Omega_s X^3}{6} \right) \text{Ci} \left( \frac{\Omega_s X^3}{4} \right) - \sin \left( \frac{\Omega_s X^3}{6} \right) \text{si} \left( \frac{\Omega_s X^3}{4} \right) \\ &\quad + \frac{X}{3} \Re \left\{ \left( i \frac{2\Omega_s}{3} \right)^{1/3} \Gamma \left( -\frac{1}{3}, i \frac{\Omega_s X^3}{12} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.246)$$

Функції (4.241), (4.245), (4.246) показані на рисунках 4.22, 4.24. Розглянемо тепер їх властивості.

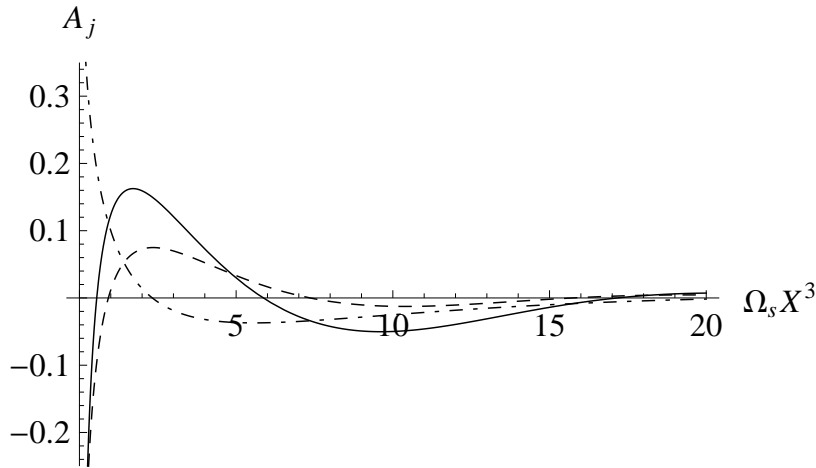


Рис. 4.24.  $A_1(\Omega_s X^3)$ , штрихова крива, вираз (4.245).  $A_2(\Omega_s X^3)$ , штрихпунктирна крива, вираз (4.246).  $J_{\text{interf}} = 2A_1 + A_2$ , суцільна крива.

**Внесок одного краю. Поведінка спектра при типових  $\Omega_s$ .** Внесок  $J_{\text{edge}}$  частково вже був вивчений в підрозділі 4.5.3.1, але інтеграл (4.241) дозволяє дослідити цю величину при будь-яких  $\Omega_s$ , із довільною точністю. З (4.241) ми виводимо його ГЧ-асимптотику

$$2J_{\text{edge}} \simeq -1 - \frac{2}{3} \ln \Omega_s + 2 \ln 2 - 2 - \frac{1}{3} (\ln 3 + 2\gamma_E), \quad (4.247)$$

що в головному логарифмічному наближенні узгоджується з (4.230), та УФ-асимптотику

$$\frac{dI}{d\omega} \underset{\Omega_s \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{7e^2}{15\pi\Omega_s^2}, \quad (4.248)$$

що узгоджується з (4.233). Оскільки  $J_{\text{edge}}$  не є скрізь позитивним [зокрема, задовольняючи тотожності  $\int_0^\infty d\Omega_s J_{\text{edge}}(\Omega_s) \equiv 0$ ], він не представляє собою незалежну інтенсивність випромінювання; скоріше, це крайовий ефект. З цим застереженням,  $J_{\text{edge}}$  може розглядатися як *аналог перехідного випромінювання*, який виникає навіть за відсутності атомної речовини. В даному випадку, на відміну від перехідного випромінювання, на границі мішені виникає не стрибок швидкості світла, а стрибок сили, яка діє на електрон. Тим не менш, це призводить до аналогічних наслідків, оскільки пов'язано з точкою неаналітичності в процесі формування випромінювання.

Слід зазначити, що мінімум  $J_{\text{edge}}(\Omega_s)$  знаходиться поряд із максимумом  $J_{\text{syn}}(\Omega_s)$  (порівн. з Рис. 4.14), тоді як за абсолютною величиною

$2 |\min J_{\text{edge}}| \approx 0.24 < \max J_{\text{syn}}$ . Отже, при  $X \gg 1$  зменшення спектрального максимуму через крайові ефекти (за рахунок посилення в ІЧ та УФ областях) є відносно незначним, хоча може бути помітним (див. Рис. 4.23).

**Внесок від інтерференції країв та поведінка при малих  $\omega$ .** При  $\Omega_s X^3 \gg 1$  внесок  $A_1$  демонструє осциляційну поведінку

$$A_1 \underset{\Omega_s X^3 \gg 1}{\approx} \frac{2}{(\Omega_s X^3)^2} \cos \frac{\Omega_s X^3}{3},$$

яка відображає інтерференцію між фотонами, утвореними протягом великих проміжків часу у контакті з початковою або кінцевою електронною лінією (два електрон-фотонних струменя), і фотонами, утвореними за короткі проміжки часу в околицях точок неаналітичності на краях мішені (міжструменеве випромінювання). Ці осциляції поступово пригнічуються експоненційно спадаючим множником (4.244), тобто когерентність в решті решт втрачається. Множник (4.244) збігається з розкладенням Фур'є поперечної складової електричного або магнітного поля пролітаючого електрона  $E_{\perp}(b, z, t) = \frac{Ze\gamma b}{[b^2 + \gamma^2(z-vt)^2]^{3/2}}$ , а саме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} E_{\perp}(b, 0, t) = \frac{2Ze}{vb} F_{\perp} \left( \frac{\omega b}{v\gamma} \right), \quad (4.249)$$

де в ультрарелятивістському випадку  $v \rightarrow 1$ . Тому його інтерпретація, що найбільш природно виникає у представленні прицільних параметрів, є аналогічною до відповідної інтерпретації випромінювання при подвійному розсіянні електрона [4] (див. Рис. 4.25).

У випадку випромінювання в магніті слід ще мати на увазі, що синхротронні фотони всередині магніту відриваються при ненульовому прицільному параметрі по відношенню до електрона (див. Рис. 4.12а), задовольняючому Рівн. (4.158), тобто

$$\Delta x_{\text{syn}} = \xi_x / \omega \sim R^{1/3} \omega^{-2/3}.$$

При малих  $\omega$  ця величина є великою, але зі збільшенням  $\omega$  стає меншою за

різницю приціальних параметрів при вльоті і вильоті електрона з магніту:

$$b_i = \left| \int_0^T dt [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i] \right| = \frac{T^2}{2R}, \quad (4.250)$$

або

$$b_f = \left| \int_0^T dt [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)] \right| = \frac{T^2}{2R}, \quad (4.251)$$

які не залежать від  $\omega$ . Це трапляється при  $\Delta x_{\text{syn}} \ll b_i, b_f$ , тобто  $\Omega_s X^3 \gg 1$ , що є саме тією спектральною областю, де сконцентровані осциляції  $A_1$ . Тоді  $b_i$  та  $b_f$  стають достатньо чітко визначеними, завдяки чому амплітуда власного поля електрона (4.249) виділяється у вигляді множника при  $b \rightarrow b_i$  або  $b_f$ , а її експоненційне убуття при великих  $\omega$  пригнічує спектральні коливання.

Походження масштабу  $\Omega_s X^3$  можна зрозуміти також з погляду представлення (4.143), (4.126). У цьому випадку, якщо покласти  $\gamma \rightarrow \infty$ , показники експоненти та передекспоненційний множник залежать від комбінацій, що за порядком величини дорівнюють  $\sim \omega \int_0^T dt \chi^2 \sim \Omega_s X^3$ .

Внесок  $A_2$  залежить від тієї ж величини  $\Omega_s X^3$ , але не містить вищезгаданих коливань. Він убиває за швидшим ступінним законом:

$$A_2 \underset{\Omega_s X^3 \gg 1}{\simeq} \frac{256}{(\Omega_s X^3)^3} \cos \frac{\Omega_s X^3}{12},$$

і не містить експоненційного множника. Це зумовлено відмінністю його фізичного походження – він відповідає інтерференції між двома внесками міжструменевого випромінювання, сформованими на різних краях мішені.<sup>21</sup>

У той час як при великих  $\Omega_s X^3$  компонента  $J_{\text{interf}}$  є відносно малою, при  $\Omega_s X^3 \ll 1$  вона відіграє ключову роль. Інфрачервоне асимптотичне розкладення  $A_1$

$$A_1 \simeq \frac{1}{3} (\gamma_E - 3 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln \Omega_s X^3) - \frac{\pi \Omega_s X^3}{12}, \quad (4.252)$$

<sup>21</sup>У даному випадку  $A_2$ , на відміну від  $A_1$ , не містить інфрачервоної розбіжності [див. вираз (4.253) нижче]. Проте, в інших подібних задачах, таких як про випромінювання при подвійному розсіянні електрона на великі кути [4], навпаки,  $A_2$  може містити ГЧ розбіжність, тоді як  $A_1$  – залишатися обмеженим. Насправді, при  $\Omega_s X^3 \rightarrow 0$ , коли  $l_\chi(\omega) \gtrsim l_0(\omega)$ , струменеві-міжструменевий та міжструменеві внески фізично не відокремлюються.

логарифмічно розбігається, а асимптотика

$$A_2 \simeq 2 - \ln 3 - \frac{3^{1/6}}{2^{2/3}} \Gamma(2/3) \Omega_s^{1/3} X + \frac{\pi \Omega_s X^3}{12} \quad (4.253)$$

містить нецілочисельну ступінну залежність  $\Omega_s^{1/3}$ . Згадана логарифмічна розбіжність точно скорочується з подібною розбіжністю  $J_{\text{edge}}$ , присутньою у виразі (4.247), і в поєднанні з  $X J_{\text{syn}}$ , доданки, пропорційні  $\Omega_s^{1/3}$ , теж скорочуються:

$$X J_{\text{syn}} + 2J_{\text{edge}} + 2A_1 + A_2 \simeq 2 \ln 2X - 1 - \frac{\pi \Omega_s X^3}{12}. \quad (4.254)$$

Це відповідає ГЧ асимптотиці (4.211), (4.212) з коефіцієнтом  $C_1 = -\frac{e^2 \chi^2 T}{12}$  при поправці, лінійній по частоті, який також можна безпосередньо обчислити з виразу (4.212) [ $\vec{\chi}(t) = \vec{a}t$ ]:

$$C_1 = -\frac{e^2 a^2}{2} \int_0^T dt t (T - t) = -\frac{e^2 \chi^2 T}{12}. \quad (4.255)$$

Важливість крайових внесків на практиці полягає в тому, що вони домінують як при великих, так і при малих  $\omega$ , де «об'ємний» внесок зникає.

Варто відзначити, що подібна проблема виникає також для випромінювання при проходженні електрона крізь тонкий кристал (порівн., наприклад, з [484]), особливо коли електрон, що проходить крізь міжплощинний канал, практично зберігає свій прицільний параметр, таким чином зазнаючи впливу постійної поперечної сили. У цьому випадку краї мішені є різкішими, ніж у лабораторних магнітів. Однак, при цьому виникає додаткова потреба в усередненні за прицільними параметрами електрона.

**4.5.3.3. Розділення об'ємних та крайових внесків для довільних мішеней.** На конкретних прикладах недипольного випромінювання в різних обмежених мішенях ми бачили, що їх спектри мають подібну структуру. Це свідчить про існування універсальної властивості розкладення недипольних спектрів. Опишемо її тепер для загального випадку.

Перш за все, щоб виділити крайові ефекти, потрібно дотримуватися асимптотичного підходу, наміченого на початку Розділу 4.5.3: формально



розширювати мішень (тобто збільшувати її розмір  $T$  до нескінченності, залишаючи деякі інші параметри фіксованими), і виокремити в спектрі «об'ємний» доданок:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{dI_{\text{vol}}}{d\omega} + \frac{dI_b}{d\omega}, \quad (4.256)$$

де  $\frac{dI_b/d\omega}{dI_{\text{vol}}/d\omega} \xrightarrow{T \rightarrow \infty, \omega = \text{const}} 0$ . У випадку однорідного поля всередині магніту ця властивість виконувалася, оскільки у знаменнику  $\frac{dI_{\text{vol}}}{d\omega} \propto T \rightarrow \infty$  [перший член виразу (4.240)]. Пропорційність до  $T$  має місце для будь-якої однорідної мішені, але, в принципі, мішень може бути і неоднорідною на великих масштабах.

Із загально-фізичних міркувань ми очікуємо, що  $dI_{\text{vol}}/d\omega$  генерується «локально» (тобто на ділянках простору, значно менших за  $T$ ). Саме тому цей внесок є пропорційним до  $T$ , але звідси також випливає, що він має залежати від  $\omega$  виключно через відношення

$$\tau(\chi \sim \gamma^{-1})/l_0(\omega), \quad (4.257)$$

де  $\tau(\chi \sim \gamma^{-1})$  – це час (або довжина), за який кут відхилення електрона досягає величини характерного кута випромінювання  $\gamma^{-1}$ . Остання довжина фактично відіграє роль довжини когерентності зовнішнього поля (на відміну від залежної від  $\omega$  довжини формування фотона  $l_0$ ), так що на більших часових масштабах, взагалі кажучи, когерентність випромінювання руйнується.

Решта ж  $dI_b/d\omega$ , що враховує крайові ефекти, теж залежить від відношення (4.257), але, крім того, вона може залежати ще й від відношення

$$T/l_\chi(\omega), \quad (4.258)$$

де

$$l_\chi(\omega) = \frac{2}{\omega\chi^2}. \quad (4.259)$$

Останній масштаб можна отримати із загального виразу (4.199) шляхом заміни  $\theta \rightarrow \chi$ , оскільки міжструменевий інтервал кутів заповнений менш

інтенсивним, але в цілому не менш важливим випроміненням. Слід зазначити, що струменеві та міжструменеві фотони можуть інтерферувати, але інтерференційна довжина дорівнює найменшій серед довжин їх формування, тобто  $l_\chi$ . Залежність  $dI_b/d\omega$  від таких різних масштабів завжди може бути виражена в адитивній формі:

$$\frac{dI_b}{d\omega} = 2 \frac{dI_{1b}}{d\omega} \left( \frac{\tau(\chi \sim \gamma^{-1})}{l_0(\omega)} \right) + \frac{dI_{bb}}{d\omega} \left( \frac{T}{l_\chi(\omega)} \right), \quad (4.260)$$

де  $dI_{1b}/d\omega$  не залежить від великих кутів відхилення, сукупно позначених як  $\chi$ , а  $dI_{bb}/d\omega$  не залежить від  $\gamma$ .

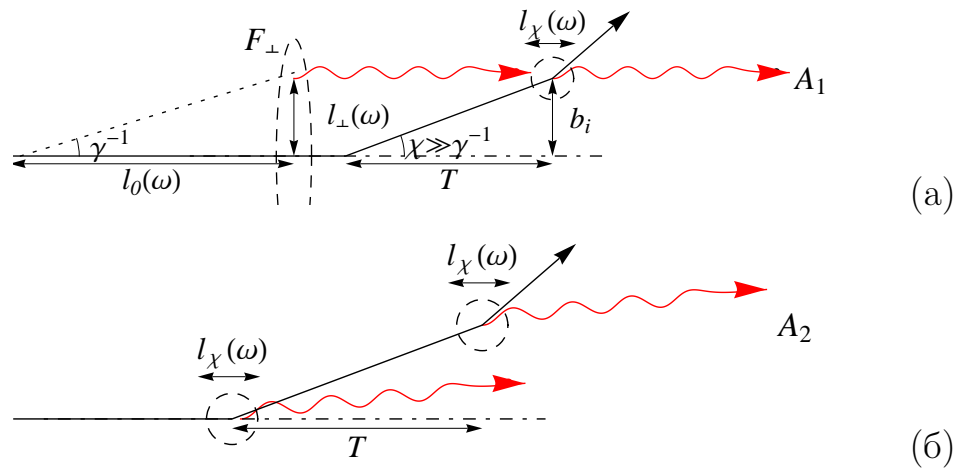


Рис. 4.25. а). Графічна ілюстрація формування внеску струменево-міжструменевої інтерференції  $A_1$  та його модулюючого формфактора  $F_\perp$ . Умовою інтерференції між колінеарними та неколінеарними фотонами, окрім співпадіння напрямків випромінювання, є співпадіння прицільних параметрів  $l_\perp(\omega) = \gamma/\omega$  та  $b_i \sim T\chi$ . Існує також перехресна діаграма, у якій неколінеарні фотони випромінюються у першій вершині розсіяння, а колінеарні – з кінцевої електронної лінії. б). Те саме для внеску міжструменево-міжструменевої інтерференції  $A_2$ .

Точніше, виявляється, що  $dI_{bb}/d\omega$  все ще містить слабку залежність від  $\gamma$ , і у загальному випадку виражається як

$$\frac{dI_{bb}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi} \left[ 2A_1 \left( \frac{\omega T \chi^2}{2} \right) F_\perp \left( \frac{\omega T \chi}{\gamma} \right) + A_2 \left( \frac{\omega T \chi^2}{2} \right) \right], \quad (4.261)$$

де осцилюючі функції  $A_1$ ,  $A_2$  представляють «квазіантенні» формфактори. Така структура фізично виникає так, як це було пояснено в підрозділі 4.5.3.1 та на Рис. 4.25. Компонента  $A_1$  відповідає інтерференції струменевого та міжструменевого випромінення, а оскільки міжструменеві фотони утворюються у відносно невеликій околиці границь мішені,  $A_1$  модулюється формфактором власного поля електрона  $F_{\perp}$ , який є монотонно спадаючою функцією. Що ж стосується внеску  $A_2$ , він відповідає інтерференції міжструменевого та іншого міжструменевого випромінення, а оскільки міжструменеві фотони, на відміну від внутрішньо-струменевих, випромінюються у широкому діапазоні кутів, це не потребує модулюючого множника, залежного від прицільного параметра. Також корисно пам'ятати інтерпретацію, згідно з якою  $A_1$  і  $A_2$  у виразі (4.261) не залежать від Лоренц-фактора, адже при малих  $\omega$  *достатньо викривлена* траєкторія електрона діє як «антена».

Взагалі кажучи, внески окремих країв та внесок від інтерференції між краями логарифмічно розбігаються:  $\frac{dI_{1b}}{d\omega}, \frac{dI_{bb}}{d\omega} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \pm \ln \frac{1}{\omega}$  (порівн., наприклад, з [157]), але у їх сумі розбіжність скорочується [подібно до виразу (4.254)]. При більших  $\omega$  концепція антени порушується, і Лоренц-фактор електрона вступає у гру.

Якщо два краї мішені не є еквівалентними, то в (4.261) коефіцієнт 2 в  $A_1$  потрібно замінити сумою за краями:  $2A_1 \rightarrow A_{1i} + A_{1f}$ . Відповідні внески при  $\omega T \chi^2 \gg 1$  осцилюють як

$$A_{1i} \sim \left( \frac{T}{\omega \chi^2} \right)^n \cos \left\{ \frac{\omega}{2} \int_0^T dt [\vec{\chi}(t) - \vec{\chi}_i]^2 \right\}, \quad (4.262)$$

$$A_{1f} \sim \left( \frac{T}{\omega \chi^2} \right)^n \cos \left\{ \frac{\omega}{2} \int_0^T dt [\vec{\chi}_f - \vec{\chi}(t)]^2 \right\}. \quad (4.263)$$

Якщо мішень містить декілька шарів речовини або поля, то  $A_1$  потрібно просумувати за усіма краями, а  $A_2$  – за усіма комбінаціями країв.

Наведені формули стосуються випадку, коли краї мішені є різкими. Для

врахування їх ненульової ширини  $\Delta T$  потрібно зробити заміну

$$\frac{dI_{1b}}{d\omega} \rightarrow \frac{dI_{1b}}{d\omega} F_{\text{edge}}(\omega\Delta T/\gamma^2) \quad (4.264)$$

із додатковим формфактором  $F_{\text{edge}}$ , в той час як внески  $dI_{\text{vol}}/d\omega$ ,  $dI_{bb}/d\omega$  зберігають ту ж саму структуру.

Нарешті, якщо траєкторії випромінюючого електрона в мішені є випадковими, спектр потрібно усереднити за ними, як у випадку гальмівного випромінювання у шарі аморфної речовини. У цьому випадку кінцевий кут відхилення електрона, від якого залежить період осциляцій величини  $A_1$ , теж є випадковим. Усереднення за ним згладить осциляції, і на великих масштабах може зникнути потреба у модулюючому формфакторі  $F_{\perp}$ , який тоді можна покласти рівним одиниці.

#### 4.6. Висновки до Розділу 4

Важливість дослідження жорсткого випромінювання від релятивістських електронів важко переоцінити, оскільки воно може надавати інформацію про середовища так само, як видиме світло у повсякденному житті, а окрім цього, модифікувати мішені так само, як пучки заряджених частинок, і навіть краще, оскільки має вищу проникну здатність і може передавати більший кутовий момент. Окрім поляризації самих електромагнітних хвиль, при випромінюванні релятивістським електроном важливу роль відіграє спін електрона, навіть якщо спінові стани і не спостерігаються в експериментах. Для опису кутового розподілу гальмівного випромінювання від релятивістських електронів (за припущення про факторизацію розсіювання та випромінювання) автором було розроблено новий підхід (на основі методу стереографічної проекції), який, зокрема, приводить до висновку, що загальна структура диференціальної ймовірності випромінювання фотона визначається універсальним тензором  $\mathbf{G}$ , залежним від кута випромінювання [Рівн. (4.35), (4.113)]. З урахуванням недипольності випромінювання, було запроваджено повну систему радіаційних формфакторів для поляризова-

ного спектра, а з урахуванням кулонівського характеру розсіяння в атомній речовині – встановлено зв'язок між двома, взагалі кажучи, феноменологічними параметрами  $X_0$  та  $\chi_a$  [Рівн. (4.89)].

Навіть коли факторизація актів розсіяння та випромінення порушується внаслідок значної поздовжньої протяжності зовнішнього поля (Розд. 4.2), виявляється можливим узагальнити структуру матричного елементу та диференціального перерізу, внаслідок чого замість імпульсу, переданого з боку зовнішнього поля, виникає інтеграл вздовж траєкторії електрона, залежний від частоти фотона. Фундаментальне значення має той факт, що після інтегрування за кутами випромінення фотона поперечна когерентність у хвильовій функції електрона зникає, і різні траєкторії електрона не інтерферують. З погляду опису явища радіаційного гальмування електрона у зовнішньому полі важливо, що в квантовій теорії послідовно задовольняються вимоги збереження енергії та імпульсу, з урахуванням віддачі фотона, хоча з іншого боку, радіаційні втрати енергії від цього стають нелокальними.

Втім, для багатьох ефектів формування спектрів випромінення віддача фотона не є принциповою, і їх сутність достатньо добре проявляється на прикладах з класичної електродинаміки (Розд. 4.3–4.5). При цьому слід розрізняти типи когерентності, яким відповідають різні довжини формування. Наприклад, при дипольному випромінюванні, це – поздовжня когерентність, і відповідна «вільна» довжина формування фотона. Навіть якщо когерентність проявляється в інтерференційних ефектах, які за своєю суттю потребують виходу за межі дипольного наближення (як це має місце для гальмівного випромінення на тонкій пластинці), довжина когерентності може все ще дорівнювати  $l_0$ . У випадку сильно недипольного випромінення (Розд. 4.5.3), кути відхилення частинки стають більшими за типові кути випромінення. Тому з'являються струмені випромінення, хоча разом з тим залишається і істотна міжструменева компонента. До того ж ці компоненти можуть інтерферувати між собою в представленні прицільних параметрів

(Рис. 4.25), а на найнижчих частотах випромінення перестає залежати від Лоренц-фактора електрона, що виражається концепцією «антени». Подібні явища є типовими для будь-якої обмеженої мішені, оскільки виникають на її границях.

Суттєвими для практики є також питання усереднення. Найпростішим, але нетривіальним прикладом є усереднення по багаторазовому розсіянню в аморфній речовині (Розд. 4.4.2). Автором було показано, що ця процедура спрощується, якщо використовувати формулу для спектра, точно проінтегрованого за кутами (що в однорідному середовищі виражається через одноразовий інтеграл), та згортати його з просторово-кутовим розподілом, обчисленим в Розділі 2. При цьому відтворюється відомий результат Миґдала. З іншого боку, був розвинутий спрощений підхід до усереднення, коли квадрат різниці кутів відхилення та часова затримка між різними точками траєкторії окремо усереднюються та підставляються до загальної формули для спектра випромінення (Розд. 4.4.2.2, 4.4.3). Такий підхід дозволяє швидко отримувати якісно правильні результати, зазвичай із прийнятною точністю.

Питання, розглянуті в цьому Розділі не вичерпують всіх важливих проблем теорії випромінення від ультра-релятивістських електронів. Зокрема, через обмеження на обсяг дисертації, залишилися невисвітленими досліджувані автором задачі про випромінення при проходженні швидких електронів крізь кристали [1, 14, 15, 17–19], багатифотонні ефекти [6, 8, 9], колективне випромінювання електронних пучків та лазери на вільних електронах.

## ВИСНОВКИ

На завершення, варто ще раз наголосити, що теорія фізичних процесів в речовині при високих енергіях тісно пов'язана з інструментарієм сучасної експериментальної фізики, а з іншого боку, слугує лабораторією для розвитку методів розрахунку адронних процесів, які досліджуються на передньому краї фундаментальної фізики, і фізичної кінетики в твердих тілах, яка має першорядне прикладне значення. Електродинаміка за своєю структурою простіша від теорії сильних взаємодій між адронами, а висока енергія дозволяє використовувати такі спрощення як одночастинковий характер динаміки швидких частинок, квазі-прямолінійний проліт крізь тонкі мішені, масштабна інваріантність народження ультра-релятивістських частинок, тощо. Для опису взаємодії швидких частинок з найбільш широко застосовуваними кристалами кремнію, прийнятним є значно спрощуюче наближення параболічного міжплощинного безперервного потенціалу. Малий рівномірний згин кристала можна представити як дію лінеаризованого відцентрового потенціалу. Разом з тим, не бракує і ускладнюючих аспектів. З них, динаміка руху в реалістичних безперервних потенціалах кристалів і випадкове багаторазове розсіювання не становляють принципової проблеми для розрахунку на комп'ютері. Натомість, квантові ефекти і багатофотонне випромінювання здатні створити суттєві складнощі навіть для комп'ютерного моделювання.

Сучасний розвиток теорії привів до утворення декількох нових концепцій, що були викладені в дисертації на різних прикладах:

- Незважаючи на те, що процеси за участю ультра-релятивістських частинок відбуваються дуже швидко, часові аспекти динаміки можуть відігравати в них суттєву роль. Наприклад, при проходженні крізь зігнутий кристал, часова затримка радіальної компоненти ру-

ху означає поворот пучка в бік згину, тоді як часове випередження – відхилення в бік, протилежний згину (об’ємне відбиття). В теорії випромінювання часова затримка чи випередження частинки в мішені відносно асимптоти траєкторії у вигляді кута визначає нахил спектру при малих  $\omega$ . Незалежне усереднення часової затримки електрона також лежить в основі методу спрощеного усереднення спектрів випромінювання.

- Незважаючи на те, що поперечні просторові відхилення для ультра-релятивістських частинок теж є малими, вони виявляються важливими в деяких процесах – наприклад, в теорії розсіяння поверхнями, нахиленими під малим кутом до пучка (дифузія як вглиб речовини, так і назад до поверхні), а також в теорії площинного деканалювання позитивно заряджених частинок (стохастична динаміка між сильно розсіюючими атомними площинами), і для опису інтерференційних явищ у випромінненні, оскільки фотони відриваються від електрона на скінченній поперечній відстані.
- Враховуючи, що речовина складається з атомів, які діють на пролітаючі заряджені частинки як екрановані кулонівські поля майже точкових ядер, важливо достатньо точно описувати їх екранування. Фізична реалізація екранування відрізняється для процесів розсіяння та випромінювання, проте, цю різницю можна точно обчислити в наближенні, наступному за головним логарифмічним, і описувати ефекти атомного екранування єдиним чином.

Нижче наведено перелік основних результатів, вперше здобутих автором та відображених в цій дисертації (в порядку їх викладення в основній частині).

1. Для характеристики розсіяння швидкої зарядженої частинки на атомі запроваджено два залежних від потенціалу атома параметри, що визначають жорстке розсіяння (перед-резерфордівську асимптотику), та один параметр, що характеризує багаторазове розсіюван-



ня в атомній речовині з таких атомів. Доведено, що через останню величину як в пертурбативному, так і в квазікласичному режимах виражається імпульс екранування в теорії багаторазового розсіювання Мольєра. Для класичного розсіювання на атомі доведено існування скейлінгу, загальнішого за скейлінг Ліндхарда-Нільсен-Шарфа. Для експоненційно екранованого потенціалу розсіювання обчислено диференціальний переріз високоенергетичного розсіювання в 3-му борнівському наближенні.

2. В теорії багаторазового кулонівського розсіювання при проходженні швидкої зарядженої частинки крізь аморфну речовину за допомогою деформування контуру інтегрування в комплексну площину отримано розділення функції розподілу частинок за кутами розсіювання на м'яку та напівжорстку компоненти. Остання з них описує кратне і багаторазове резерфордівське розсіювання та є важливою в проміжній області кутів. Встановлено, що повна кількість напівжорстко розсіяних частинок складає 10-30%, тобто не є малою. Досліджено область багаторазових жорстких розсіянь для функції розподілу, проміжну між областю гауссівського наближення та резерфордівською асимптотикою.
3. Обчислено просторово-кутові розподіли частинок в однорідній аморфній речовині, включно з розподілом по поздовжній координаті. Знайдено сумісний розподіл по куту відхилення та абсолютній величині радіус-вектора частинки, потрібний для розрахунку спектра супровідного випромінення. Показано, що з цього розподілу можна легко отримати спектр Ландау-Померанчука-Мигдала.
4. Точно розв'язана задача про розсіювання швидкої частинки при падінні під малим кутом на ланцюжок статичних атомів (екранованих кулонівських полів). Проведено строге розділення внесків усередненого потенціалу ланцюжка та некогерентного розсіювання. Доведено, що для некогерентного внеску роль екранування окремих кулонів-

ських полів відіграє проекція відстані між ядрами на площину прицільних параметрів. Показано, що некогерентне розсіяння є анізотропним в наближенні, наступному за головним логарифмічним.

5. Розглянуто розсіяння швидкої зарядженої частинки на атомній площині, яка складається з періодично розташованих атомних ланцюжків ("string of strings"). Теоретично сформульована умова оптимальної площинної орієнтації кристала, при якій прояви ланцюжків по різних напрямках мінімізуються. Оцінено залишкові ефекти від окремих струн, що присутні навіть у оптимальній площинній орієнтації, та їх вплив на некогерентне багаторазове розсіювання.
6. Розвинуто опис багаторазового розсіювання на випадковій сукупності паралельних ланцюжків (doughnut scattering). Для кінетичного рівняння дифузійного типу з урахуванням просторової конвекції отримано розв'язок задачі Коші у вигляді розкладення за функціями Мат'є. Знайдено асимптотику просторового розподілу на пізній стадії еволюції, яка виявляється гауссівською зі зсувом, але показник ступінного закону розширення є меншим, аніж у аморфній речовині. При цьому швидкість дифузії виявляється тим меншою, чим більшим є коефіцієнт дифузії. Таким чином, доведено пригнічення просторової дифузії для даного процесу.
7. Запропоновано наближений підхід в теорії площинного деканалювання, який дозволяє вийти за рамки наближення статистичної рівноваги. Показано, що в результаті виходу довжина деканалювання набуває суттєвих добавок, а початкова стадія деканалювання якісно змінюється.
8. Побудовано аналітичну теорію об'ємного відбиття для позитивно- та негативно-заряджених частинок в зігнутому кристалі. Для кристала з міжплощинним потенціалом загального вигляду знайдено середній кут відхилення, а також кутові розподіли відбитого пучка. Обчислено відмінність кількості ядерних взаємодій при об'ємному

відбитті від її значення в аморфній мішені або в «аморфно орієнтованому» прямому кристалі тієї ж товщини.

9. В теорії випромінювання при розсіянні релятивістського електрона на мікроскопічній мішені досліджено ефекти недипольності та просторової протяжності, обчислено ступінь поляризації випромінювання. Запропоновано використання стереографічної проекції для опису поведінки кутових розподілів поляризації.
10. Отримано формулу, яка пов'язує мольєрівський кут та радіаційну довжину з урахуванням кулонівського характеру розсіювання електрона на атомах, в наближенні, наступному за головним логарифмічним.
11. Запропоновано представлення для спектру електромагнітного випромінювання, що має форму співвідношення унітарності.
12. Для спектру випромінювання в однорідному квазі-безкінечному середовищі отримано асимптотичні розкладення при великих та при малих частотах фотонів. Показано, що у випадку аномальної дифузії поведінка спектру на високих частотах є ступінною.
13. Отримано лінійну по частоті поправку до інфрачервоної факторизаційної теореми для спектру випромінювання від ультра-релятивістського електрона, який розсіюється у довільному зовнішньому полі. Ця поправка виявляється залежною від траєкторії електрона всередині мішені.
14. Розв'язано задачу про пригнічення гальмівного випромінювання в аморфній мішені, коли середньоквадратичний кут відхилення є невеликим порівняно з оберненим Лоренц-фактором (тобто за умови, протилежної ефекту ЛПМ). Здобуто формулу, що описує пригнічення спектру і містить квадрупольний формфактор.
15. Побудовано загальну теорію крайових ефектів для спектрів випромінювання ультра-релятивістських електронів в мішенях скінченної товщини. Сформульовано принцип розкладення за масштабами

для довільного спектра випромінення в умовах сильної недипольності. Розглянуто проведення такого розділення для двох конкретних випадків: випромінення при дворазовому розсіянні та випромінення при проходженні крізь скінченний однорідний магніт. Для пояснення його структури введено поняття інтерференції струменів випромінення та міжструменевої компоненти. Передбачено явище осциляцій у м'якій частині спектра.

Перспективи розвитку даної, як і будь-якої іншої галузі науки в майбутньому було б не дотепно намагатися передбачити. Поточними тенденціями є зігнуті кристали, кристали з вирізами, ультра-тонкі прямі кристали, аморфні структуровані мішені, метаматеріали, плазмові методи прискорення. Найближчі перспективи можуть бути пов'язані з використанням пучків фотонів (в тому числі таких, що несуть орбітальний кутовий момент), нейтронів, мезонів і гіперонів, застосуванням детекторів нових типів, тестування фундаментальних питань квантової теорії. Розвиваючийся штучний інтелект теж може долучитися до дослідницької роботи, наприклад, встановлюючи достовірність та пріоритети опублікованих результатів, що наразі вже запроваджується для засобів масової інформації. Але поки що наукова робота виконується виключно людиною, внаслідок чого у розвитку науки незмінно присутній людський фактор (див. Розд. 1).

## ПОДЯКИ

Я вдячний моєму науковому консультантові М. Ф. Шульзі за багаторічну співпрацю, а також обговорення тексту автореферату дисертації та допомогу з літературою.

І. Кириллін і С. Трофименко прочитали перший варіант дисертації та значно допомогли з її перекладом з англійської мови українською.

О. Ю. Корчин, М. П. Меренков та Ю. М. Полуктов прочитали варіант дисертації перед її прийняттям до захисту та дали корисні поради.

При оформленні дисертаційної роботи цінними були зауваження Вченого секретаря А. І. Кірдіна.

Моя щира подяка також усім учасникам семінарів в ІТФ ННЦ ХФТІ та ІТФ ім. Боголюбова, де доповідалися матеріали дисертації.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bondarenco M. V. Tips for deciphering and quick calculation of radiation spectra. *Journal of Instrumentation*. 2018. Vol. 13. P. C04012.
2. Bondarenco M. V. Separation of edge effects in highly non-dipole radiation spectra. *Mod. Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 33. P. 1850035.
3. Bondarenco M. V. Next-to-leading order correction to the factorization limit of the radiation spectrum. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 96. P. 076009.
4. Bondarenco M. V., Shul'ga N. F. Interference in spectrum of radiation from doubly scattered charged particle. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 95. P. 056003.
5. Bondarenco M. V. Improved separation of soft and hard components in multiple Coulomb scattering. *Phys. Rev. D*. 2016. Vol. 93. P. 036008.
6. Bondarenco M. V. Limiting energy loss distributions for multiphoton channeling radiation. *NIM B*. 2015. Vol. 355. P. 30–34.
7. Bondarenco M. V., Shul'ga N. F. Constructive interference in the spectrum of bremsstrahlung on two amorphous targets. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 116007.
8. Bondarenco M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 013019.
9. Bondarenco M. V. Basics of multiphoton effects in coherent radiation spectra. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 517. P. 012027.
10. Bondarenco M. V. Nuclear interactions at volume reflection: Perturbative treatment. *Phys. Rev. ST-AB*. 2012. Vol. 15. P. 032802.
11. Bondarenco M. V. A relation between the nuclear scattering probability in a bent crystal and the mean volume reflection angle. *Phys. Lett. A*. 2012. Vol. 376. P. 875–878.

12. Bondarenco M. V. Nuclear interactions and multiple Coulomb scattering at volume reflection. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2012. Vol. 57. P. 59–63.
13. Bondarenco M. V. Factorization and QCD enhancements in the Compton mechanism of  $w$  and  $z$  boson hadroproduction. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2012. Vol. 57. P. 105–110.
14. Bondarenco M. V. Comments on theory of volume reflection and radiation in bent crystals. *Il Nuovo Cim. C.* 2011. Vol. 342. P. 381–388.
15. Bondarenco M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal vs. experiments on volume reflection. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2010. Vol. 236. P. 012026.
16. Bondarenco M. V. Model solution for volume reflection of relativistic particles in a bent crystal. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 82. P. 042902.
17. Bondarenco M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 81. P. 052903.
18. Bondarenco M. V. Polarization of bremsstrahlung at electron scattering in anisotropic medium. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 82. P. 042723.
19. Bondarenco M. V. Computation and analysis of the polarization degree for bremsstrahlung at peripheral scattering. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2009. Vol. 51. P. 89–94.
20. Бондаренко Н. В. Формирование тени в дифракционном рассеянии адронов по механизму глюонного излучения при фрагментации. *Вестн. ХНУ, сер. физ. «Ядра, частички, поля».* 2008. Vol. 794. P. 125–128.
21. Bondarenco M. V. Extraction of spin observables in baryon-baryon scattering, sensitive to gluon- and quark-exchange effects. *Probl. At. Sci. and Techn.* 2007. Vol. N5(48). P. 28–35.
22. Bondarenco M. V. Covariant amplitude decomposition in relativistic fermion scattering problems. *Probl. At. Sci. and Techn.* 2007. Vol. N3(1). P. 104–110.
23. Bondarenco M. V. Volume reflection dependence on the interplanar

- potential. Abstracts of the 8th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Ischia, Italy, September 23–28, 2018. P. 108.
24. Бондаренко Н. В. Рассеяние на малые углы при больших значениях кулоновского параметра. Тезисы докладов XVI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 20–23 марта 2018 г. P. 107.
  25. Bondarenko M. V. Next-to-leading order correction to infrared limit of radiation spectrum. Abstracts of the XIIth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17). Hamburg, Germany, September 18–22, 2017. P. 17.
  26. Bondarenko M. V. Types of interference in highly non-dipole radiation spectra. Book of Abstracts of the 7th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Sirmione–Desenzano del Garda, Italy, September 25–30, 2016. P. 83.
  27. Бондаренко Н. В. Краевые эффекты в спектре излучения ультрарелятивистского электрона в конечном магните. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. P. 111.
  28. Бондаренко Н. В. Улучшенное разделение мягкой и жесткой компонент в многократном кулоновском рассеянии. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. P. 111.
  29. Бондаренко Н. В. Предельные спектральные распределения многофотонного излучения при каналировании. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. P. 84–85.
  30. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Дробовой эффект в тормозном излучении релятивистских электронов. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харь-



ков, Украина, 16–20 марта 2015 г. P. 79.

31. Bondarencо M. V. Enhancing interference in the spectrum of bremsstrahlung on a composite target. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 77.
32. Bondarencо M. V. Multiphoton effects in channeling radiation. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 37.
33. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Интерференция спектров тормозного излучения от двух аморфных мишеней. Тезисы докладов XII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 17–21 марта 2014 г. P. 109.
34. Bondarencо M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 59.
35. Bondarencо M. V. Reconstruction procedure for single-photon radiation spectra from multi-photon ones. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 24.
36. Бондаренко Н. В. Многофотонные эффекты в спектре когерентного излучения. Тезисы докладов XI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 11–15 марта 2013 г. P. 106.
37. Bondarencо M. V. Multiple scattering and volume capture of charged particles in bent crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena

- (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 89.
38. Bondarenko M. V. Symmetry properties in angular distribution of radiation in thin crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 20.
  39. Bondarenko M. V. Perturbative account of nuclear scattering at volume reflection. Abstracts of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics”. Kharkov, Ukraine, August 29 – September 02, 2011. P. 83.
  40. Bondarenko M. V. Nuclear scattering and characteristic x-ray radiation at volume reflection. Abstracts of the VIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-11). Egham, UK, September 12–16, 2011. P. 110.
  41. Бондаренко Н. В. Количество ядерных взаимодействий при объемном отражении частицы в изогнутом кристалле. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. P. 106–107.
  42. Бондаренко Н. В. Матричная факторизация в амплитуде реального комптоновского рассеяния. Вычисление всех поляризационных характеристик. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. P. 71–72.
  43. Bondarenko M. V. Analytic theory of volume reflection and the accompanying radiation. Book of Abstracts of the 4th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2010). Ferrara, Italy, October 3–8, 2010. P. 88.
  44. Бондаренко Н. В. Длина когерентности в изогнутом кристалле. Тезисы докладов VIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–26 февраля 2010 г. P. 112.

45. Бондаренко Н. В. Поляризация тормозного излучения на несферическом рассеивателе. Тезисы докладов VII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 23–27 февраля 2009 г. P. 89.
46. Bondarencо M. V. Towards a unified analytic theory of diffractive QED processes. Proceedings of the 17th International IUPAP Conference on Few-Body Physics (Few-Body 17). Durham, NC, USA, June 5–10, 2003. P. S320–S322.
47. Bondarencо M. V., Shul’ga N. F. Crystal-based spin analyzer for fast neutron beams. Proceedings of 2003 Particle Accelerator Conference. Portland, OR, USA, 2003. P. 3329–3331.
48. Черняев А. П., Варзарь С. М. Particle accelerators in modern world. *Ядерная физика*. 2014. Vol. 77. P. 1266–1278.
49. Amaldi U. The importance of particle accelerators. *Europhys. News*. 2000. Vol. 31. P. 5–9.
50. Lorentz H. A. The theory of electrons. Columbia Univ. Press, 1909. 332 p.
51. Sommerfeld A. Electrodynamics (Lectures on Theoretical Physics vol. III). New York: Academic, 1952. 372 p.
52. Schott G. A. On the electron theory of matter and on radiation. *Phil. Mag.* 1907. Vol. 13. P. 189–213.
53. Hulet R. G., Kleppner D. Rydberg atoms in “circular” states. *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51. P. 1430–1433.
54. Haroche S. Nobel lecture – Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. P. 1083–1102.
55. Leibfried D., et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.* 2003. Vol. 75. P. 281–324.
56. Wineland D. J. Nobel Lecture – Superposition, entanglement, and raising Schrödinger’s cat. *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. P. 1103–1114.

57. Иваненко Д. Д., Померанчук И. Я. О максимальной энергии, достижимой в бетатроне. *ДАН СССР*. 1944. Vol. 44. P. 343–344.
58. Iwanenko D., Pomeranchuk I. On the maximal energy attainable in a betatron. *Phys. Rev.* 1944. Vol. 65. P. 343.
59. Blewett J. P. Radiation losses in the induction electron accelerator. *Phys. Rev.* 1946. Vol. 69. P. 87–95.
60. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. К теории «светящегося» электрона. *ДАН СССР*. 1948. Vol. 59. P. 1551.
61. Владимирский В. В. О влиянии магнитного поля Земли на большие ливни Оже. *ЖЭТФ*. 1948. Vol. 18. P. 392.
62. Schwinger J. On the classical radiation of accelerated electrons. *Phys. Rev.* 1949. Vol. 75. P. 1912–1925.
63. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. ГТТИ, 1951. 480 с.
64. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, 3-е изд. М.: Физматгиз, 1960. 400 с.
65. Тернов, И. М. Синхротронное излучение. *УФН*. 1995. Vol. 165. P. 429–456.
66. Elder F. R., Gurewitsch A. M., Langmuir R. V., Pollock H. C. Radiation from electrons in a synchrotron. *Phys. Rev.* 1947. Vol. 71. P. 829–830.
67. Elder F. R., Langmuir R. V., Pollock H. C. Radiation from electrons accelerated in a synchrotron. *Phys. Rev.* 1948. Vol. 74. P. 52–56.
68. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Космическое магнитотормозное (синхротронное) излучение. *УФН*. 1965. Vol. 87. P. 65–111.
69. Blumenthal G. R., Gould R. J. Bremsstrahlung, synchrotron radiation, and Compton scattering of high-energy electrons traversing dilute gases. *Rev. Mod. Phys.* 1970. Vol. 42. P. 237–270.
70. Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И. О магнитотормозном (синхротронном) излучении и его реабсорбции. *УФН*. 1968. Vol. 94. P. 63–90.

71. Godwin R. P. Synchrotron radiation as a light source. Springer Tracts in Modern Physics, v. 51, 1969. 120 p.
72. Якименко М. Н. Мощные источники ультрафиолетового и рентгеновского излучения. *УФН*. 1974. Vol. 114. P. 55–66.
73. Кулипанов Г. Н., Скринский А. Н. Использование синхротронного излучения – состояние и перспективы. *УФН*. 1977. Vol. 122. P. 369–418.
74. Никитин М. М., Медведев А. Ф., Моисеев М. Б., Эпп В. Я. Интерференция синхротронного излучения. *ЖЭТФ*. 1980. Vol. 79. P. 763–774.
75. Bagrov V. G., Fedosov N. I., Ternov I. M. Radiation of relativistic electrons moving in an arc of a circle. *Phys. Rev. D*. 1983. Vol. 28. P. 2464–2472.
76. Chubar O. V., Smolyakov N. V. VUV range edge radiation in electron storage rings. *J. Optics (Paris)*. 1993. Vol. 24. P. 117–121.
77. Bosch R. A. Edge radiation in an electron storage ring. *Il Nuovo Cim*. 1998. Vol. 20. P. 483–493.
78. Geloni G., et al. Theory of edge radiation. Part I: Foundations and basic applications. *NIM A*. 2009. Vol. 605. P. 409–429.
79. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы, 2-е изд. М.: Рипол Классик, 1987. 504 с.
80. Eliezer C. J. The interaction of electrons and an electromagnetic field. *Rev. Mod. Phys.* 1947. Vol. 19. P. 147–184.
81. Plass G. N. Classical electrodynamic equations of motion with radiative reaction. *Rev. Mod. Phys.* 1961. Vol. 33. P. 37–62.
82. Erber T. The classical theories of radiation reaction. *Fort. Phys.* 1961. Vol. 9. P. 343–392.
83. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. М., 1977. 344 с.
84. Клепиков Н. П. Силы торможения излучением и излучение заряженных частиц. *УФН*. 1985. Vol. 146. P. 317–339.

85. Кривицкий В. С., Цытович В. Н. О средней силе радиационного трения в квантовой электродинамике. *УФН*. 1991. Vol. 161. P. 125–141.
86. Rohrlich F. The dynamics of a charged sphere and the electron. *Am. J. Phys.* 1997. Vol. 65. P. 1051–1056.
87. McDonald K. Limits on the applicability of classical electromagnetic fields as inferred from the radiation reaction: Cornell University Library [electronic resource]. 2000. URL: <http://arxiv.org/pdf/physics/0003062>.
88. Shen C. S. Synchrotron emission at strong radiative damping. *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 24. P. 410–415.
89. Huang Z., Chen P., Ruth R. D. A semi-classical treatment of channeling radiation reaction. *NIM B*. 1996. Vol. 119. P. 192–198.
90. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
91. Орлов Ю. Ф., Тарасов Е. К. Затухание осцилляций в циклическом электронном ускорителе. *ЖЭТФ*. 1958. Vol. 34. P. 651–657.
92. Robinson K. W. Radiation effects in circular electron accelerators. *Phys. Rev.* 1958. Vol. 111. P. 373–380.
93. Brown G., Halbach K., Harris J., Winick H. Wiggler and undulator magnets – A review. *NIM*. 1983. Vol. 208. P. 65–77.
94. Винокуров Н. А., Левичев Е. Б. Ондуляторы и вигглеры для генерации излучения и других применений. *УФН*. 2015. Vol. 185. P. 917–939.
95. Гинзбург В. Л. Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе. *Изв. АН СССР, Сер. физ.* 1947. Vol. 11. P. 165–181.
96. Motz H. Applications of the radiation from fast electron beams. *J. Appl. Phys.* 1951. Vol. 22. P. 527–535.
97. Motz H., Thon W., Whitehurst W. N. Experiments on radiation by fast electron beams. *J. Appl. Phys.* 1953. Vol. 24. P. 826–833.
98. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Черенков П. А. Излучение релятивистских электронов в магнитном ондуляторе. *УФН*. 1989. Vol. 157. P. 389–336.

99. Motz H., Luchini P. Undulators and free-electron lasers. Oxford, 1990. 324 p.
100. Attwood D., Halbach K., Kim K.-J. Tunable coherent X-rays. *Science*. 1985. Vol. 228. P. 1265–1272.
101. Di Piazza A., Müller C., Hatsagortsyan K. Z., Keitel C. H. Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems. *Rev. Mod. Phys.* 2012. Vol. 84. P. 1177–1228.
102. Cerenkov P. A. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light. *Phys. Rev.* 1937. Vol. 52. P. 378–379.
103. Вавилов С. И. О возможных причинах синего  $\gamma$ -свечения жидкостей. *ДАН СССР*. 1934. Vol. 2. P. 457.
104. Тамм И. Е., Франк И. М. Когерентное излучение быстрого электрона в среде. *ДАН СССР*. 1937. Vol. 14. P. 107.
105. Тамм И. Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы. *УФН*. 1959. Vol. 68. P. 387–396.
106. Франк И. М. Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах. *УФН*. 1959. Vol. 68. P. 397–415.
107. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1959. 532 с.
108. Jackson J. D. Classical electrodynamics, 3rd ed. New York: Wiley, 1998. 832 p.
109. Базылев В. А., Жеваго Н. К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: Наука, 1987. 272 с.
110. Erber T., White D., Tsai W.-Y., Latal H. G. Experimental aspects of synchrotron-Cerenkov radiation. *Ann. Phys.* 1976. Vol. 102. P. 405–442.
111. Marshall J. Cerenkov counters. *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 1954. Vol. 4. P. 141–156.

112. Зрелов В. П. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий, Кн. 1. М.: Атомиздат, 1968. 274 с.
113. Beringer J., et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Phys. Rev. D*. 2012. Vol. 86. P. 010001.
114. Тяпкин А. А. О первом теоретическом предсказании излучения, открытого Вавиловым и Черенковым. *УФН*. 1974. Vol. 112. P. 735.
115. Kaiser T. R. Heaviside radiation. *Nature*. 1974. Vol. 247. P. 400.
116. Jelley J. V. Heaviside-Mallet radiation?. *Nature*. 1974. Vol. 247. P. 401.
117. Гинзбург В. Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления). *УФН*. 1996. Vol. 166. P. 1033–1042.
118. Heaviside O. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *Phil. Mag.* 1889. Vol. 27. P. 324–339.
119. Frank I. M., Ginzburg V. L. Radiation of a uniform moving electron due to its transition from one medium into another. *J. Phys. USSR*. 1945. Vol. 9. P. 353.
120. Lilienfeld J. E. Die sichtbare strahlung des brennflecks von Röntgenröhren. *Phys. Z.* 1919. Vol. 20. P. 280.
121. Cohn W. M. Uber das auftreten von kontinuierlichen spektren bei kathodenstrahlbombardement. *Z. Phys.* 1931. Vol. 72. P. 392–422.
122. Goldsmith P., Jelley J. V. Optical transition radiation from protons entering metal surfaces. *Phil. Mag.* 1959. Vol. 4. P. 836–844.
123. Boersch H., Radeloff C., Sauerbrey G. Experimental detection of transition radiation. *Z. Phys.* 464. Vol. 165. P. 1961.
124. Ter-Mikayelyan M. L. High-energy electromagnetic processes in condensed media. New York: Wiley, 1972. 460 p.
125. Гарибян Г. М., Ян Ши. Рентгеновское переходное излучение. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1983. 320 с.
126. Rullhusen P., Artru X., Dhez P. Novel radiation sources using relativistic electrons. Singapore: World Scientific, 1998. 202 p.



127. Yuan L. C. L., Wang C. L., Uto Y., Prunster S. Energy dependence of X-ray transition radiation from ultrarelativistic charged particles. *Phys. Lett. B*. 1970. Vol. 31. P. 603–605.
128. Поляризацiонное тормозное излучение атомов и частиц (Под ред. В. Н. Цытовича и И. М. Ойрингеля). М.: Наука, 1987.
129. Амуся М. Я. Тормозное излучение. М.: Энергоатомиздат, 1990. 208 с.
130. Korol A. V., Solov'yov A. V. Polarizational bremsstrahlung of electrons in collisions with atoms and clusters. *J. Phys. B*. 1997. Vol. 30. P. 1105–1150.
131. Астапенко В. А., Буреева Л. А., Лисица В. С. Поляризацiонные эффекты в атомных переходах. *УФН*. 2002. Vol. 172. P. 155–192.
132. Ginzburg V. L., Tsytovich V. N. Several problems of the theory of transition radiation and transition scattering. *Phys. Rep.* 1979. Vol. 49. P. 1–89.
133. Nitta H. Kinematical theory of parametric X-ray radiation. *Phys. Lett. A*. 1991. Vol. 158. P. 270–274.
134. Fiorito R. B., et al. Polarized angular distributions of parametric X radiation and vacuum-ultraviolet transition radiation from relativistic electrons. *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. R2758–R2762.
135. Потылицын А. П. Излучение электронов в периодических структурах. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 280 с.
136. Гинзбург В. Л., Франк И. М.. *ДАН СССР*. 1947. Vol. 56. P. 699–702.
137. Smith S. J., Purcell E. M. Visible light from localized surface charges moving across a grating. *Phys. Rev.* 1953. Vol. 92. P. 1069.
138. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение заряженных частиц в периодических структурах. *УФН*. 1968. Vol. 94. P. 378–416.
139. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физ.-мат. лит., 1963. 432 с.
140. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях. *ДАН СССР*. 1953. Vol. 92. P. 535, 735.

141. Migdal A. B. Bremsstrahlung and pair production in condensed media at high energies. *Phys. Rev.* 1956. Vol. 103. P. 1811–1820.
142. Galitsky V. M., Gurevich I. I. Coherence effects in ultra-relativistic electron bremsstrahlung. *Nuov. Cim.* 1964. Vol. 32. P. 396–407.
143. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973. 376 с.
144. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика, 2 изд. М.: Наука, 1980. 704 с.
145. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. High-energy electrodynamics in matter. Luxembourg: Gordon and Breach, 1996. 388 p.
146. Zolotarev M. S., McDonald K. T. Classical radiation processes in the Weizsäcker-Williams approximation: Cornell University Library [electronic resource]. 2000. URL: <http://arxiv.org/pdf/physics/0003096>.
147. Purcell E. Electricity and magnetism. New York: McGraw Hill, 1965. 440 p.
148. Фейнберг Е. Л. Последовательные взаимодействия при высоких энергиях. *ЖЭТФ*. 1966. Vol. 50. P. 202–214.
149. Baier R., Dokshitzer Y. L., Mueller A. H., Peigné S., Schiff D. The Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in QED. *Nucl. Phys. B*. 1996. Vol. 478. P. 577–597.
150. Baier R., Schiff D., Zakharov V. G. Energy loss in perturbative QCD. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2000. Vol. 50. P. 37–69.
151. Терновский Ф. Ф. К теории радиационных процессов в кусочно-однородных средах. *ЖЭТФ*. 1960. Vol. 39. P. 171–180.
152. Шульга Н. Ф., Фомин С. П. О подавлении излучения в аморфной среде и в кристалле. *Письма ЖЭТФ*. 1978. Vol. 27. P. 126–128.
153. Jauch J. M., Rohrlich F. The infrared divergence. *Helv. Phys. Acta*. 1954. Vol. 27. P. 613–636.
154. Пафомов В. Е. О тормозном излучении. *ЖЭТФ*. 1965. Vol. 49. P. 1222–1227.

155. Baier V. N., Katkov V. M. Theory of the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect. *Phys. Rev. D*. 1998. Vol. 57. P. 3146–3162.
156. Zakharov B. G. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for finite-size targets. *Письма ЖЭТФ*. 1996. Vol. 64. P. 737–742.
157. Гольдман И. И. Тормозное излучение на границе среды с учетом многократного рассеяния. *ЖЭТФ*. 1960. Vol. 38. P. 1866–1872.
158. Klein S. Suppression of bremsstrahlung and pair production due to environmental factors. *Rev. Mod. Phys.* 1999. Vol. 71. P. 1501–1538.
159. Andersen K. K., et al. Measurements of the spectral location of the structured target resonance for ultrarelativistic electrons. *Phys. Lett. B*. 2014. Vol. 732. P. 309–314.
160. Blankenbecler R. Structured targets and the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect. *Phys. Rev. D*. 1997. Vol. 55. P. 190–195.
161. Geiger H. The scattering of the  $\alpha$ -particles by matter. *Proc. Roy. Soc. A*. 1910. Vol. 83. P. 492–504.
162. Wentzel G. Zur theorie der streuung von  $\beta$ -strahlen. *Ann. Phys. (Leipzig)*. 1922. Vol. 69. P. 335–368.
163. Bothe W. Das allgemeine fehlergesetz, die schwankungen der feldstärke in einem dielektrikum und die zerstreung der  $\alpha$ -strahlen. *Z. Phys.* 1921. Vol. 5. P. 63–69.
164. Williams E. J. Multiple scattering of fast electrons and alpha-particles, and curvature of cloud tracks due to scattering. *Phys. Rev.* 1940. Vol. 58. P. 292–306.
165. Williams E. J. The straggling of  $\beta$ -particles. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1929. Vol. 125. P. 420–445.
166. Molière G. Theorie der streuung schneller geladener teilchen. I. Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-feld. *Z. Naturforsch.* 1947. Vol. 2a. P. 133–145.
167. Molière G. Theorie der streuung schneller geladener teilchen. II. Mehrfach- und vielfachstreuung. *Z. Naturforsch.* 1948. Vol. 3a. P. 78–97.

168. Bethe H. A. Molière's theory of multiple scattering. *Phys. Rev.* 1953. Vol. 89. P. 1256–1266.
169. Mott N. F., Massey H. S. W. *The Theory of Atomic Collisions*, 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1965. 756 p.
170. Hanson A. O., Lanzl L. H., Lyman E. M., Scott M. B. Measurement of multiple scattering of 15.7-MeV electrons. *Phys. Rev.* 1951. Vol. 84. P. 634–637.
171. Scott W. T. The theory of small-angle multiple scattering of fast charged particles. *Rev. Mod. Phys.* 1963. Vol. 35. P. 231–313.
172. Nigam B. P., Sundaresan M. K., Wu T. Y. Theory of multiple scattering – second Born approximation and corrections to Molière's work. *Phys. Rev.* 1959. Vol. 115. P. 491–502.
173. Nigam B. P., Mathur V. S. Difference in the multiple scattering of electrons and positrons. *Phys. Rev.* 1961. Vol. 121. P. 1577–1580.
174. Glauber R. Cross sections in deuterium at high energies. *Phys. Rev.* 1955. Vol. 100. P. 242–248.
175. Akhieser A. I., Sitenko A. G. Diffractive scattering of fast deuterons by nuclei. *Phys. Rev.* 1957. Vol. 106. P. 1236–1246.
176. Czyż W., Maximon L. C. High energy, small angle elastic scattering of strongly interacting composite particles. *Ann. Phys.* 1969. Vol. 52. P. 59–121.
177. Miller M. L., Reygers K., Sanders S. J., Steinberg P. Glauber modeling in high-energy nuclear collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2007. Vol. 57. P. 205–43.
178. Barone V., Predazzi E. *High-energy particle diffraction*. Springer, 2002. 410 p.
179. Fano U. Inelastic collisions and the Molière theory of multiple scattering. *Phys. Rev.* 1954. Vol. 93. P. 117–120.
180. Highland V. L. Some practical remarks on multiple scattering. *NIM.* 1975. Vol. 129. P. 497–499.

181. Lynch G. R., Dahl O. I. Approximations to multiple Coulomb scattering. *NIM B*. 1991. Vol. 58. P. 6–20.
182. Fermi E. Chicago lectures. unpublished, 1940.
183. Yang C. N. Actual path length of electrons in foils. *Phys. Rev.* 1951. Vol. 84. P. 599–600.
184. Courant E. D. Multiple scattering corrections for collimating slits. *Rev. Sci. Instr.* 1951. Vol. 22. P. 1003–1005.
185. Burge E. J., Smith D. A. Theoretical study of slit scattering. *Rev. Sci. Instr.* 1962. Vol. 33. P. 1371–1377.
186. Фирсов О. Б. Отражение быстрых ионов от плотной среды под скользкими углами. *ДАН СССР*. 1966. Vol. 169. P. 1311.
187. Кузовлев А. И., Ремизович В. С. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от толщины рассеивающего слоя для скользящего падения пучков быстрых частиц. *ДАН СССР*. 1982. Vol. 266. P. 1118–1123.
188. Коборов Н. Н., Кузовлев А. И., Курнаев В. А., Ремизович В. С. Угловое распределение быстрых частиц, прошедших через плоский рассеиватель при скользящем падении потока на его поверхность. *Письма ЖТФ*. 1991. Vol. 17. P. 6–9.
189. Серов А. В., Мамонов И. А., Кольцов А. В. Угловые распределения отраженных и преломленных электронов, пересекающих плоскую мишень под малым углом. *ЖЭТФ*. 2015. Vol. 148. P. 658–664.
190. Rutherford E. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom. *Phil. Mag., Series 6*. 1911. Vol. 21:125. P. 669–688.
191. Darwin C. G. A theory of the absorption and scattering of the  $\alpha$  rays. *Phil. Mag.* 1912. Vol. 23. P. 901–920.
192. Bohr N. On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter. *Phil. Mag.* 1913. Vol. 25. P. 10–31.
193. Fano U. Penetration of protons, alpha particles, and mesons. *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 1963. Vol. 13. P. 1–66.

194. Ahlen S. P. Theoretical and experimental aspects of the energy loss of relativistic heavily ionizing particles. *Rev. Mod. Phys.* 1988. Vol. 52. P. 121–173.
195. Mott N. F. On the theory of excitation by collision with heavy particles. *Proc. Cambr. Philos. Soc.* 1931. Vol. 27. P. 553–560.
196. Bethe H. Zur theorie der durchgangs schneller korpuskularstrahlen durch materie. *Ann. Physik.* 1930. Vol. 5. P. 325–400.
197. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Гостехиздат, 1948. 568 с.
198. Williams E. J. Applications of the method of impact parameter in collisions. *Proc. Roy. Soc.* 1933. Vol. 139. P. 163–186.
199. Fermi E. Uber die theorie des stoßes zwischen atomen und elektrisch geladenen teilchen. *Z. Phys.* 1924. Vol. 29. P. 315–327.
200. Bloch F. Zur bremsung rasch bewegter teilchen beim durchgang durch materie. *Ann. Phys.* 1933. Vol. 408.3. P. 285–320.
201. Lindhard J., Nielsen V., Scharff M., Thomsen P. V. Integral equations governing radiation effects. *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 1963. Vol. 33. P. 1–42.
202. Fermi E. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials. *Phys. Rev.* 1940. Vol. 57. P. 485–493.
203. Swann W. F. G. What are cosmic-rays. *J. Frank. Inst.* 1938. Vol. 226. P. 757–796.
204. Uehling E. A. Penetration of heavy charged particles in matter. *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 1954. Vol. 4. P. 315–350.
205. Crispin A., Fowler G. N. Density effect in the ionization energy loss of fast charged particles in matter. *Rev. Mod. Phys.* 1970. Vol. 42. P. 290–316.
206. Ohtsuki Y.-H. Charged beam interaction with solids. New York: Taylor & Francis, 1983.
207. Born M. Quantenmechanik der stoßvorgänge. *Z. Phys.* 1927. Vol. 38. P. 803–827.

208. Bohr N. On the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter. *Phil. Mag.* 1915. Vol. 30. P. 581–612.
209. Landau L. D. О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию. *J. Exp. Phys. (USSR)*. 1944. Vol. 8. P. 201–209.
210. Birkhoff R. D. The passage of fast electrons through matter. In: *Corpuscles and Radiation in Matter II*. Springer, 1958. 53–138 p.
211. Bak J., et al. Large departures from Landau distributions for high-energy particles traversing thin Si and Ge targets. *Nucl. Phys. B*. 1987. Vol. 288. P. 681–716.
212. Bichsel H. Straggling in thin silicon detectors. *Rev. Mod. Phys.* 1988. Vol. 60. P. 663–699.
213. Allison W. W. M., Cobb J. H. Relativistic charged particle identification by energy loss. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1980. Vol. 30. P. 253–298.
214. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И. Флуктуации пробега заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
215. Sigmund P. *Particle Penetration and Radiation Effects*, Vol. 2. Springer, 2014. 604 p.
216. Бор Н. Прохождение атомных частиц через вещество. М.: ИЛ, 1950. 156 с.
217. Bethe H. A., Heitler W. On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons. *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1934. Vol. A146. P. 83–112.
218. Milstein A. I., Schumacher M. Present status of Delbrück scattering. *Phys. Rep.* 1994. Vol. 243. P. 183–214.
219. Чудаков А. Е. Об одном ионизационном эффекте, связанном с наблюдением электронно-позитронных пар при очень высоких энергиях. *Изв. АН СССР, Сер. Физ.* 1955. Vol. 19. P. 651–656.
220. Perkins D. H. Ionization at the origin of electron pairs, and the lifetime of the neutral pion. *Phil. Mag.* 1955. Vol. 46. P. 1146–1148.

221. Burkhardt G. H. The suppression effect in ionization by fast electron pairs. *Il Nuov. Cim.* 1958. Vol. 9. P. 375–399.
222. Берестецкий В. Б., Гешкенбейн Б. В. Об ионизационном торможении электронно-позитронных пар большой энергии. *ЖЭТФ.* 1956. Vol. 31. P. 722–723.
223. Mito I., Ezawa H. Ionization loss near the origin of an electron pair of very high energy. *Progr. Theor. Phys.* 1957. Vol. 18. P. 437–447.
224. Thomsen H. D., Uggerhøj U. I. Measurements and theories of the King–Perkins–Chudakov effect. *NIM B.* 2011. Vol. 269. P. 1919–1924.
225. Mott N. The scattering of fast electrons by atomic nuclei. *Proc. Roy. Soc. A.* 1929. Vol. 124. P. 425–442.
226. McKinley W. A., Feshbach H. The Coulomb scattering of relativistic electrons by nuclei. *Phys. Rev.* 1948. Vol. 84. P. 1759–1763.
227. Motz J. W., Olsen H., Koch H. W. Electron scattering without atomic or nuclear excitation. *Rev. Mod. Phys.* 1964. Vol. 36. P. 881–928.
228. Hanson A. O. Beyond Mott scattering. *AIP Conf. Proc.* 1987. Vol. 161. P. 12–22.
229. Weizsäcker C. F. Radiation emitted in collisions of very fast electrons. *Z. Phys.* 612-625. Vol. 88. P. 1934.
230. Bethe H. A. The influence of screening on the creation and stopping of electrons. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1934. Vol. 30. P. 524–539.
231. May M. M., Wick G. C. On the production of polarized high energy X-rays. *Phys. Rev.* 1951. Vol. 81. P. 628.
232. Gluckstern R. L., Hull M. H., Breit G. Polarization of bremsstrahlung radiation. *Phys. Rev.* 1953. Vol. 90. P. 1026–1029.
233. Rindi A. Gas bremsstrahlung from electron storage rings. *Health Physics.* 1982. Vol. 42. P. 187–193.
234. Lanzl L. H., Hanson A. O.  $Z$  dependence and angular distribution of bremsstrahlung from 17-MeV electrons. *Phys. Rev.* 1951. Vol. 83. P. 959–974.



235. Sirlin A. Angular distribution of betatron target radiation. *Phys. Rev.* 1956. Vol. 101. P. 1219–1226.
236. Bethe H. Maximon L. C., Low F. Bremsstrahlung at high energies. *Phys. Rev.* 1953. Vol. 91. P. 417–418.
237. Bethe H., Maximon L. C. Theory of bremsstrahlung and pair production. I. Differential cross section. *Phys. Rev.* 1954. Vol. 93. P. 768–784.
238. Sommerfeld A. Über die beugung und bremsung der elektronen. *Ann. Phys.* 1931. Vol. 11. P. 257–330.
239. Sommerfeld A. Atombau und Spektrallinien: Wellenmechanischer Ergänzungsband. Vol. 2. Braunschweig: Vieweg, 1939. 619 S.
240. Furry W. H. Approximate wave functions for high energy electrons in Coulomb fields. *Phys. Rev.* 1934. Vol. 46. P. 391–396.
241. Sommerfeld A., Maue A. W. Verfahren zur näherungsweise Anpassung einer Lösung der Schrödinger- an die Diracgleichung. *Ann. Phys.* 1935. Vol. 22. P. 629–642.
242. Gordon W. Über den stoß zweier punktladungen nach der wellenmechanik. *Z. Phys.* 1928. Vol. 48. P. 180–191.
243. Temple G. The scattering power of a bare nucleus according to wave mechanics. *Proc. Roy. Soc. A.* 1928. Vol. 121. P. 673–675.
244. Bess L. Bremsstrahlung for heavy elements at extreme relativistic energies. *Phys. Rev.* 1950. Vol. 77. P. 550–556.
245. Maximon L. C., Bethe H. Differential cross section for bremsstrahlung and pair production. *Phys. Rev.* 1952. Vol. 87. P. 156.
246. Olsen H. Outgoing and ingoing waves in final states and bremsstrahlung. *Phys. Rev.* 1955. Vol. 99. P. 1335–1336.
247. Elwert G.: Ph.D. thesis / University of Munich. W. Germany, 1939.
248. Elwert G. Verscharfte berechnung von intensitat und polarisation im kontinuierlichen röntgenspektrum. *Ann. Phys.* 1939. Vol. 34. P. 178–208.
249. Elwert G., Haug E. Calculation of bremsstrahlung cross sections with Sommerfeld-Maue eigenfunctions. *Phys. Rev.* 1969. Vol. 183. P. 90–105.

250. Pratt R. H., Feng I. J. Electron-atom bremsstrahlung. Atomic Inner Shell Physics, ed. by B. Crasemann. New York: Plenum Press, 1985. 619 p.
251. Nakel W. The elementary process of bremsstrahlung. *Phys. Rep.* 1994. Vol. 243. P. 317–353.
252. Maximon L. C., de Miniac A., Aniel T., Ganz E. Tagged photons: An analysis of the bremsstrahlung cross section. *Phys. Rep.* 1987. Vol. 147. P. 189–252.
253. Olsen H., Maximon L. C., Wergeland H. Theory of high-energy bremsstrahlung and pair production in a screened field. *Phys. Rev.* 1957. Vol. 106. P. 27–46.
254. Furry W. H. On bound states and scattering in positron theory. *Phys. Rev.* 1951. Vol. 81. P. 115–124.
255. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. К квантовой теории светящегося электрона. *ЖЭТФ.* 1952. Vol. 23. P. 632.
256. Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field. *Phys. Rev.* 1949. Vol. 76. P. 828–832.
257. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика, 4 изд. М.: Наука, 1981. 432 с.
258. Schwinger J. The quantum correction in the radiation by energetic accelerated electrons. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 1954. Vol. 40. P. 132–136.
259. Belomestnykh S. A., et al. An observation of the spin dependence of synchrotron radiation intensity. *NIM.* 1984. Vol. 227. P. 173–181.
260. Тернов И. М. Исследования по квантовой теории светящегося электрона: Дисс. . . доктора наук / Тернов И. М. ; МГУ. 1961.
261. Байер В. Н. Радиационная поляризация электронов в накопителях. *УФН.* 1971. Vol. 105. P. 441–478.
262. Baier V. N., Katkov V. M. Concept of formation length in radiation theory. *Phys. Rep.* 2005. Vol. 409. P. 261–359.

263. Uggerhøj U. I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields. *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77. P. 1131–1171.
264. Байер В. Н., Катков В. М. Квазиклассическая теория тормозного излучения релятивистскими частицами. *ЖЭТФ*. 1968. Vol. 55. P. 1542–1554.
265. Baier V., Katkov V. Quantum effects in magnetic bremsstrahlung. *Phys. Lett. A*. 1967. Vol. 25. P. 492.
266. Schwinger J., Tsai W. Y. New approach to quantum corrections in synchrotron radiation. *Ann. Phys.* 1978. Vol. 110. P. 63–84.
267. Lieu R., Axford W. I. Synchrotron radiation: An inverse Compton effect. *Astrophys. J.* 1993. Vol. 416. P. 700–706.
268. Zhang J. L., Cheng K. S. Radiation formulae for a relativistic charged particle moving in a curved spiral trajectory. *Phys. Lett. A*. 1995. Vol. 208. P. 47–52.
269. Lindhard J. Quantum-radiation spectra of relativistic particles derived by the correspondence principle. *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 6032–6037.
270. Bagrov V. G., Belov V. V., Trifonov A. Y. Theory of spontaneous radiation by electrons in a trajectory-coherent approximation. *J. Phys. A*. 1993. Vol. 26. P. 6431–6449.
271. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. Semiclassical theory of high-energy particle radiation in external fields. *Phys. Rep.* 1993. Vol. 234. P. 297–365.
272. Хаякава С. Физика космических лучей. М.: Мир, 1973.
273. Словинский Б. Электронно-фотонные ливни, создаваемые гамма-квантами и электронами в плотных веществах. *ЭЧАЯ*. 1994. Vol. 25. P. 417–495.
274. Carlson J. F., Oppenheimer J. R. On multiplicative showers. *Phys. Rev.* 1937. Vol. 15. P. 220–231.
275. Bhabha H. J., Heitler W. The passage of fast electrons and the theory of cosmic showers. *Proc. Roy. Soc. A*. 1937. Vol. 159. P. 432–458.

276. Landau L. D., Rumer Y. B. The cascade theory of electronic showers. *Proc. Roy. Soc. A.* 1938. Vol. 166. P. 213–228.
277. Rossi B., Greisen K. Cosmic-ray theory. *Rev. Mod. Phys.* 1941. Vol. 13. P. 240–309.
278. Tsai Y. S. Pair production and bremsstrahlung of charged leptons. *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 815–851.
279. Seltzer S. M., Berger M. J. Bremsstrahlung spectra from electron interactions with screened atomic nuclei and orbital electrons. *NIM B.* 1985. Vol. 12. P. 95–134.
280. Bloch F., Nordsieck A. Note on the radiation field of the electron. *Phys. Rev.* 1937. Vol. 52. P. 54–59.
281. Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Ann. Phys. (NY).* 1961. Vol. 13. P. 379–452.
282. Glauber R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* 1963. Vol. 131. P. 2766–2788.
283. Ferretti B. Sulla “bremsstrahlung” nei cristalli. *Il Nuov. Cim.* 1950. Vol. 7. P. 118–134.
284. Тер-Микаелян М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрых электронов. *ЖЭТФ.* 1953. Vol. 25. P. 296–306.
285. Überall H. High-energy interference effect of bremsstrahlung and pair production in crystals. *Phys. Rev.* 1956. Vol. 103. P. 1055–1067.
286. Diambrini Palazzi G. High-energy bremsstrahlung and electron pair production in thin crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1968. Vol. 40. P. 611–631.
287. Timm U. Coherent bremsstrahlung of electrons in crystals. *Forts. Phys.* 1969. Vol. 17. P. 765–808.
288. Калашников Н. П. Когеретные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. М.: Наука, 1981.
289. Barbiellini G., et al. Experimental evidence for a quasi-monochromatic bremsstrahlung intensity from frascati 1-GeV synchrotron. *Phys. Rev.*

- Lett.* 1962. Vol. 8. P. 454–457.
290. Schiff L. I. Interference effects in high-energy bremsstrahlung from crystals. *Phys. Rev.* 1960. Vol. 117. P. 1394–1401.
291. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. Теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых заряженных частиц в кристаллах. *ЭЧАЯ.* 1979. Vol. 10. P. 51–89.
292. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 400 с.
293. Oen O. S., Holmes D. R., Robinson M. T. Ranges of energetic atoms in solids. *Appl. Phys. Lett.* 1963. Vol. 34. P. 30–32.
294. Davies J. A., Friesen J., McIntyre J. D. A radiochemical technique for studying range-energy relationships for heavy ions of keV energies in aluminum. *Can. J. Chem.* 1960. Vol. 38. P. 1526–1534.
295. Almen O., Bruce G. Sputtering experiments in the high energy region. *NIM.* 1961. Vol. 11. P. 279–289.
296. Stark J., Wendt G. Über das eindringen von kanalstrahlen in feste körper. *Ann. Phys.* 1912. Vol. 38. P. 921–941.
297. Lehmann C., Leibfried G. Long-range channeling effects in irradiated crystals. *J. Appl. Phys.* 1963. Vol. 34. P. 2821–2836.
298. Thompson M. W. Effect of proton channeling at 2.8 MeV on the Cu-Zn reaction rate in a single crystalline Cu. *Phys. Rev. Lett.* 1964. Vol. 13. P. 756–760.
299. Lindhard J. Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles. *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 1965. Vol. 35. P. 1–64.
300. Beloshitsky V. V., Komarov F. F., Kumakhov M. A. Dechanneling, flux peaking and energy losses of fast charged particles penetrating through thick crystals. *Phys. Rep.* 1986. Vol. 139. P. 293–364.
301. Relativistic Channeling. (Eds.: R. A. Carrigan, Jr. and J. A. Ellison) NATO ASI Vol. 165 B. New York: Plenum Press, 1987. 528 p.

302. Dearnaley G., Mitchell I. V., Nelson R. S., Farmery B. W., Thompson M. W. Proton channelling through thin crystals. *Phil. Mag.* 1968. Vol. 18. P. 985–1016.
303. Chadderton L. T. Diffraction and channeling. *J. Appl. Cryst.* 1970. Vol. 3. P. 429–465.
304. Каган Ю. М., Кононец Ю. В. Теория эффекта каналирования. *ЖЭТФ.* 1970. Vol. 58. P. 226.
305. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск: Изд-во БГУ, 1982.
306. Gemmell D. S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 129–227.
307. Рябов В. А. Эффект каналирования. М.: Энергоатомиздат, 1994.
308. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Гриненко А. А., Сыщенко В. В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. *УФН.* 1995. Vol. 165. P. 1165–1192.
309. Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдных. *Усп. мат. наук.* 1970. Vol. 25. P. 141–192.
310. Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion – some numerical experiments. *Astron. J.* 1964. Vol. 69. P. 73–79.
311. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР.* 1954. Vol. 98. P. 527–530.
312. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Усп. мат. наук.* 1963. Vol. 18. P. 91–192.
313. Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Acad. Wiss. Gottingen.* 1962. Vol. 1. P. 1–20.
314. Dumas H. S., Ellison J. A., Saenz A. W. Axial channeling in perfect crystals, the continuum model, and the method of averaging. *Ann. Phys.*

1991. Vol. 209. P. 97–123.
315. Risken H. The Focker-Plank equation. Methods of solution and approximations. Springer, 1989. 472 p.
316. Altman M. R., Feldman L. C., Gibson W. M. Dechanneling of 5 MeV protons from planar channels in silicon and its temperature dependence. *Rad. Eff.* 1973. Vol. 18. P. 171–180.
317. Waho T. Planar dechanneling of protons in Si and Ge. *Phys. Rev. B.* 1976. Vol. 14. P. 4830–4833.
318. Barrett J. H. Breakdown of the statistical-equilibrium hypothesis in channeling. *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 31. P. 1542–1545.
319. Кадменский А. Г., Самарин В. В., Тулинов А. Ф. Регулярное и стохастическое движение в кристалле при каналировании. Эволюция потока частиц в толстом кристалле. *ЭЧАЯ.* 2003. Vol. 34. P. 822–868.
320. Forster J. S., et al. Deflection of GeV particle beams by channeling in bent crystal planes of constant curvature. *Nucl. Phys. B.* 1989. Vol. 318. P. 301–318.
321. Таратин А. М. Каналирование частиц в изогнутом кристалле. *ЭЧАЯ.* 1998. Vol. 29. P. 1063–1118.
322. Wienands U., et al. Observation of deflection of a beam of multi-GeV electrons by a thin crystal. *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. P. 074801.
323. Scandale W., et al. Observation of nuclear dechanneling for high-energy protons in crystals. *Phys. Lett. B.* 2009. Vol. 680. P. 129–132.
324. Gibson W. M., et al. Deflection of high energy channeled charged particles by elastically bent silicon single crystals. *NIM B.* 1984. Vol. 2. P. 54–59.
325. Tsyganov E. N. Some aspects of the mechanism of a charge particle penetration through a monocrystal. 1976. URL: No. TM-682 (unpublished).
326. Chadderton L. T. Comments on the scattering of charged particles by single crystals.(1–3) IV. Quasichanneling. *Rad. Eff.* 1975. Vol. 27. P. 13–21.

327. Кашлев Ю. А., Садыков Н. М. Неравновесная статистическая термодинамика каналированных частиц. Резонансные переходы и эффект деканализирования. *Теор. Мат. Физ.* 1998. Vol. 116. P. 146–160.
328. Огороков В. В. О когерентном возбуждении ядер, пролетающих через кристалл. *Ядерная физика.* 1965. Vol. 2. P. 1009–1014.
329. Тулинов А. Ф. Влияние кристаллической решетки на некоторые атомные и ядерные процессы. *УФН.* 1965. Vol. 87. P. 585–598.
330. Gaillard M. J., Poizat J. C. Remillieux J., Gaillard M. L. Another experimental evidence for coherent electronic excitation of channeled He<sup>+</sup> ions. *Phys. Lett. A.* 1973. Vol. 45. P. 306–308.
331. Walker R. L., et al. Channeling and coherent bremsstrahlung effects for relativistic positrons and electrons. *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 25. P. 5–8.
332. Мороховский В. Л., и др. Канализование позитронов с энергией 1 ГэВ. *Письма ЖЭТФ.* 1972. Vol. 16. P. 162–164.
333. Kumakhov M. A. On the theory of electromagnetic radiation of charged particles in a crystal. *Phys. Lett.* 1976. Vol. 57. P. 17–18.
334. Baryshevsky V. G., Dubovskaya I. Y. Angular distribution of photons from channelled particles. *J. Phys. C.* 1983. Vol. 16. P. 3663–3671.
335. Beloshitsky V. V., Komarov F. F. Electromagnetic radiation of relativistic channeling particles (the Kumakhov effect). *Phys. Rep.* 1982. Vol. 93. P. 117–197.
336. Кумахов М. А. Излучение каналированных частиц в кристаллах. М.: Энергоатомиздат, 1986. 160 с.
337. Vorobiev A. A., Kaplin V. V., Vorobiev S. A. Radiation of electrons transmitted through the crystal. *NIM.* 1975. Vol. 127. P. 265–268.
338. Bak J., et al. Channeling radiation from 2-55 GeV electrons and positrons (I). Planar case. *Nucl. Phys. B.* 1985. Vol. 254. P. 491–527.
339. Барышевский В. Г., Тихомиров В.В. Радиационные процессы магнитотормозного типа в кристаллах и сопровождающие их поляризационные явления. *УФН.* 1989. Vol. 159. P. 529–565.



340. Khokonov M. K., Efendiev K. V. High energy limit of single photon channeling radiation spectrum. *NIM B*. 2006. Vol. 252. P. 36–43.
341. Baryshevskii V. G., Thikhomirov V. V. Birefringence of the high-energy  $\gamma$ -quanta in monocrystals. *Phys. Lett. A*. 1982. Vol. 90. P. 153–155.
342. Kimball J. C., Cue N. Quantum electrodynamics and channeling in crystals. *Phys. Rep.* 1985. Vol. 125. P. 69–101.
343. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. С. Взаимодействие электронов и фотонов высокой энергии с кристаллами. *УФН*. 1989. Vol. 159. P. 455–491.
344. Andersen S. K., et al. Influence of channeling on scattering of 2–15 GeV/c protons,  $\pi^+$ , and  $\pi^-$  incident on Si and Ge crystals. *Nucl. Phys. B*. 1980. Vol. 167. P. 1–40.
345. Kudrin V. V., Vorobiev S. A. Small-angle scattering of swift electrons and positrons in a crystal. *Rad. Eff.* 1975. Vol. 25. P. 119–125.
346. Golovchenko J. A few analytical solutions to the linear Boltzmann transport equation with an application to channeling. *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13. P. 4672–4677.
347. Armstrong D. D., Gibson W. M., Wegner H. E. Proton channeling studies in thin crystals with a supercollimated beam. *Rad. Eff.* 1971. Vol. 11. P. 241–249.
348. Motapothula M., et al. Axial ion channeling patterns from ultra-thin silicon membranes. *NIM B*. 2012. Vol. 283. P. 29–34.
349. Winter M. Collisions of atoms and ions with surfaces under grazing incidence. *Phys. Rep.* 2002. Vol. 367. P. 387 – 582.
350. Taratin A. M., Tsyganov E. N., Vorobiev S. A. Computer simulation of deflection effects for relativistic charged particles in a curved crystal. *Phys. Lett. A*. 1979. Vol. 72. P. 145–146.
351. Elishev A. F., et al. Steering of charged particle trajectories by a bent crystal. *Phys. Lett. B*. 1979. Vol. 88. P. 387–391.

352. Bak J., et al. Detailed investigation of the channeling phenomena involved at bending of high energy beams by crystals. *Nucl. Phys. B*. 1984. Vol. 242. P. 1–30.
353. Бирюков В. М., Котов В. И., Чесноков Ю. А. Управление пучками заряженных частиц высоких энергий при помощи изогнутых монокристаллов. *УФН*. 1994. Vol. 164. P. 1017–1040.
354. Biryukov V. M. On the theory of proton beam multiturn extraction with bent single crystals. *NIM B*. 1991. Vol. 53. P. 202–207.
355. Taratin A. M., Vorobiev S. A. Computer simulation of proton channeling catch-up in bent crystals. *Phys. Stat. Solidi (b)*. 1986. Vol. 133. P. 511–516.
356. Taratin A. M., Vorobiev S. A. Deflection of high-energy charged particles in quasi-channeling states in bent crystals. *NIM B*. 1987. Vol. 26. P. 512–521.
357. Tikhomirov V. V. Multiple volume reflection from different planes inside one bent crystal. *Phys. Lett. B*. 2007. Vol. 655. P. 217–222.
358. Taratin A. M., Scandale W. Volume reflection of high-energy protons in short bent crystals. *NIM B*. 2007. Vol. 262. P. 340–347.
359. Breese M. B. H., Biryukov V. M. Enhanced beam deflection in bent crystals using multiple volume reflection. *NIM B*. 2007. Vol. 263. P. 395–400.
360. Андреев В. А., и др. Экспериментальное обнаружение эффекта объемного захвата в режим канализования изогнутым монокристаллом. *Пульса ЖЭТФ*. 1982. Vol. 36. P. 340–343.
361. Mazzolari A., et al. Steering of a sub-GeV electron beam through planar channeling enhanced by rechanneling. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. P. 135503.
362. Scandale W., et al. Deflection of 400 GeV/c proton beam with bent silicon crystals at the CERN Super Proton Synchrotron. *Phys. Rev. ST-AB*. 2008. Vol. 11. P. 063501.

363. Scandale W., et al. Volume reflection dependence of 400 GeV/c protons on the bent crystal curvature. *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. P. 234801.
364. Shul'ga N. F., Greenenko A. A. Multiple scattering of ultrahigh-energy charged particles on atomic strings of a bent crystal. *Phys. Lett. B.* 1995. Vol. 353. P. 373–377.
365. Барышевский В. Г., Грубич А. О., Дубовская И. Я. *Изв. АН БССР.* 1979. Vol. 6. P. 72.
366. Chen D., et al. First observation of magnetic precession of channeled particles in bent crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69. P. 3286–3289.
367. Samsonov V. M. On the possibility of measuring charm baryon magnetic moments with channeling. *NIM B.* 1996. Vol. 119. P. 271–279.
368. Aitala E. M., et al. Multidimensional resonance analysis of  $\Lambda_c^+ \rightarrow pK^-\pi^+$ . *Phys. Lett. B.* 2000. Vol. 471. P. 449–459.
369. Baryshevsky V. G. Spin rotation and depolarization of high-energy particles in crystals at LHC and FCC energies. The possibility to measure the anomalous magnetic moments of short-lived particles and quadrupole moment of  $\Omega$ -hyperon. *Phys. Lett. B.* 2017. Vol. 402. P. 5–10.
370. Fomin A. S., et al. Feasibility of measuring the magnetic dipole moments of the charm baryons at the LHC using bent crystals. *JHEP.* 2017. Vol. 08. P. 120.
371. Андреев В. А., и др. Пространственная фокусировка 1 ГэВ-ных протонов изогнутым монокристаллом. *Письма ЖЭТФ.* 1985. Vol. 41. P. 408–410.
372. Denisov A. S., et al. First results from a study of a 70 GeV proton beam being focused by a bent crystal. *NIM B.* 1992. Vol. 69. P. 382–384.
373. Scandale W., et al. Observation of focusing of 400 GeV proton beam with the help of bent crystals. *Phys. Lett. B.* 2014. Vol. 733. P. 366–372.
374. Korol A. V., Solov'yov A. V., Greiner W. Channeling and radiation in periodically bent crystals. Berlin: Springer, 2013. 268 p.

375. Scandale W., et al. Observation of channeling for 6500 gev protons in the crystal assisted collimation setup for LHC. *Physics Letters B*. 2016. Vol. 758. P. 129–133.
376. Hadjidakis C., et al. A fixed-target programme at the LHC: Physics case and projected performances for heavy-ion, hadron, spin and astroparticle studies. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1807.00603>.
377. Smulders P. J. M., Boerma D. O. Computer simulation of channeling in single crystals. *NIM B*. 1987. Vol. 29. P. 471–489.
378. Biryukov V. Computer simulation of beam steering by crystal channeling. *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 3522–3528.
379. Bagli E., Guidi V. Dynecharm++: A toolkit to simulate coherent interactions of high-energy charged particles in complex structures. *NIM B*. 2013. Vol. 309. P. 124–129.
380. Schoofs P., et al. Monte Carlo modeling of crystal channeling at high energies. *NIM B*. 2013. Vol. 309. P. 115–119.
381. Abdrashitov S. V., Bogdanov O. V., Korotchenko K. B., Pivovarov Y. L., Rozhnova E. I., Tukhfatullin T. A., Eikhorn Y. L. BCM-2.0 – The new version of computer code “Basic channeling with Mathematica”. *NIM B*. 2017. Vol. 402. P. 106–111.
382. O’Connor D. J., Biersack J. P. Comparison of theoretical and empirical interatomic potentials. *NIM B*. 1986. Vol. 15. P. 14–19.
383. Andersen H., Bøttiger J., Knudsen H. Scattering of light ions in the weakly screened Coulomb field of gold nuclei. *Phys Rev. A*. 1973. Vol. 7. P. 154–159.
384. Scandale W., et al. Mirroring of 400 GeV protons by an ultra-thin straight crystal. *Phys. Lett. B*. 2014. Vol. 734. P. 1–6.
385. Scandale W., Taratin A. M. About multiple scattering of high energy protons in crystal deflectors. *NIM B*. 2015. Vol. 335. P. 351–355.
386. Biryukov V. M., et al. Investigation of rechanneling and dynamic equilibrium effects in crystals. *NIM B*. 1993. Vol. 73. P. 153–158.

387. Scandale W., et al. Observation of multiple volume reflection of ultrarelativistic protons by a sequence of several bent silicon crystals. *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 0848013.
388. Greenenko A. A., Chechkin A. V., Shul'ga N. F. Anomalous diffusion and Levy flights in channeling. *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 324. P. 82–85.
389. Войналович О., Моргунюк В. Російсько-український словник наукової і технічної мови. К.: Вирій, Сталкер, 1997. 256 с.
390. Ситенко О. Г. Теорія розсіяння. К.: Либідь, 1993. 335 с.
391. Bohr N. The penetration of atomic particles through matter. *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 1948. Vol. 18. P. 1–144.
392. Lindhard J., Nielsen V., Scharff M. Approximation method in classical scattering by screened Coulomb fields. *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 1968. Vol. 38. P. 1–32.
393. Meyer L. Plural and multiple scattering of low-energy heavy particles in solids. *Phys. Stat. Sol.* 1971. Vol. 44. P. 253–268.
394. Simon W. G. Verification of Molière's theory of multiple scattering for heavy ions. *Phys. Rev.* 1964. Vol. 136. P. B410–B415.
395. Kopeliovich B. Z., Tarasov A. V., Voskresenskaya O. O. Long-range Coulomb forces in DIS: Missed radiative corrections?. *Eur. Phys. J. A.* 2001. Vol. 11. P. 345–356.
396. Kuraev E., Voskresenskaya O., Tarasov A. Coulomb corrections to the parameters of the Molière multiple scattering theory. *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 89. P. 116016(9).
397. Voskresenskaya O., Kuraev E., Torosyan H. Coulomb corrections to the parameters of the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect theory. *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2014. Vol. 11. P. 366–380.
398. Бедняков А. А. О мольеровской теории многократного рассеяния заряженных частиц (1947-1948 гг.) и ее критике в последующие годы. *ЭЧАЯ.* 2004. Vol. 45. P. 1787–1802.

399. Wiedemann U. A., Heinz U. Particle interferometry for relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rep.* 1999. Vol. 319. P. 145–230.
400. Benhar O., Day D., Sick I. Inclusive quasielastic electron-nucleus scattering. *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. P. 189–224.
401. Крачков П. А., Ли Р. Н., Мильштейн А. И. Процессы квантовой электродинамики при взаимодействии частиц высокой энергии с атомами. *УФН.* 2016. Vol. 186. P. 689–711.
402. Дедков Г. В. Межатомные потенциалы взаимодействия в радиационной физике. *УФН.* 1995. Vol. 165. P. 919–953.
403. Doyle P. A., Turner P. S. Relativistic Hartree-Fock X-ray and electron scattering factors. *Acta Crystallographica A.* 1968. Vol. 24. P. 390–397.
404. Hautala M., Luomajärvi M. Correction of the Rutherford scattering cross section in the backscattering analysis. *Rad. Eff.* 1980. Vol. 45. P. 159–162.
405. Geiger H., Marsden E. On a diffuse reflection of the  $\alpha$ -particles. *Proc. Roy. Soc.* 1909. Vol. 82. P. 495–511.
406. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории многих частиц в статистической физике. М.: ОГИЗ. Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1946. 120 с.
407. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and stability. Stable distributions and their applications. VSP, 1999. 570 p.
408. Bielajew A. Plural and multiple small-angle scattering from a screened Rutherford cross section. *NIM B.* 1994. Vol. 86. P. 257–269.
409. Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Critical properties of  $\phi^4$ -theories. Singapore: World Scientific, 2001. 512 p.
410. Gribov L. V., Levin E. M., Ryskin M. G. Semihard processes in QCD. *Phys. Rep.* 1983. Vol. 100. P. 1–150.
411. Berger N., et al. Multiple Coulomb scattering in thin silicon. *JINST.* 2014. Vol. 9. P. P07007.
412. Arleo F., Brodsky S. J., Hwang D. S., Sickles A. M. Higher-twist dynamics in large transverse momentum hadron production. *Phys. Rev. Lett.* 2010.

Vol. 105. P. 062002.

413. Ishiwari R., Shiomi N., Sakamoto N. Geometrical effect on the measurement of stopping power: Angle-dependent energy loss of 7-MeV protons in metallic and organic thin foils. *Phys. Rev. A*. 1982. Vol. 25. P. 2524–2528.
414. Sakamoto N., Shiomi N., Ishiwari R. Geometrical effect on the measurement of stopping power: Angle-dependent energy loss of 7-MeV protons in Cu foils and computer simulation. *Phys. Rev. A*. 1983. Vol. 27. P. 810–815.
415. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 1977. 742 с.
416. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 256 с.
417. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1972. 1054 p.
418. Andrews G. E., Askey R., Roy R. Special functions. Cambridge: Univ. Press, 1999. 681 p.
419. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. М. Распространение узкого модулированного пучка света в рассеивающей среде с учетом флуктуации путей фотонов при многократном рассеянии. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1982. Vol. 24.8. P. 891–898.
420. Померанчук И. Я. О флуктуациях ионизационных пробегов. *ЖЭТФ*. 1948. Vol. 18. P. 759.
421. Firsov O. V. The effect of crystal atomic chain discontinuity upon channeling. *Rad. Eff.* 1974. Vol. 21. P. 265–261.
422. Калашников Н. П., Коптелов Э. А., Рязанов М. И. Упругое рассеяние быстрых заряженных частиц в монокристалле. *ЖЭТФ*. 1972. Vol. 63. P. 1107–1114.
423. Kitagawa M., Ohtsuki Y. H. Modified dechanneling theory and diffusion coefficients. *Phys. Rev. B*. 1973. Vol. 8. P. 3117–3123.

424. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I. Orientation effects in the incoherent bremsstrahlung by high energy particles in a crystal. *NIM B*.
425. Bondarenko A. A., Shul'ga N. F. The Gauss theorem in potential scattering theory and semi-classical corrections to the eikonal scattering amplitude. *Phys. Lett. B*. 1999. Vol. 427. P. 114–117.
426. Olver F. W. J. Asymptotics and special functions. New York: Academic Press, 1974. 584 p.
427. Kumakhov M. A., Wedell R. A theory of resonance dechannelling. *Phys. Stat. Sol. (b)*. 1976. Vol. 76. P. 119–131.
428. Кумахов М. А., Ширмер Г. Атомные столкновения в кристаллах. М.: Атомиздат, 1980. 192 с.
429. Bogdanov O. V., Pivovarov Y. L., Takabayashi Y., Tukhfatullin T. A. Peculiarities of angular distribution of electrons at Si  $\langle 100 \rangle$  channeling. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2012. Vol. 357. P. 012030.
430. Zhang X. Analytically solving the Fokker-Planck equation for the statistical characterization of the phase noise in envelope detection. *J. Light. Techn.* 1995. Vol. 13. P. 1787–1794.
431. McLahlan N. Theory and application of Mathieu functions. New York: Dover, 1951.
432. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физ. Мат. Лит., 1963. 410 с.
433. Zeiner C. H., et al. Mathieu functions for purely imaginary parameters. *J. Comp. Appl. Math.* 2012. Vol. 236. P. 4513–4524.
434. Home D., Whitaker M. A. B. A conceptual analysis of quantum Zeno paradox, measurement, and experiment. *Ann. Phys.* 1997. Vol. 258. P. 237–285.
435. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Mod. Phys.* 1943. Vol. 15. P. 1–89.



436. Kampen N. V. Elimination of fast variables. *Phys. Rep.* 1985. Vol. 124. P. 69–160.
437. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
438. Beloshitsky V. V., Kumakhov M. A., Muralev V. A. Multiple scattering of channeled ions in crystals. *Rad. Eff.* 1972. Vol. 13. P. 9–22.
439. Белошицкий В. В., Кумахов М. А. Многократное рассеяние каналированных ионов в кристалле. *ЖЭТФ*. 1972. Vol. 62. P. 1142–1155.
440. Gardiner C. W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. Springer, 2004.
441. Wang M. C., Uhlenbeck G. E. On the theory of the Brownian motion II. *Rev. Mod. Phys.* 1945. Vol. 17. P. 323–342.
442. Kumakhov M. A. The theory of channelling at small depths. *Rad. Eff.* 1975. Vol. 26. P. 43–48.
443. Datz S., et al. Potential energy and differential stopping power functions from energy loss spectra of fast ions channeled in Au. *Phys. Rev.* 1969. Vol. 179. P. 315–326.
444. Abel F., Amsel G., Bruneaux M., Cohen C., L’Hoir A. Backscattering study and theoretical investigation of planar channeling. I. Experimental results. *Phys. Rev. B.* 1975. Vol. 12. P. 4617–4627.
445. Sytov A. I., et al. Planar channeling and quasichanneling oscillations in a bent crystal. *Eur. Phys. J. C.* 2016. Vol. 76. P. 77.
446. Shul’ga N. F., Kirillin I. V., Truten’ V. I. Dynamical chaos and stochastic mechanism of high-energy negatively charged particle deflection by bent crystals. *Phys. Lett. B.* 2011. Vol. 702. P. 100–104.
447. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
448. Baker G. L., Gollub J. P. Chaotic dynamics: An introduction. Cambridge: Univ. Press, 1996. 256 p.
449. Taylor J. R. Classical mechanics. University Science Books, 2005. 786 p.

450. Maisheev V. A. Volume reflection of ultrarelativistic particles in single crystals. *Phys. Rev. ST – Accel. Beams*. 2007. Vol. 10. P. 084701(11).
451. Bellucci S., Chesnokov Y. A., Maisheev V. A., Yazynin I. A. Volume reflection and volume capture of ultrarelativistic particles in bent single crystals. *Phys. Rev. ST – Accel. Beams*. 2015. Vol. 18. P. 114701.
452. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. Reaction-rate theory: Fifty years after Kramers. *Rev. Mod. Phys.* 1990. Vol. 62. P. 251–342.
453. Mel’nikov V. I. The Kramers problem: Fifty years of development. *Phys. Rep.* 1991. Vol. 209, No. 1–2. P. 1–71.
454. Reimann P., et al. Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling. *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. P. 031104.
455. Байер В. Н., Катков В. М. Квазиклассическая теория тормозного излучения релятивистскими частицами. *ЖЭТФ*. 1968. Vol. 55. P. 1542.
456. Cheng H., Wu T. T. High-energy production processes in quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*. 1970. Vol. 1. P. 456–458.
457. Bjorken J. D., Kogut J. B., Soper D. E. Quantum electrodynamics at infinite momentum – scattering from an external field. *Phys. Rev. D*. 1971. Vol. 3. P. 1382–1399.
458. Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е. Излучение электромагнитных волн при плавном изменении параметров излучающей системы. *УФН*. 1982. Vol. 136. P. 501–517.
459. Weinberg S. The quantum theory of fields. Cambridge Univ. Press, 1995. 635 p.
460. Cheng H., Wu T. T. Expanding protons: Scattering at high-energies. Cambridge-MA: MIT Press, 1987.
461. Greiner W., Reinhardt J. Quantum electrodynamics, 3rd ed. Berlin: Springer, 2003. 476 p.
462. Heitler W. The quantum theory of radiation. London: Oxford Univ. Press, 1954. 430 p.

463. Budnev V. M., Ginzburg I. F., Meledin G. V., Serbo V. G. The two-photon particle production mechanism. *Phys. Rep.* 1975. Vol. 15. P. 181–282.
464. Bertulani C. A., Baur G. Electromagnetic processes in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rep.* 1988. Vol. 163. P. 299–408.
465. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Стереографическая проекция. М.: Мир, 1973. 48 с.
466. Gluckstern R. L., Hull M. H., Breit G. Polarization of bremsstrahlung radiation. *Phys. Rev.* 1953. Vol. 90. P. 1026–1029.
467. Olsen H., Maximon L. C. Photon and electron polarization in high-energy bremsstrahlung and pair production with screening. *Phys. Rev.* 1959. Vol. 114. P. 887–904.
468. Dokshitzer Y., Khoze V. A., Mueller A. H., Troyan S. I. Basics of perturbative QCD. Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres, 1991. 276 p.
469. Грибов В. Н., Липатов Л. Н. Глубоко неупругое  $ep$ -рассеяние в теории возмущений. *Ядерная физика.* 1972. Vol. 15. P. 781–807.
470. Low F. E. Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions. *Phys. Rev.* 1958. Vol. 110. P. 974–977.
471. Liou M. K. Soft-photon expansion and soft-photon theorem. *Phys. Rev. D.* 1978. Vol. 18. P. 3390–3402.
472. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. 392 с.
473. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. Semiclassical theory of high-energy particle radiation in external fields. *Phys. Rep.* 1993. Vol. 234. P. 297–365.
474. Blankenbecler R., Drell S. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for finite targets. *Phys. Rev. D.* 1996. Vol. 53. P. 6265–6281.
475. Rabenstein A. Asymptotic solutions of  $u^{(4)} + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$  for large  $|\lambda|$ . *Arch. Rational Mech. Anal.* 1958. Vol. 1. P. 418–435.
476. Artru X. Impact parameter profile of synchrotron radiation. *NATO Science Series.* 2006. Vol. 199. P. 387–398.

477. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф. К теории излучения релятивистскими частицами в аморфных и кристаллических средах. *ЖЭТФ*. 1985. Vol. 89. P. 763–780.
478. Барышевский В. Г., Тихомиров В. В. Роль некогерентного рассеяния в радиационных процессах при малых углах падения частиц на кристаллические оси и плоскости. *ЖЭТФ*. 1986. Vol. 90. P. 1908–1921.
479. Рязанов М. И. Электродинамика конденсированного вещества. М.: Наука, 1984. 304 с.
480. Bell J. Bremsstrahlung from multiple scattering. *Nucl. Phys. B*. 1958. Vol. 8. P. 613–620.
481. Kopeliovich B. Z., Schäfer A., Tarasov A. V. Bremsstrahlung of a quark propagating through a nucleus. *Phys. Rev. C*. 1999. Vol. 59. P. 1609–1619.
482. Levey L., Felsen L. B. On incomplete Airy functions and their application to diffraction problems. *Radio Science*. 1969. Vol. 4. P. 959–969.
483. Titov A., Yarov A. The “self-diffraction” of synchrotron radiation by the edge of a magnetic field. *NIM A*. 1991. Vol. 308. P. 117–119.
484. Takabayashi Y., Bagrov V. G., Bogdanov O. V., Pivovarov Y. L., Tukhfatullin T. A. Angular distributions of relativistic electrons under channeling in half-wavelength crystal and corresponding radiation. *NIM B*. 2015. Vol. 355. P. 188–192.
485. Joachain C. J., Quigg C. Multiple scattering expansions in several particle dynamics. *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 279–324.
486. Dalitz R. On higher Born approximations in potential scattering. *Proc. Roy. Soc. A*. 1951. Vol. 206. P. 509–520.
487. Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* 1974. Vol. 46. P. 279–324.
488. Фейнберг Е. Л. Об «особой роли» электромагнитных потенциалов в квантовой механике. *УФН*. 1962. Vol. 78. P. 53–64.
489. Калашников Н. П., Стриханов М. Н. Теория дифракционного рассеяния быстрых положительно заряженных частиц в монокристалле.

*ЖЭТФ*. 1975. Vol. 69. P. 1253–1262.

490. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 790 с.
491. Artru X. Correlations in thermal vibrations of crystal atoms. Effect on dechanneling and bremsstrahlung. *NIM B*. 2017. Vol. 402. P. 21–23.
492. Batterman B. W., Chipman D. R. Vibrational amplitudes in germanium and silicon. *Phys. Rev.* 1962. Vol. 127. P. 690–693.
493. Spackman M. A. The electron distribution in silicon. A comparison between experiment and theory. *Acta Cryst. A*. 1986. Vol. 42. P. 271–281.
494. Zhang B., et al. Temperature factor of silicon by powder neutron diffraction. *Acta Cryst. A*. 1990. Vol. 46. P. 435–437.
495. Barrett J. H. Monte Carlo channeling calculations. *Phys. Rev. B*. 1971. Vol. 3. P. 1527–1547.
496. Kim D. S., Smith H. L., Niedziela J. L., Li C. W., Abernathy D. L., Fultz B. Phonon anharmonicity in silicon from 100 to 1500 K. *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91. P. 014307.
497. Appleton B. R., Erginsoy C., Gibson W. M. Channeling effects in the energy loss of 3–11-MeV protons in silicon and germanium single crystals. *Phys. Rev.* 1967. Vol. 161. P. 330–349.
498. Bellucci S., Maisheev V. A. Volume reflection and channeling of ultrarelativistic protons in germanium bent single crystals. *Phys. Rev. ST – Accel. Beams*. 2016. Vol. 19. P. 121004.
499. Apostol T. M. Introduction to analytic number theory. New York: Springer, 1976. 350 p.

Додаток А

## ВЛАСТИВОСТІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЕКСПОНЕНЦІЙНО ЕКРАНОВАНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

В цьому додатку ми детальніше дослідимо наслідки, які витікають з припущення про експоненційне екранування атома на великих відстанях. Для цього ми розглянемо найпростішу (борівську [391]) модель

$$g(r) = e^{-\mu r}. \quad (\text{A.1})$$

Класичний переданий імпульс (2.2) як функція прицільного параметра для такого потенціалу дорівнює

$$\vec{q}(\vec{b}) = \frac{2\alpha\mu}{v} \frac{\vec{b}}{b} K_1(\mu b), \quad (\text{A.2})$$

звідки диференціальний переріз класичного розсіяння

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}}{d^2q} = \frac{vb}{|\alpha|\mu^2q[K_0(\mu b) + K_2(\mu b)]}, \quad (\text{A.3})$$

а відношення (2.6) можна виразити виключно через  $\mu b$ :

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}/d^2q}{d\sigma_{\text{Ruth}}/d^2q} = \frac{2\mu b K_1^3(\mu b)}{K_0(\mu b) + K_2(\mu b)}. \quad (\text{A.4})$$

Проте, з фізичного погляду важливіші висновки можна зробити для такого потенціалу у квантовому випадку.

### А.1. Ейкональний борнівський ряд

Для розсіювання ультрарелятивістських ( $v \approx c$ ) однозарядних частинок (електронів або протонів) в речовині з помірною кількістю  $Z$  протонів на атомне ядро, такий як кремній або вуглець, параметр  $\alpha/\hbar v$  є достатньо малим, що дозволяє розкласти ейкональний фазовий множник в ступінний

ряд [485]:

$$a = \frac{1}{\hbar} \int_0^\infty db b J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) \left[ -\frac{1}{\hbar} \chi_0(b) - \frac{i}{2\hbar^2} \chi_0^2(b) + \frac{1}{6\hbar^3} \chi_0^3(b) + \dots \right]. \quad (\text{A.5})$$

Підставляючи сюди  $\chi_0(b)$  з рівняння (A.13) та беручи інтеграли, отримуємо:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{\hbar} \int_0^\infty db b J_0 \left( \frac{qb}{\hbar} \right) \left[ \frac{\alpha}{\hbar v} K_0(\mu b) - \frac{i\alpha^2}{\hbar^2 v^2} K_0^2(\mu b) - \frac{2}{3} \frac{\alpha^3}{\hbar^3 v^3} K_0^3(\mu b) + \dots \right] \\ &= \frac{2\alpha}{v} \frac{1}{q^2 + \hbar^2 \mu^2} - \frac{4i\alpha^2}{\hbar v^2} \frac{\operatorname{arsinh} \frac{q}{2\hbar\mu}}{q \sqrt{q^2 + 4\hbar^2 \mu^2}} \\ &\quad - \frac{8}{3} \frac{\alpha^3}{\hbar^4 v^3 \mu^2} \int_0^\infty ds \frac{\operatorname{arsinh} \frac{s}{2}}{\sqrt{(s^2 + 4) \left[ \left( s - \frac{q}{\hbar\mu} \right)^2 + 1 \right] \left[ \left( s + \frac{q}{\hbar\mu} \right)^2 + 1 \right]}} + \dots \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Тут другий доданок борнівського розкладення фактично збігається з результатом Даліца [486], внески ж вищих порядків не виражаються в елементарних функціях. Оскільки внески першого та другого порядку в (A.6) мають фазовий зсув  $\pi/2$ , друга борнівська поправка до диференціального перерізу дорівнює нулю<sup>1</sup>:  $\frac{d\sigma}{d^2q} \simeq \frac{d\sigma_{\text{Born}}}{d^2q} \left\{ 1 + \mathcal{O} \left[ (\alpha/\hbar v)^2 \right] \right\}$ , а третя борнівська поправка дає

$$\hbar^2 \mu^4 \frac{d\sigma}{d^2q} = \left( \frac{2\alpha}{\hbar v} \right)^2 f_1 \left( \frac{q}{\hbar\mu} \right) + \left( \frac{2\alpha}{\hbar v} \right)^4 f_3 \left( \frac{q}{\hbar\mu} \right), \quad (\text{A.7})$$

де

$$f_1(Q) = \frac{1}{(1 + Q^2)^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} f_3(Q) &= \frac{\operatorname{arsinh}^2 \frac{Q}{2}}{Q^2 (Q^2 + 4)} \\ &\quad - \frac{2}{3 (Q^2 + 1)} \int_0^\infty ds \frac{\operatorname{arsinh} \frac{s}{2}}{\sqrt{(s^2 + 4) \left[ (s - Q)^2 + 1 \right] \left[ (s + Q)^2 + 1 \right]}}. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Коли енергія  $\epsilon$  не дуже високою, кути розсіяння не є малими, другий борнівський доданок в амплітуді містить як реальну, так і уявну частини, і тоді його інтерференція з першим борнівським доданком не зникає. Тут ми обмежуємося виключно апроксимацією малого кута.

Остання «тіньова» поправка виявляється скрізь від'ємною (див. Рис. А.1), з  $f_3(0) = -\frac{\pi^2}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18}\psi'(2/3) = -0.133$ , і зменшується при великих  $Q$  за абсолютною величиною швидше, ніж диференціальний переріз Резерфорда:

$$f_3(Q) \underset{Q \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{2}{Q^6} \ln Q$$

[порівн. з Рівн. (2.18)].

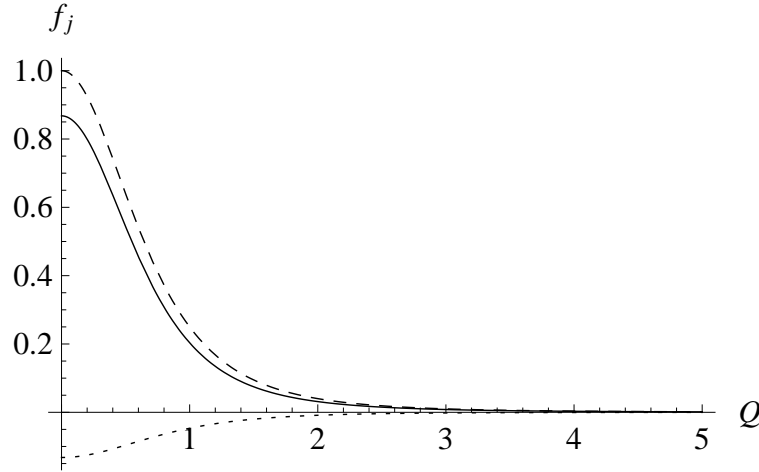


Рис. А.1. Штрихова крива,  $f_1(Q)$ , Рівн. (А.8). Точкова крива,  $f_3(Q)$ , Рівн. (А.9). Суцільна крива,  $f_1 + f_3$ .

## А.2. Повний переріз

Рівняння (2.11) дозволяє виразити у загальному вигляді також повний переріз розсіяння

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d^2q \left| \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2b e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{b}} \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar}\chi_0(\vec{b})} \right] \right|^2 \\ &= \int d^2b \left| 1 - e^{\frac{i}{\hbar}\chi_0(\vec{b})} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{А.10а})$$

$$\equiv 2\Re \int d^2b \left[ 1 - e^{\frac{i}{\hbar}\chi_0(\vec{b})} \right] = -4\pi\hbar \Im \alpha(0). \quad (\text{А.10б})$$

Останнє співвідношення між повним перерізом та уявною частиною амплітуди розсіяння вперед відоме як оптична теорема.

Крім того, можна побачити, що рівняння (А.10а) у формі

$$\sigma = \int d^2b w(\vec{b}), \quad w(\vec{b}) = \left| 1 - e^{\frac{i}{\hbar}\chi_0(\vec{b})} \right|^2$$



виражає умовну ймовірність розсіяння при певному значенні прицільного параметра  $\vec{b}$ , який зберігається при високій енергії. У борнівському наближенні вона дорівнює

$$w(\vec{b}) = \left| \frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{b}, z) \right|^2,$$

означаючи, що ймовірність розсіяння виражається безпосередньо через потенціал зовнішнього поля, а не через його градієнт, який представляє силу. Це можна інтерпретувати як аналог ефекту Ааронова-Бома [487] в електростатичному полі (див. обговорення в [488]), і вказує на те, що в квантовій механіці безпосередньо спостережуваним є потенціал поля, а не лише його градієнт, який визначає напруженість.<sup>2</sup>

Щоб оцінити вищі доданки борнівського ряду, ми розкладаємо

$$w(b) = 2 \left( 1 - \cos \frac{\chi_0}{\hbar} \right) = \frac{\chi_0^2(b)}{\hbar^2} - \frac{\chi_0^4(b)}{12\hbar^4} + \dots,$$

і для експоненційно екранованого потенціалу можна обчислити члени розкладення повного перерізу:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^{\infty} db b \left[ \left( \frac{2\alpha}{\hbar v} \right)^2 K_0^2(\mu b) - \frac{1}{12} \left( \frac{2\alpha}{\hbar v} \right)^4 K_0^4(\mu b) + \dots \right] \\ &= \mu^{-2} \left\{ 4\pi \left( \frac{\alpha}{\hbar v} \right)^2 - \frac{7\pi\zeta(3)}{3} \left( \frac{\alpha}{\hbar v} \right)^4 + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{\alpha}{\hbar v} \right)^6 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

де чисельне значення дзета-функції Рімана  $\zeta(3) \approx 1.20$ . Як видно з Рис. А.2, третє борнівське наближення можна застосовувати при  $\frac{\alpha}{\hbar v} \lesssim \frac{1}{2}$ . За цієї умови, загальний переріз  $\sigma \lesssim \pi\mu^{-2}$ .

<sup>2</sup>Дійсно, можна уявити собі ситуацію, коли швидка квантова частинка розсіюється на потенціалі, який дорівнює ненульовій константі всередині обмеженої просторової області, та нулю за її межами. Тоді електричне поле зосереджене лише на кордоні такої області, який має міру нуль. Проте, повний переріз розсіяння на такому потенціалі пропорційний площі поперечної проекції всієї області, в якій зосереджений потенціал.

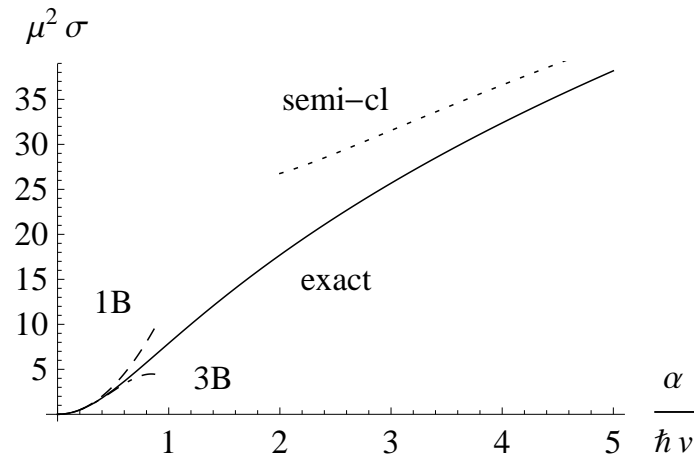


Рис. А.2. Повний переріз розсіювання заряджених частинок на атомі (суцільна крива), обчислений за Рівн. (2.11), (А.14). Пунктирна крива — оцінка за формулою (А.19). Штрихова крива — перше борнівське наближення, штрих-пунктирна крива враховує друге борнівське наближення, Рівн. (А.11).

### А.3. Дифракційне розсіювання

У протилежному ліміті малих  $q$  (великих  $b$ ), можна апроксимувати в (2.2), (2.3)  $K_0(\mu b) \simeq K_1(\mu b) \simeq K_2(\mu b) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\mu b}} e^{-\mu b}$ , з урахуванням чого

$$\frac{d\sigma_{\text{cl}}}{d^2q} \underset{q \rightarrow 0}{\simeq} \frac{b(q)}{\mu q^2} \simeq \frac{1}{\mu^2 q^2} \left[ \ln \frac{|\alpha|\mu}{vq} + \mathcal{O}\left(\ln \ln \frac{\alpha\mu}{vq}\right) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Це показує, що класичний диференціальний переріз розсіювання зростає в напрямку вперед  $q \rightarrow 0$ . Відповідний повний переріз

$$\sigma_{\text{cl}} = \int d^2q \frac{d\sigma_{\text{cl}}}{d^2q} \sim \frac{\pi}{\mu^2} \int \frac{dq}{q} \ln \frac{|\alpha|\mu}{vq}$$

розходиться на нижній межі двічі логарифмічно. Така швидкість розбіжності властива для експоненційного зменшення потенціалу розсіювання на великих відстанях та двовимірного простору прицільних параметрів [460].

Підставляючи сюди потенціал (2.1), можна отримати

$$\chi_0(\vec{b}) = -\frac{2\alpha}{v} K_0(\mu b). \quad (\text{A.13})$$

За наявності осової симетрії задачі, рівняння (2.11) переписується як

$$\begin{aligned} a &= -\frac{i}{q} \int_0^\infty db b J_1\left(\frac{qb}{\hbar}\right) \frac{d}{db} e^{\frac{i}{\hbar} \chi_0(b)} \\ &= \frac{2\alpha \mu}{\hbar v q} \int_0^\infty db b J_1\left(\frac{qb}{\hbar}\right) K_1(\mu b) e^{-\frac{2i\alpha}{\hbar v} K_0(\mu b)}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

При малих  $q$  диференціальний переріз відрізняється від класичного рівняння (A.12) навіть при  $\alpha/\hbar v \gg 1$  (зокрема, у ліміті розсіювання вперед він залишається обмеженим). Для розгляду квазікласичного ліміту розсіювання при великих але скінченних  $\alpha/\hbar v$  можна обмежитися логарифмічною точністю. При цьому можна застосувати асимптотику великих  $b$  для функцій Макдональда у квантовій амплітуді розсіювання:

$$a \xrightarrow{\alpha/\hbar v \rightarrow \infty} \frac{\alpha \mu}{\hbar v q} \int_0^\infty db b J_1\left(\frac{qb}{\hbar}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b - \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b}}. \quad (\text{A.15})$$

Показник експоненти тут містить великий параметр. Множник  $\sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b - \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b}}$  має максимум на шляху інтегрування (насправді, сідлова точка знаходиться в площині комплексних  $b$ ) при

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\mu b)} \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b} \right) - \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b} \right] \\ \simeq \left( 1 - \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b} \right) \frac{\partial}{\partial(\mu b)} \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b} \right) = 0, \end{aligned}$$

тобто,

$$\frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b} = 1,$$

що приводить до приблизного розв'язку

$$\mu b_0 = \ln \left( \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}} \right) \simeq \ln \left( \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\ln i \frac{\alpha}{\hbar v}}} \right). \quad (\text{A.16})$$

Проте, було б невірно оцінювати інтеграл (A.15) методом сідлової точки, як це робилося в [422], тому що функція  $e^{-\frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b}} e^{-\mu b}}$ , яка включає великий параметр, має велику крутизну лише з боку низьких  $\mu b$ , тоді як при  $\mu b \rightarrow \infty$  вона прямує до постійного значення, а убуття забезпечується помірно швидко спадаючим множником  $e^{-\mu b}$ . Тим не менш, в межах

знайденого максимуму (A.16), який розташований при відносно великих  $\mu b$  і має ширину  $\mu\Delta b \sim 1$ , припустимо замінити аргументи деяких функцій в підінтегранній функції на  $b_0$ . Ми можемо зробити це в  $J_1\left(\frac{qb}{\hbar}\right)$  в області порівняно невеликих  $q$ , де розташований квазікласичний пік, і в множниках  $\sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}}$ , тощо. Інтеграл

$$a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} -\frac{i\mu}{q} J_1\left(\frac{qb_0}{\hbar}\right) \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}} \int_{-\infty}^{\infty} db b e^{-\mu b - \frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}} e^{-\mu b}}, \quad (\text{A.17})$$

де ми також змінили нижній ліміт інтегрування на  $-\infty$ , внаслідок швидкого зменшення, яке має місце завдяки  $e^{-\frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}} e^{-\mu b}}$  при від'ємних  $b$ , зводиться до

$$a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} -\frac{i}{\mu q} \left[ \gamma_E + \ln\left(\frac{i\alpha}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}}\right) \right] J_1\left(\frac{qb_0}{\hbar}\right). \quad (\text{A.18})$$

Функція Бесселя породжує вторинні максимуми в диференціальному перерізі.

Відповідний повний переріз обчислюється як

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d^2q \frac{d\sigma}{d^2q} = -4\pi\hbar \text{Im} a(q=0) \\ &\underset{\alpha/\hbar v \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{2\pi}{\mu^2} \ln\left(\frac{|\alpha|}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}}\right) \left[ \gamma_E + \ln\left(\frac{|\alpha|}{\hbar v} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu b_0}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

В принципі, цей вираз зростає зі зростанням кулонівського параметра двічі логарифмічно. У першому логарифмічному наближенні вираз (A.19) збігається з результатом [422], який було отримано методом стаціонарної фази. Як видно з рисунку A.2, загальний переріз у одиницях квадрата радіуса екранування  $\mu^{-2}$  може бути доволі великим. У конденсованій речовині, звичайно, таке зростання має бути обмеженим [489], а загальний переріз розсіяння повинен просто наближатися до площі кристалу.

Порівняння (A.19) з класичним виразом (A.12) показує, що останній порушується при  $q \lesssim \hbar\mu\sqrt{\ln\frac{\alpha}{\hbar v}}$ .

## Додаток Б

## НЕПЕРЕРВНИЙ ПОТЕНЦІАЛ КРИСТАЛА КРЕМНІЮ В ПЛОЩИННІЙ ОРІЄНТАЦІЇ (110)

Для задач проходження швидких заряджених частинок крізь орієнтовані кристали потенціал ланцюжка (струни) або площини, усереднений вздовж поздовжнього напрямку, є таким самим фундаментальним поняттям, як і одноатомний потенціал в аморфній речовині. Якщо, як часто робиться, знехтувати перерозподілом електронної густини при об'єднанні атомів у кристалічну ґратку (див., однак, Рис. Б.1б), неперервний потенціал кристала виражається просто через інтеграл по одній або двом декартовим координатам від суми сферично симетричних потенціалів складових атомів. Для площинної орієнтації, на розгляді якої ми тут зосередимось, неперервний потенціал окремої *статичної* площини (індекс  $PS$ ) виражається як

$$V_{PS}(x) = n_s \iint dydz V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad (\text{Б.1})$$

$$V_{PS}(0) = 2\pi n_s \int_0^\infty dr r V(r) = 2\pi Z_1 Z_2 e^2 n_s \int_0^\infty dr g(r), \quad (\text{Б.2})$$

де  $n_s$  – щільність атомів у площині, а міжплощинний потенціал кристала вибирається або у вигляді суми потенціалів сусідніх площин [306],

$$V(x) = V_{PS}(x) + V_{PS}(x - d) - 2V_{PS}(d/2), \quad (\text{Б.3})$$

або як сума по всіх площинах

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V_{PS}(x - nd) - V_{PS}[(n + 1/2)d]\}. \quad (\text{Б.4})$$

Різниця між цими двома визначеннями невелика, з огляду на те, що на двох міжплощинних відстанях потенціал зменшується в багато разів, але все ж може бути помітною.

В сучасній практиці для каналювання та споріднених застосувань кристалів у фізиці високих енергій зазвичай використовуються монокристали зі структурою алмазу (кремній, германій), які вирощуються з малою мозаїчністю і мають високу міцність, важливу для експлуатації при проходженні – за умов утворення дефектів пучка, нагріву та деформацій. З варіантів площинної орієнтації найчастіше використовуються (110) та (111). В першому випадку всі атомні площини є еквідистантними, в другому – ні.

Як простий і важливий приклад, розглянемо кремній в орієнтації (110). Міжплощинна відстань для нього дорівнює  $d = \frac{a}{2\sqrt{2}} = 1.92 \text{ \AA}$ , щільність атомів в площині становить  $n_s = \frac{8}{a^3}d = 0.096 \text{ \AA}^{-2}$ , де  $a = 5.43 \text{ \AA}$  – стала ґратки, 8 – число атомів в умовній кубічній комірни об'ємом  $a^3$ ,  $a_{TF} = 0.8853a_B Z^{-1/3} = 0.194 \text{ \AA}$  (див. Рис. Б.1а).

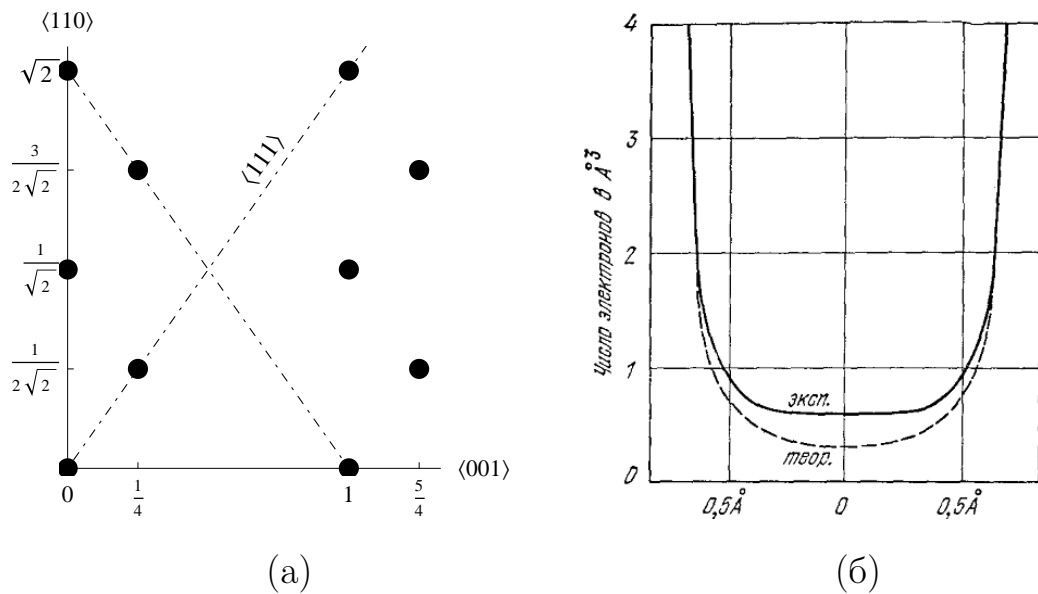


Рис. Б.1. а). Розташування атомів кристала кремнію в площині (110). Площина не є щільно упакованою, як і вся структура алмазу. Довжини вимірюються в одиницях сталої ґратки  $a$ . Диски з радіусом  $a_{TF}/a$  позначають кори атомів. Між найближчими сусідами існує ковалентний зв'язок. б). Електронна густина вздовж лінії ковалентного зв'язку [490]. Суцільна крива побудована на основі спостережуваних характеристик; пунктирна крива – суперпозиція густин заряду, розрахованих для окремих атомів.

Навіть у комп'ютерному моделюванні для пришвидшення процесу обчи-

слення доцільно використовувати відносно прості параметризації потенціалу, які досягаються без істотної втрати точності. Популярним варіантом [306] є параметризація Мольєра для одноатомного потенціалу (див. Розд. 2.1.4), після підстановки якої до (Б.1) можна виконати інтегрування аналітично і отримати неперервний потенціал однієї статичної площини у вигляді

$$V_{PS}(x) = 2\pi n_s Z_1 Z_2 e^2 a_{TF} \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k}{\beta_k} e^{-\frac{\beta_k x}{a_{TF}}}. \quad (\text{Б.5})$$

Тут  $\alpha_k = \{0.35; 0.55; 0.10\}$ ,  $\beta_k = \{0.3; 1.2; 6.0\}$ . Ліндхардом [299] була запропонована ще простіша параметризація, вельми близька до мольєрівської:

$$V_{PS}(x) = 2\pi n_s Z_1 Z_2 e^2 \left\{ \sqrt{x^2 + \frac{1}{3} a_{TF}^2} - |x| \right\}. \quad (\text{Б.6})$$

З фізичного погляду, потрібно ще мати на увазі, що положення атомів в кристалі помітно флюктуують. Це суттєво відображається на неперервному потенціалі при малих  $x$ . Строго кажучи, усереднювати за станами кристала потрібно спостережувані характеристики, такі як вихід частинок. Але це надто трудомістко, і кожний випадок виявляється індивідуальним. Тому зазвичай усереднюють безпосередньо сам потенціал, який є спільним для всіх процесів. При цьому замість формули (Б.1) отримуємо

$$V_P(x) = \frac{1}{N_{pl}} \sum_{n=1}^{N_{pl}} \left\langle V \left( \sqrt{(x - \delta x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2} \right) \right\rangle_T, \quad (\text{Б.7})$$

де  $N_{pl}$  – кількість атомів у площині,  $T$  – температура кристала. При квантовому усередненні, координати атомів, строго кажучи, не можна вважати незалежними. Замість цього миттєвий стан кристала можна представити як статистичну суму по станах з певним числом фононів (тобто, значень енергії кристала як цілого). Але оскільки по станах фононів (зокрема, кутах їх розповсюдження) проводиться інтегрування, кореляція положень атомів має скінченний радіус (порядку однієї або декількох сталих ґратки), і тому для достатньо швидкої частинки, яка проходить вздовж площини

велику відстань без істотної зміни прицільного параметра, можна усереднювати потенціал за незалежними положеннями окремих атомів,<sup>1</sup> тобто використовувати формулу (Б.1) у вигляді

$$V_P(x) = n_s \iint dx dy \left\langle V \left( \sqrt{(x - \delta x)^2 + y^2 + z^2} \right) \right\rangle_T. \quad (\text{Б.8})$$

При кімнатній температурі коливання атомів в міцній кристалічній ґратці ще є відносно малими. Якщо вважати їх гармонічними, можна скористатися тим відомим фактом, що розподіл навіть багатовимірного гармонічного осцилятора по окремій координаті при визначеній температурі є гауссівським як в класичній, так і в квантовій механіці, причому в останній ширина включає також і «нульові» коливання, які не зникають в основному стані. Тому можна усереднити (Б.8) зі звичайним гауссовим розподілом<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & \left\langle V_P \left( \sqrt{(x - \delta x)^2 + y^2 + z^2} \right) \right\rangle_T \\ &= \int \frac{d\delta x}{\sqrt{2\pi \langle (\delta x)^2 \rangle_T}} e^{-\frac{(\delta x)^2}{2\langle (\delta x)^2 \rangle_T}} V_P \left( \sqrt{(x - \delta x)^2 + y^2 + z^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

Наприклад, для потенціалу Мольєра це дає [495]

$$\begin{aligned} \langle V_P(x) \rangle_T &= \pi n_s Z e^2 a_{TF} \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k}{\beta_k} e^{\frac{\beta_k^2 \langle (\delta x)^2 \rangle_T}{2a_{TF}^2}} \\ &\times \left[ e^{\frac{\beta_k x}{a_{TF}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta_k \sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle_T}}{\sqrt{2} a_{TF}} + \frac{x}{\sqrt{2 \langle (\delta x)^2 \rangle_T}} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\beta_k x}{a_{TF}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta_k \sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle_T}}{\sqrt{2} a_{TF}} - \frac{x}{\sqrt{2 \langle (\delta x)^2 \rangle_T}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

а потенціал всього кристала можна представити у вигляді

$$\langle V_P(x) \rangle_T = \langle V_P(x) \rangle_T + \langle V_P(x - d) \rangle_T - 2 \langle V_P(d/2) \rangle_T$$

<sup>1</sup>Можливість порушення цієї умови обговорювалася в [491].

<sup>2</sup>До цього ж зводиться і задача про температурну залежність розсіяння рентгенівських променів та нейтронів в кристалах, в наближенні Дебая-Уоллера. Для експериментального визначення  $\langle (\delta x)^2 \rangle_T$  таким способом, однак, замість монокристалів кремнію використовуються порошки, щоб виключити ефекти динамічної дифракції [492–494].



$$+\pi n_s Z e^2 a_{TF} \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k}{\beta_k} e^{-\frac{\beta_k d}{a_{TF}}} \frac{\left[ \cosh \frac{\beta_k}{a_{TF}} \left( x - \frac{d}{2} \right) - 1 \right]}{\sinh \frac{\beta_k d}{2a_{TF}}}. \quad (\text{Б.11})$$

Щоб розрахувати відповідну ширину і таким чином встановити її залежність від температури, можна представити  $\delta \vec{r}$  як суперпозицію незалежних гармонічних коливань для довільного фононного закону дисперсії:

$$\delta \vec{r}(t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega_\alpha(\lambda, \vec{q})}} \left( a_{\alpha, \lambda, \vec{q}} \vec{e}_{\alpha, \lambda, \vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} - i\omega_\alpha(\lambda, \vec{q})t} + a_{\alpha, \lambda, \vec{q}}^* \vec{e}_{\alpha, \lambda, \vec{q}}^* e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r} + i\omega_\alpha(\lambda, \vec{q})t} \right), \quad (\text{Б.12})$$

де  $M$  – маса атома кремнію,  $N$  – число атомів у кристалі,  $\alpha$  – коливальні моди, тобто акустична та оптична гілки  $\omega_\alpha(\lambda, \vec{q})$ ,  $\lambda$  – індекс стану поляризації (поздовжня або одна з двох поперечних), сумування по  $\vec{q}$  проводиться по першій зоні Бріллюена (примітивній комірці зворотньої ґратки), а амплітуди  $a_{\alpha, \lambda, \vec{q}}$  нормовані так, що класична енергія кожної елементарної хвилі в об'ємі кристала дорівнює своєму квантовому значенню  $\hbar\omega_\alpha(\lambda, \vec{q})$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N M \left( \delta \dot{\vec{r}}_n \right)^2 + E_{pot} = \sum_{n=1}^N M \left( \delta \dot{\vec{r}}_n \right)^2 \\ &= \frac{\hbar}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha, \lambda, \vec{q}} 2a_{\alpha, \lambda, \vec{q}} a_{\alpha, \lambda, \vec{q}}^* \omega_\alpha(\lambda, \vec{q}) = \sum_{\vec{q}} |a_{\alpha, \lambda, \vec{q}}|^2 \hbar\omega_\alpha(\lambda, \vec{q}). \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

З урахуванням можливості існування для квантового осцилятора дискретної послідовності збуджених станів, так нормовані амплітуди коливань стають операторами народження і знищення фононів у фоківському просторі:

$$a_{\alpha, \lambda, \vec{q}} \rightarrow \hat{c}_{\alpha, \lambda, \vec{q}}, \quad a_{\alpha, \lambda, \vec{q}}^* \rightarrow \hat{c}_{\alpha, \lambda, \vec{q}}^+, \quad [\hat{c}_{\alpha, \lambda, \vec{q}}, \hat{c}_{\alpha', \lambda', \vec{q}'}^+] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{q}\vec{q}'}$$

Відповідно, стає оператором і квадрат  $\delta x$ , а його середнє значення є згортокою з матрицею щільності, залежність якої від температури визначається розподілом Гіббса. Використовуючи відомі формули для середніх значень числа фононів у кожній моді,

$$\langle \hat{c}\hat{c} \rangle_T = \langle \hat{c}^+ \hat{c}^+ \rangle_T = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \hat{c}_{\alpha,\lambda,\vec{q}}^+ \hat{c}_{\alpha',\lambda',\vec{q}'} + \hat{c}_{\alpha,\lambda,\vec{q}} \hat{c}_{\alpha',\lambda',\vec{q}'}^+ \right\rangle_T = \left( \frac{1}{2} + \langle n(\omega) \rangle_T \right) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{q}\vec{q}'},$$

де  $\frac{1}{2}$  – нульові коливання (які не зникають навіть при  $T = 0$ ), і

$$\langle n(\omega) \rangle_T = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\hbar\omega/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

– розподіл Планка ( $k_B$  – стала Больцмана), отримуємо

$$\langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_T = \sum_{\alpha,\lambda,\vec{q}} \frac{\hbar}{NM\omega_{\alpha}(\lambda,\vec{q})} \left( \frac{1}{2} + \langle n(\omega) \rangle_T \right), \quad \langle (\delta x)^2 \rangle_T = \frac{1}{3} \langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_T. \quad (\text{Б.14})$$

Присутність  $\omega$  у знаменнику вказує на те, що чим менша частота коливання, тим більший внесок до  $\langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_T$  дає відповідний фонон (а також нульове коливання), і до того ж тим більше відповідне середнє число фононів при заданій температурі. Тому можна сподіватися, що головний внесок тут дають акустичні моди, для яких  $\omega_{\alpha}(\lambda,\vec{q}) \xrightarrow{\vec{q} \rightarrow 0} 0$ .

Для кремнію (як і для більшості твердих тіл, за винятком надтвердих) при кімнатній температурі квантове трактування флуктуацій виявляється вже доволі близьким до класичного. Це означає, що можна застосувати розкладення планківського розподілу в ряд Лорана:

$$\frac{1}{e^{\xi} - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{\xi^{j-1}}{j!},$$

де  $B_j$  – числа Бернуллі ( $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ). Тоді з (Б.14) отримуємо

$$\langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_T \simeq \sum_{\alpha,\lambda,\vec{q}} \frac{\hbar}{NM\omega} \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} + \frac{1}{12} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) = \frac{k_B T}{NM} \sum_{\alpha,\lambda,\vec{q}} \frac{1}{\omega^2} + \frac{\hbar^2}{4Mk_B T}, \quad (\text{Б.15})$$

де в останньому члені була використана тотожність

$$\sum_{\alpha,\vec{q}} 1 = N \quad (\text{Б.16})$$

(виключаючи суму по поляризаціях  $\lambda$ ) для першої зони Бріллюена. Таким чином, головний член тут не містить  $\hbar$  (є суто класичним), і пропорційний температурі з коефіцієнтом, залежним від властивостей кристала. Поправка ж пропорційна  $\hbar^2$ , і не залежить від кристалічної структури. Оскільки

(Б.15) містить лише один феноменологічний параметр, знаючи флуктуацію  $\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_T$  при одній температурі, можна перерахувати її і для іншої:

$$\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{T_2} = \frac{T_2}{T_1} \langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{T_1} + \left(\frac{1}{T_2} - \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\hbar^2}{4Mk_B}, \quad \frac{\hbar^2}{4m_p k_B} = 12 \text{ \AA}^2 \text{ K}.$$

Однак, слід мати на увазі, що при високих температурах коливання перестають бути малими, і з'являються ангармонізми [496].

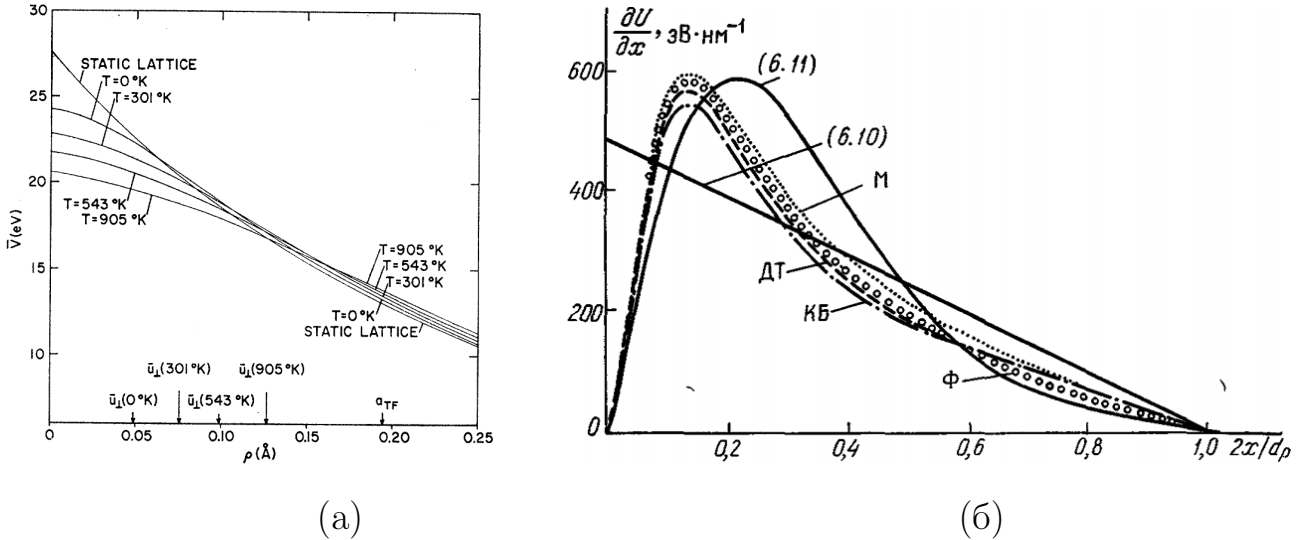


Рис. Б.2. а). Розрахунок залежності неперервного площинного потенціалу кристала кремнію в орієнтації (110) від температури, за формулами (Б.5), (Б.9) [497]. б). Градієнт неперервного потенціалу кремнію (110) у різних моделях [109].

Коефіцієнт при головному члені в формулі (Б.15) є зворотно пропорційним частоті Дебая, в свою чергу пропорційної температурі Дебая,  $\hbar\omega_D = k_B T_D$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha, \lambda, \vec{q}} \frac{1}{\omega_\alpha^2(\lambda, \vec{q})} \propto \frac{1}{\omega_D^2}.$$

Дійсно, для макроскопічного кристала

$$\sum_{\vec{q}} \rightarrow V \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}, \quad (\text{Б.17})$$

Оскільки підінтегральний вираз  $\frac{1}{2} + \langle n(\omega) \rangle_T$  для акустичних фононів досягає максимуму в центрі зони Бріллюена (при  $q \rightarrow 0$ , коли  $\omega \rightarrow 0$ ), можна

знехтувати оптичними фононами, для яких  $\omega_\alpha$  не наближається до нуля ні при яких  $\vec{q}$ , сподіваючись, що чутливість інтегралу до форми зони є не дуже великою (принаймні, меншою, ніж для теплоємності), і застосувати для акустичних фононів модель Дебая, замінивши першу зону Бріллюена сферою рівного об'єму, щоб забезпечити умову (Б.16):

$$\int d^3q \rightarrow \frac{4\pi}{\bar{u}_s^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2, \quad (\text{Б.18})$$

де  $\bar{u}_s = \left( \frac{2}{3u_\perp^3} + \frac{1}{3u_\parallel^3} \right)^{-1/3}$  – середня швидкість звуку,  $\omega_D = 2\pi\bar{u}_s \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}$ .  
Переходячи до змінної інтегрування  $\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ , з (Б.14), (Б.17), (Б.18) отримуємо

$$\langle (\delta x)^2 \rangle_T = \frac{1}{3} \langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_T = \frac{3\hbar^2}{Mk_B T_D} \left[ \frac{1}{4} + \frac{T}{T_D} D_1 \left( \frac{T_D}{T} \right) \right], \quad (\text{Б.19})$$

де  $D_1(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{d\xi\xi}{e^\xi - 1}$  – функція Дебая 1-го порядку<sup>3</sup> [417],  $D_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \frac{s}{4} + \frac{s^2}{36}$ .

Таблиця Б.1

### Референтні значення параметрів $\langle (\delta x)^2 \rangle_T$ та $T_D$ для кристала кремнію

$T$ , К	$\langle (\delta x)^2 \rangle_T$ , Å <sup>2</sup>	$T_D$ , К	Ref.	Метод
284	0.00384	658	[124]	
		645	[286, 490]	
	0.00563	543 ± 8	[492], [145, 292, 306, 498]	рентген
	0.005866 ± 0.000014		[493]	рентген
	0.00567		[494]	нейтрон

Однак, реальна дисперсія і щільність фононних станів в кремнії поводять себе набагато складніше. В останній присутні різкі піки, що відповідають сингулярностям Ван-Хова [492, 496]. Тому значення  $T_D$ , отримані в теорії теплоємності, істотно відрізняються від тих, що потрібні для роз-

<sup>3</sup>Теплоємність виражається через функцію Дебая 3-го порядку.

рахунку середньоквадратичного зміщення. Для підвищення точності і універсальності фононної моделі, окрім акустичних фононів з лінійною дисперсією, до спектру варто додавати принаймні деякі фіксовані частоти, як в моделі Ейнштейна. Комбінація цих моделей має бути значно точнішою при кімнатних та вищих температурах. Більш ґрунтовні теоретичні розрахунки  $\langle (\delta x)^2 \rangle_T$  в різних підходах є доволі складними, і мають розбіжності між собою, хоча сьогодні вже досягають високої точності. В застосуваннях на даний час традиційно використовуються експериментальні дані для цієї величини (див. Табл. Б.1).

## Додаток В

## УЗАГАЛЬНЕНА ДЗЕТА-ФУНКЦІЯ

Узагальнена дзета-функція при  $\alpha > 1$  визначається рядом [418, 499]

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

який при  $s = 1$  зводиться до звичайної функції Рімана [417, 426]

$$\zeta(\alpha, 1) = \zeta(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}. \quad (\text{B.2})$$

При  $\alpha < 1$  ряд (B.1) розбігається, але попри це, функція  $\zeta(\alpha, s)$  існує. Вона однозначно визначається процедурою аналітичного продовження по  $\alpha$ , і може бути представлена у вигляді інтеграла по петлі Ганкеля<sup>1</sup> у комплексній площині [499]:

$$\zeta(\alpha, s) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt \frac{t^{\alpha-1} e^{st}}{1-e^t}. \quad (\text{B.3})$$

Але для збіжності інтеграла повинна виконуватися додаткова умова  $\Re s \geq 0$ , а якщо  $\Re s = 1$ , потрібно ще й  $\Re \alpha < 1$  [499].

Щоб пов'язати представлення (B.3) з представленням у вигляді ряду типу (B.1), але без обмежень  $\alpha > 1$  чи  $\Re s > 0$ , підставимо в (B.3) тотожність

$$\frac{1}{1-e^t} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} e^{nt} + \frac{e^{(1+n_{\max})t}}{1-e^t}, \quad (\text{B.4})$$

і проінтегруємо почленно, використовуючи представлення для гама-функції [426]

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt e^{tt^{-s}}. \quad (\text{B.5})$$

<sup>1</sup>Тобто контуру, який починається при  $\Re t \rightarrow -\infty$ , прямує до початку координат, обходить його проти часової стрілки, і повертається на нескінченність  $\Re t \rightarrow -\infty$ .

Це дає

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(s+n)^\alpha} + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt t^{\alpha-1} \frac{e^{(1+s+n_{\max})t}}{1-e^t}. \quad (\text{B.6})$$

Коли  $n_{\max} \rightarrow \infty$ , в останньому інтегралі головний внесок дають малі  $t$ , завдяки чому можна покласти в знаменнику  $1-e^t \xrightarrow{t \rightarrow 0} -t$ . Знову виражаючи інтеграл через гама-функцію з представлення (B.5), приходимо до виразу

$$\zeta(\alpha, s) = \lim_{n_{\max} \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(s+n)^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} (s+1+n_{\max})^{1-\alpha} \right]. \quad (\text{B.7})$$

Але цей ліміт існує лише при  $\alpha > 0$ . Якщо  $\alpha > 1$ , останній член в Рівн. (B.7) при  $n_{\max} \rightarrow \infty$  зникає, і ми повертаємося до визначення (B.1). Якщо ж  $0 < \alpha < 1$ , очевидно,  $(s+1+n_{\max})^{1-\alpha} = n_{\max}^{1-\alpha} + \mathcal{O}(n_{\max}^{-\alpha})$ , тому формулу (B.7) можна записати у спрощеному вигляді

$$\zeta(\alpha, s) = \lim_{n_{\max} \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(s+n)^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} n_{\max}^{1-\alpha} \right] \quad (\alpha > 0). \quad (\text{B.8})$$

Її окремим випадком при  $\alpha = 1/2$  є рівняння (3.154).

На практиці зустрічається також представлення у вигляді ряду Фур'є на інтервалі  $0 < s < 1$ :

$$\zeta(\alpha, s) = 2^\alpha \pi^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1} \sin \left( 2\pi k s + \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (\alpha < 0, \quad 0 < s < 1). \quad (\text{B.9})$$

Наведемо тепер основні властивості узагальненої дзета-функції.

Функція  $\zeta(\alpha, s)$  існує при всіх значеннях параметра  $\alpha$ , окрім  $\alpha = 1$ . При цілих  $\alpha$  вона є дійсною. Якщо  $\alpha$  – від'ємне ціле число або нуль, інтеграл (B.3) обчислюється за допомогою лишків, і зводиться до полінома Бернуллі порядку  $1-\alpha$ :

$$\zeta(\alpha, s) = -\frac{1}{1-\alpha} B_{1-\alpha}(s), \quad \alpha = 0, -1, -2, \dots$$

Якщо  $\alpha$  – ціле число, більше від одиниці, функцію (B.3) можна виразити через похідну порядку  $\alpha$  від логарифма гама-функції:

$$\zeta(\alpha, s) = \frac{(-1)^\alpha}{(\alpha-1)!} \psi^{(\alpha-1)}(s), \quad \alpha = 2, 3, 4, \dots$$

Якщо  $\alpha$  – неціле, при  $s < 0$  функція  $\zeta(\alpha, s)$  є комплексною. Для напівцілих  $\alpha$ , при  $s \leq 1$ ,  $\Re\zeta(\alpha, s)$  є періодичною функцією  $s$  з періодом 1.

Диференціюючи (В.7) або (В.3) по  $s$ , знаходимо

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = -\alpha \zeta(\alpha + 1, s). \quad (\text{В.10})$$

Зворотньо,

$$\int ds' \zeta(\alpha, s') = \frac{1}{1 - \alpha} \zeta(\alpha - 1, s) + \text{const}. \quad (\text{В.11})$$

Якщо ж інтегрування провести по будь-якому інтервалу одиничної довжини, з (В.11) та функціонального співвідношення  $\zeta(\alpha, s) = s^{-\alpha} + \zeta(\alpha, s + 1)$ , що випливає з визначення (В.8) або (В.3), отримуємо

$$\int_s^{s+1} ds' \zeta(\alpha, s') = \frac{1}{1 - \alpha} \zeta(\alpha - 1, s) \Big|_s^{s+1} = \frac{1}{\alpha - 1} s^{1-\alpha}. \quad (\text{В.12})$$



Додаток Д  
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ  
ДИСЕРТАЦІЇ

**Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:**

1. Bondarenko M. V. Tips for deciphering and quick calculation of radiation spectra. *Journal of Instrumentation*. 2018. Vol. 13. P. C04012.
2. Bondarenko M. V. Separation of edge effects in highly non-dipole radiation spectra. *Mod. Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 33. P. 1850035. Vol. 33. — P. 1850035.
3. Bondarenko M. V. Next-to-leading order correction to the factorization limit of the radiation spectrum. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 96. P. 076009.
4. Bondarenko M. V., Shul'ga N. F. Interference in spectrum of radiation from doubly scattered charged particle. *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 95. P. 056003.
5. Bondarenko M. V. Improved separation of soft and hard components in multiple Coulomb scattering. *Phys. Rev. D*. 2016. Vol. 93. P. 036008.
6. Bondarenko M. V. Limiting energy loss distributions for multiphoton channeling radiation. *NIM B*. 2015. Vol. 355. P. 30–34.
7. Bondarenko M. V., Shul'ga N. F. Constructive interference in the spectrum of bremsstrahlung on two amorphous targets. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 116007.
8. Bondarenko M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 013019.
9. Bondarenko M. V. Basics of multiphoton effects in coherent radiation spectra. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 517. P. 012027.
10. Bondarenko M. V. Nuclear interactions at volume reflection: Perturbative treatment. *Phys. Rev. ST-AB*. 2012. Vol. 15. P. 032802.
11. Bondarenko M. V. A relation between the nuclear scattering probability

in a bent crystal and the mean volume reflection angle. *Phys. Lett. A.* 2012. Vol. 376. P. 875–878.

12. Bondarenko M. V. Nuclear interactions and multiple Coulomb scattering at volume reflection. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2012. Vol. 57. P. 59–63.

13. Bondarenko M. V. Factorization and QCD enhancements in the Compton mechanism of  $W$  and  $Z$  boson hadroproduction. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2012. Vol. 57. P. 105–110.

14. Bondarenko M. V. Comments on theory of volume reflection and radiation in bent crystals. *Il Nuovo Cim. C* . 2011. Vol. 342. P. 381–388.

15. Bondarenko M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal vs. experiments on volume reflection. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2010. Vol. 236. P. 012026.

16. Bondarenko M. V. Model solution for volume reflection of relativistic particles in a bent crystal. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 82. P. 042902.

17. Bondarenko M. V. Coherent bremsstrahlung in a bent crystal. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 81. P. 052903.

18. Bondarenko M. V. Polarization of bremsstrahlung at electron scattering in anisotropic medium. *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 82. P. 042723.

19. Bondarenko M. V. Computation and analysis of the polarization degree for bremsstrahlung at peripheral scattering. *Probl. At. Sci. and Techn., Series: Nucl. Phys. Invest.* 2009. Vol. 51. P. 89–94.

20. Бондаренко Н. В. Формирование тени в дифракционном рассеянии адронов по механизму глюонного излучения при фрагментации. *Вісн. ХНУ, сер. фіз. «Ядра, частинки, поля».* 2008. Vol. 794. P. 125–128.

21. Bondarenko M. V. Extraction of spin observables in baryon-baryon scattering, sensitive to gluon- and quark-exchange effects. *Probl. At. Sci. and Techn.* 2007. Vol. N5(48). P. 28–35.

22. Bondarenko M. V. Covariant amplitude decomposition in relativistic fermion scattering problems. *Probl. At. Sci. and Techn.* 2007. Vol. N3(1). P. 104–110.

**Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

23. Bondarenko M. V. Volume Reflection Dependence on the Interplanar Potential. Book of Abstracts of the 8th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2018). Ferrara, Italy, September 23–28, 2018. P. 108 (доповідач).

24. Бондаренко Н. В. Рассеяние на малые углы при больших значениях кулоновского параметра. Тезисы докладов XVI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 20–23 марта 2018 г. С. 107 (доповідач).

25. Bondarenko M. V. Next-to-leading order correction to infrared limit of radiation spectrum. Abstracts of the XIIth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-17). Hamburg, Germany, September 18–22, 2017. P. 17 (доповідач).

26. Bondarenko M. V. Types of interference in highly non-dipole radiation spectra. Book of Abstracts of the 7th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2016). Sirmione–Desenzano del Garda, Italy, September 25–30, 2016. P. 83 (доповідач).

27. Бондаренко Н. В. Краевые эффекты в спектре излучения ультрарелятивистского электрона в конечном магните. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 113 (доповідач).

28. Бондаренко Н. В. Улучшенное разделение мягкой и жесткой компонент в многократном кулоновском рассеянии. Тезисы докладов XIV-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–25 марта 2016 г. С. 113 (доповідач).

29. Бондаренко Н. В. Предельные спектральные распределения многофотонного излучения при каналировании. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 84–85 (доповідач).

30. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Дробовой эффект в тормозном излучении релятивистских электронов. Тезисы докладов XIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 16–20 марта 2015 г. С. 79-80 (доповідач).

31. Bondarenko M. V. and and Shul'ga N. F. Enhancing interference in the spectrum of bremsstrahlung on a composite target. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 77 (доповідач).

32. Bondarenko M. V. Multiphoton effects in channeling radiation. Book of Abstracts of the 6th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2014). Capri, Italy, October 5–10, 2014. P. 37 (доповідач).

33. Бондаренко Н. В., Шульга Н. Ф. Интерференция спектров тормозного излучения от двух аморфных мишеней. Тезисы докладов XII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 17–21 марта 2014 г. С. 109 (доповідач).

34. Bondarenko M. V. Multiphoton effects in coherent radiation spectra. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 59 (доповідач).

35. Bondarenko M. V. Reconstruction procedure for single-photon radiation spectra from multi-photon ones. Abstracts of the Xth International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-13) and IIIrd International Conference Meghri-13. Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013. P. 24 (доповідач).

36. Бондаренко Н. В. Многофотонные эффекты в спектре когерентного излучения. Тезисы докладов XI-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 11–15 марта 2013

г. С. 106 (доповідач).

37. Bondarencо M. V. Multiple scattering and volume capture of charged particles in bent crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 89.

38. Bondarencо M. V. Symmetry properties in angular distribution of radiation in thin crystals. Book of Abstracts of the 5th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2012). Alghero, Italy, September 23–28, 2012. P. 20.

39. Bondarencо M. V. Perturbative account of nuclear scattering at volume reflection. Abstracts of the 3rd International Conference “Quantum Electrodynamics and Statistical Physics”. Kharkov, Ukraine, August 29 – September 02, 2011. P. 83 (доповідач).

40. Bondarencо M. V. Nuclear scattering and characteristic X-ray radiation at volume reflection. Abstracts of the VIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-11). Egham, UK, September 12–16, 2011. P. 110.

41. Бондаренко Н. В. Количество ядерных взаимодействий при объемном отражении частицы в изогнутом кристалле. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. С. 106-107 (доповідач).

42. Бондаренко Н. В. Матричная факторизация в амплитуде реального комптоновского рассеяния. Вычисление всех поляризационных характеристик. Тезисы докладов IX-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 21–25 февраля 2011 г. С. 71-72 (доповідач).

43. Bondarencо M. V. Analytic theory of volume reflection and the accompanying radiation. Book of Abstracts of the 4th International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2010). Ferrara, Italy, October 3–8, 2010. P. 88 (доповідач).

44. Бондаренко Н. В. Длина когерентности в изогнутом кристалле. Тезисы докладов VIII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 22–26 февраля 2010 г. С. 112 (доповідач).

45. Бондаренко Н. В. Поляризация тормозного излучения на несферическом рассеивателе. Тезисы докладов VII-й конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям. Харьков, Украина, 23–27 февраля 2009 г. С. 89 (доповідач).

46. Bondarenko M. V. Towards a unified analytic theory of diffractive QED processes. Proceedings of the 17th International IUPAP Conference on Few-Body Physics (Few-Body 17). Durham, NC, USA, June 5–10, 2003. P. S320–S322 (доповідач).

47. Bondarenko M. V., Shul'ga N. F. A crystal-based spin analyzer for fast neutron beams. Proceedings of 2003 Particle Accelerator Conference. Portland, OR, USA, 2003. P. 3329–3331 (доповідач).