НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Глущенко Антон В'ячеславович

УДК 537.611, 538.94

ДИСЕРТАЦІЯ

Квантові стани та динамічні процеси в магнетиках зі спіном S=1 та SU(3) симетрією обмінної взаємодії

01.04.02 – теоретична фізика
Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ А.В. Глущенко

Науковий керівник: Ковалевський Михайло Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Глущенко А.В. Квантові стани та динамічні процеси в магнетиках зі спіном S=1 та SU(3) симетрією обмінної взаємодії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико математичних наук зі спеціальності 01.04.02 – теоретична фізика (104 – фізика та астрономія). – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України. – Харків, 2019.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню магнетиків зі спіном s=1 та SU(3) симетрією обмінної взаємодії. Ми використовували як мікроскопічний, так і макроскопічний підходи до вивчення таких магнітних середовищ. В теорії конденсованих середовищ добре відомий підхід Гінзбурга-Ландау для дослідження фазових станів рівноваги. При описі фазових переходів другого роду даний підхід вимагає визначення явного виду вільної енергії як функції параметра порядку і тому з самого спочатку модельно залежний. Теоретичним фундаментом мікроскопічного підходу даної дисертації, що описує рівноважні стани конденсованих середовищ зі спонтанно порушеною симетрією, є концепція квазісередніх. Введення в статистичний оператор Гіббза нескінченно малого джерела, що є функціоналом параметра порядку, знижує симетрію стану рівноваги в порівнянні з симетрією гамільтоніана і описує вироджені конденсовані стани. Він використовує уявлення про залишкову симетрію стану рівноваги та вільний від зазначеної проблеми. Цей підхід дозволяє розглянути, як вироджені магнітні стани, так і стани в яких одночасно порушені фазова та магнітна симетрії.

В дисертації вирішена задача класифікації станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 при спонтанному порушенні магнітної SU(3) симетрії. Таке порушення симетрії обумовлено наявністю антиферомагнітного параметра і

параметра порядку спінового нематика. Представлення про залишкову симетрії стану рівноваги і, відповідне в статистичній механіці введення генератора цієї симетрії, дозволили сформулювати рівняння класифікації для даних параметрів порядку. Знайдені їхні окремі і загальний розв’язки для параметрів порядку в термінах вектора і тензора спонтанної магнітної анізотропії.

Розв'язана задача класифікації станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 при спонтанному порушенні магнітної симетрії, а також станів рівноваги зі спонтанно порушеною фазовою та магнітною симетріями. Вперше знайдений явний вид магнітних та надплинних параметрів порядку у термінах термодинамічних параметрів генератора залишкової симетрії. Вперше знайдений явний вид магнітних та надплинних параметрів порядку у термінах термодинамічних параметрів генератора залишкової симетрії. Показана можливість існування трьох різних надплинних станів рівноваги у разі спінорного параметра порядку та шести станів рівноваги для параметра порядку надплинного спінового нематика. На відміну від надплинних станів He-3, які характеризуються двома квантовими числами, розглянуті надплинні стану бозе-системи зі спіном s=1 та SU(3) симетрії обмінної взаємодії характеризуються шістьма квантовими скалярними функціями. При цьому в таких станах можлива тривісна залишкова анізотропія.

У запропонованому підході можливо також розгляд інших надплинних станів з іншими значеннями спіна структурного елементу середовища та іншої унітарної симетрії обмінної взаємодії. Крім того, в принципі можлива реалізація і інших надплинних станів в спін s=1 системах, параметр порядку яких має тензорний вид або враховує рідкокристалічні ступені свободи.

На основі гамільтонового формалізму побудована динаміка однопідґраткових магнетиків зі спіном s=1, яка узагальнює теорію Ландау-Ліфшиця. Введено магнітні ступені свободи, що відповідають SU(3) симетрії обмінної взаємодії, та знайдені дужки Пуассона для цих величин. Наявність двох типів інваріантів Казимира для алгебри дужок Пуассона магнітних ступенів свободи веде до великої різноманітності моделей обмінної енергії і, відповідно, до нових незвичайних явищ та процесів. Важливу роль в побудові динамічних рівнянь грає унітарна група симетрії SU(3) і її підгрупи, які служать математичною основою опису різних магнітних фазових станів. В дисертації отримано нелінійні рівняння динаміки для однопідґраткових магнетиків зі спіном s=1 в базисах Вейля та Рака. Проведена лінеаризація даних рівнянь та обчислені спектри колективних магнітних збуджень, які мають характер спінової, квадрупольної та феро-квадрупольної хвиль з квадратичним законом дисперсії. Виявлено вплив релаксаційних процесів та знайдена структура дисипативних потоків щільності адитивних інтегралів руху в термінах кінетичних коефіцієнтів теплопровідності, спінової та квадрупольної дифузії. Обчислені коефіцієнти затухання магнітних ступенів свободи для станів квадрупольного магнетика, які узгоджуються з результатами робіт, що проводилися при одноконстантному наближенні.

У дисертації розглянуто інший важливий клас магнітних станів - це стани зі спонтанно порушеною симетрією. Такі стани рівноваги мають меншу симетрією в порівнянні з симетрією гамільтоніана. У разі двох або більше підґраток набір магнітних ступенів свободи розширюється і складається з ермітових матриць двох типів: генератора SU(3) симетрії і додаткової ермітової 3х3 матриці, яка має фізичний зміст параметра порядку та складається з антиферомагнітного параметра порядку і параметра порядку спінового нематика. Вперше отримані нелінійні рівняння динаміки магнетиків в умовах повного спонтанного порушення SU(3) симетрії. Знайдено спектри колективних збуджень для станів спінового нематика, а також квадрупольно-нематичного, квадрупольно-антиферомагнітного, феро-нематичного упорядкувань. Враховано вплив релаксаційних процесів і встановлено структуру дисипативних потоків в термінах кінетичних коефіцієнтів теплопровідності, спінової дифузії та спінової в'язкості. Обчислені коефіцієнти затухання магнітних ступенів свободи для станів спінового нематика.

Представлені результати досліджень показують важливість конкретної унітарної симетрії обмінної взаємодії в описі колективних властивостей магнетиків, що вивчаються в дисертації. Вперше отримані низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна двох довільних локальних фізичних величин для станів квадрупольного магнетика та спінового нематика. Знаходження асимптотик функції Гріна для довільних локальних фізичних величин дозволило провести порівняльний аналіз функцій Гріна магнетиків з різною унітарною симетрією обмінної взаємодії. Розглянуті приклади станів демонструють особливості прояву додаткових магнітних ступенів свободи, які мають різні трансформаційні властивості щодо операції зміни обігу часу. Дані розв'язки також дозволяють знайти спектри колективним магнітних збуджень, з'ясовують характер магнітної анізотропії вищевказаних функцій Гріна та дають можливість визначення кінетичних процесів нейтральних повільних частинок в розглянутих однопідґраткових магнетиках зі спіном s=1.

Викладена схема обліку SU(3) симетрії обмінного магнітної взаємодії може бути узагальнена на довільну унітарну групу симетрії SU(n), і, зокрема, може бути застосована для опису колективних властивостей магнетиків зі спіном s=3/2 та SU(4) симетрією обмінної взаємодії.

Проведені дослідження базуються на сучасних методах квантової статистичної та гамільтонової механік, які враховують SU(3) симетрію обмінної взаємодії. Отримані результати будуть корисні для аналізу та вивчення нових фізичних станів магнітних матеріалів зі спіном s=1 та з високою унітарної симетрією обмінної взаємодії. Інтерес до цих фізичних об'єктів також викликаний перспективою їх застосування в області нанотехнологій в якості наноматеріалу та в квантовій інформатиці. Інше можливе застосування - це зберігання інформації з високою щільністю, використання високоспінових магнетиків як конструкційного матеріалу квантового комп'ютера та застосування в техніці магнітного охолодження. Проведені в дисертації дослідження виявили нові можливі магнітні стани і встановили колективні властивості таких об'єктів.

Ключові слова: SU(3) симетрія, інтеграл руху, спін, квадрупольна матриця, антиферомагнітний параметр порядку, спіновий нематик, спінор, спектри колективних збуджень, дисипація, низькочастотна асимптотика функції Гріна.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Моделирование динамики нормальных и вырожденных состояний магнетиков со спином s=1. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2013. №. 2 (47). С. 95-99.
2. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Quantum states, symmetry and dynamics in degenerate spin s=1 magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2014. V. 355. P. 192-196.
3. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamics of high spin magnets. *Annals of physics*. 2014. V. 349. P. 55-72.
4. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Симметрия и релаксационная динамика магнетиков со спином s=1. *Физика низких температур,* 2014, т. 40, № 5, С. 560-569.
5. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю., Мацкевич В.Т. Спектры коллективных возбуждений и низкочастотная асимптотика функций Грина вырожденных состояний в магнетиках со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. Т. 43. №. 12. С. 1715-1723.
6. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Models of Hamiltonian and low-frequency spectra of collective excitations in spin s= 1 magnetics. *East European Journal of Physics*. 2017. V. 4. №. 2. P. 4-10.
7. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Спинорный параметр порядка и состояния равновесия бозе - систем со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. V. 43. №. 9. P. 1324-1333.
8. Боголюбов Н.Н. (мл.), Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Квазисредние и вырожденные квантовые состояния равновесия магнитных систем с SU(3) симметрией обменного взаимодействия. *Теоретическая и математическая физика.* 2018. Т. 195. № 2. С. 240–255.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. SU(2s+1) symmetry and the dynamics of high spin systems. III International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (14-18 May 2012, Kharkiv), Kharkiv, 2012. P. 92. (доповідач).
2. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Аспекты макроскопического описания квантовых состояний и неравновесных процессов в магнетиках со спином s=1. Материалы VIII международной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложение в естественных науках и информационных технологиях» (27-28 апр. 2013 г., г. Харьков). Харьков, 2013. С. 106-107. (доповідач).
3. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Квантові стани, симетрія і нерівноважні процеси в магнетиках зі спіном s=1. Матеріали міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та прикладної фізики ЕВРИКА-2013 (15-17 трав. 2013 р., м. Львів). Львів, 2013. С. E13. (доповідач).
4. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Модели обменной энергии и состояния магнетиков со спином s=1. Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (26-31 мая 2013 г., г. Белгород). Белгород, 2013. С. 51 (доповідач).
5. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Magnetic Ordering and Macroscopic Dynamics of Systems with the Spin s=1. Materials of IV International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (3-7 June 2013, Kharkiv). Kharkiv, 2013. P. 50. (доповідач).
6. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamic equations of spin s magnets. Materials of Conference on Nonlinear Mathematical Physics: Twenty Years of JNMP (4-14 June 2013, Nordfjordeid), Nordfjordeid, 2013. P. 20. (участь в обговоренні).
7. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Моделі обмінного гамільтоніана і фазові стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1. Матеріали всеукраїнської

наукової конференції "Математичне моделювання та математична фізика". Присвячена 80-річчю з дня народження Віктора Михайловича Глушкова (23-27 вересня 2013 р., м. Кременчук). Кременчук, 2013. С. 26-27. (доповідач).

8. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Обмінна релаксація в динаміці магнетиків зі спіном s=1. Матеріали XI Міжнародної наукової конференції «Фізичні явища в твердих тілах» (3-6 груд. 2013 р, м. Харків). Харків, 2013. С. 113. (доповідач).
9. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Макроскопическая динамика и спектры коллективных возбуждений магнетиков со спином s=1. Материалы XVIII Международной научной конференции молодых ученых и специалистов к 105-летию Н.Н. Боголюбова (ОМУС-2014) (24-28 февраля 2014г., г. Дубна). Дубна, 2014. С. 33-37. (доповідач).
10. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Exchange SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamics of high spin magnets. Materials of XVI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-XVI) (13-18 Oct. 2014, Dubna). Dubna, 2014. P. 6. (доповідач).
11. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Relaxation dynamics of spin s=1 magnets and spectra of collective excitations. Materials of VI Conference of Young Scientists Problems of theoretical physics dedicated to 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov, (25-27 Nov. 2014, Kyiv). Kyiv, 2014. P. 38. (доповідач).
12. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Casimir invariants, exchange energy models and spectra of collective excitations in spin s=1 magnets. Materials of International Conference «Spin physics, spin chemistry and spin technology», (1-5 June 2015, Saint Petersburg). Saint Petersburg, 2015. P. 81. (доповідач).
13. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of magnetic equilibrium states of Bose systems with the spin s=1. Materials of International Symposium Spin Waves 2015 (7-13 June 2015, Saint Petersburg). Saint Petersburg, 2015. P. 62. (доповідач).

14. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Unitary symmetry and dynamics of high-spin magnets in Weyl and Racah bases. Materials of International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF-2015) (29 Sep.-2 Oct., 2015, Dnipropetrovsk). Dnipropetrovsk, 2015. Paper ID MMM-3-en (4 p.). (доповідач).
15. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of degenerate equilibrium states of magnets with the spin s=1. Materials of VII International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (6-10 June 2016, Kharkiv). Kharkiv, 2016. P. 72. (доповідач).
16. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of superfluid equilibrium states of magnets with the spin s=1. Materials of Bogolyubov Conference "Problem of Theoretical Physics" (24-26 May 2016, Kyiv). Kyiv, 2016. P. 14. (доповідач).
17. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of magnetic and superfluid equilibrium states forspin s=1 magnets. Materials of VIII International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (29 May-2 June 2017, Kharkiv). Kharkiv, 2017. P. 74. (доповідач).

ABSTRACT

Glushchenko A.V. "Quantum states and dynamical processes in magnets with spin s=1 and SU(3) symmetry of the exchange interaction". Qualifying scientific paper, manuscript.

Thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by specialty 01.04.02 – theoretical physics (104 - physics and astronomy). – National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology" NAS of Ukraine, Kharkiv, 2019.

This dissertation is devoted to the study of magnets with spin s=1 and SU(3) symmetry of exchange interaction. We used both microscopic and macroscopic approaches to studying such magnetic media.

In the theory of condensed matter, the Ginzburg-Landau approach for the study of equilibrium phase states is well known. In the description of second-order phase transitions, this approach requires the definition of an explicit form of free energy as a function of the order parameter and therefore, from the very beginning, is model dependent. The theoretical basis of the microscopic approach of this dissertation is the concept of quasi-median, which describes the equilibrium states of condensed media with spontaneously disturbed symmetry. The introduction into the statistical operator Gibbs of an infinitely small source, which is a function of the order parameter, reduces the symmetry of the equilibrium state in comparison with the symmetry of the Hamiltonian and describes the degenerate condensed states. It uses the idea of residual equilibrium symmetry and is free of this problem. This approach allows us to consider how degenerate magnetic states, and states in which both phase and magnetic symmetries are simultaneously disturbed.

In this dissertation, the problem of the classification of equilibrium states of magnetism with spin s=1 and the spontaneous breaking of the magnetic SU(3) symmetry is solved. Such a symmetry breaking is due to the presence of the

antiferromagnetic parameter and the order parameter of the spin nematic. The representation of the residual symmetry of the equilibrium state and, corresponding in the statistical mechanics of introducing the generator of this symmetry, allowed us to formulate the classification equation for the given order parameters. Their separate and general solutions for the order parameters in terms of the vector and tensor of spontaneous magnetic anisotropy are found.

The problem of classification of equilibrium states of magnets with spin s=1 and spontaneous breaking of magnetic symmetry is solved, as well as states of equilibrium with spontaneously broken phase and magnetic symmetries. For the first time, an explicit form of the magnetic and superficial order parameters was found in terms of the thermodynamic parameters of the residual symmetry generator. The possibility of existence of three different superconducting equilibrium states in the case of a spinor order parameter and six states of equilibrium for the order parameter of superfluid spin nematics is shown. In contrast to the superconducting Ne-3 states, which are characterized by two quantum numbers, the supplements of the Bose system with spin s=1 and SU(3) symmetry of the exchange interaction are characterized by six quantum scalar functions. At the same time in such states three-dimensional residual anisotropy of the symmetry of the degenerate state is possible.

In the proposed approach it is also possible to consider other superfluid states with other values of the spin of the structural element of the medium and other unitary symmetry of the exchange interaction. In addition, in principle, the implementation of other superficial states in the spin s=1 systems, whose order parameter is tensor or takes into account the liquid crystal degrees of freedom, is possible.

On the basis of the Hamiltonian formalism, the dynamics of single-sublattice magnets with spin s=1, which generalizes the Landau-Lifshitz theory, is constructed. The magnetic degrees of freedom, which corresponding to the SU(3) symmetry of the exchange interaction were introduced, and Poisson brackets were found for these quantities. The presence of two types of Casimir invariants for the Poisson algebra of the magnetic degrees of freedom leads to a large variety of exchange energy models and, accordingly, to new unusual phenomena and processes. The symmetry group

SU(3) and its subgroups, which serve as the mathematical basis for describing various magnetic phase states, play an important role in the construction of dynamic equations. In the dissertation, we obtain nonlinear dynamics equations for single-sublattice spin s=1 magnets in the Weyl and Racah bases. The linearization of these equations is carried out and the spectra of collective magnetic excitations that have the character of spin, quadrupole, and ferro-quadrupole waves with quadratic dispersion law are calculated. The influence of relaxation processes and the structure of dissipative flows of the density of additive motion integrals are found in terms of kinetic coefficients of thermal conductivity, spin and quadrupole diffusion. The coefficients of the damping of the magnetic degrees of freedom for the states of a quadrupole magnet are calculated, which are consistent with the results of the works carried out under a monoconstant approximation.

Another important class of magnetic states with spontaneously broken symmetry is considered in the dissertation. Such states of equilibrium have less symmetry in comparison with the symmetry of the Hamiltonian. In the case of two or more sublattice, the set of magnetic degrees of freedom expands and consists of ermitian matrices of two types: the SU(3) symmetry generator and the additional Hermitian 3x3 matrix, which has the physical content of the order parameter and consists of an antiferromagnetic parameter of order and the order parameter of the spin nematic. We obtained nonlinear equations of dynamics of magnets in conditions of complete spontaneous SU(3) symmetry violation for the first time. The spectra of collective excitations for states of spin nematics, as well as quadrupole-nematic, quadrupole-antiferromagnetic, ferro-nematic ordering were found. The influence of relaxation processes and the structure of dissipative flows in terms of kinetic coefficients of thermal conductivity, spin diffusion and spin viscosity are established. The coefficients of the attenuation of the magnetic degrees of freedom for the states of the spin nematic are calculated.

The presented research results show the importance of a specific unitary symmetry of exchange interaction in describing the collective properties of magnetics studied in the dissertation. For the first time, the low-frequency asymptotics of two-time

Green's functions for two arbitrary local physical quantities for the states of a quadrupole magnet and a spin nematic are obtained. Finding the asymptotics of the Green's function for arbitrary local physical quantities allowed us to carry out a comparative analysis of Green's functions of magnets with different unitary symmetry of exchange interaction. These magnetic states demonstrate the peculiarities of the appearance of additional magnetic degrees of freedom, which have different transformation properties in relation to the operation of the time reversal. These solutions also allow us to find the spectra of collective magnetic excitations, find out the nature of the magnetic anisotropy of the above-mentioned Green's functions and make it possible to determine the kinetic processes of neutral slow particles in the considered spin s=1 magnets.

The described SU(3) accounting scheme for the symmetry of the exchange-magnetic interaction can be generalized to an arbitrary unitary symmetry group SU(n), and can, in particular, be used to describe the collective properties of spontaneous magnetism s=3/2 and the SU(4) exchange-symmetry interactions.

The conducted researches are based on modern methods of quantum statistical and Hamiltonian mechanics which take into account SU(3) symmetry of exchange interaction. The obtained results will be useful for the analysis and study of new physical states of magnetic materials with spin s=1 and with high unitary symmetry of exchange interaction. Interest in these physical objects is also due to the prospect of their application in the field of nanotechnology as a nanomaterial and in quantum informatics. Another possible application is the storage of high-density information, the use of high-spin magnets as a structural material of a quantum computer, and the use of magnetic cooling technology. The researches carried out in the dissertation revealed new possible magnetic states and established the collective properties of such objects.

Keywords: SU(3) symmetry, motion integral, spin, quadrupole matrix, antiferromagnetic order parameter, spin nematic, spinor, collective excitatory spectra, dissipation, low frequency asymptotic of the Green's function.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Високоспінові магнетики, структурні елементи яких мають спін s>1/2, є областю сучасної фізики конденсованих середовищ. У таких багаточастинкових системах можливі нові колективні властивості матерії та незвичайні типи магнітного упорядкування. До них, зокрема, відносяться експериментально відкриті квадрупольні впорядкування, фази Хальдейна, стан спінового нематика, усі ці стани відсутні в магнетиках зі спіном s=1/2.

Теоретичне обґрунтування появи незвичайних магнітних станів полягає у врахуванні магнітних ступенів свободи, які пов'язані з іншою унітарної симетрією SU(n), (n>2) обмінної взаємодії. Такі фізичні стани виникають в холодних фермі-газах, високотемпературних надпровідниках, низькорозмірних напівпровідниках та високоспінових магнетиках. Групи унітарної симетрії SU(n), (n>2) використовуються в фізиці високих енергій, теорії поля для класифікації адронів. Відкриття та дослідження багаточастинкових станів високоспінових магнетиків привели до необхідності уточнення ідеології їх статистичного опису, яка повинна враховувати наявність високої унітарної симетрії.

Об'єктами експериментальних досліджень вказаних магнітних станів є кристали TmZn, TmCd, CeAg. Спостережуваний стрибок теплоємності інтерпретується як фазовий перехід до квадрупольного магнітного стану.

Дослідження високоспінових магнетиків актуальні завдяки теоретичним та експериментальним роботам з фізики квазікристалічних структур, створених на основі технології оптичних ґраток. Можливість регулювання геометричних параметрів ґратки та, тим самим, інтенсивності міжчастинкової взаємодії робить її привабливою при вивченні незвичайних властивостей високоспінових магнетиків. Додатковий стимул пов'язаний з дослідженнями бозе-ейнштейнівської конденсації нейтральних атомів з ненульовим спіном.

Незважаючи на істотні успіхи у розумінні природи таких магнітних станів, для цих фізичних об'єктів залишилися невирішеними питання послідовного опису станів рівноваги, відсутня ясність у виборі необхідних додаткових макроскопічних параметрів стану, залишається відкритим питання класифікації магнітних станів рівноваги з SU(3) симетрією обмінної взаємодії в рамках мікроскопічної теорії. Неповною є картина феноменологічного опису релаксаційної динаміки багатопідґраткових магнетиків. Зростання рівня розуміння фізики таких систем і нові експериментальні можливості роблять актуальними дослідження незвичайних фазових станів та динамічних властивостей магнетиків зі спіном s=1, яким присвячена ця дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Науково-виробничому комплексі “Відновлювані джерела енергії та ресурсозберігаючі технології” Національного наукового центру “Харківський фізико-технічний інститут” Національної академії наук України відповідно до тематичного плану за темами: Відомчого замовлення НАН України «Розробка наукових основ підвищення ефективності застосувань нових та альтернативних енергетичних установок, перспективних матеріалів та ресурсозберігаючих технологій.» Шифр теми III-1-11(НВК ВДЕРТ) № держреєстрації 0111U009592, та «Розвиток наукових основ використання структурно складних функціональних матеріалів і середовищ у альтернативній енергетиці та ресурсозбереженні.» Шифр теми III-1-16(НВК ВДЕРТ) № держреєстрації 0116U005362.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження фазових станів рівноваги та нерівноважних процесів в магнетиках зі спіном s=1 у разі унітарної SU(3) симетрії обмінної взаємодії. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1) отримати та розв'язати рівняння класифікації для параметрів порядку у стані статистичної рівноваги в умовах порушення магнітної SU(3) симетрії, а також у разі порушення магнітної і фазової симетрії в рамках мікроскопічної теорії;
2) побудувати гамільтонову механіку для опису динаміки однопідґраткових та багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Побудувати моделі обмінної

енергії в термінах інваріантів Казиміра алгебри дужок Пуассона для магнітних ступенів свободи та знайти стійкі стани магнітного впорядкування;

3) отримати спектри колективних магнітних збуджень. Врахувати процеси релаксації та обчислити декременти затухання динамічних величин в станах спінового нематика та квадрупольного магнетика;
4) дослідити вплив зовнішнього змінного поля на динаміку магнетиків зі спіном s=1 та обчислити низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна в станах квадрупольного магнетика, спінового нематика та феромагнетика.

Об'єктом дослідження є одно- та багатопідґраткові магнетики зі спіном s=1.

Предметом дослідження є зв'язок між SU(3) симетрією обмінної взаємодії та колективними властивостями однопідґраткових та багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1.

Методи досліджень. Для розв’язку задачі класифікації квантових станів використовувалися добре відомі методи квантової статистичної механіки. Дослідження ґрунтується на підході Гіббса та його узагальненні на вироджені стани рівноваги, яке виходить з концепції квазісередніх. Дослідження динаміки магнетиків зі спіном s=1 проведено в рамках гамільтонового формалізму. У дисертації, також, застосовані теоретико-групові методі для вивчення симетрії магнітних станів; диференційно-геометричні та алгебраїчні методи математики та математичної фізики для розв’язку систем диференціальних рівнянь динаміки високоспінових магнетиків.

Наукова новизна отриманих результатів

1. Розв'язана задача класифікації станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 при порушенні магнітної та фазової симетрій. Вперше знайдений явний вид магнітних та надплинних параметрів порядку в термінах параметрів генератора залишкової симетрії. Показана можливість трьох різних надплинних станів рівноваги у разі спінорного параметра порядку і шести

станів рівноваги для параметра порядку надплинного спінового нематика. З'ясовано, що нетривіальні розв’язки для магнітних параметрів порядку існують при довільних значеннях параметрів генератора залишкової симетрії.

2. Розвинена гамільтонова механіка однопідґраткових та багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Побудована алгебра дужок Пуассона магнітних степенів свободи в базисах Вейля та Рака. Вперше отримано нелінійні рівняння динаміки магнетиків зі спіном s=1 в багатопідґратковому випадку. Запропоновані моделі обмінної енергії як функції інваріантів Казиміра, що узагальнюють вид гамільтоніана Гейзенберга на магнетики зі спіном s=1.
3. Отримані спектри колективних магнітних збуджень для квадрупольного, феро-квадрупольного, квадрупольно-нематичного, квадрупольно-антиферомагнітного, феро-нематичного упорядкування. Розглянуто вплив релаксаційних процесів та задана структура дисипативних потоків квадрупольного магнетика і спінового нематика. Обчислені декременти затухання магнітних ступенів свободи для цих станів.
4. Вперше обчислені низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна для станів квадрупольного магнетика та спінового нематика.

Наукове та практичне значення отриманих результатів. В теорії конденсованих середовищ добре відомий підхід Гінзбурга-Ландау для дослідження фазових станів рівноваги. При описі фазових переходів другого роду даний підхід вимагає визначення явного виду вільної енергії як функції параметра порядку і тому з самого спочатку модельно залежний. Запропонований в даній дисертації підхід заснований на методі квазісередніх. Він використовує уявлення про залишкову симетрію стану рівноваги та вільний від зазначеної проблеми. Цей підхід дозволяє розглянути, як вироджені магнітні стани, так і стани в яких одночасно порушені фазова та магнітна симетрії.

З практичної точки зору, дослідження високоспінових магнетиків можуть привести до відкриття нових фізичних станів магнітних матеріалів. Інтерес до цих фізичних об'єктів також викликаний перспективою їх застосування в області нанотехнологій в якості наноматеріалу та в квантовій інформатиці. Інше можливе застосування - це зберігання інформації з високою щільністю, використання високоспінових магнетиків як конструкційного матеріалу квантового комп'ютера та застосування в техніці магнітного охолодження. Проведені в дисертації дослідження виявили нові можливі магнітні стани і встановили колективні властивості таких об'єктів.

Особистий внесок здобувача. В усіх статтях за темою дисертації здобувач приймав безпосередню участь на усіх стадіях їх виконання, включаючи обговорення постановки завдань, розробку й застосування теоретичних та комп’ютерних методів для їх розв’язання, змістовний аналіз результатів та їх підготовку до публікації. Зокрема, виконання теоретичних розрахунків та застосування методів комп’ютерної алгебри здійснені самостійно. Також самостійно сформульовані нові наукові результати та висновки, що виносяться до захисту.

По матеріалам досліджень були опубліковані наукові статті [126-133] у співавторстві. Особистий внесок здобувача в отримання опублікованих результатів полягає у наступному. В роботі [126, 127], використовуючи уявлення про залишкову симетрію, сформульовані рівняння класифікації для спінорного та тензорного параметрів порядку. Також, отримано розв’язки цих рівнянь в загальному вигляді магнітної анізотропії при порушенні, як магнітної, так і фазової симетрій. В роботах [128, 129] були отримані нелінійні рівняння динаміки магнетиків зі спіном s=1, на основі яких розраховані спектри колективних збуджень для різних моделей енергії. В роботі [130] обчислено спектри колективних магнітних збуджень з урахуванням затухання в одно- та багатопідґраткових станах. В роботі [131] дано опис еволюції нерівноважних вироджених станів магнетиків зі спіном s=1 і отримані динамічні рівняння, на основі яких обчислені низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна та знайдені спектри колективних збуджень для станів квадрупольного магнетика та спінового нематика. В роботі [132, 133], для однорідної частини обмінної енергії, знайдено умови існування локальних мінімумів, які відповідають рівноважним значенням магнетика. Поряд з відомими хвилями (квадрупольними і голдстоунівськими для спінового нематика), були отримані іншого виду спектри колективних збуджень, які описують феро-квадрупольне збудження, а також квадро-нематичні, квадро-антиферомагнітні та антиферо-нематичні хвилі.

Таким чином, особистий внесок здобувача в отриманні результатів та положень дисертації, що підлягають захисту, є визначальним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях, симпозіумах, форумах:

1. III International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (14-18 May 2012, Kharkiv).
2. VIII международная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложение в естественных науках и информационных технологиях» (27-28 апр. 2013 г., г. Харьков).
3. Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та прикладної фізики ЕВРИКА-2013 (15-17 трав. 2013 р., м. Львів).
4. Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», (26-31 мая 2013 г., г. Белгород).
5. IV International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (3-7 June 2013, Kharkiv).
6. Conference on Nonlinear Mathematical Physics: Twenty Years of JNMP (4-14 June 2013, Nordfjordeid).
7. Всеукраїнська наукова конференція "Математичне моделювання та математична фізика". Присвячена 80-річчю з дня народження Віктора Михайловича Глушкова (23-27 вересня 2013 р., м. Кременчук).
8. XI Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах» (3-6 груд. 2013 р, м. Харків).
9. XVIII Международная научная конференция молодых ученых и специалистов к 105-летию Н.Н. Боголюбова (ОМУС-2014) (24-28 февраля 2014г., г. Дубна).
10. XVI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-XVI) (13-18 Oct. 2014, Dubna).

11. VI Conference of Young Scientists Problems of theoretical physics dedicated to 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov, (25-27 Nov. 2014, Kyiv).
12. International Conference «Spin physics, spin chemistry and spin technology», (1-5 June 2015, Saint Petersburg).
13. International Symposium Spin Waves 2015 (7-13 June 2015, Saint Petersburg).
14. International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF-2015) (29 Sep.-2 Oct., 2015, Dnipropetrovsk).
15. VII International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (6-10 June 2016, Kharkiv).
16. Bogolyubov Conference "Problem of Theoretical Physics" (24-26 May 2016, Kyiv).
17. VIII International Conference for Professionals and Young Scientists "Low Temperature Physics" (29 May-2 June 2017, Kharkiv).

Публікації. Результати наукових досліджень опубліковані у 8 статтях [126-133] в спеціалізованих періодичних наукових журналах і 17 тезах доповідей у збірниках матеріалів міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація містить вступ, 4 розділи основного тексту, 7 рисунків в тексті, висновки та список використаних джерел з 133 найменувань на 11 сторінках, загальний обсяг дисертації - 141 сторінка.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І МОТИВАЦІЯ НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

Сучасна фізика магнітних матеріалів базується на уявленнях квантової механіки та істотно використовує поняття спіна, в якості невід'ємної характеристики елементарних частинок, атомів і молекул. Введення Уленбеком і Гаудсмитом [1] цього ступеня свободи дозволило пояснити експерименти Штерна і Герлаха [2], поглибило розуміння фундаментальних принципів квантової механіки та стало частиною концептуального апарату сучасної фізики. Ці дослідження в ідейному відношенні співзвучні раніше виконаними роботами Паулі [3,4], в яких було сформульовано принцип заборони, введена нова ступінь свободи електрона і розроблена квантова алгебра спінових операторів. Поняття спіна та принцип заборони привели до формування концепції обмінного взаємодії. Модель цієї взаємодії введена в роботах Гейзенберга (1928) [5], Френкеля (1928) [6], Дірака, (1929) [7]. Ця модель відповідає уявленню про локалізовані спіни, описує магнітні діелектрики та нехтує електронною природою носіїв атомного магнітного моменту в кристалі [8-10]. Більш складні моделі магнетиків враховують властивості електропровідності речовини і призначені для опису рідкоземельних і перехідних металів. До них відносяться модель Хаббарда [11,12] та s-d модель Вонсовського і Турова [13,14].

Уявлення про спін, як «нового» макроскопічного інтеграла руху, справила визначальний вплив на розвиток фізики магнітних матеріалів, дозволило зв'язати мікроскопічні магнітні властивості частинок з їх макроскопічними проявом [15-19]. З огляду на сильну обмінну взаємодію, що має SO(3) симетрію, набір магнітних ступенів свободи однопідґраткового магнетика містить тільки щільність спінового моменту. У термінах вектора спіна (намагніченості) дано опис динаміки однопідґраткового магнетика [20]. Рівняння Ландау-Ліфшиця добре обґрунтоване та використовується в дослідженні динамічних і статичних властивостей однопідґраткових магнітних діелектриків зі спіном s=1/2. Воно описує в лінійному наближенні колективний прояв феромагнетизму - спінові хвилі. Питання інтегрованості рівнянь Ландау-Ліфшиця в нелінійному випадку основані на використанні квантового методу оберненої задачі розсіювання і розглядалися в роботах [21-23]. До цього напрямку досліджень тісно примикає аналіз нелінійних збуджень (солітонів) магнетиків, з'ясування залежності структури конкретних розв’язків рівнянь динаміки намагніченості від розмірності простору, виду магнетика і типу магнітної анізотропії [24-25].

Теоретичний опис магнітних конденсованих станів зазвичай має справу з досить простими групами симетрії, до яких відносяться групи трансляцій в реальному просторі або поворотів в спіновому просторі SO(3)~SU(2). Характер порушення симетрії вироджених станів магнетиків визначається властивостями параметра порядку, який є певною функцією спінів підґраток. У магнітних середовищах зі спіном s=1/2 параметр порядку - векторна величина, яка змінює знак при зміні напрямку часу. Динамічні рівняння магнетиків в умовах повного порушення SO(3) симетрії вперше запропоновані в роботі [26]. В роботі [27] відзначено, що опис динамічних процесів в багатопідґраткових магнетиках за допомогою спінів підґраток є надмірним. З точки зору симетрійного феноменологічного підходу [27,28] будь-яка магнітна структура магнетиків зі спіном s=1/2 і довільним числом підґраток може бути охарактеризована не більше ніж шістьома ступенями свободи. Три з них це щільність вектора спіна, а решта три величини пов'язані з параметром порядку. Залежно від обраної параметризації це або два вектора антиферомагнетизму, або ортогональна матриця повороту в спіновому просторі.

В даний час інтенсивно досліджуються квантові системи, структурні елементи яких (частки, кластери, молекули) мають спін s>1/2 (високоспінові магнетики). Інтерес до цих об'єктів обумовлений надією отримання нових магнітних станів і очікуванням відкриття незвичайних фізичних властивостей. У магнетиках зі спіном s=1 можливі квадрупольне і феро-квадрупольне магнітне упорядкування, які не реалізуються в магнетиках зі спіном s=1/2. Експериментальні дані про відкриття квадрупольного стану в однопідґраткових кристалах TmZn представлені в роботі (Morin and al. 1978 [29]) (рис.1.1). Аналогічні дослідження пізніше проведені для інших магнітних сполук: зокрема, для TmCd (R. Aleonard, P. Morin 1979 [30]), CeAg (Ushizaka and al. 1984 [31], Morin 1988 [32]) (рис 1.2), дивись, також, роботи [33-36]. Наведу деякі дані вищевказаних робіт.

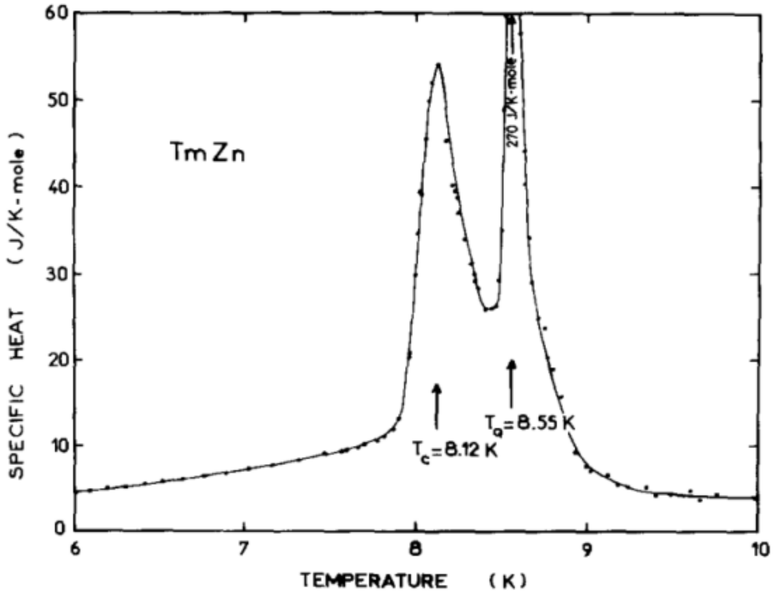

Рис.1.1. Температурна поведінка теплоємності TmZm: Tc - точка феромагнітного фазового переходу; Tq - точка квадрупольного фазового переходу

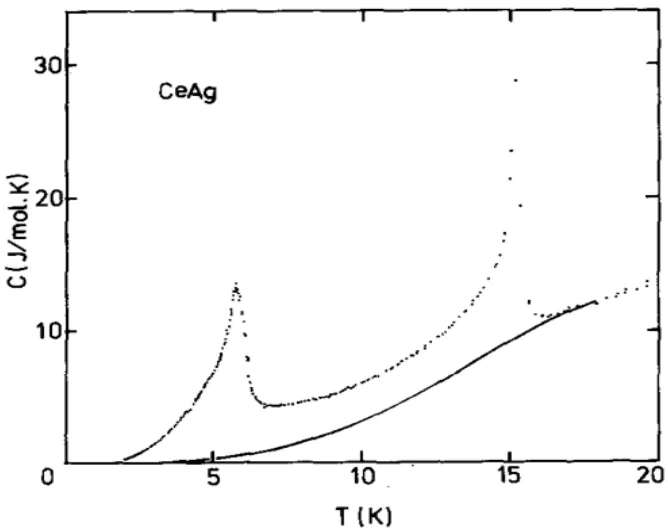

Рис 1.2. Аномалії теплоємності при температурах Tc = 5.5K і Tq = 15.5K для магнетика CeAg відповідають фазовим переходам в феромагнітне і квадрупольне упорядкування

Рисунки 1.1-1.2 демонструють залежність теплоємності фазових станів від температури. Виникнення сплеску теплоємності дослідники пов'язують з фазовим переходом в новий магнітний стан.

Квадрупольні стани спостерігають також і в багатопідґраткових кристалах. До них відносяться кристали TmTe [37]. Фазова діаграма, в цих магнетиках (див. рис. 1.3), залежить як від величини, так і від напрямку зовнішнього магнітного поля. Добре відомі і інші багатопідґраткові магнетики, які мають квадрупольне упорядкуванням [38-40].

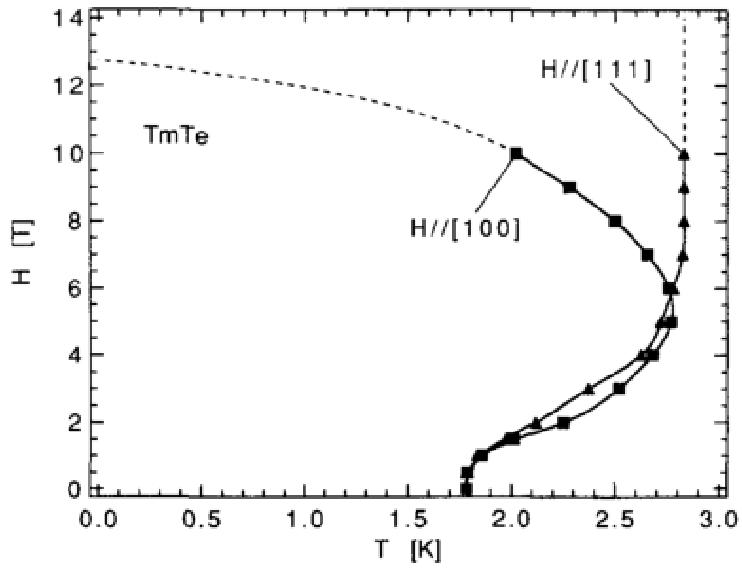

Рис.1.3. фазова «температура - магнітне поле» діаграма з'єднання TmTe

Необхідність і можливість розширення набору магнітних ступенів свободи в високоспінових магнетиках може бути зрозуміла, виходячи з симетрійних міркувань. Для опису систем зі спіном s=1 необхідно вийти за рамки стандартного уявлення фізики магнетизму про SO(3) симетрію обмінної взаємодії. В роботі [41] розглянуті магнетики зі спіном s=1, які мають SU(3) симетрією обмінної взаємодії. У цьому випадку система має вісім магнітних ступенів свободи, три з них це щільність спіна, а решта п'ять величин є щільність квадрупольної матриці [42].

Теоретичний аналіз можливих станів рівноваги магнетиків з SU(3) симетрією обмінної взаємодії досить детально представлений в науковій літературі [43-53].

У роботах [43-46] вивчені стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1 і розглянуті моделі гамільтоніана, що відповідають різним фазовим станам. На основі феноменологічного підходу проаналізовано фазові стани магнетиків і передбачені магнітні стани такі як: квадрупольний, стан спінового нематика і антиферомагнітного спінового нематика. В роботі Haldane [47] передбачені нові фази низькорозмірних магнетиків зі спіном s=1. В роботі [48] досліджено просторово-неоднорідні фази стану рівноваги та показана можливість магнітного впорядкування спірального типу. У роботах [49-50] класифіковані надплинні стани рівноваги для квантових станів в магнетиках зі спіном s=1. Роботи [51-52] присвячені дослідженню надплинних станів рівноваги на основі модельного виду обмінної енергії як функції тензорного параметра порядку. Питанням співіснування явищ феромагнетизму та бозе-конденсації присвячена робота [53].

Поряд з дослідженнями основного стану магнетиків зі спіном s=1, дослідниками розглянуті питання динаміки таких фізичних систем [54-69]. Нерівноважні процеси в однопідґраткових магнетиках зі спіном s=1 розглянуті в [54-57]. Автори цих робіт використовували набір магнітних ступенів свободи, відповідний чистим квантовим станам. Нелінійні рівняння динаміки квадрупольних магнетиків в базисі Вейля отримані в роботах [58-59]. Інший базис (базис Рака) використовувався для отримання рівнянь динаміки, досліджуваних магнетиків, в роботі [60]. Динамічні рівняння, отримані в [59-63], характеризують змішані квантові стани. У роботах [64-66] встановлено структуру дисипативних потоків в динамічних рівняннях для випадку SU(3) симетричного гамільтоніана. Характер затухання спектрів магнітних збуджень вивчений в роботі [65], де відзначено важливість впливу обмінної симетрії гамільтоніана на механізми релаксації.

В роботі [65] досліджено стани рівноваги і розглянуто моделі гамільтоніана з сильною біквадратичною взаємодією. На цій основі проаналізовано фазові стани низьковимірних магнетиків та передбачено можливість вироджених магнітних станів. Нелінійні процеси в магнетиках зі спіном s=1 розглядалися в роботі [54]. Солітонна динаміка розглядалася авторами роботи [67], де отримані одномірні солітони, а в роботах [68,69] були знайдені двовимірні солітони розв'язки в таких високоспінових системах.

Незважаючи на великий інтерес і прогрес в цій галузі досліджень, не розглянуто або недостатньо вивчено ряд питань фізики магнітних систем зі спіном s=1. Так як магнетизм - квантове явище, то опис термодинаміки магнетиків зі спіном s=1 вимагає аналізу зв'язку магнітних ступенів свободи і фізичних станів. Кожне з чистих або змішаних квантових станів має свій набір магнітних величин, яким необхідно надати відповідний фізичний зміст. Для чистих квантових станів ці ступені свободи пов'язують з числом параметрів, що характеризують одночастинкові спінові стани. Умова нормування і свавілля вибору фази хвильової функції призводять до чотирьох магнітних ступенів свободи в однопідґраткових магнетиках зі спіном s=1 [61]. У разі змішаних квантових станів в силу ермітовості і умови нормування матриці щільності число таких магнітних ступенів свободи дорівнює восьми [41]. Аналіз магнітних ступенів свободи і опис динаміки в багатопідґраткових магнетиках зі спіном s=1 для випадку повного спонтанного порушення SU(3) симетрії раніше не проводилися.

Унітарна SU(3) симетрія обмінної взаємодії грає важливу роль у формуванні стану рівноваги і структурі динамічних рівнянь. На відміну від щільності спіна, щільність квадрупольної матриці є величиною, яка не змінює знак при зміні напрямку часу [42]. Щільність спіна, як і щільність квадрупольної матриці, є інтегралами руху.

Опис вироджених багатопідґраткових станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 використовує векторний і тензорний параметри порядку з різними трансформаційними властивостями по відношенню до операції зміни напрямку часу. Параметри порядку, або їх певні функції, є додатковими магнітними ступенями свободи, які характеризують термодинаміку багатопідґраткових систем. Вони мають фізичний зміст антиферомагнітного параметра порядку і параметра порядку спінового нематика [63]. До теперішнього часу недостатньо вивчені багатопідґраткові магнітні стани, в яких одночасно можливі ненульові рівноважні значення магнітних ступенів свободи з різною і однаковою часовою парністю. До них, зокрема, відносяться феро-нематичне, квадро-нематичне, антиферо-квадрупольне, антиферо-нематичне упорядкування магнетиків. Для таких систем необхідно встановити дисипативні щільності потоків адитивних інтегралів руху і ступенів свободи параметра порядку, а також дослідити характер затухання в спектрах колективних магнітних збуджень.

У магнітних системах зі спіном s=1 не досліджені функції Гріна для опису станів спінового нематика і квадрупольного магнетика в низькочастотній області. Ці магнітні системи мають рівне число магнітних ступенів свободи, але різну обмінну симетрію. Тому важливо знайти та проаналізувати низькочастотні асимптотики функцій Гріна цих магнітних упорядкування.

Нарешті, не вивчені питання класифікації станів рівноваги зі спонтанно порушеною магнітною симетрією, а також станів рівноваги зі спонтанно порушеною фазовою і магнітною симетрією в рамках методів, які не використовують модельні вирази вільної енергії як функції параметра порядку. Не розглянуто питання класифікації магнітних станів рівноваги в просторово-неоднорідному випадку, при якому одночасно порушена магнітна симетрія в спіновому просторі і трансляційна інваріантність в реальному просторі.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню магнетиків зі спіном s=1 та SU(3) симетрією обмінної взаємодії. Ми використовували як мікроскопічний, так і макроскопічний підходи до вивчення таких магнітних середовищ. Теоретичним фундаментом мікроскопічного підходу, що описує рівноважні стани конденсованих середовищ зі спонтанно порушеною симетрією, є концепція квазісередніх [70,71]. Введення в статистичний оператор Гіббза нескінченно малого джерела, що є функціоналом параметра порядку, знижує симетрію стану рівноваги в порівнянні з симетрією гамільтоніана і описує вироджені конденсовані стани.

Важливим елементом статистичної теорії конденсованих середовищ в дослідженні основного стану є уявлення про залишкову симетрію стану рівноваги [72-74]. Ідеологія квазісередніх і уявлення про залишкову симетрію дозволяють сформулювати рівняння для параметра порядку, які класифікують можливі фазові стани рівноваги. Такий підхід використовувався при класифікації надплинного He-3 [74,75]. У такому підході раніше класифіковані стани рівноваги в рідких кристалах, надплинних станах з d-спарюванням та з векторним параметром порядку [76,77]. До переваг такого підходу належить безмодельний розгляд, відсутня вимога близькості температури до точки фазового переходу. Ми використовуємо цей підхід для аналізу вироджених станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1.

Для розуміння властивостей станів рівноваги, крім параметра порядку, необхідно також знання рівноважних значень щільності магнітних інтегралів руху. Ці магнітні величини можна знайти в рамках моделі з виділеним конденсатом [78]. Спочатку ця модель описувала надплинні властивості зі скалярним параметром порядку та не включала розгляд магнітних ступенів свободи. Пізніше, були розроблені більш складні моделі з виділеним конденсатом, які враховують магнітні ступеня свободи [79, 80-82].

Для дослідження динаміки магнетиків зі спіном s=1 ми використовували гамільтонів формалізм, який широко застосовується при розгляді різноманітних фізичних систем на «гідродинамічному» етапі еволюції [83] для опису повільних нерівноважних процесів. Основну роль в гамільтоновому підході відіграє встановлення дужок Пуассона динамічних величин [84-86,58]. У разі конденсованих середовищ дужки Пуассона таких змінних, на відміну від звичайних механічних систем, мають нетривіальну структуру. Гамільтонів підхід дозволяє порівняно просто, не гублячи фізичної ясності, отримати рівняння динаміки в адіабатичному наближенні та врахувати необхідні властивості симетрії гамільтоніана.

Ефективним методом, який ми також використовували у вивченні магнітних систем, є метод функцій Гріна. Функції Гріна в теорію систем багатьох взаємодіючих частинок введені Х. Келленом і Т. Вельтон [87] та Р. Кубо [88]. Згодом виявилося, що для широкого кола завдань статистичної механіки зручно використовувати двочасові функції Гріна [89-92], знання яких дозволяє зрозуміти, як стан рівноваги, так і особливості нерівноважних процесів, якщо відхилення від рівноваги малі. Знаходження функцій Гріна, як правило, використовує різного роду наближені методи. До них, зокрема, відносяться квазічастинкові наближення, метод випадкових фаз, розкладання по малому параметру і апроксимації з неконтрольованим характером наближення [90-92]. Ці методи використовувалися в [93,94,44] при вивченні властивостей двочасових функцій Гріна високоспінових магнетиків. Обчислення функцій Гріна в низькочастотній області для магнетиків зі спіном s=1 раніше не проводилося. Вирішення цього завдання тісно пов'язане з поведінкою фізичної системи при великих часах і можливе двома методами. Один з них - метод функцій «пам'яті» [95]. Інший підхід - це метод «джерел», який отримав свій розвиток для надплинних рідин і вироджених магнітних систем зі спіном s=1/2 [96-99,75].

При дослідженні динаміки нерівноважних станів магнетиків зі спіном s=1 важливо врахувати релаксаційні явища. До теперішнього часу питання загального виду релаксаційних доданків в рівняннях динаміки магнетиків зі спіном s=1 залишається відкритим. Це завдання в принципі може бути вирішено, як методами статистичної механіки [100-103], так і в рамках феноменологічних підходів [104-107]. У мікроскопічному розгляді використання уявлення скороченого опису нерівноважних процесів дозволяє знайти огрублений статистичний оператор в теорії збурень по малому параметру (щільність, міжчастинкова взаємодія, просторові неоднорідності). У головному наближенні теорії збурень, одержувані динамічні рівняння описують адіабатичні процеси. Врахування наступного наближення призводить до виникнення інтегралів зіткнення або кінетичних коефіцієнтів, які описують релаксацію на кінетичному або гідродинамічному етапі еволюції. Кінетичні коефіцієнти можуть бути виражені в представленні Кубо-Гріна [108-109]. Пряме обчислення такого типу виразів кінетичних коефіцієнтів є важкою задачею. Тому, для обчислення кінетичних коефіцієнтів дослідники використовують метод Чепмена-Енскога [110]. При обчисленні кінетичних коефіцієнтів газоподібних об'єктів (газ магнонів, квазічастинок) ефективним є метод ортогональних поліномів, запропонований в роботах [111-112]. В рамках такого методу раніше обчислені кінетичні коефіцієнти в газах магнонів феродіелектриків і антиферомагнетиків.

Проведений аналіз літератури показує, що в даний час відсутній сформований підхід в описі динаміки магнетиків зі спіном s=1. Не проведено аналіз вироджених фазових станів рівноваги досліджуваних магнетиків способом, вільним від модельних міркувань. Не з'ясованими залишаються питання обліку релаксаційних процесів та аналітичного виду низькочастотних асимптотик двочасових функцій Гріна. Наведене обґрунтування вибору напрямку досліджень і сформульовані завдання мають на меті подальший розвиток цього напрямку досліджень та подолання існуючих суперечностей наявних напрацювань. Відповідям на поставлені питання дослідження присвячені розділи 2-4 дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2.
СТАНИ СТАТИСТИЧНОЇ РІВНОВАГИ МАГНЕТИКІВ ЗІ СПІНОМ S=1

У другому розділі на основі методів статистичної фізики розглянуті рівноважні стани конденсованих середовищ зі спіном s=1 і спонтанно порушеною SU(3) симетрією гамільтоніана. Теоретичним фундаментом даного мікроскопічного підходу є концепція квазісередніх і уявлення про залишкову симетрію. В рамках цього підходу розглянуто задачу класифікації параметрів порядку в стані статистичної рівноваги в умовах порушення магнітної SU(3) симетрії, а також у разі порушення магнітної і фазової симетрій. Обчислені аналітичні розв’язки рівнянь класифікації параметрів порядку і встановлено характер магнітної анізотропії.

Основні результати другого розділу опубліковані в роботі [126,127].

2.1. Інтеграли руху та властивості симетрії нормальних станів рівноваги

У цьому підрозділі розглянуті нормальні стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1 і сформульовані властивості їх симетрій. Статистичний оператор Гіббза таких станів має вид

$$\hat{w}(Y)=\exp\left(\Omega(Y)-Y_0\hat{\hat{H}}-Y_k\hat{\hat{P}}_k-Y_4\hat{\hat{N}}-Y_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}_{\beta\alpha}\right). \qquad (2.1)$$

Набір адитивних інтегралів руху $\hat{\hat{\gamma}}_a\equiv\left(\hat{\hat{H}},\hat{\hat{P}}_k,\hat{\hat{N}},\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right)$, $(a=0,4,k,\alpha\beta)$ складається з гамільтоніана $\hat{\hat{H}}$, імпульсу $\hat{\hat{P}}_k=\int d^3x\hat{\hat{\pi}}_k(\mathbf{x})$, $(k=1,2,3$ - просторові індекси), оператора числа частинок $\hat{\hat{N}}=\int d^3x\hat{\hat{n}}(\mathbf{x})$ та магнітного інтеграла руху $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ [41], який визначається співвідношенням

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \int d^3x \left(\hat{\hat{\psi}}^+_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\hat{\psi}}_\beta(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\beta} \hat{\hat{\psi}}^+_\gamma(\mathbf{x}) \hat{\hat{\psi}}_\gamma(\mathbf{x}) / 3 \right) = \int d^3x g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}). \qquad (2.2)$$

Тут $\hat{\hat{\psi}}^+_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\hat{\psi}}_\beta(\mathbf{x})$ - оператори народження і знищення бозе-частинки в точці $\mathbf{x}$; $\alpha, \beta = x, y, z$ - спінові індекси. Оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ - являє собою генератор SU(3) симетрії в базисі Вейля [113,114] та задовольняє рівностям $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \hat{\hat{G}}^+_{\beta\alpha}$, $\hat{\hat{G}}_{\alpha\alpha} = 0$. Він зв'язаний з ермітовими операторами спіна $\hat{\hat{S}}_\alpha$ та квадрупольною матрицею $\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$ співвідношенням

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\hat{S}}_\gamma / 2, \qquad (2.3)$$

$$\hat{\hat{S}}_\alpha = \int d^3x \hat{\hat{s}}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} = \int d^3x \hat{\hat{q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}).$$

Оператори вторинного квантування позначені як $\hat{\hat{A}}$, для їх відмінності від скінченновимірних матриць. Термодинамічні сили Y_a, спряжені адитивним інтегралами руху, включають температуру $T = Y_0^{-1}$, макроскопічну швидкість $v_k = -Y_k / Y_0$, хімічний потенціал $\mu = -Y_4 / Y_0$ та комплексну 3х3 матрицю $Y_{\alpha\beta}$. В силу ермітовості оператора Гіббза ця матриця задовольняє співвідношенню $Y_{\alpha\beta} = Y^*_{\beta\alpha}$. Введемо в розгляд дійсні термодинамічні параметри, які спряжені до оператору спіна та квадрупольної матриці за допомогою рівностей: $Y_{\alpha\beta} \hat{\hat{G}}_{\beta\alpha} \equiv Y_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + Y^{(s)}_{\alpha\beta} \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$, $Y^{(s)}_{\alpha\beta} \equiv \left(Y_{\alpha\beta} + Y_{\beta\alpha} \right)/2$, $Y_\alpha \equiv i\varepsilon_{\gamma\beta\alpha} Y_{\beta\gamma}$. Величина $-Y_\alpha / Y_0 \equiv h_\alpha$ - являє собою ефективне магнітне поле. Аналогічно, величині $-Y_{\alpha\beta} / Y_0 \equiv h_{\alpha\beta}$ ми придаємо фізичний зміст ефективного квадрупольного поля. Так як оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ безслідний $\hat{\hat{G}}_{\alpha\alpha} = 0$, то без обмеження спільності вважаємо, що $tr\hat{Y} = tr\hat{Y}^{(s)} = 0$. Слід скінченновимірних матриць позначений знаком tr, щоб відрізнити його від аналогічної дії в гільбертовому просторі.

Щільності адитивних інтегралів руху в термінах польових бозе-операторів мають вигляд:

$$\hat{\hat{n}}(\mathbf{x}) = \hat{\hat{\psi}}^{+}_{\alpha}(\mathbf{x})\hat{\hat{\psi}}_{\alpha}(\mathbf{x}), \qquad \hat{\hat{\pi}}_{k}(\mathbf{x}) = i\left(\nabla_{k}\hat{\hat{\psi}}^{+}_{\beta}(\mathbf{x})\hat{\hat{\psi}}_{\beta}(\mathbf{x}) - \hat{\hat{\psi}}^{+}_{\beta}(\mathbf{x})\nabla_{k}\hat{\hat{\psi}}_{\beta}(\mathbf{x})\right)/\,2\,,$$
$$\hat{\hat{s}}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \hat{\hat{\psi}}^{+}_{\mu}(\mathbf{x})(\hat{s}_{\alpha})_{\mu\nu}\hat{\hat{\psi}}_{\nu}(\mathbf{x}), \qquad \hat{\hat{q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \hat{\hat{\psi}}^{+}_{\mu}(\mathbf{x})\left(\hat{q}_{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}\hat{\hat{\psi}}_{\nu}(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$
$$\left(\hat{s}_{\alpha}\right)_{\mu\nu} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}, \qquad \left(\hat{q}_{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu} \equiv \left(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}/\,3\right)/\,2\,.$$

З огляду на канонічні комутаційні співвідношення бозе-операторів і, беручи до уваги визначення (2.2), (2.4), отримаємо комутатор для генератора SU(3) симетрії в базисі Вейля [113,114]

$$\left[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}\right] = \hat{\hat{G}}_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \hat{\hat{G}}_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu}\,. \tag{2.5}$$

Решта комутаторів адитивних інтегралів руху звертаються в нуль. У досліджуваному нами випадку магнетиків зі спіном s=1 в силу SU(3) симетрії гамільтоніана $\left[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{G}}\right] = 0$ набір магнітних інтегралів руху, наряду з вектором спіна, включає також симетричну та безслідну квадрупольну матрицю:

$$\left[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\mathbf{S}}}\right] = 0\,, \qquad \left[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{Q}}\right] = 0\,.$$

Сформулюємо властивості симетрії нормальних станів рівноваги розглянутих магнетиків. До них відносяться інваріантність статистичного оператора (2.1) щодо фазових перетворень, а також просторова однорідність та ізотропія стану рівноваги:

$$\left[\hat{w}, \hat{\hat{N}}\right] = 0, \qquad \left[\hat{w}, \hat{\hat{P}}_{k}\right] = 0, \qquad \left[\hat{w}, \hat{\hat{L}}_{i}(\mathbf{Y})\right] = 0. \tag{2.6}$$

Тут узагальнений оператор орбітального моменту визначений рівністю

$$\hat{\hat{L}}_i(\mathbf{Y}) = \hat{\hat{L}}_i + L_i(\mathbf{Y}), \qquad \hat{\hat{L}}_i = \varepsilon_{ikl}\int d^3x x_k \hat{\hat{\pi}}_l(\mathbf{x}), \qquad L_i(\mathbf{Y}) = -i\varepsilon_{ikl} Y_k \frac{\partial}{\partial Y_l},$$

де $\hat{\hat{\pi}}_l(\mathbf{x})$ - оператор щільності імпульсу. Поряд з співвідношеннями (2.6), має місце умова симетрії магнітної системи в спіновому просторі

$$\left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}(\hat{Y})\right] = 0. \qquad (2.7)$$

Узагальнений генератор SU(3) симетрії визначається рівностями

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}(\hat{Y}) = \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}(\hat{Y}), \qquad G_{\alpha\beta}(\hat{Y}) = Y_{\alpha\nu}\frac{\partial}{Y_{\beta\nu}} - Y_{\nu\beta}\frac{\partial}{Y_{\nu\alpha}}.$$

Далі, нам зручно умову магнітної симетрії представити в термінах дійсних магнітних термодинамічних сил

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}(\hat{Y}) \to \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}) \equiv \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}) + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_\gamma(\hat{\mathbf{Y}})/2.$$

Тут $(\hat{\mathbf{Y}}) \equiv (\mathbf{Y}, \hat{Y}^{(s)})$ дійсні магнітні термодинамічні параметри. Узагальнені оператори спіна та квадрупольної матриці визначаються співвідношеннями

$$\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}), \qquad \hat{\hat{S}}_\gamma(\hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\hat{S}}_\gamma + S_\gamma(\hat{\mathbf{Y}}),$$

$$Q_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{Y}}) \equiv i\left(Y^{(s)}_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma} + Y^{(s)}_{\beta\lambda}\varepsilon_{\lambda\alpha\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial Y_\gamma} + 2iY_\sigma\left(\varepsilon_{\sigma\beta\lambda}\frac{\partial}{\partial Y^{(s)}_{\lambda\alpha}} + \varepsilon_{\sigma\alpha\lambda}\frac{\partial}{\partial Y^{(s)}_{\lambda\beta}}\right),$$

$$\hat{\hat{S}}_{\gamma}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right) \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(Y_{\alpha}\frac{\partial}{\partial Y_{\beta}} + 2Y^{(s)}_{\alpha\lambda}\frac{\partial}{\partial Y^{(s)}_{\beta\lambda}} \right).$$

З наведеного виду цих операторів отримаємо квантову алгебру

$$i\left[\hat{\hat{S}}_{\alpha}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right), \hat{\hat{S}}_{\beta}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)\right] \equiv -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_{\gamma}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right),$$

$$i\left[\hat{\hat{S}}_{\alpha}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right), \hat{\hat{Q}}_{\beta\gamma}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)\right] \equiv -\varepsilon_{\alpha\gamma\sigma}\hat{\hat{Q}}_{\sigma\beta}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right) - \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\hat{\hat{Q}}_{\sigma\gamma}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right),$$

$$i\left[\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right), \hat{\hat{Q}}_{\gamma\rho}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)\right] \equiv -\hat{\hat{S}}_{\lambda}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)\left(\delta_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\rho\lambda} + \delta_{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\rho\lambda} + \delta_{\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\rho}\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\right)/4. \qquad (2.8)$$

Ці формули нам будуть потрібні нижче для формулювання рівнянь класифікації параметрів порядку, які характеризують вироджені стани рівноваги.

2.2. Спонтанне порушення симетрії. Квазісередні. Генератор залишкової симетрії та рівняння класифікації параметра порядку

Для опису станів рівноваги зі спонтанно порушеною симетрією ми використовуємо концепцію квазісередніх [70,74]. Це означає, що статистичний оператор Гіббза має вид

$$\hat{\hat{w}}(Y,\xi) = \exp\left(\Omega - Y_{a}\hat{\hat{\gamma}}_{a} - \nu\hat{\hat{F}}(\xi)\right).$$

Джерело, яке порушує симетрію стану рівноваги, являє собою лінійний функціонал оператора параметра порядку

$$\hat{\hat{F}} = \int d^{3}x\left(f_{n}(\mathbf{x},\xi)\hat{\hat{\Delta}}_{n}(\mathbf{x}) + h.c.\right). \qquad (2.9)$$

Тут $f_n(\mathbf{x})$ - деяка функція, спряжена до оператора параметра порядку, яка задає його рівноважні значення $\Delta_n(\mathbf{x}) = \left\langle \hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x}) \right\rangle$. Квазісередні визначаються формулою

$$\left\langle \hat{a}(\mathbf{x}) \right\rangle \equiv \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp\hat{\hat{w}}(Y, \xi)\hat{a}(\mathbf{x}),$$

де $\hat{a}(\mathbf{x})$ - довільний квазілокальний оператор. Вибір параметра порядку в (2.9) пов'язаний з конкретною природою виродження рівноважних станів конденсованих середовищ. Індекс n характеризує тензорну структуру параметра порядку. Структура функцій $f_n(\mathbf{x})$ визначається властивостями симетрії фази магнетика та дає можливість ввести в рамках мікроскопічної теорії додаткові термодинамічні параметри ξ в розподіл Гіббза, які в загальному випадку мають тензорний характер. На конкретних прикладах магнітних та надплинних фазових переходів, ми покажемо, як виникають додаткові термодинамічні параметри, які характеризують вироджені стани рівноваги.

Наведемо загальну схему отримання рівнянь класифікації для рівноважних значень параметра порядку. Для цього нам знадобляться трансформаційні властивості оператора параметра порядку. Генератором групи фазових перетворень є оператор числа частинок $\hat{\hat{N}}$. Оператор параметра порядку $\hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x})$ перетвориться згідно співвідношенню

$$\left[\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x})\right] = -g\hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

Постійна g залежить від тензорної розмірності оператора параметра порядку. При перетвореннях, пов'язаних з групою SU(3) симетрії, генератором якої є оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$, оператор параметра порядку $\hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x})$ трансформується через представленням цієї групи

$$i\left[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{\Delta}}_m(\mathbf{x})\right] = -g_{\alpha\beta mn}\hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x}), \qquad (2.11)$$

або в компактному записі

$$i\left[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right] = -g_{\alpha\beta}\hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}),$$

де $\left(\hat{g}_{\alpha\beta}\right)_{mn} \equiv g_{\alpha\beta mn}$ - постійні матричні елементи, залежні від тензорної розмірності оператора параметра порядку. З формули (2.11), використовуючи тотожність Якобі для операторів $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}$ та $\hat{\hat{\Delta}}_n(\mathbf{x})$, випливає співвідношення для матричних елементів

$$i\left[\hat{g}_{\alpha\beta}, \hat{g}_{\mu\nu}\right] = \delta_{\mu\beta}\hat{g}_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\nu}\hat{g}_{\mu\beta}.$$

Умова трансляційної інваріантності оператора параметра порядку має вигляд

$$i\left[\hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right] = -\nabla_k\hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}).$$

Іншим важливим елементом статистичної теорії фазових станів є уявлення про залишкову (непорушену) симетрію стану рівноваги [115,116]. Це означає, що статистичний оператор вироджених станів рівноваги задовольняє співвідношенню симетрії [74,117]

$$\left[\hat{w}(Y,\xi), \hat{\hat{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},\xi\right)\right] = 0. \qquad (2.12)$$

Тут генератор залишкової симетрії $\hat{\hat{T}}$ є лінійною комбінацією інтегралів руху, по відношенню до яких симетрія стану рівноваги порушена. У разі спонтанного порушення фазової та магнітної симетрії стану рівноваги генератор залишкової симетрії має вид:

$$\hat{\hat{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},\xi\right)\equiv\xi_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}_{\beta\alpha}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)+c\hat{\hat{N}}=b_{\alpha}\hat{\hat{S}}_{\alpha}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)+d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)+c\hat{\hat{N}}\,. \tag{2.13}$$

В силу його ермітовості, параметри $\xi\equiv b_{\alpha},d_{\alpha\beta},c$ - дійсні величини. Матриця $d_{\alpha\beta}$ симетрична та безслідна $d_{\alpha\beta}=d_{\beta\alpha}$, $d_{\alpha\alpha}=0$. П'ять її незалежних компонент ми параметризуємо співвідношенням

$$d_{\alpha\beta}=d_1\left(m_{\alpha}m_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}/3\right)+d_2\left(n_{\alpha}n_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}/3\right).$$

Тут d_1,d_2 - модулі цієї матриці. Вектори $m_{\alpha},n_{\alpha},l_{\alpha}=\left(\mathbf{m}\times\mathbf{n}\right)_{\alpha}$ утворюють ортонормований репер. Розкладання вектора $\mathbf{b}$ по цьому реперу представимо в виді

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{m}+b_2\mathbf{n}+b_3\mathbf{l}\,.$$

Наряду з термодинамічними силами Y_a, параметри генератора залишкової симетрії $\xi\equiv b_{\alpha},d_{\alpha\beta}$ являють собою вектор та тензор спонтанної магнітної анізотропії, відповідно. Умова залишкової симетрії (2.12) дозволяє сформулювати для параметра порядку лінійні диференціальні, або, в окремому випадку, алгебраїчні рівняння. Розв'язки цих рівнянь класифікують вироджені стани рівноваги в припущенні ненульового рівноважного значення параметра порядку. Допустимі значення параметрів генератора залишкової симетрії можуть бути неперервними величинами, (наприклад, осі магнітної анізотропії), а також мати дискретний характер. Останні величини трактуються як квантові числа або функції, які розрізняють квантові стани. З умови залишкової симетрії (2.12) та трансформаційних співвідношень (2.10) та (2.11) приходимо до лінійних однорідних диференціальних рівнянь класифікації рівноважних значень параметра порядку

$$T_{mn}\left(\hat{\mathbf{Y}},\xi\right)\Delta_n = 0, \qquad (2.14)$$
$$T_{mn}(C,\xi) \equiv \xi_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha mn} + i\delta_{mn}\left(c + tr\hat{\xi}\hat{G}\left(\hat{\mathbf{Y}}\right)\right).$$

Рівняння (2.14) спрощується при $\hat{\mathbf{Y}} = 0$ та стає алгебраїчним. Умова існування нетривіального розв’язку для параметра порядку в останньому випадку набуває вигляду

$$\det\hat{T}(0,\xi) = 0.$$

Допустимі значення набору параметрів генератора залишкової симетрії, які задовольняють цьому співвідношенню, класифікують вироджені стани рівноваги.

Ми використовуємо представлену схему класифікації для аналізу магнітних та надплинних станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1, які володіють SU(3) симетрією обмінної взаємодії.

2.3. Розв’язки рівняння класифікації для параметрів порядку антиферомагнетика та спінового нематика

Розглянемо окремий випадок вироджених станів рівноваги, в яких порушена тільки магнітна симетрія (2.7). У магнетиках з декількома підґратками генератор SU(3) симетрії системи та магнітний оператор параметра порядку визначимо співвідношеннями

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x \sum_n \hat{\hat{g}}^{(n)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \qquad \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv \sum_n \theta_n \hat{\hat{g}}^{(n)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \qquad (2.15)$$

де оператори n–підґратки $\hat{g}^{(n)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ визначаються співвідношенням аналогічним (2.2) та θ_n - деякі довільні постійні, що не обертаються в нуль або одиницю одночасно. Оператори параметра порядку спінового нематика $\hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ та антиферомагнетика $\hat{\hat{\Delta}}_{\gamma}(\mathbf{x})$ пов'язані з оператором параметра порядку (2.15) рівністю

$$\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{\Delta}}_{\gamma}(\mathbf{x})/2\,. \qquad (2.16)$$

Беручи до уваги формули (2.15) та (2.16), отримаємо квантові дужки Пуассона операторів параметрів порядку з магнітними інтегралами руху

$$i\left[\hat{\hat{S}}_{\alpha}, \hat{\hat{\Delta}}_{\beta}(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{\Delta}}_{\gamma}(\mathbf{x}), \qquad i\left[\hat{\hat{S}}_{\alpha}, \hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{\alpha\sigma\mu}\hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\sigma\nu}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\sigma\nu}\hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\sigma\mu}(\mathbf{x}),$$

$$i\left[\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{\Delta}}_{\gamma}(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{\alpha\gamma\sigma}\hat{\hat{\Delta}}_{\sigma\beta}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\beta\gamma\sigma}\hat{\hat{\Delta}}_{\sigma\alpha}(\mathbf{x}), \qquad (2.17)$$

$$i\left[\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\right] = \hat{\hat{\Delta}}_{\sigma}(\mathbf{x})\left(\varepsilon_{\mu\beta\sigma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu} + \varepsilon_{\nu\beta\sigma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\right)/4\,.$$

Використовуючи властивість залишкової симетрії (2.12), та, з огляду на співвідношення (2.17), отримаємо при $\hat{\mathbf{Y}} = 0$ систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для обох параметрів порядку

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(b_{\beta}\Delta_{\gamma} + 2d_{\beta\sigma}\Delta^{(s)}_{\gamma\sigma}\right) = 0, \qquad (2.18)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\left(d_{\alpha\nu}\Delta_{\beta} - 2\Delta^{(s)}_{\alpha\nu}b_{\beta}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\nu}\left(d_{\alpha\mu}\Delta_{\beta} - 2\Delta^{(s)}_{\alpha\mu}b_{\beta}\right) = 0\,.$$

Ці рівняння встановлюють їх допустимі значення, якщо відповідний детермінант матриці звертається в нуль. Беручи до уваги явний вид (2.18), нескладно бачити, що умова існування ненульових розв’язків параметрів порядку виконується при будь-яких значеннях вектора спонтанної магнітної анізотропії $\mathbf{b}$ та матриці спонтанної магнітної анізотропії $\hat{d}$.

Для знаходження необхідних величин використовуємо розкладання антиферомагнітного параметра порядку по ортонормованому реперу

$$\boldsymbol{\Delta} = \Delta_1 \mathbf{m} + \Delta_1 \mathbf{n} + \Delta_3 \mathbf{l}.$$

Аналогічно, параметр порядку спінового нематика шукаємо у вигляді розкладу $\Delta^{(s)}_{\alpha\beta} = \Delta^{(s)}_n F^{(n)}_{\alpha\beta}$ по повному набору симетричних та безслідних матриць $F^{(n)}_{\alpha\beta}$, ($n = 1,2,3,4,5$), визначених рівностями

$$F^{(1)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \qquad F^{(2)}_{\alpha\beta} = \left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \tag{2.19}$$
$$F^{(3)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha n_\beta + m_\beta n_\alpha\right), \quad F^{(4)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha l_\beta + m_\beta l_\alpha\right), \quad F^{(5)}_{\alpha\beta} = \left(n_\alpha l_\beta + n_\beta l_\alpha\right).$$

Рівняння (2.18) пов'язують дійсні амплітуди антиферомагнітного параметра порядку Δ_k (к=1,2,3) з параметром порядку спінового нематика $\Delta^{(s)}_n$ (n=1,2,..5). Наведемо явний вид параметрів порядку для ряду значень параметрів спонтанної анізотропії. Розглянемо, спочатку, одновісну анізотропію.

Випадок 1. $\mathbf{b} \neq 0$, $\hat{d} = 0$, $\hat{\hat{F}}_1 = \int d^3x f_\alpha(\mathbf{x},\xi)\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})$: розв’язки для параметрів порядку $\boldsymbol{\Delta}$ та $\hat{\Delta}^{(s)}$ містять дві незалежні величини:

$$\boldsymbol{\Delta} = \Delta_0 \mathbf{b}/b, \qquad \Delta^{(s)}_{\alpha\beta} = \Delta_*\left(b_\alpha b_\beta / b^2 - \delta_{\alpha\beta}/3\right).$$

Тут $\Delta_0 \equiv |\boldsymbol{\Delta}|$, $b \equiv |\mathbf{b}|$, $\Delta_* \equiv \left(3tr\hat{\Delta}^{(s)2}\right)^{1/2}$. Напрямок осі анізотропії тензорного параметра порядку збігається з напрямком векторного параметра порядку.

Випадок 2. $\mathbf{b}=0,\ \hat{d}=d\hat{F}^{(1)},\ \hat{\hat{F}}_2=\int d^3x f_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\xi)\hat{\hat{\Delta}}^{(s)}_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$: розв'язки рівнянь (2.18) мають вигляд:

$$\mathbf{\Delta}=0, \qquad \hat{\Delta}^{(s)}=\Delta_1\hat{F}^{(1)}+\Delta_2\hat{F}^{(2)}+\Delta_5\hat{F}^{(5)}. \qquad (2.20)$$

Рівноважні значення параметрів порядку залежать від трьох довільних величин: $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_5$. Тензорний параметр порядку (2.20) містить два окремих розв'язки, що відповідають нематичному упорядкуванню:

a) $\Delta^{(s)}_{\alpha\beta}=\Delta_* F^{(1)}_{\alpha\beta}$; та b) $\Delta^{(s)}_{\alpha\beta}=\Delta_*\left(e_\alpha e_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3\right)$, де $e_\alpha=n_\alpha\cos\varphi+l_\alpha\sin\varphi$. Тут φ - довільна фаза. Випадок a) - описує нематичне упорядкування типу «легка вісь», а випадок b) - впорядкування типу «легка площина». Тензорний параметр порядку веде до магнітного упорядкування одновісного спінового нематика, якщо справедливі зв'язки амплітуд: у разі a): $\Delta_1=\Delta_*,\ \Delta_2=\Delta_3=0$; у випадку b): $\Delta_1=-\Delta_*\sin^2\varphi,\ \Delta_2=\Delta_*\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right),\ \Delta_3=\Delta_*\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi$.

Випадок 3. $\mathbf{b}=0,\ \hat{d}=d_1\hat{F}^{(1)}+d_2\hat{F}^{(2)},\ d_1\neq d_2$: Антиферомагнітний параметр порядку дорівнює нулю $\mathbf{\Delta}=0$. Для параметра порядку спінового нематика отримані двовісні розв'язки

$$\hat{\Delta}^{(s)}_{\alpha\beta}=\Delta^{(1)}_*\left(e^{(1)}_\alpha e^{(1)}_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3\right)+\Delta^{(2)}_*\left(e^{(2)}_\alpha e^{(2)}_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3\right).$$

Тут осі анізотропії пов'язані з ортонормованим репером співвідношеннями:

$$e^{(1)}_\alpha=\cos\varphi_1 n_\alpha+\sin\varphi_1 l_\alpha,$$
$$e^{(2)}_\alpha=\cos\varphi_2 n_\alpha+\sin\varphi_2 l_\alpha,$$
$$\Delta^{(1)}_*\sin 2\varphi_1=\Delta^{(2)}_*\sin 2\varphi_2.$$

При $d_1=d_2$, в силу співвідношення $m_\alpha m_\beta+n_\alpha n_\beta+l_\alpha l_\beta=\delta_{\alpha\beta}$, отримаємо розв'язок, аналогічний випадку 2.

Випадок 4. $\mathbf{b}=b_1\mathbf{m}+b_2\mathbf{n}+b_3\mathbf{l}$, $\hat{d}=d_1\hat{F}^{(1)}+d_2\hat{F}^{(2)}$: Ця ситуація загального положення, яка відповідає тривісній анізотропії. Наведемо явний вид параметрів порядку:

$$\mathbf{\Delta}=b_1A_+\mathbf{m}+b_2A_-\mathbf{n}+b_3C\mathbf{l}, \qquad \Delta^{(s)}_{\alpha\beta}=\Delta_*\left(b_\alpha b_\beta-b^2\delta_{\alpha\beta}/3\right)+d_1A_-F^{(1)}_{\alpha\beta}/2+d_2A_+F^{(2)}_{\alpha\beta}/2.$$

Бачимо, що всі вісім амплітуд обох параметрів порядку можуть бути представленні в термінах двох незалежних амплітуд Δ_0,Δ_*:

$$A_\pm\equiv\Delta_0\left[1+\left(d_1+d_2\right)/2\right]\pm\Delta_*\left(d_1-d_2\right), \qquad C\equiv\left(A_++A_-\right)/2-\Delta_*\left(d_1+d_2\right).$$

Беручи до уваги співвідношення зв'язку вектора магнітної анізотропії $\mathbf{b}$ з кутами φ та θ: $b_1=b\cos\theta\cos\varphi$, $b_2=b\cos\theta\sin\varphi$, $b_3=b\sin\theta$, представимо модуль антиферомагнітного параметра порядку у вигляді

$$\Delta(\theta,\varphi)=b\sqrt{\cos^2\theta\left(A_+^2\cos^2\varphi+A_-^2\sin^2\varphi\right)+C^2\sin^2\theta}.$$

Не порушуючи загальності розгляду, величини $b=\Delta_0=1$, та наведемо вид поверхні в сферичній системі координат:

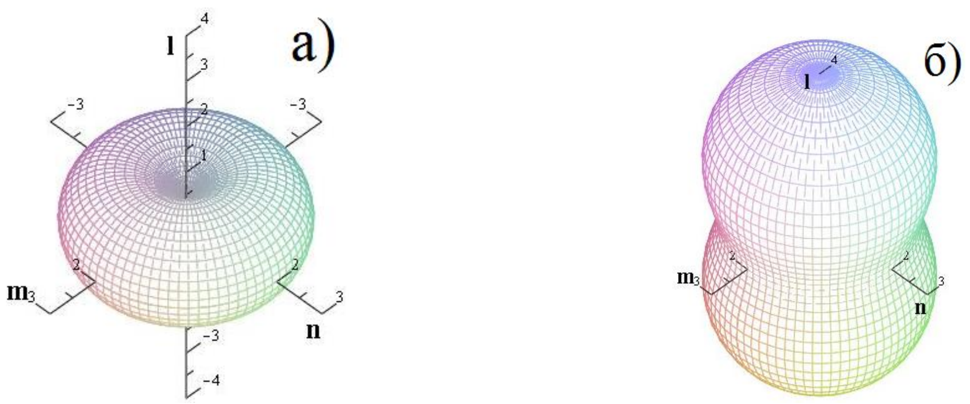

Рис. 2.1. Модуль антиферомагнітного параметра порядку $|\mathbf{\Delta}|$, *як функції полярного та азимутального кутів в одновісному випадку* $d_1=d_2=1$. *а) при значеннях* Δ_* *=-2; б) при значеннях* Δ_* *=2.*

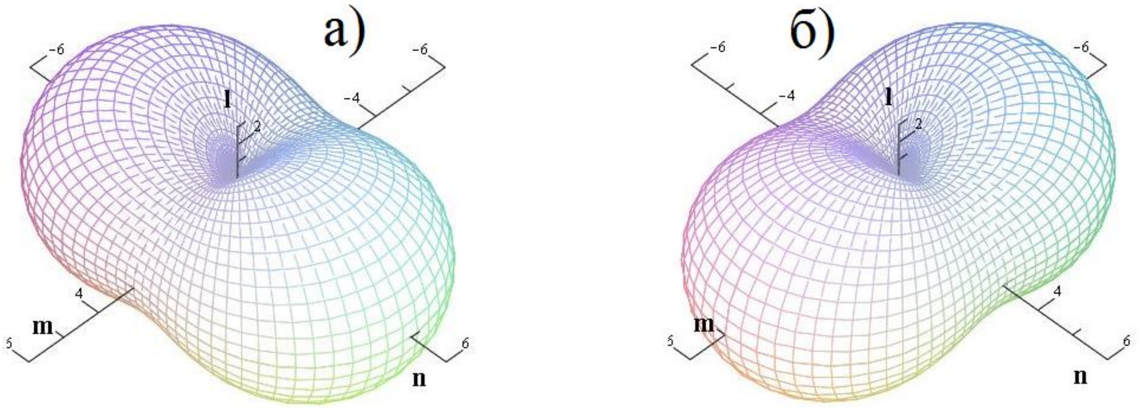

Рис. 2.2. Модуль антиферомагнітного параметра порядку $|\mathbf{\Delta}|$*, як функції полярного та азимутального кутів в одновісному випадку* $d_1 = 1, d_2 = -1$*. а) при значеннях* $\Delta_* = -2$*; б) при значеннях* $\Delta_* = 2$*.*

Як видно з представлених рисунків, в одновісному випадку матриці $\hat{d}$ (рис. 2.1) поверхня змінюється тільки уздовж однієї осі $\mathbf{l}$. У другому випадку, коли матриця $\hat{d}$ приймає двовісний вид (дивитися рис. 2.2), поверхня змінюється в двох напрямках, уздовж осей $\mathbf{m}$ та $\mathbf{n}$.

Розглянемо питання класифікації магнітних станів рівноваги в просторово-неоднорідному випадку, при якому одночасно порушена симетрія в спіновому просторі (2.7) та в умову просторової однорідності (2.6). В рамках феноменологічної теорії неоднорідні стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1/2 раніше вивчені в [118], де враховувалася SO(3) симетрія обмінної взаємодії гамільтоніана. Питання класифікації неоднорідних магнітних станів з цим же значенням спіна розглянуто в [117,119]. Аналогічно з представленням про залишкову симетрію стану рівноваги, для магнетиків зі спіном s=1 введемо в розгляд генератор трансляційної симетрії виду

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}_k(\eta) \equiv \hat{\hat{P}}_k - q^k_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha - d^k_{\alpha\beta} \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta},$$

яка включає в своє визначення оператор імпульсу та магнітні інтеграли руху. Величини $\eta = q^k_\alpha, d^k_{\alpha\beta}$ являють собою додаткові термодинамічні параметри, які характеризують просторову неоднорідність та магнітну анізотропію стану рівноваги. Тензор $d^k_{\alpha\beta}$ симетричний та безслідний: $d^k_{\alpha\beta} = d^k_{\beta\alpha}$, $d^k_{\alpha\alpha} = 0$. Далі, ми дослідимо випадок, коли генератор трансляційної симетрії задовольняє стандартним співвідношенням комутації для компонент оператора імпульсу

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}_i(\eta), \hat{\hat{\mathsf{P}}}_k(\eta)\right] = 0.$$

Ця вимога, враховуючи явний вид генератора трансляційної симетрії та квантову алгебру (2.8), призводить до рівності

$$\begin{aligned} & q_i^\alpha q_k^\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + \left(\hat{d}_k \hat{d}_i\right)_{\beta\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0, \\ & q_i^\alpha d_k^{\gamma\rho} - q_k^\alpha d_i^{\gamma\rho} = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

які спрощують структуру цих термодинамічних параметрів. Легко бачити, що представлення цих величин у виді $q_k^\alpha = q_k f_\alpha$ та $d_k^{\alpha\beta} = d_k f_{\alpha\beta}$ задовольняє співвідношенням (2.21), якщо $q_k \| d_k$. Далі, ми вважаємо, що $q_k = d_k$.

Таким чином, генератор трансляційної симетрії набуває виду

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}_k(\eta) \equiv \hat{\hat{P}}_k = q_k\left(f_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + f_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha} \right). \tag{2.22}$$

Величина q_k є вектор магнітної спіралі, а $2\pi/q$ - крок спіралі, f_α - вектор спонтанної магнітної анізотропії та $f_{\alpha\beta}$ - тензор спонтанної магнітної анізотропії. Неоднорідний стан рівноваги магнетиків зі спіном s=1 має трансляційну симетрією в сенсі співвідношення

$$\left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{\mathsf{P}}}_k(\eta)\right] = 0. \tag{2.23}$$

З тотожності Якобі для операторів $\hat{w}, \hat{\hat{T}}, \hat{\hat{\mathsf{P}}}_k$ випливає співвідношення

$$\left[\left[\hat{\hat{T}}, \hat{\hat{\mathsf{P}}}_k\right], \hat{w}\right] = 0,$$

яке зв'язує параметри генераторів залишкової та трансляційної симетрій. Далі, для простоти, ми розглянемо випадок, при якому вектори b_α та f_α а також тензори $f_{\alpha\beta}$ та $d_{\alpha\beta}$ збігаються, так що останнє співвідношення виконується тотожним чином.

Беручи до уваги алгебру адитивних інтегралів руху та параметрів порядку (2.16), (2.17) та (2.21), а також умови симетрії (2.23) та явний вид (2.22), отримаємо систему рівнянь, які встановлюють магнітну та просторову структуру обох параметрів порядку:

$$\nabla_i \Delta_\rho(\mathbf{x}) = q_i\left(f_\alpha \varepsilon_{\alpha\rho\sigma} \Delta_\sigma(\mathbf{x}) + 2 f_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\rho\delta} \Delta^{(s)}_{\delta\beta}(\mathbf{x})\right), \qquad (2.24)$$
$$\nabla_i \Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = q_i f_\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\mu\sigma}\Delta^{(s)}_{\sigma\nu}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\nu\sigma}\Delta^{(s)}_{\sigma\mu}(\mathbf{x})\right) - q_i \Delta_\sigma(\mathbf{x})\left(\varepsilon_{\sigma\mu\beta} f_{\nu\beta} + \varepsilon_{\sigma\nu\beta} f_{\mu\beta}\right)/2.$$

1. Розглянемо окремий випадок рівнянь (2.24), при якому $f_\alpha = f m_\alpha, m_\alpha^2 = 1$ та $f_{\alpha\beta} = 0$. Рівняння для параметрів порядку є

$$\nabla_i \Delta_\rho(\mathbf{x}) = q_i f_\alpha \varepsilon_{\alpha\rho\sigma} \Delta_\sigma(\mathbf{x}), \qquad (2.25)$$
$$\nabla_i \Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = q_i f_\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\mu\sigma}\Delta^{(s)}_{\sigma\nu}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\nu\sigma}\Delta^{(s)}_{\sigma\mu}(\mathbf{x})\right).$$

Розв'язок для антиферомагнітного параметра порядку має вид $\Delta_\rho(\mathbf{x}) = a_{\rho\lambda}(\mathbf{x})\Delta_\lambda(0)$, де залежність від координати несе ортогональна матриця повороту

$$a_{\rho\lambda}(\mathbf{x}) = a_{\rho\lambda}(\mathbf{m}\theta(\mathbf{x})) = \delta_{\rho\lambda}\cos\theta(\mathbf{x}) + m_\rho m_\lambda(1 - \cos\theta(\mathbf{x})) + \varepsilon_{\rho\lambda\sigma} m_\sigma \sin\theta(\mathbf{x}),$$
$$\theta(\mathbf{x}) = \theta + f\mathbf{q}\mathbf{x}. \qquad (2.26)$$

З другого рівняння в (2.25) отримаємо розв'язок для параметра порядку спінового нематика

$$\Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = a_{\mu\sigma}(\mathbf{x}) a_{\nu\delta}(\mathbf{x}) \Delta^{(s)}_{\sigma\delta}(0)$$

з цією ж ортогональною матрицею. Такий розв'язок описує модуляцію осі спінової анізотропії параметра порядку спінового нематика.

2. Розглянемо інший окремий випадок, при якому $f_\alpha = 0$ та $f_{\alpha\beta} \neq 0$. Згідно (2.24), отримаємо рівняння для встановлення координатної залежності антиферомагнітного параметра порядку та параметра порядку спінового нематика

$$\nabla_i \Delta_\rho(\mathbf{x}) = 2q_i f_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\rho\delta} \Delta^{(s)}_{\delta\beta}(\mathbf{x}), \tag{2.27}$$
$$\nabla_i \Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -q_i \Delta_\sigma(\mathbf{x}) \left(f_{\nu\beta} \varepsilon_{\sigma\mu\beta} + f_{\mu\beta} \varepsilon_{\sigma\nu\beta} \right) / 2 .$$

Звідси випливає замкнуте рівняння для параметра порядку спінового нематика

$$\Delta \Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -q^2 \left(\hat{f}^{\,2} \hat{\Delta}^{(s)}(\mathbf{x}) + \hat{\Delta}^{(s)}(\mathbf{x}) \hat{f}^{\,2} - 2 \hat{f} \hat{\Delta}^{(s)}(\mathbf{x}) \hat{f} \right)_{\mu\nu}.$$

Тут $\Delta \equiv \nabla_\alpha \nabla_\alpha$. Розглядаючи для простоти одновісну структуру тензора магнітної анізотропії $f_{\alpha\beta} \equiv f\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$, приходимо до рівняння

$$\Delta \Delta^{(s)}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = q^2 f^2 \left(2 n_\mu n_\nu n_\alpha \hat{\Delta}^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) n_\beta - n_\mu n_\sigma \hat{\Delta}^{(s)}_{\sigma\nu}(\mathbf{x}) - n_\nu n_\sigma \hat{\Delta}^{(s)}_{\sigma\mu}(\mathbf{x}) \right). \tag{2.28}$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді розкладу параметра порядку спінового нематика в ряд по повному набору симетричних та безслідних матриць, які визначені рівностями (2.19): $\hat{\Delta}(\mathbf{x}) = A_l(\mathbf{x}) \hat{F}^{(l)}$, де $l = 1,..,5$ та $A_l(\mathbf{x})$ - невідомі амплітуди, що є функціями координат. Згідно (2.28) отримаємо рівняння зв'язку цих амплітуд

$$\Delta A_l(\mathbf{x})\hat{F}^{(l)} = -q^2 f^2 \left(A_3(\mathbf{x})\hat{F}^{(3)} + A_5(\mathbf{x})\hat{F}^{(5)}\right).$$

Якщо вимагати умови обмеженості розв'язку на нескінченності, то це означає, що координатна залежність параметра порядку спінового нематика

$$\hat{\Delta}^{(s)}(\mathbf{x}) = A_3 \cos\theta(\mathbf{x})\hat{F}^{(3)} + A_5 \sin\theta(\mathbf{x})\hat{F}^{(5)}.$$

Тут фаза має вид $\theta(\mathbf{x}) = 2f\mathbf{qx} + \theta$. Аналогічним чином отримаємо просторову залежність антиферомагнітного параметра порядку

$$\hat{\Delta}_\rho(\mathbf{x}) = A_3 \sin\theta(\mathbf{x}) l_\rho + A_5 \cos\theta(\mathbf{x}) m_\rho.$$

2.4. Надплинні магнітні стани. Розв'язок рівнянь класифікації для спінорного параметра порядку

У цьому розділі ми розглянемо вироджені стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1, для яких одночасно порушені магнітна та фазова симетрії при збереженні просторової симетрії, що відповідає нормальним станам (2.6). Спонтанне порушення магнітної SU(3) симетрії та фазової симетрії

$$\left[\hat{w}(\xi), \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right] \neq 0, \qquad \left[\hat{w}(\xi), \hat{\hat{N}}\right] \neq 0$$

означає, що в цьому стані рівноваги параметр порядку відмінний від нуля $\left\langle \hat{\underline{\hat{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}) \right\rangle \neq 0$. Польовий бозе-оператор $\hat{\underline{\hat{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}) = \hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x})$ має фізичний зміст спінорного оператора параметра порядку. Тут та далі ми розглядаємо статистичний оператор $\hat{\hat{w}}(\xi) \equiv \hat{\hat{w}}\left(Y_k = 0, \hat{Y} = 0, \xi\right)$, який описує надплинні стани з одночастинковим конденсатом, (спінорний конденсат).

З формул (2.4) та канонічних перестановочних співвідношень польових бозе-операторів, отримаємо алгебру квантових дужок Пуассона для адитивних інтегралів руху з оператором спінорного параметра порядку:

$$\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\beta(\mathbf{x})\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\gamma(\mathbf{x}), \qquad \left[\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\beta(\mathbf{x})\right] = -\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\beta(\mathbf{x}), \qquad (2.29)$$

$$\left[\hat{\hat{Q}}_{\mu\nu}, \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\beta(\mathbf{x})\right] = -\delta_{\mu\beta}\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\nu(\mathbf{x})/2 - \delta_{\nu\beta}\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\mu(\mathbf{x})/2 + \delta_{\mu\nu}\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\beta(\mathbf{x})/3.$$

Праві сторони квантової алгебри (2.29) лінійні по оператору параметра порядку, що веде до звернення в нуль середнього $\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha = Sp\hat{\hat{w}}\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x})$ для нормального стану рівноваги. Трансформаційні властивості оператора параметра порядку по відношенню до трансляцій та поворотів в реальному просторі мають вид

$$i\left[\hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x})\right] = -\nabla_k\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad i\left[\hat{\hat{L}}_i, \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{ikl}x_k\nabla_l\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}). \qquad (2.30)$$

В силу властивості (2.30), рівноважне середнє $\left\langle \hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}) \right\rangle$ не залежить від координати.

Генератор залишкової симетрії в даному випадку має вид:

$$\hat{\hat{T}}(\xi) \equiv b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha} + c\hat{N}. \qquad (2.31)$$

З рівності $iSp\left[\hat{\hat{w}}(\xi), \hat{\hat{T}}(\xi)\right]\hat{\hat{\underline{\Delta}}}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$, враховуючи співвідношення (2.13), (2.29) та (2.30), отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$D_{\alpha\beta}(\xi)\underline{\Delta}_\beta(\mathbf{x}) = 0, \qquad (2.32)$$

де матриця $D_{\alpha\beta}(\xi)$ має вид

$$D_{\alpha\beta}(\xi) \equiv i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma - d_{\alpha\beta} - c\delta_{\alpha\beta}.$$

Умова існування нетривіального розв'язку $\underline{\Delta}_\alpha \neq 0$ рівнянь (2.32) приводить до рівності

$$\det\left|\hat{D}(\xi)\right| = c^3 + p_1 c + q_1 = 0, \tag{2.33}$$

яка накладає обмеження на допустимі значення параметра генератора непорушеної симетрії. Тут введені позначення

$$\begin{gathered} p_1 = -(2 + D_2)/2 < 0, \\ q_1 = -\cos^2\theta\left(d_1\cos^2\varphi + d_2\sin^2\varphi\right) + \left(d_1 + d_2 + D_3\right)/3, \\ D_2 \equiv tr\left(\hat{d}\right)^2 = 2\left(d_1{}^2 + d_2{}^2 - d_1 d_2\right)/3 > 0, \\ D_3 \equiv tr\left(\hat{d}\right)^3 = \left(d_1 + d_2\right)\left(2d_1 - d_2\right)\left(d_1 - 2d_2\right)/9. \end{gathered} \tag{2.34}$$

З умови (2.33) знайдемо три допустимі значення параметра c_k, ($k = 1{,}2{,}3$) як функції скалярних інваріантів цього генератора:

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1/3), \\ c_2 &= 2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1 + 2\pi)/3, \\ c_3 &= 2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1 + 4\pi)/3, \end{aligned} \tag{2.35}$$

де $R_1 \equiv \sqrt{-p_1^3/27}$ та $\cos(\chi_1) \equiv -q_1/2R_1$. Корені c_k рівняння (2.35) є функціями полярного та азимутального кутів $\mathbf{b} = \mathbf{m}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\varphi + \mathbf{l}\sin\theta$, що визначають напрямок вектора $\mathbf{b}$, та залежать від модулів матриці $\hat{d} = d\left(\hat{F}^{(1)} + \hat{F}^{(2)}\right)$. Розв'язки (2.35) приводять до трьох типів генератора залишкової симетрії

$$\hat{\hat{T}}\left(\mathbf{b}, \hat{d}, c_k\right) = b_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta} \hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha} + c_k \hat{N} \equiv \hat{\hat{T}}(k)$$

та, отже, до трьох типів надплинних станів статистичної рівноваги в даних фізичних системах.

Явний вид спінорного параметра порядку для всіх знайдених значень c_k шукаємо у виді розкладу по ортонормованому реперу $\underline{\mathbf{\Delta}} = \sqrt{n_0}\left(A\mathbf{m} + B\mathbf{n} + C\mathbf{l}\right)$. Тут $n_0 \equiv \underline{\mathbf{\Delta}}\underline{\mathbf{\Delta}}^*$ - щільність конденсату та комплексні числа A, B, C пов'язані співвідношенням $AA^* + BB^* + CC^* = 1$. Їх значення ми отримаємо, використовуючи рівняння (2.32), для ряду фізично різних випадків значень параметрів генератора залишкової симетрії.

Випадок 1. $\mathbf{b} = \mathbf{l},\ \hat{d} = 0$: стан рівноваги має одновісну анізотропію. Цей випадок відповідає SO(3) симетрії обмінної взаємодії, для нього квадрупольна матриця не є інтегралом руху, а тому не входить в генератор залишкової симетрії (2.31). Корені рівняння (2.33) та вид спінорного параметра порядку приймають вид

$$c_1 = 0: \qquad \underline{\mathbf{\Delta}}_1 = \sqrt{n_0} e^{i\chi} \mathbf{l}, \qquad (2.36)$$

$$c_{2,3} \equiv c_\pm = \pm 1: \qquad \underline{\mathbf{\Delta}}_\pm = \sqrt{n_0 / 2} e^{i\chi} (\mathbf{m} \mp i\mathbf{n}). \qquad (2.37)$$

Вирази спінорного параметра порядку збігаються з раніше знайденими його значеннями в роботах [50,80,82,106,120], що отримані на основі модельного явного виду вільної енергії в разі відсутності зовнішнього поля. Вибір довільного напрямку осі анізотропії $\mathbf{b}$ відповідає перетворенню повороту $\underline{\mathbf{\Delta}}_\alpha \to \underline{\mathbf{\Delta}}'_\alpha(\mathbf{b}) = a_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{\Delta}}_\beta(\mathbf{n})$, де $a_{\alpha\beta}$ - ортогональна матриця обертання. Вид рівнянь (2.32) показує, що c_1, $c_\pm$ – це власні числа матриці $i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma - d_{\alpha\beta}$, а вектори $\underline{\mathbf{\Delta}}_1$, $\underline{\mathbf{\Delta}}_\pm$ - це ортогональний набір власних векторів.

Випадок 2. $\mathbf{b}=0,\ d_1\neq 0,\ d_2=0$: Анізотропія фізичного стану є одновісна та спрямована уздовж осі $\mathbf{m}$. Цей випадок, як і всі наступні, де матриця $\hat{d}$ не рівна нулю $\hat{d}\neq 0$, відповідає SU(3) симетрії обмінної взаємодії. Згідно (2.32) та (2.33) знайдемо розв'язки для спінорного параметра порядку

$$c_1=-2d_1/3: \qquad \underline{\mathbf{\Delta}}_1=\sqrt{n_0}e^{i\chi}\mathbf{m},$$

$$c_{2,3}=d_1/3: \qquad \underline{\mathbf{\Delta}}_{2,3}=\sqrt{n_0}\left(B\mathbf{n}+C\mathbf{l}\right).$$

Тут комплексні числа B,C пов'язані співвідношенням $BB^*+CC^*=1$ та мають фізичний зміст додаткових термодинамічних параметрів, які характеризують стан рівноваги. Їх поява обумовлена кратністю власних значень $c_{2,3}=d_1/3$. Також ми бачимо, що вектори $\underline{\mathbf{\Delta}}_{2,3}$ перпендикулярні вектору $\underline{\mathbf{\Delta}}_1$, так як вони відповідають різним власним значенням.

Випадок 3. $\mathbf{b}=0,\ \hat{d}=d_1\hat{F}^{(1)}+d_2\hat{F}^{(2)}$. Анізотропія фізичного стану двовісна. Для коренів рівняння (2.33) та параметра порядку отримані розв'язки

$$c_1=\left(d_1+d_2\right)/3: \qquad \underline{\mathbf{\Delta}}_1=\sqrt{n_0}e^{i\chi}\mathbf{l}, \tag{2.38}$$

$$c_{\pm}=c_{3,2}=-\left(d_1+d_2\right)/6\mp\left(d_1-d_2\right)/2: \begin{cases}\underline{\mathbf{\Delta}}_+=\sqrt{n_0}e^{i\chi}\mathbf{m}, \quad \underline{\mathbf{\Delta}}_-=\sqrt{n_0}e^{i\chi}\mathbf{n} & d_1\neq d_2\\ \underline{\mathbf{\Delta}}_{\pm}=\sqrt{n_0}\left(A_{\pm}\mathbf{m}+B_{\pm}\mathbf{n}\right), & d_1=d_2\end{cases}$$

Комплексні числа $A_{\pm},B_{\pm}$ пов'язані співвідношенням $A_{\pm}A_{\pm}^*+B_{\pm}B_{\pm}^*=1$. Кількість довільних величин у виразі параметра порядку залежить від кратності власних значень. У разі виникнення кратних коренів, ранг системи лінійних рівнянь (2.32) знижується, та ми отримуємо додаткові термодинамічні величини типу A,B, які характеризують стан рівноваги. Додаткове виродження станів виникає при збігу модулів матриці $\hat{d}$, так як в цьому випадку ми знову отримуємо одновісну структуру, де вісь матриці $\hat{d}=d\left(\hat{F}^{(1)}+\hat{F}^{(2)}\right)$ спрямована уздовж вектора $\mathbf{l}$.

Випадок 4. $\mathbf{b} = \mathbf{m}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\varphi + \mathbf{l}\sin\theta$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$: Це ситуація загального положення для параметрів генератора залишкової симетрії. Допустимі значення параметра c_k представлені формулами (2.35). Наведемо явний вид спінорного параметра порядку:

$$\underline{\mathbf{\Delta}} = \sqrt{n_0}\left(P_1\mathbf{m} + P_2\mathbf{n} + P_3\mathbf{l}\right)/\left(P_1P_1^* + P_2P_2^* + P_3P_3^*\right)^{1/2},$$

тут введені позначення

$$P_1 \equiv -\cos\theta\left(\sin\theta\cos\varphi + \frac{i}{9}\sin\varphi\left(c_k + \frac{2}{3}d_2 - \frac{d_1}{3}\right)\right),$$

$$P_2 \equiv \cos\theta\left(-\sin\theta\sin\varphi + \frac{i}{9}\cos\varphi\left(c_k + \frac{2}{3}d_1 - \frac{d_2}{3}\right)\right), \qquad (2.39)$$

$$P_3 = \left[\left(c_k + \frac{d_1 + d_2}{6}\right)^2 - \left((d_1 - d_2)^2 + 4\sin^2\theta\right)/4\right]/9.$$

Бачимо, що в загальному випадку спінорний параметр порядку суттєво залежить від кутів, що характеризують напрямки анізотропії параметрів генератора залишкової симетрії $\mathbf{b}$ та $\hat{d}$. Наведемо рисунки, на яких побудований модуль вектора $P_1\mathbf{m} + P_2\mathbf{n} + P_3\mathbf{l}$, який характеризує анізотропію спінорного параметра порядку в спіновому просторі.

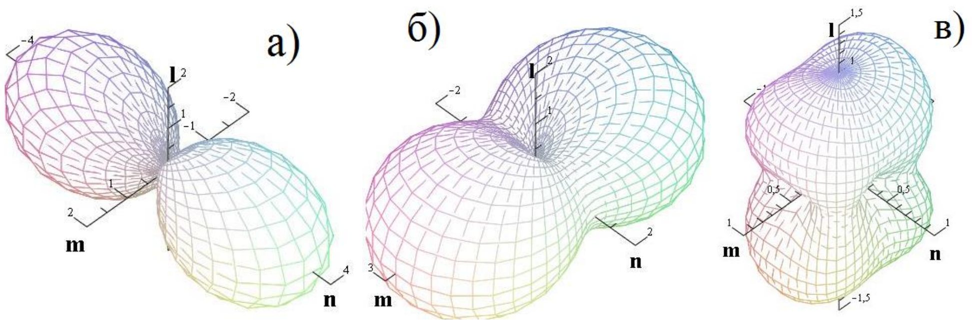

Рис. 2.3. Модуль вектора $P_1\mathbf{m} + P_2\mathbf{n} + P_3\mathbf{l}$. *а)-в) відповідають трьом різним значенням скалярного параметра магнітної анізотропії* $c_{1,2,3}(\varphi,\theta)$, *що классіфукує стани рівноваги спінорного параметру порядку.*

Для визначеності, ми вибрали тензор магнітної анізотропії одновісним $d_1 = 1, d_2 = 0$. При варіації представлених параметрів, істотних змін форми поверхні не спостерігається. Ці рисунки 2.3 ілюструють характер анізотропії спінорного параметра порядку.

2.5. Розв’язок рівнянь класифікації надплинного спінового нематика

У цьому розділі ми розглянемо стани рівноваги, в яких також спонтанно порушені магнітна SU(3) симетрія та фазова симетрія:

$$\left[\hat{\hat{w}}(\xi), \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right] \neq 0, \qquad \left[\hat{\hat{w}}(\xi), \hat{\hat{N}}\right] \neq 0.$$

Однак тепер ми досліджуємо надплинні стани для бозе-системи зі спіном s=1, в яких оператори параметра порядку є білінійні по оператору народження або знищення (парні конденсати). З урахуванням магнітних ступенів свободи, оператор параметра порядку визначимо рівністю

$$\hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x}), \tag{2.40}$$

Тензорний параметр порядку $\Delta_{\alpha\beta} = Sp\hat{\hat{w}}(\xi)\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ є симетричним $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\beta\alpha}$, задає стани парного бозе-конденсату та пов'язаний з параметром порядку надплинного спінового нематика $\Delta^{(s)}{}_{\alpha\beta}$ співвідношенням $\Delta^{(s)}{}_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}/3$. Порушення фазової та магнітної симетрії враховується в статистичному операторі Гіббза (2.29) шляхом введення джерела $\hat{\hat{F}}_2$:

$$\hat{\hat{F}}_2 \equiv \int d^3x \left(\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \xi) \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \eta^*_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \xi) \hat{\hat{\Delta}}^+_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \right).$$

Це складова привносить свій характер порушення симетрії стану рівноваги. Статистичний оператор $\hat{\hat{w}}(\xi)$ з джерелом $\hat{\hat{F}}_2$ залежить від комплексної матриці. Використовуючи визначення (2.40), легко знайти квантову алгебру інтегралів руху для тензорного оператора параметра порядку

$$\left[\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right] = -2\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ \left[\hat{\hat{S}}_{\gamma}, \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right] = i\varepsilon_{\gamma\alpha\rho}\hat{\hat{\Delta}}_{\rho\beta}(\mathbf{x}) + i\varepsilon_{\gamma\beta\rho}\hat{\hat{\Delta}}_{\rho\alpha}(\mathbf{x}), \qquad (2.41)$$

$$\left[\hat{\hat{Q}}_{\mu\nu}, \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right] = -\left(\delta_{\alpha\mu}\hat{\hat{\Delta}}_{\beta\nu}(\mathbf{x}) + \delta_{\mu\beta}\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\nu}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\nu}\hat{\hat{\Delta}}_{\beta\mu}(\mathbf{x}) + \delta_{\nu\beta}\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\mu}(\mathbf{x})\right)/2 + 2\delta_{\mu\nu}\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})/3.$$

Введений в розгляд оператор параметра порядку задовольняє трансформаційним властивостям, пов'язаними з просторовими зсувами та поворотами в просторі:

$$i\left[\hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right] = -\nabla_k\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \qquad i\left[\hat{\hat{L}}_i, \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{ikl}x_k\nabla_l\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}).$$

Далі, слідуючи викладеному вище підходу і беручи до уваги (2.41) та вид генератора залишкової симетрії (2.13), отримаємо рівняння класифікації

$$2c\hat{\Delta} - i\left(\hat{\varepsilon}(\mathbf{b})\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{\varepsilon}(\mathbf{b})\right) + \hat{d}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{d} = 0. \qquad (2.42)$$

Умова існування ненульових значень параметра порядку для виписаної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь веде до співвідношення

$$\det\hat{D} = \left(c^3 + p_1 c + q_1\right)\left(c^3 + \frac{1}{4}p_1 c - \frac{1}{8}q_1\right) = 0. \qquad (2.43)$$

Величини p_1 та q_1 визначені співвідношеннями (2.34). З умови (2.43) знайдемо шість допустимих значень параметра $c(\mu)$, $(\mu = 1,\ldots,6)$ як функції скалярних інваріантів цього генератора:

$$c(1)=2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1/3),\quad c(2)=2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1+2\pi)/3,\, c(3)=2\sqrt[3]{R_1}\cos(\chi_1+4\pi)/3, \tag{2.44}$$
$$c_4=2\sqrt[3]{R_2}\cos(\chi_2/3),\quad c_5=2\sqrt[3]{R_2}\cos(\chi_2+2\pi)/3,\quad c_6=2\sqrt[3]{R_2}\cos(\chi_2+4\pi)/3,$$

де $R_1\equiv\sqrt{-p_1^3/27}$, $\cos\chi_1\equiv -q_1/2R_1=-\cos\chi_2$ та $R_2\equiv R_1/8$. Корені рівняння (2.43) $c(\mu)$ є функціями полярного та азимутального кутів та модулів матриці $\hat{d}$. Ці розв'язки ведуть до шести типів генератора залишкової симетрії

$$\hat{\hat{T}}(b,d,c(\mu))=b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha+d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha}+c(\mu)\hat{N}\equiv\hat{\hat{T}}(\mu)$$

та, отже, до шести фізично різним надплинним станам. Розглянемо ряд окремих випадків, для яких знайдемо, як дискретний набір параметра залишкової симетрії $c(\mu)$, так і явний вид рівноважних значень тензорного параметру порядку.

Випадок 1. $\mathbf{b}=b\mathbf{l}$, $\hat{d}=0$, (одновісна залишкова симетрія): тензорний параметр порядку, який відповідає значенням $c(\mu)$, має вид:

$$c_{1,4}=0;\qquad \hat{\Delta}_{1,4}=\Delta_{(0)}\hat{I}+\Delta_{(1)}\left(\hat{F}^{(1)}+\hat{F}^{(2)}\right).$$

Тут Δ та $\Delta_{(1)}$ - довільні комплексні амплітуди в силу кратності коренів $c_{1,2}=0$. Структура тензорного параметра порядку аналогічна розв'язкам роботи [51], в якій розглядалися рідкокристалічні параметри середовища, відповідні «real» фазі. У цьому випадку можливе співіснування параметра порядку спінового нематика $\Delta^{(s)}{}_{\alpha\beta}$ та скалярної величини $tr\Delta_{\alpha\beta}$.

$$c_{2,3}=\pm b;\qquad \hat{\Delta}_{2,3}=\Delta_{(1)}\left(\hat{F}^{(1)}-\hat{F}^{(2)}\mp i\hat{F}^{(3)}\right).$$

Цей тензорний параметр аналогічний розв'язку в [51], і відповідає "axial" фазі. Отримані параметри є одновісними, а їх осі збігаються з напрямками відповідних векторних параметрів порядку (2.36) та (2.37)

$$\Delta^{(1)}_{\alpha\beta} = -\Delta_{(1)}\left(l_\alpha l_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \qquad \Delta^{(2,3)}_{\alpha\beta} = \Delta_{(1)} e_\alpha e_\beta ,$$

де $\mathbf{e} = \mathbf{m} \mp i\mathbf{n}$;

$$c_{5,6} = \pm b/2; \qquad \hat{\Delta}_{5,6} = \Delta_{(4)}\left(\hat{F}^{(4)} \mp i\hat{F}^{(5)}\right).$$

Власні значення $c_{5,6}$ належать до додаткової гілки спектрів тензорного параметра порядку і не мають аналогів у вигляді власних значень спінорного параметра.

Випадок 2. $b_\alpha = 0,\ \hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)}$, (одновісна залишкова симетрія): Дискретні значення параметра $c(p)$ і відповідні параметри порядку набувають виду:

$$c_1 = -2d_1/3, \qquad \hat{\Delta}_1 = \Delta_{(1)}\left(\hat{I}/3 + \hat{F}^{(1)}\right),$$
$$c_{2,3,4} = d_1/3, \qquad \hat{\Delta}_{2,3,4} = \left(-2\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)}\right)\hat{I}/3 + \Delta_{(1)}\hat{F}^{(1)} + \Delta_{(2)}\hat{F}^{(2)} + \Delta_{(5)}\hat{F}^{(5)},$$
$$c_{5,6} = -d_1/6, \qquad \hat{\Delta}_{5,6} = \Delta_{(3)}\hat{F}^{(3)} + \Delta_{(4)}\hat{F}^{(4)}.$$

В цьому випадку додаткові невизначені величини виникають за рахунок кратності власних значень, а кількість невизначених величин в виразі для параметра порядку дорівнює кратності відповідного власного значення.

Випадок 3. $b_\alpha = 0,\ \hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)} + d_2\hat{F}^{(2)}$, (двовісна залишкова симетрія): Власні значення і параметри порядку приймають вид:

$$c_1 = \left(d_2 - 2d_1\right)/3, \qquad \hat{\Delta}_1 = \Delta_{(1)}\left(\hat{I}/3 + \hat{F}^{(1)}\right), \qquad 2d_1 \neq d_2, d_1 \neq d_2.$$

Як ми бачимо з представленого розв’язку, наявність двох параметрів - модулів матриці $\hat{d}$ веде до додаткових розв’язків для параметрів порядку. Всі обмеження пов'язані з кратністю власних значень, що в свою чергу приводить до додаткових невизначених величин в виразі для параметра порядку. Якщо $d_1 = d_2$, то отримаємо розв’язок аналогічний до розглянутого випадку 2. Випишемо розв’язок рівнянь класифікації для решти власних значень:

$$c_2 = (d_1 - 2d_2)/3, \qquad \hat{\Delta}_2 = \Delta_{(2)}\left(\hat{I}/3 + \hat{F}^{(2)}\right), \qquad d_1 \neq 2d_2, d_1 \neq d_2,$$
$$c_3 = (d_1 + d_2)/3, \qquad \hat{\Delta}_3 = \Delta_{(1)}\left(-\hat{I}/3 + \hat{F}^{(1)} + \hat{F}^{(2)}\right), \qquad d_1 \neq -d_2.$$

Для значень $c(\mu)$, $\mu = 1,2,3$ можливе співіснування параметрів порядку. Ці параметри порядку одновісні, а їх осі спрямовані уздовж відповідних спінорних параметрів порядку (2.38).

$$c_4 = -(d_1 + d_2)/6, \qquad \hat{\Delta}_4 = \Delta_{(3)}\hat{F}^{(3)}, \qquad d_1 \neq -d_2, d_1 \neq d_2,$$
$$c_5 = (2d_2 - d_1)/6, \qquad \hat{\Delta}_5 = \Delta_{(4)}\hat{F}^{(4)}, \qquad 2d_1 \neq d_2, d_1 \neq d_2,$$
$$c_6 = (2d_1 - d_2)/6, \qquad \hat{\Delta}_6 = \Delta_{(5)}\hat{F}^{(5)}, \qquad d_1 \neq 2d_2, d_1 \neq d_2.$$

Випадок 4. $\mathbf{b} = \mathbf{m}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\varphi + \mathbf{l}\sin\theta$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$: Це ситуація загального положення для параметрів генератора залишкової симетрії. Розглянемо допустимі значення параметра c_k при $k = 1,2,3$, які представлені формулами (2.35). Надплинний тензорний параметр порядку має вид:

$$\Delta^{(k)}_{\alpha\beta} = \Delta_{(1)} e_{\alpha,k} e_{\beta,k},$$
$$\mathbf{e}_k = \left(P_{1,k}\mathbf{m} + P_{2,k}\mathbf{n} + P_{3,k}\mathbf{l}\right) / \left(P_{1,k}P^*_{1,k} + P_{2,k}P^*_{2,k} + P_{3,k}P^*_{3,k}\right)^{1/2},$$

де величини $P_{j,k}$, $(j,k=1,2,3)$ визначаються формулами (2.39). Через громіздкість формул, ми не будемо наводити явний вид решти трьох параметрів порядку для значень c_k при $k=4,5,6$.

З наведеного аналізу надплинних станів рівноваги, випливає загальний вид трьох типів для спінорного параметра порядку і шести типів генератора непорушеної симетрії $\hat{\hat{T}}(\mu)\equiv c(\mu)\hat{\hat{N}}+b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha+d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$ для тензорного. Поряд з осями анізотропії матриці $d_{\alpha\beta}$ та вектора $\mathbf{b}$, цей оператор також є функцією дискретної величини $c(\mu)$, яка класифікує вироджені стани рівноваги при наявності магнітних ступенів свободи. З'ясовано, що дискретні величини $c(\mu)$, $(\mu=1,2,3)$ для векторного і тензорного параметрів порядку повністю збігаються, але у випадку з тензорним параметром порядку існують додаткові три розв'язки $c(\mu)$, $(\mu=4,5,6)$. У разі збігу спектрів $c(\mu)$, тензорні параметри порядку є одновісними, а їх осі направлені уздовж відповідних векторних (спінорних) параметрів порядку.

2.6. Висновки до розділу 2

Вирішена задача класифікації станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 при спонтанному порушенні магнітної SU(3) симетрії. Таке порушення симетрії обумовлено наявністю антиферомагнітного параметра і параметра порядку спінового нематика. Виходячи з уявлення про залишкову симетрію, отримані рівняння класифікації і знайдені їхні окремі і загальний розв'язки для параметрів порядку в термінах вектора і тензора спонтанної магнітної анізотропії.

Розв'язана задача класифікації вищенаведених станів рівноваги у разі порушення магнітної і фазової симетрій. Показана можливість трьох різних надплинних станів рівноваги в разі спінорного і шести станів рівноваги для тензорного параметрів порядку. На відміну від класифікації станів надплинного He-3, в даному випадку результати представлені не в термінах квантових числах, а в термінах квантових функцій. Розв'язки для надплинних параметрів порядку демонструють різноманітність станів рівноваги і пов'язані з появою додаткової термодинамічної величини - тензора спонтанної магнітної анізотропії. Показано збіг розв’язків спінорного параметра порядку з раніше знайденими його значеннями в роботах [50,82,120], у відсутності зовнішнього поля та при SO(3) симетрії обмінної взаємодії. Виявлено збіг розв’язків для надплинного тензорного параметра порядку з відомими рішеннями Мерміна [51], які класифікують надплинні стани рівноваги з d-спарюванням та SO(3) симетрією обмінної взаємодії.

РОЗДІЛ 3.
ДИНАМІКА ОДНОПІДҐРАТКОВИХ МАГНЕТИКІВ ЗІ СПІНОМ S=1 ТА SU(3) СИМЕТРІЄЮ ОБМІННОЇ ВЗАЄМОДІЇ

У цьому розділі нами досліджено динаміку магнетиків зі спіном s=1, яка враховує властивості SU(3) симетрії обмінного гамільтоніана. Встановлена алгебра дужок Пуассона і знайдені рівняння динаміки магнетиків в однопідґратковому випадку, що узагальнюють відомі рівняння Ландау-Ліфшиця. Запропоновані моделі обмінної енергії як функції інваріантів Казиміра, що узагальнюють вид гамільтоніана Гейзенберга на магнетики зі спіном s=1. Враховано вплив релаксаційних процесів і встановлено структуру дисипативних потоків квадрупольного магнетика. Досліджено низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна для станів квадрупольного магнетика і феромагнетика.

Основні результати третього розділу опубліковані в роботах [128-131].

3.1. Чисті та змішані квантові стани. Поляризаційна матриця щільності та магнітні ступені свободи

Кількість параметрів, що характеризують магнітну систему, пов'язують з числом величин, які описують одночастинкові спінові стани. Хвильова функція чистих квантових станів частинки зі спіном s має вид

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{m=-s}^{s} A_m \left|s,m\right\rangle . \qquad (3.1)$$

Тут $\left|s,m\right\rangle$ - власні функції операторів квадрата спіна і проекції спіна на вісь квантування: $\hat{s}^2\left|s,m\right\rangle = s(s+1)\left|s,m\right\rangle$, $\hat{s}_z\left|s,m\right\rangle = m\left|s,m\right\rangle$. Сумування йде по дискретній спіновій змінній, яка приймає 2s+1 значень. Умова нормування $\left\langle\psi|\psi\right\rangle = 1$ та фізична еквівалентність станів $\left|\psi\right\rangle$ і $\left|\psi\right\rangle_\theta \equiv e^{i\theta}\left|\psi\right\rangle$, ведуть до числа дійсних незалежних параметрів чистого стану рівному $N_{pure} = 4s$ [42]. Змішані одночастинкові стани зі спіном s описуються поляризаційною матрицею щільності $\hat{\rho}$, яка має розмірність (2s+1)x(2s+1). Умова нормування $tr\hat{\rho} = \sum_{m=-s}^{s} \rho_{mm} = 1$ та ермітовості цієї матриці приводять до числа дійсних параметрів $N_{mixed} = 4s(s+1)$, які в загальному випадку не є незалежними. Аналіз станів цих фізичних систем зручно здійснити, використовуючи розкладання матриці щільності по поляризаційним операторам [42] або інших матричних функцій, які мають значення магнітних ступенів свободи

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},t) \equiv (2s+1)^{-1}\hat{I} + \hat{g}(\mathbf{x},t). \qquad (3.2)$$

Тут $\hat{I}$ - одинична матриця. Локальні магнітні ступені свободи $\hat{g}(\mathbf{x},t)$ в загальному випадку є функціями координати і часу. Щоб забезпечити умову нормування, остання матриця повинна бути безслідною $tr\hat{g}(\mathbf{x}) = 0$. Для спрощення запису, ми опускаємо далі часову залежність в цих величинах.

У розділі 3.2 для магнетиків зі спіном s=1 отримані дужки Пуассона для середніх значень матриці $\hat{g}(\mathbf{x})$ (дивись співвідношення (3.14)). Подібну алгебру можна отримати також для магнетиків з довільним спіном. Така алгебра містить 2s інваріантів Казиміра, тому число незалежних магнітних параметрів в змішаних станах дорівнює 2s(2s+1).

У разі магнетиків зі спіном s=1/2 матриця $\hat{g}(\mathbf{x})$ має вид $\hat{g}(\mathbf{x}) = p_\alpha(\mathbf{x})\hat{\sigma}_\alpha/2$, де $p_\alpha(\mathbf{x})/2 = s_\alpha(\mathbf{x}) = tr\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha$ - вектор поляризації та $\hat{\sigma}_\alpha$ - матриці Паулі, пов'язані з оператором спіна співвідношенням $\hat{s}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha/2$. Умова $tr\hat{\rho}^2 \le 1$ задає область зміни вектора поляризації. У чистому стані $tr\hat{\rho}^2 = tr\hat{\rho}$, звідки $p = 1$, напрямок вектора поляризації довільний. Для змішаних станів $tr\hat{\rho}^2 < tr\hat{\rho}$, тому $0 \le p < 1$. Неполяризований квантовий стан відповідає значенню $p = 0$.

Для магнетиків зі спіном s=1 число незалежних величин, що характеризують чистий стан, дорівнює чотирьом. Змішаний стан такого магнітного середовища можна задати за допомогою поляризаційної матриці $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, розмірності 3×3, яка містить вісім дійсних величин. Розкладемо поляризаційну матрицю (3.2) по повному набору незвідних (3x3) матриць

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{I}/3 + s_\alpha(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha/2 + q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{q}_{\beta\alpha}. \qquad (3.3)$$

Тут матричні елементи операторів спіна $\hat{s}_\alpha$ і квадрупольного тензора $\hat{q}_{\beta\alpha}$ згідно [42] мають вид

$$(\hat{s}_\alpha)_{\mu\nu} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}, \qquad (\hat{q}_{\beta\alpha})_{\mu\nu} \equiv (\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\mu\nu}/3)/2 \qquad (3.4)$$

і задовольняють умовам ортогональності:

$$tr\hat{s}_\alpha = 0, \qquad tr\hat{q}_{\alpha\beta} = 0, \qquad tr\hat{s}_\gamma\hat{q}_{\alpha\beta} = 0, \quad tr\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta},$$
$$tr\hat{q}_{\gamma\rho}\hat{q}_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}/3)/2,$$
$$tr\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta\hat{s}_\gamma\hat{s}_\rho = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\beta}. \qquad (3.5)$$

З огляду на ці рівності, отримаємо зв'язок середніх значень щільності спіна $s_\alpha(\mathbf{x})$ та квадрупольної матриці $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ з поляризаційною матрицею:

$$tr\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha = s_\alpha(\mathbf{x}), \qquad tr\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{q}_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}).$$

Тому приходимо до співвідношення

$$tr\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2. \qquad (3.6)$$

Квадрупольна матриця дійсна, симетрична і безслідна $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. П'ять її незалежних компонент параметризуємо співвідношенням

$$q_{\alpha\beta} = q_1\left(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right) + q_2\left(f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right). \qquad (3.7)$$

Тут q_1, q_2 скалярні параметри цієї матриці. Вектори $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha = (\mathbf{d}\times\mathbf{e})_\alpha$ утворюють ортонормований репер та мають фізичний зміст осей магнітної анізотропії квадрупольного упорядкування. Магнітні стани, в яких $q_1 \neq 0, q_2 = 0,$ або $q_2 \neq 0, q_1 = 0$ є одновісними. Випадок $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, q_2 \neq q,$ відповідає двовісному квадрупольному магнітному упорядкуванню.

Розглянемо квадрупольному матрицю та спін в чистих та змішаних квантових станах. Для чистих станів $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Звідси, використовуючи (3.3) - (3.6), отримаємо рівняння для середніх значень магнітних параметрів

$$\frac{1}{2}s^2 + tr\hat{q}^2 = \frac{2}{3}, \qquad s_\alpha = -3s_\beta q_{\alpha\beta}, \qquad (3.8)$$
$$-\frac{1}{4}s_\alpha s_\beta + \left(\hat{q}^2\right)_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{4}s^2 + tr\hat{q}^2\right) = \frac{1}{3}q_{\alpha\beta}.$$

За допомогою перших двох співвідношень (3.8) виключимо спіновий вектор та отримаємо рівняння для квадрупольної матриці в чистому стані

$$2 - 9tr\hat{q}^2 + 18tr\hat{q}^3 = 0. \qquad (3.9)$$

Для таких станів, в силу (3.9), скалярний параметр квадрупольної матриці не звертається в нуль. Розглянемо, випадок одновісної квадрупольної матриці. Рівняння (3.9) має два розв’язки, які характеризують чистий квантовий стан: $q = 1,$ $q = -1/2$. Тому магнітні ступені свободи в цьому стані набувають виду

$$1.\ s_\alpha = 0, \quad q_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3;$$

$$2.\ s_\alpha = \pm e_\alpha, \ q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right). \qquad (3.10)$$

Перше з них описує магнітний стан, в якому спіновий момент відсутній. Ненульовий квадрупольний момент відповідає стержнеподібному нематичному упорядкуванню [115]. Другий розв'язок є спін-квадрупольним: для таких станів спін та квадрупольна матриця не звертаються в нуль. При цьому вісь анізотропії квадрупольної матриці колінеарна вектору спінового моменту. Від'ємне значення скалярного параметра квадрупольної матриці відповідає дископодібному нематичному упорядкуванню [116].

У разі двовісних квадрупольних станів (3.7), враховуючи рівності $tr\hat{q}^2 = 2\left(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2\right)/3$ та $tr\hat{q}^3 = \left(q_1 + q_2\right)\left(2q_1 - q_2\right)\left(q_1 - 2q_2\right)/9$, з (3.9) отримаємо зв'язок величин q_1 та q_2 в чистому стані $\left(q_1 + q_2\right)\left(2q_1 - q_2\right)\left(q_1 - 2q_2\right) - 3\left(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2\right) = 1$. Для фізичної системи, яка має симетрією щодо послідовності маркування параметрів $q_1 \Leftrightarrow q_2$, ці величини рівні: $q_1 = q_2 \equiv q$. Тому, приходимо до рівняння $1 - 3q^2 - 2q^3 = 0$, розв'язками якого є $q = -1$ та $q = 1/2$. Помічаючи, далі, справедливість співвідношення $e_\alpha e_\beta + f_\alpha f_\beta + d_\alpha d_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, бачимо, що в обох випадках квадрупольна матриця зводиться до одновісного виду, а розв'язки набувають виду: $q_{\alpha\beta} = \left(d_\alpha d_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$, $s_\alpha = 0$; $q_{\alpha\beta} = -\left(d_\alpha d_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)/2$, $s_\alpha = \pm e_\alpha$, що збігається з одновісними розв'язками (3.10).

Неважко бачити, що система рівнянь (3.8) має двовісні розв'язки, які можна представити у виді

$$s_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma, \qquad q_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3. \qquad (3.11)$$

Тут дійсні вектори $\mathbf{u},\mathbf{v}$ задовольняють співвідношенню $u^2+v^2=1$. Комплексні коефіцієнти розкладу A_α хвильової функції (3.1) для спіна s=1 в декартовому базисі пов'язані з векторами u_α, v_α рівністю $A_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha \equiv \eta_\alpha \exp i\varphi_\alpha$. Фазове перетворення $\varphi_\alpha \to \varphi_\alpha^{'} \equiv \varphi_\alpha + \theta$ приводить до трансформаційного співвідношення $A_\alpha \to A_\alpha^{'} = u_\alpha^{'} + iv_\alpha^{'} \equiv \eta_\alpha \exp i\varphi_\alpha^{'}$ та залишає без зміни вектор спіна та квадрупольну матрицю:

$$s_\alpha(\eta,\varphi) \to s'_\alpha \equiv s_\alpha(\eta,\varphi') = s_\alpha(\eta,\varphi),$$
$$q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi) \to q'_{\alpha\beta} \equiv q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi') = q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi).$$

Тому, магнітні величини залежать від чотирьох незалежних параметрів. Скористаємося цією інваріантністю та виберемо коефіцієнти розкладу $A_\alpha^{'}$ хвильової функції (3.1) таким чином, щоб виконувалося співвідношення $u_\alpha^{'} v_\alpha^{'} = 0$. З цієї умови отримаємо рівняння для кута θ: $\mathbf{uv} tg^2\theta + \left(v^2 - u^2\right) tg\theta - \mathbf{uv} = 0$, розв'язком якого є рівність

$$tg\theta = \left(u^2 - v^2 \pm \sqrt{\left(u^2-v^2\right)^2 + 4(\mathbf{uv})^2}\right) / 2(\mathbf{uv}).$$

Звідси випливає зв'язок середніх значень щільності спіна та квадрупольної матриці з коефіцієнтами $A_\alpha^{'} = u_\alpha^{'} + iv_\alpha^{'}$:

$$u'^2 = q_1, \qquad v'^2 = q_2, \qquad u_\alpha^{'}/u^{'} = e_\alpha,\ \ v_\alpha^{'}/v^{'} = f_\alpha,\ \ s_\alpha^{'} = 2d_\alpha u^{'} v^{'}.$$

Для магнітних систем зі спіном s=1 вводять в розгляд ступені векторної поляризації $p \equiv \sqrt{\mathbf{s}^2}$, тензорної поляризації $T \equiv \sqrt{3tr\hat{q}^2/2}$ та загальної поляризації $d \equiv \sqrt{3\mathbf{s}^2/4 + T^2}$ [116]. Чистий стан, який відповідає розв'язку 1 в (3.10), дає значення поляризації: $p=0,\quad T=1, d=1$. Для другого розв'язку в (3.10) отримаємо: $p=1$, $T=1/2$, $d=1$. Значення щільності спіна та квадрупольної матриці з двовісною анізотропією (3.11) приводять до ступенів поляризації:

$$p=2\sqrt{u^2v^2-(\mathbf{uv})^2}\,,\qquad T=\sqrt{1-3\left(u^2v^2-(\mathbf{uv})^2\right)},\qquad d=1.$$

У змішаних квантових станах справедливі нерівності $tr\hat{\rho}^2<1$, $tr\hat{\rho}^3<1$, які задають область змін магнітних ступенів свободи. У неполяризованому стані $s_\alpha=0$, $q_{\alpha\beta}=0$. Тому, ступені поляризації змінюються в межах $0\le p\le 1$, $0\le T\le 1$, $0\le d\le 1$.

В подальшому вивченні особливостей динамічних процесів в магнетиках зі спіном s=1 ми вважаємо, що такі суцільні середовища знаходяться у змішаному квантовому стані. Для магнетиків зі спіном s=1/2 кількість незалежних магнітних параметрів, що характеризують чисті та змішані стани, збігається. Для магнетиків зі спіном $s\ge 1$ число параметрів, що характеризують змішаний стан перевищує кількість параметрів, що відповідають чистим станам та виникає потреба корекції теорії. Крім того, розгляд змішаних станів дозволяє врахувати процеси релаксації в досліджуваних квантових системах.

3.2. Скобки Пуассона та рівняння динаміки магнітних величин в базисі Вейля. Зв'язок з базисом Рака

В цьому розділі, слідуючи гамільтоновому формалізму, ми отримаємо дужки Пуассона для магнітних ступенів свободи та рівняння динаміки для магнетиків зі спіном s=1 та SU(3) симетрією обмінної взаємодії. Для отримання дужок Пуассона магнітних величин введемо в розгляд лагранжіан фізичної системи:

$$L=L_k-H\equiv\int d^3xF_\alpha\left(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}')\right)\dot{\phi}_\alpha(\mathbf{x})-H\,,$$

де $L_k(\phi,\dot{\phi})$ - кінематична частина лагранжіану, $H(\phi)=\int d^3xe(\mathbf{x},\phi)$ - гамільтоніан системи. Щільність енергії середовища $e(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}'))$ та величини $F_\alpha(\mathbf{x},\phi(\mathbf{x}'))$ - певні функціонали динамічних змінних $\phi_\alpha(\mathbf{x})$. З принципу стаціонарної дії випливають рівняння динаміки для величин $\phi_\alpha(\mathbf{x})$:

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x})=\int d^3x'\,J^{-1}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)\frac{\delta H(\phi)}{\delta\phi_b(\mathbf{x}')}=\{\phi_a(\mathbf{x}),H(\phi)\}.$$

Матриця, що входить до цього рівняння $J_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)$ визначаються рівністю

$$J_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi)\equiv\frac{\delta F_b(\mathbf{x}';\phi)}{\delta\phi_a(\mathbf{x})}-\frac{\delta F_a(\mathbf{x};\phi)}{\delta\phi_b(\mathbf{x}')}.$$

В термінах цієї матриці дужки Пуассона для величин $\phi_a(\mathbf{x})$ мають вид

$$\{\phi_a(\mathbf{x}),\phi_b(\mathbf{x}')\}=J^{-1}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\phi).$$

Скінченні перетворення $\phi_a(\mathbf{x})\to\phi'_a(\mathbf{x})=\phi_a(\mathbf{x},\phi_a(\mathbf{x}'))$, що залишають інваріантною кінематичну частину дії

$$L_k(\phi,\dot{\phi})=\int d^3xF_a(\mathbf{x};\phi)\dot{\phi}_a(\mathbf{x})=L_k(\phi',\dot{\phi}')=\int d^3xF_a(\mathbf{x};\phi')\dot{\phi}'_a(\mathbf{x}),$$

будуть канонічними, якщо виконується співвідношення:

$$F_b(\mathbf{x}';\phi)=\int d^3xF_a(\mathbf{x};\phi')\delta\phi'_a(\mathbf{x})/\delta\phi_b(\mathbf{x}').$$

У разі нескінченно малих перетворень

$$\phi_a(\mathbf{x}) \to \phi'_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + \delta\phi_a(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}'))$$

звідси випливає рівність

$$\delta\phi_a(\mathbf{x}) = \{\phi_a(\mathbf{x}), G(\phi)\}, \qquad (3.12)$$

де $G(\phi) \equiv \int d^3x F_a(\mathbf{x}, \phi)\delta\phi_a(\mathbf{x})$ - генератор нескінченно малих канонічних перетворень. Формулювання гамільтонового підходу для опису нерівноважних процесів в магнетиках передбачає вибір певного набору динамічних змінних, для яких вводиться пуассонівська структура. У досліджуваних магнітних системах ми виходимо з виразу для кінематичної частини лагранжіану виду

$$L_k(\mathbf{x}) = \underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\dot{\underline{a}}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \equiv tr\hat{\underline{b}}(\mathbf{x})\hat{\underline{a}}(\mathbf{x}). \qquad (3.13)$$

Тут $\underline{b}_{\alpha\beta}$ та $\underline{a}_{\alpha\beta}$ - ермітові 3×3 матриці ($\hat{\underline{a}} = \hat{\underline{a}}^+, \hat{\underline{b}} = \hat{\underline{b}}^+$). Величина спіна часток приймає значення $s = 1$. Знайдемо нескінченно малі канонічні перетворення $\delta\phi_\alpha(\mathbf{x};\phi)$, що залишають інваріантною кінематичну частину лагранжіану. Знаючи, з одного боку, їх явний вид, а з іншого сторони, з огляду на співвідношення (3.12), нескладно знайти дужки Пуассона динамічних змінних. Варіації $\delta\underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0, \delta\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \neq 0$, (функції $\delta\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ не залежать від $\hat{\underline{b}}(\mathbf{x})$, $\hat{\underline{a}}(\mathbf{x})$), залишають інваріантною кінематичну частину лагранжіану та згідно (3.12) можуть бути представленні у вигляді

$$\delta\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), P\}, \qquad \delta\underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{\underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), P\}. \qquad (3.14)$$

Тут $P = \int d^3x \underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\delta\underline{a}_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$ - генератор цих перетворень. Порівнюючи (3.13) з (3.14), отримаємо дужки Пуассона

$$\{\underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \underline{b}_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \qquad \{\underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \underline{a}_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = -\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (3.15)$$

Для кінематичної частини лагранжіану $L_k(\mathbf{x}) = -tr\hat{\underline{b}}(\mathbf{x})\hat{\underline{a}}(\mathbf{x})$, яка відрізняється на повну похідну за часом від функції (3.14), аналогічно знайдемо

$$\{\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \underline{a}_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \qquad \{\underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \underline{b}_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (3.16)$$

Зв'яжемо канонічно спряжені матриці $\hat{\underline{a}}(\mathbf{x})$ та $\hat{\underline{b}}(\mathbf{x})$ з фізичними величинами теорії магнетизму. З цією метою введемо замість цих матриць безслідні матриці

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \underline{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\beta}tr\hat{\underline{a}}(\mathbf{x})/3, \qquad b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \underline{b}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\beta}tr\hat{\underline{b}}(\mathbf{x})/3.$$

З огляду на ці визначення, одержимо дужки Пуассона для матриць $a_{\alpha\beta}$ та $b_{\alpha\beta}$:

$$\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = (\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}/3)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (3.17)$$

Введемо в розгляд ермітову та безслідну матрицю

$$\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv i[\hat{b}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})]. \qquad (3.18)$$

Матриця $\hat{G} \equiv \int d^3x\hat{g}(\mathbf{x})$ - є генератором SU(3) симетрії $\{\hat{G}, H\} = 0$ і має вісім магнітних ступенів свободи. Використовуючи визначення (3.15), (3.16) і формули (3.18), знайдемо дужки Пуассона для компонент цієї величини:

$$\mathrm{i}\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = (g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (3.19)$$

Інваріанти Казиміра цієї алгебри дужок Пуассона мають вигляд

$$g_n(\mathbf{x}) \equiv tr\hat{g}^n(\mathbf{x}), \qquad \{g_n(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} = 0, \tag{3.20}$$

де $n = 2{,}3$. Для чистих квантових станів, враховуючи (3.2), отримаємо $g_2 = 2/3$ та $g_3 = 2/9$. Для змішаних станів справедливі нерівності $g_2 < 2/3$, $g_2 + g_3 < 8/9$. Наявність цих інваріантів Казиміра зменшує число незалежних магнітних ступенів свободи до шести. Введення матричного представлення (3.18) набору магнітних ступенів свободи відповідає використанню базису Вейля.

У нормальних багатопідґраткових станах і вироджених однопідґраткових станах гамільтоніан є функціоналом матриці $\hat{g}(\mathbf{x})$: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}))$, а щільність обмінної енергії є функція матриці $\hat{g}(\mathbf{x})$ та її градієнта $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x}))$. Використовуючи дужки Пуассона (3.19), отримаємо рівняння динаміки

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \tag{3.21}$$

яке узагальнює рівняння Ландау-Ліфшиця на випадок однопідґраткового магнітного середовища зі спіном s=1. З цього рівняння і співвідношення (3.2) випливає рівняння руху для одночастинкової матриці щільності:

$$\dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{\rho}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{\rho}(\mathbf{x}))}{\delta\rho(\mathbf{x})}\right], \tag{3.22}$$

Це рівняння визначає динаміку магнетиків в наближенні нормальної бозе-системи.

Зв'яжемо матрицю $\hat{g}(\mathbf{x})$ з дійсними фізичними величинами. Ними є: спіновий вектор - $s_\alpha(\mathbf{x})$ та квадрупольна матриця - $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, які в термінах матриці $\hat{g}(\mathbf{x})$ визначені співвідношеннями

$$s_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} g_{\beta\gamma}, \qquad q_{ik} = \left(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}\right)/2. \tag{3.23}$$

Легко бачити, що для вектора спіна справедливі в силу (3.19) та (3.23) дужки Пуассона

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(\mathbf{x}). \tag{3.24}$$

Для решти величин знайдемо

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho} q_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} q_{\rho\beta}(\mathbf{x})\right), \tag{3.25}$$
$$\left\{q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') s_\gamma(\mathbf{x})\left(\varepsilon_{\gamma\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\gamma\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\gamma\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\right)/4.$$

Підалгебра дужок Пуассона (3.24) складається з компонент спінового вектора і містить один інваріант Казиміра - s_α^2. Гамільтонів формалізм та SO(3) симетрія обмінної взаємодії ведуть до рівнянь динаміки, що збігається з теорією Ландау-Ліфшиця [20] для магнетиків зі спіном s=1/2. У досліджуваному нами випадку обмінний гамільтоніан володіє SU(3) симетрією. Динаміка станів магнетиків формулюється для щільності спіна та квадрупольної матриці.

3.3. Закони збереження в диференціальній формі. Інваріанти Казиміра та моделі обмінної енергії. Спектри магнітних збуджень

У разі SU(3) симетрії обмінного гамільтоніана $\left\{G_{\alpha\beta}, H\right\} = 0$, набір інтегралів руху магнетиків зі спіном s=1 складається з їх гамільтоніана та матриці $G_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_a = H, G_{\alpha\beta} = \int d^3x \zeta_a(\mathbf{x}).$$

Для виведення рівнянь динаміки щільності адитивних інтегралів руху $\zeta_a(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, ($a = 0, \alpha\beta$), необхідно врахувати властивість симетрії щільності енергії обмінної взаємодії:

$$\{G_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0\,. \qquad (3.26)$$

Беручи до уваги останнє співвідношення, та, використовуючи уявлення щільності потоків роботи [58], отримаємо диференціальний закон збереження

$$\dot{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\nabla_k j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \qquad (3.27)$$

$$j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}.$$

Тут $j^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ - щільність потоку генератора SU(3) симетрії, відповідна до величини $G_{\alpha\beta}$, що зберігається. Аналогічно, рівняння руху для щільності енергії в диференціальній формі та вираз для щільності її потоку мають вигляд

$$\dot{e}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}),$$

$$q_k(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{e(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}/2\,. \qquad (3.28)$$

Крім властивості симетрії (3.26), обмінний гамільтоніан трансляційно-інваріантний $\{P_k, H\} = 0$ та інваріантний щодо поворотів в конфігураційному просторі $\{L_i, H\} = 0$, тут $L_i \equiv \varepsilon_{ikl} \int d^3x x_k \pi_l(\mathbf{x})$ – орбітальний момент системи. Для щільності магнітної енергії справедливі співвідношення симетрії

$$\{P_k, e(\mathbf{x})\} = \nabla_k e(\mathbf{x}), \qquad \{L_i, e(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l e(\mathbf{x}). \qquad (3.29)$$

У цих формулах введений в розгляд імпульс магнітної системи

$$P_k = \int d^3 x \pi_k(\mathbf{x}), \qquad \pi_k(\mathbf{x}) \equiv -Sp\hat{b}(\mathbf{x})\nabla_k \hat{a}(\mathbf{x}).$$

Очевидно, що в силу справедливості співвідношень (3.29), (3.16) та (3.17), мають місце рівності

$$\{P_k, a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \qquad \{P_k, b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\} = \nabla_k b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}).$$

Співвідношення (3.29) та уявлення про щільності потоків у формі роботи [62] дозволяють записати закон збереження для імпульсу магнонів в диференціальній формі

$$\dot{\pi}_i(\mathbf{x}) = -\nabla_k t_{ik}(\mathbf{x}),$$
$$t_{ik}(\mathbf{x}) = -e(\mathbf{x})\delta_{ik} + \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{\pi_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}'), e(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}. \qquad (3.30)$$

Тут $t_{ik}(\mathbf{x})$ - щільність потоку імпульсу магнонів.

Сформулюємо функціональну гіпотезу для розглянутого однопідґраткового магнетика зі спіном s=1. Щільність обмінної енергії є функцією матриці $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ та її градієнту $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla \hat{g}(\mathbf{x}))$. Використовуючи стандартне рівняння в формі Гамільтона

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = \{\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{H}(\hat{g}(\mathbf{x}'))\}, \qquad (3.31)$$

отримаємо рівняння руху для матриці $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \qquad (3.32)$$

яке узагальнює рівняння Ландау-Ліфшиця на магнітне середовище зі спіном s=1. З огляду на властивість симетрії обмінної взаємодії для щільності енергії (3.26) та, беручи до уваги рівності (3.27) та (3.32), отримаємо вирази для щільності потоків адитивних інтегралів руху

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g}\right], \qquad q_k = tr\frac{\delta \hat{H}}{\delta g}\hat{j}_k. \tag{3.33}$$

Наслідком співвідношення (3.29) є вид щільності потоку імпульсу магнонів в термінах щільності енергії

$$t_{ik} = \delta_{ik}\left(-e + tr\frac{\delta \hat{H}}{\delta g}\hat{g}\right) + tr\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g}\nabla_i \hat{g}. \tag{3.34}$$

В термінах матриць $q_{\alpha\beta}$ та $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma/2$ рівняння динаміки для щільності генератора SU(3) симетрії перепишеться у вигляді двох матричних рівнянь

$$\dot{\hat{q}}(\mathbf{x}) = \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})}\right] - \left[\hat{q}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta \varepsilon(\mathbf{x})}\right],$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\delta \hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})}, \hat{q}(\mathbf{x})\right] + \left[\frac{\delta \hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta \varepsilon(\mathbf{x})}, \hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\right]. \tag{3.35}$$

У вирішенні питання про побудову модельних виразів щільності обмінної магнітної енергії для спінів s=1, ми дотримуємося аналогії, що проведена в [20] для магнетиків зі спіном s=1/2. Вважаємо, що для магнетиків зі спіном s=1 справедливі співвідношення симетрії (3.26) та (3.29). Для цих магнітних систем запишемо магнітний гамільтоніан в такому вигляді, щоб однорідна частина щільності енергії була виражена в термінах інваріантів g_2 та g_3:

$$H(g_2, g_3) = H(g_2) + H(g_3),$$
$$H(g_2) = 2\int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) tr\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}'),$$
$$H(g_3) = -\int d^3x d^3x' d^3x'' I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|) tr\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}'').$$

Тут $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ та $I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|)$ - обмінні інтеграли дво- та трьохчастинкових магнітних взаємодій. Ми вважаємо, що просторові неоднорідності, в таких магнетиках, малі. Тоді з точністю до членів квадратичних по просторовим градієнтам щільності генератора SU(3) симетрії отримаємо вираз щільності обмінної енергії, відповідний до гамільтоніана $H(g_2)$

$$e(\mathbf{x}) = 2Jg_2(\mathbf{x}) + \bar{J} tr \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}), \tag{3.36}$$

де $J \equiv \int d^3x J(|\mathbf{x}|)$, $\bar{J} \equiv \int d^3x x^2 J(|\mathbf{x}|)/3$ - ефективні інтеграли однорідної та неоднорідної двочастинкової обмінної взаємодії. Використовуючи модель енергії (3.39), рівняння динаміки однопідґраткових магнетиків з SU(3) симетрією (3.32) набувають виду:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = -iJ[\hat{g}(\mathbf{x}), \Delta\hat{g}(\mathbf{x})]. \tag{3.37}$$

Це рівняння є SU(3) симетричним узагальненням нелінійного рівняння динаміки, справедливого для магнетиків зі спіном s=1/2.

Аналіз динамічних процесів високоспінових систем також можна здійснити, використовуючи базис Рака алгебри Лі групи SU(3). З цією метою розкладемо поляризаційну матрицю щільності (3.12) по поляризаційним операторам [42]: $\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv g_a(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a/2$. Тут індекс a пробігає значення $a = 1,2,\ldots,8$. Величина $g_a(\mathbf{x})$ носить назву вектора Блоха. Ермітові та безслідні матриці $\hat{\lambda}_a$, є генераторами групи SU(3). Вони мають властивості

$$tr\hat{\lambda}_a\hat{\lambda}_b = 2\delta_{ab}, \qquad \hat{\lambda}_a\hat{\lambda}_b = \frac{2\delta_{ab}}{2s+1}\hat{I} + z_{abc}\hat{\lambda}_c, \qquad z_{abc} \equiv d_{abc} + if_{abc}.$$

Тут d_{abc} є симетричним тензором при перестановці будь-яких двох індексів. Величина f_{adc} є антисиметричний тензор по відношенню до перестановки будь-яких двох індексів. Ці два тензора є структурними постійними групи SU(3). З (3.36), враховуючи співвідношення

$$g_a(\mathbf{x}) = tr\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a,$$

для вектора Блоха отримана дужка Пуассона

$$\{g_a(\mathbf{x}), g_b(\mathbf{x'})\} = 2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x'}) f_{abc} g_c(\mathbf{x}),$$

яка призводить до рівняння динаміки

$$\dot{g}_a(\mathbf{x}) = 2 f_{abc} \frac{\delta H(g)}{\delta g_b(\mathbf{x})} g_c(\mathbf{x}). \tag{3.38}$$

Цей вид рівняння є узагальненням рівняння Ландау-Ліфшиця на випадок довільного спіна в базисі Рака та SU(3) симетрією обмінної взаємодії. Динамічними змінними є компоненти вектора Блоха, спряжені до незвідних тензорних операторів.

З урахуванням SU(3) симетрії обмінного гамільтоніана знайдено рівняння динаміки в диференціальній формі

$$\dot{g}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k g_{ak}(\mathbf{x}).$$

Тут вираз для щільності потоку вектора Блоха має вид

$$g_{ak} = 2 f_{abc} \frac{\partial e(g)}{\delta \nabla_k g_b} g_c .$$

Використовуючи модельний вид щільності обмінної неоднорідної енергії $e = \bar{J}(\nabla_k g_a)^2 / 2$, приходимо до рівняння $\dot{g}_a = -2 f_{abc} g_c \bar{J} \Delta g_b$. Лінеаризуючи це рівняння близько до стану з рівноважним значенням магнітних ступенів свободи g_a^0, та, переходячи до Фур'є-подання, отримаємо дисперсійне рівняння $\det D_{ab}(k,\omega) = 0$, де

$$D_{ab}(k,\omega) = i\omega\delta_{ab} + 2Jk^2 f_{abc} g_c^0 .$$

Звідси видно, що врахування тільки обмінних взаємодій веде до квадратичного характеру спектра. Крім спінових хвиль, також виникають квадрупольні та мультипольні спектри магнітних збуджень.

За відсутності просторових неоднорідностей рівняння (3.38) описує рух в просторі тензорних параметрів та є унітарним «обертанням» блохівського вектора [121]. Наведені форми запису рівнянь динаміки (3.21) та (3.38) відповідають двом різним базисам алгебри Лі групи SU(3). Матричний запис рівняння (3.21) отриманий в базисі Вейля, а векторне рівняння (3.38) використовує базис Рака [121].

Для аналізу стійкості станів рівноваги ми використовуємо модель вільної енергії магнітного середовища. Для простоти, розглянемо тільки випадки одновісної квадрупольної матриці $\hat{q} = q(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$. У однопідґратковому випадку гамільтоніан є функціоналом щільності генератора SU(3) симетрії $H(\hat{g})$. Вираз однорідної частини обмінної щільності вільної енергії вибираємо у вигляді:

$$e_0 = -J_0\left(\frac{2}{3}q^2 + \frac{1}{2}s^2\right) + B\left(\frac{2}{3}q^2 + \frac{1}{2}s^2\right)^2 + \frac{A}{2}s^2 + \frac{C}{4}s^4. \qquad (3.39)$$

Тут $g_2 = 2q^2/3 + s^2/2$. В щільності енергії врахування тільки інваріанта Казиміра g_2 недостатньо для знаходження рівноважних значень модулів спіна та квадрупольної матриці. Тому ми додали в вираз (3.39) напівказиміри s^2 та s^4 [122], які мають більш низьку SO(3) симетрію. Явний вигляд однорідної частини обмінної енергії (3.39) дозволяє знайти рівноважні значення магнітних властивостей та області існування магнітних фаз.

Стійкими рівноважними значеннями величин q, s будуть точки локального мінімуму функції $e_0(q,s)$ (3.39). З умов стаціонарності

$$\frac{\partial e_0}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial e_0}{\partial q} = 0$$

та умов стійкості

$$\partial^2 e_0 / \partial s^2 > 0, \qquad \partial^2 e_0 / \partial q^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial s^2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 e_0}{\partial s \partial q}\right)^2 > 0.$$

знайдемо точки мінімуму енергії q_i^0, s_i^0. Далі лінеаризуємо рівняння (3.37) близько до цих станів рівноваги та знайдемо спектри:

1). Розв'язок $s_0 = q_0 = 0$ відповідає стійкому парамагнітному стану, якщо постійні обмінної взаємодії задовольняють нерівності $J_0 < 0$ та $A - J_0 > 0$. Спектри в цьому випадку є виродженими.

2). Розв'язок $s_0^2 = \dfrac{J_0 - A}{B + C}$, $q_0 = 0$ описує феромагнітний стан рівноваги. Для його стійкості необхідне виконання нерівностей: $J_0 - A > 0$, $B + C > 0$, $J_0 C + BA < 0$. Спектри колективних збуджень мають такий вигляд:

$$\omega = Jk^2 s_0, \qquad \omega = Jk^2 s_0 / 2.$$

3). Розв'язок $s_0 = 0$, $q_0^2 = \dfrac{3J_0}{4B}$ характеризує квадрупольний магнітний стан, стійкість якого забезпечується нерівностями $J_0 > 0,\ A > 0,\ B > 0$. Нами отримано спектр магнітних збуджень:

$$\omega = Jk^2 q_0.$$

4). Розв'язок $s_0^2 = -A/C$, $q_0^2 = 3(J_0 C + BA)/(4CB)$ визначає феро-квадрупольне упорядкування магнітного середовища. Цей розв'язок стійкий якщо: $J_0 C + BA > 0,\ A < 0,\ B > 0,\ C > 0$. Спектри магнітних збуджень мають вигляд при $\vec{s}_0 \parallel \vec{e}_0$:

$$\omega = Jk^2 s_0, \qquad \omega = \left| q_0 \pm s_0 / 2 \right| Jk^2,$$

та при $\vec{s}_0 \perp \vec{e}_0$:

$$\omega = \sqrt{q_0^{\ 2} + s_0^{\ 2}}\, Jk^2, \qquad \omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{q_0^{\ 2} + s_0^{\ 2}} \pm q_0\right) Jk^2.$$

Далі ми випишемо дисперсійне рівняння для довільного положення векторів $\vec{s}_0$ та $\vec{e}_0$:

$$\omega^6 + a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0. \qquad (3.40)$$

Це рівняння (3.40) - бікубічне, коефіцієнти якого мають вид:

$$a = -3k^4 J^2 g_2, \qquad b = 9k^8 J^4 g_2^2 / 4,$$
$$c = -k^{12} J^6 s^2 \left(72 q g_3 \cos^2\varphi + s^2\left(s^2 + q^2 + 27 q^2 \cos^2\varphi\right)\right),$$

де φ – кут між векторами $\vec{s}_0$ та $\vec{e}_0$. Розв'язки рівняння (3.40) представимо у вигляді тригонометричних формул Вієта. Випишемо необхідні величини:

$$Q = \left(a^2 - 3b\right)/9, \quad R = \left(2a^3 - 9ab + 27c\right)/54, \qquad S = Q^3 - R^2 = -k^{12}J^6 g_3^2 c.$$

Величина $S \geq 0$, отже, отримуємо наступні три дійсних кореня:

$$\omega_1 = \sqrt{-2\sqrt{Q}\cos(\phi) - a/3},$$
$$\omega_{2,3} = \sqrt{-2\sqrt{Q}\cos(\phi \pm 2\pi/3) - a/3}, \qquad (3.41)$$

де $\phi = \arccos\left(R/\sqrt{Q^3}\right)/3$. Слід зазначити, що величина $S = 0$, тільки при $s = 0$ або $q = 0$, що веде до попередніх випадків 1-3. В якості ілюстрації характеру анізотропії феро-квадрупольного стану середовища, представимо спектри колективних збуджень $\omega_{1,2,3}(k,\theta)$ в сферичній системі координат, де кут між осями анізотропії визначається співвідношенням $\cos\theta = \mathbf{se}/s$.

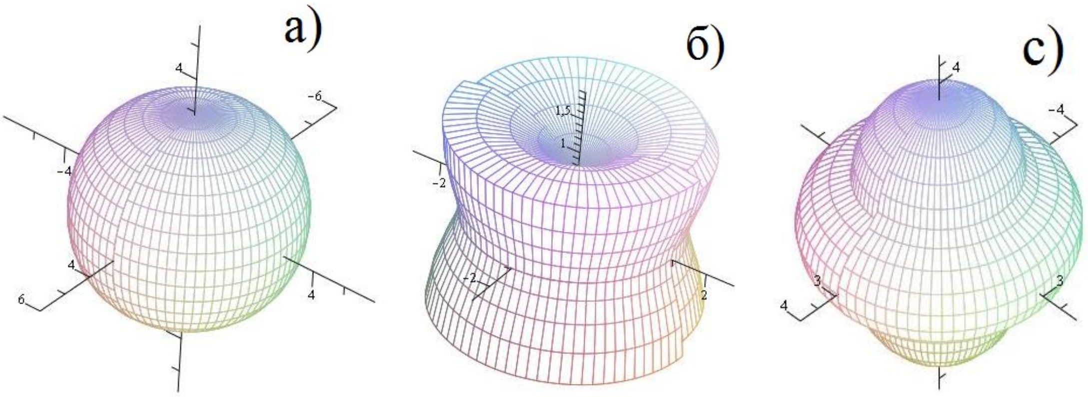

Рис. 3.1. Значення спектрів колективних магнітних збуджень феро-квадрупольного стану середовища. а), б), с) – відповідають трьом різним спектрам $\omega_1(k,\theta)$, $\omega_2(k,\theta)$, $\omega_3(k,\theta)$.

В силу наявності двох інваріантів Казиміра (3.20), рівняння (3.37) має два вироджених спектра. Число невироджених спектрів дорівнює шести, де три з них представлені формулами (3.41), а решта три спектра колективних збуджень мають зворотній знак. З представлених рисунків 3.1 ми бачимо, що вектор спіна та вісь квадрупольної матриці в стані рівноваги можуть мати три різні анізотропні розв’язки.

Окремо розглянемо однорідну динаміку для SU(3) симетричною магнітного середовища в зовнішньому магнітному полі. Розглянемо модель енергії, яка містить лінійний та квадратичний доданки Зеємана:

$$e = -s_{\alpha} h_{\alpha} + J q_{\alpha\beta} h_{\alpha} h_{\beta} = tr \hat{g} \hat{h}, \tag{3.42}$$

де $h_{\alpha\beta} = J h_{\alpha} h_{\beta} + i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma}$, $g_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} - i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_{\gamma} / 2$, $\mathbf{h}$ – зовнішнє магнітне поле. Використовуючи вираз (3.32), а також модель енергії (3.42), отримаємо рівняння динаміки:

$$\dot{\hat{g}} = i \left[\hat{g}, \hat{h} \right]$$

Звідси, знаходимо шість спектрів колективних збуджень:

$$\omega = \pm J h^2 \pm h, \ \omega = \pm 2h.$$

Як видно з представлених розв’язків, ми отримали спектри, які є квадратичними по модулю вектора зовнішнього магнітного поля. Крім цього, на відміну від випадку магнетиків зі спіном s=1/2 ми отримали додаткову гілку спектрів колективних збуджень $\omega = \pm 2h$.

3.4. Релаксаційні процеси в однопідґраткових магнетиках зі спіном s=1. Дисипативні потоки та декременти затухання

У цьому розділі ми розглянемо релаксаційну динаміку квантових станів магнетиків зі спіном s=1. Сформулюємо другий початок термодинаміки таких магнітних систем. Згідно з функціональною гіпотезою щільність обмінної енергії є функцією щільності ентропії σ, матриці $g_{\alpha\beta}$ та її градієнта $e = e(\sigma, \hat{g}, \nabla_k \hat{g})$. Для диференціала щільності енергії справедлива рівність

$$de = \frac{\partial e}{\partial \sigma} d\sigma + tr \frac{\partial \hat{e}}{\partial g} d\hat{g} + tr \frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} d\nabla_k \hat{g}\,, \qquad (3.43)$$

що має фізичний зміст другого закону термодинаміки. Врахування релаксаційних процесів призводить до виникнення в рівняннях динаміки для щільності адитивних інтегралів руху дисипативних доданків

$$\dot{\varsigma}_a = -\nabla_k \left(\zeta_{ak}^{(0)} + \zeta_{ak}^{(1)} \right) \equiv \dot{\varsigma}_a^{(1)} + \dot{\varsigma}_a^{(2)}. \qquad (3.44)$$

Тут перший доданок праворуч описує адіабатичні процеси в магнетиках, а другий враховує дисипативні процеси. Термодинамічне співвідношення (3.43) та рівняння (3.44) приводять до рівняння динаміки для щільності ентропії

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k j_{\sigma k}^{(1)} + I\,, \qquad (3.45)$$

де

$$j_{\sigma k}^{(1)} = Y_a \zeta_{ak}^{(1)}, \qquad I = \zeta_{al}^{(1)} \nabla_l Y_a \qquad (3.46)$$

відповідно щільність дисипативного потоку та виробництво ентропії представлені у термінах дисипативних потоків адитивних інтегралів руху. Тут $Y_a(\mathbf{x}) = \delta\Sigma / \delta\zeta_a(\mathbf{x})$ - термодинамічні сили, ($T \equiv Y_0^{-1}$ - температура та $h_{\beta\alpha} \equiv -Y_{\beta\alpha} / Y_0 = \delta H / \delta g_{\alpha\beta}$ - ефективне поле), спряжені адитивним інтегралам руху. Ентропія всієї системи визначається рівністю $\Sigma \equiv \int d^3x \sigma(\mathbf{x})$. Далі, зручно виділити симетричну та антисиметричну частини ефективного поля: $\hat{h} = \hat{h}^{(a)} + \hat{h}^{(s)}$, $h_{\alpha\beta}^{(a)} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma = 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{h})$, $h_{\alpha\beta}^{(s)} \equiv (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})/2$. Вектор $\mathbf{h}$ має фізичний зміст внутрішнього магнітного поля. Вимога додатного значення виробництва ентропії виконується, якщо дисипативні потоки є лінійними функціями градієнтів термодинамічних сил

$$\zeta_{al}^{(1)} = K_{al,bj} \nabla_j Y_b , \tag{3.47}$$

де узагальнені кінетичні коефіцієнти $K_{al,bj}$ задовольняють принципу симетрії Онзагера

$$K_{al,bj} = K_{bj,al} .$$

Оскільки матриця $\hat{g}$ безслідна, то справедливі додаткові співвідношення

$$K_{\alpha\alpha l,bj} = 0 , \; K_{al,\gamma\gamma j} = 0 .$$

Введемо в розгляд дисипативну функцію даного магнітного середовища та її щільність

$$R \equiv \frac{1}{2} \int d^3 x \nabla_l Y_a (\mathbf{x}) K_{al,bj} (\mathbf{x}) \nabla_j Y_b (\mathbf{x}) = \int d^3 x r(\mathbf{x}). \tag{3.48}$$

Беручи до уваги формули (3.7) та (3.10), бачимо, що дисипативна функція пов'язана з густиною дисипативних потоків адитивних інтегралів руху рівністю

$$\dot{\zeta}_a^{(2)} = -\nabla_k \zeta_{ak}^{(1)} = \frac{\delta R}{\delta Y_a} . \tag{3.49}$$

В обмінному наближенні тензорна структура узагальнених кінетичних коефіцієнтів така, що просторові та спінові індекси не переплутуються з причини відсутності виділених напрямків в конфігураційному просторі. Тому, $K_{ak,bl} = \delta_{kl} K_{ab}$. Крім того, використовуємо принцип Кюрі [123], згідно з яким кінетичні коефіцієнти не рівні нулю для потоків однакової тензорної розмірності. Тому, для дисипативних потоків щільності адитивних інтегралів руху отримаємо вирази

$$q_k^{(1)} = -\kappa \nabla_k T, \qquad j_{\alpha k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta} \nabla_k h_\beta, \qquad q_{\alpha\beta,k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} \nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)} \tag{3.50}$$

Кінетичні коефіцієнти теплопровідності κ, спінової $\sigma_{\alpha\beta}$ та квадрупольної дифузії $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ пов'язані з узагальненими кінетичними коефіцієнтами рівностями $K_{\alpha\beta} = T\sigma_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta,\gamma\rho} = T\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$, $K_{0,0} = T^2\kappa$ та задовольняють співвідношенням симетрії: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\gamma\rho,\alpha\beta}$. Крім того, в силу симетрії та безслідності квадрупольної матриці, виконуються рівності $\sigma_{\alpha\alpha,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\gamma\gamma} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\beta\alpha,\gamma\rho}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$. Використовуючи (3.46) та (3.50), випишемо дисипативний потік та виробництво ентропії у вигляді

$$j_{\sigma k}^{(1)} = -\left(\kappa \nabla_k T - h_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \nabla_k h_\beta - h_{\alpha\beta}^{(s)} \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} \nabla_k h_{\gamma\rho}^{(s)}\right) / T, \tag{3.51}$$
$$I = \left(\sqrt{\kappa} \nabla_k T / T\right)^2 + \nabla_k h_{\beta\alpha}^{(s)} \left(\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} / T\right) \nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)} + \nabla_k h_\alpha \left(\sigma_{\alpha\beta} / T\right) \nabla_k h_\beta.$$

Подальший аналіз та спрощення тензорної структури кінетичних коефіцієнтів пов'язаний зі станом рівноваги системи, поблизу якого проходять динамічні процеси. Якщо в рівновазі відсутні виділені напрямки у спіновому просторі, тобто $g_{\alpha\beta} = 0$ та $h_{\alpha\beta} = 0$, тензорні кінетичні коефіцієнти набудуть виду

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_1 \left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} / 3\right) / 2 \equiv \sigma_1 B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(0)}. \tag{3.52}$$

Тут σ, σ_1 - коефіцієнти спінової дифузії та дифузії квадрупольної матриці, що відповідають ізотропному магнітному стану. Звідси отримаємо дисипативні потоки магнітних ступенів свободи

$$j_{\alpha k}^{(1)} = -\sigma \nabla_k h_\alpha , \qquad \hat{q}_{\alpha\beta,k}^{(1)} = -\sigma_1 \nabla_k \hat{h}_{\alpha\beta}^{(s)} . \tag{3.53}$$

З (3.51) - (3.53) випливає вираз для виробництва ентропії

$$I = \kappa(\nabla_k T)^2 / T + \sigma(\nabla_k h)^2 / T + 2\sigma_1 \left(\nabla_k h^{(s)}\right)^2 / 3T \geq 0 ,$$

де $h = |\mathbf{h}|$ та $h^{(s)} = \left(3tr\hat{h}^{(s)} / 2\right)^{1/2}$. Додатність виробництва ентропії забезпечується нерівностями $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\sigma_1 > 0$.

Структура дисипативних потоків поблизу стану $g_{\alpha\beta} \neq 0$ та $h_{\alpha\beta} = 0$ відповідає феромагнетику та квадрупольному магнетику. Вважаючи, для простоти, що анізотропія стану рівноваги одновісна, наведемо тензорну структуру кінетичних коефіцієнтів у вигляді

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\perp \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}) + \sigma_\parallel n_\alpha n_\beta , \quad \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}) \equiv \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta ,$$
$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_1 B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(1)} + \sigma_2 B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(2)} + \sigma_3 B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(3)} . \tag{3.54}$$

Тут $\mathbf{n}$ - вісь анізотропії в стані рівноваги. Представлення (3.54) буде однозначним, якщо для цих матриць вимагати властивість ортогональності

$$B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(k)} B_{\gamma\rho,\mu\nu}^{(l)} = \delta_{kl} B_{\alpha\beta,\mu\nu}^{(k)} . \qquad k, l = 1,2,3$$

Явний вид матриць $B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(k)}$ знайдено в роботі [124]

$$B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(1)} = B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(0)} - B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(2)} - B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(3)} , \qquad B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(2)} = 3(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)(n_\gamma n_\rho - \delta_{\gamma\rho}/3)/2 ,$$
$$B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(3)} = \left(\delta_{\alpha\gamma} n_\rho n_\beta + \delta_{\alpha\rho} n_\gamma n_\beta + \delta_{\beta\gamma} n_\rho n_\alpha + \delta_{\beta\rho} n_\gamma n_\alpha - 4 n_\alpha n_\beta n_\rho n_\gamma \right)/2 . \tag{3.55}$$

Враховуючи співвідношення (3.13), (3.14), (3.17) та (3.18), отримаємо виробництво ентропії

$$I = \kappa\left(\nabla_k T\right)^2 / T^2 + 2\sigma_2\left(\nabla_k h^{(s)}\right)^2 / 3T + 2\sigma_3\left(h^{(s)}\right)^2\left(\nabla_k e_\alpha\right)^2 / 3T +$$
$$+\sigma_\parallel\left(\nabla_k h\right)^2 / T + \sigma_\perp h^2\left(\nabla_k e_\alpha\right)^2 / T,$$

де $\mathbf{e}$ - вісь анізотропії в нерівноважному стані, $\mathbf{e}^2 = 1$. Звідси випливає додатній знак кінетичних коефіцієнтів $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_\perp, \sigma_\parallel$. У випадку переходу рівноважного стану з одновісною симетрією до ізотропного стану внутрішнє ефективне поле зникає $h^{(s)} \to 0$, $h \to 0$ та для кінетичних коефіцієнтів справедливі співвідношення: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_\perp = \sigma_\parallel = \sigma$. Формули (3.50), (3.51), (3.54) та (3.55) дають явний вид дисипативних потоків магнітних ступенів свободи в нелінійному випадку.

Отримаємо лінеаризовані рівняння динаміки з урахуванням дисипативних процесів для квадрупольної матриці та спіна. Згідно (3.7) та (3.13) маємо

$$\delta\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \delta j^{(0)}_{\alpha k} + \sigma_{\alpha\beta}\Delta\delta h_\beta, \qquad \delta\dot{q}_{\alpha\beta} = -\nabla_k \delta q^{(0)}_{\alpha\beta,k} + \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\Delta\delta h^{(s)}_{\gamma\rho}. \qquad (3.56)$$

Щоб знайти зв'язок варіацій ефективного поля з варіаціями динамічних величин та, тими самим, отримати лінеаризовані рівняння динаміки в замкнутому виді, звернемося до моделі обмінної енергії [61], яку ми наведемо у вигляді суми двох доданків: $e = e_0 + e_n$. Перше з них є щільність однорідної частини обмінної енергії. Цю величину як функцію двох величин візьмемо у вигляді $e_0(s, q) = -Jg_2 + Bg_2^2 + Aq^2$ [61]. Тут перші два доданки мають SU(3) симетрією, а останній доданок має SO(3) симетрію. Для простоти ми не розглядаємо вплив інваріанта Казиміра g_3. Неоднорідну обмінну енергію виберемо у вигляді

$$e_n = \bar{J} tr\left(\nabla_k \hat{g}\right)^2, \qquad (3.57)$$

тут $\bar{J} > 0$ - постійна неоднорідного обміну.

Знайдемо зв'язок варіацій ефективного поля з варіаціями динамічних величин. Розглянемо випадок **парамагнетика**, тут і вектор спіна і квадрупольна матриця в рівновазі дорівнюють нулю. Цей парамагнітний стан стійкий, якщо $J<0$ та $3A>2J$. Використовуючи явний вид щільності обмінної енергії як в [61], отримаємо

$$\delta h_\alpha = -n_\alpha J\delta s - \bar{J}\Delta\delta s_\alpha ,$$
$$\delta h^{(s)}_{\alpha\beta} = \left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)\left[\left(3A-2J\right)\delta q - 2\bar{J}\Delta\delta q\right].$$

Тут введені позначення варіацій модулів спіна і квадрупольної матриці $\delta s \equiv n_\alpha \delta s_\alpha$, $\delta q \equiv 3n_\alpha \delta q_{\alpha\beta} n_\beta /2$. У лінійному наближенні $e_\alpha = n_\alpha + \delta e_\alpha$, так що $n_\alpha \delta e_\alpha = 0$. Звідси випливають лінеаризовані рівняння динаміки для модулів спіна і квадрупольної матриці

$$\delta\dot{s} = -\sigma\left[J\Delta\delta s + \bar{J}\Delta\Delta\delta s\right], \qquad \delta\dot{q} = \sigma_1\left[\left(3A-2J\right)\Delta\delta q - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q\right]. \qquad (3.58)$$

З (3.58) отримаємо спектри колективних магнітних збуджень з урахуванням затухання:

$$\omega_s = i\Gamma_s , \qquad \Gamma_s = \sigma\left(-Jk^2 + \bar{J}k^4\right)$$

- коефіцієнт затухання спінової хвилі:

$$\omega_q = i\Gamma_q , \qquad \Gamma_q = \sigma_1\left[\left(3A-2J\right)k^2 + 2\bar{J}k^4\right]$$

- коефіцієнт затухання квадрупольної хвилі.

Аналогічно, наведемо лінеаризовані рівняння для варіацій динамічних величин з урахуванням дисипації для **феромагнітного** стану: $s_0^2 = J/B>0$ та

$q_0 = 0$, тут щільність спіна в рівновазі не дорівнює нулю, а щільність квадрупольної матриці вироджена. Це стан стійкий, якщо $A > 0$, $B > 0$, $J > 0$.

$$\delta\dot{s}_{\parallel} = 2J\sigma_{\parallel}\Delta\delta s_{\parallel} - \bar{J}\sigma_{\parallel}\Delta\Delta\delta s_{\parallel},$$

$$\delta\dot{s}_{\perp\alpha} = \bar{J}s_0\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_{\beta}\delta s_{\perp\gamma} - \bar{J}\sigma_{\perp}\Delta\Delta\delta s_{\perp\alpha}$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha\beta} = \bar{J}\left[\Delta\delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}_0\right]_{\alpha\beta} + \sigma_2\left(3A\Delta\delta q_{\alpha\beta} - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q_{\alpha\beta}\right).$$

Тут поздовжні і поперечні складові варіацій спіна задані співвідношеннями $\delta s_{\parallel} \equiv n_{\alpha}\delta s_{\alpha}$, $\delta s_{\perp\alpha} \equiv \delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\delta s_{\beta}$, $\left(\hat{\varepsilon}_0\right)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_0 n_{\gamma}/2$. Звідси, приходимо до спектрів $\omega(k) = \bar{J}s_0k^2/2$, $\omega(k) = \bar{J}s_0k^2$ та знайдемо коефіцієнти затухання: для поздовжньої

$$\Gamma_{s_{\parallel}} = 2\sigma_{\parallel}Jk^2 + \bar{J}\sigma_{\parallel}k^4$$

і поперечної

$$\Gamma_{s_{\perp}} = \bar{J}\sigma_{\perp}k^4$$

компонент спіна, з яких бачимо, що спектр має квадратичну залежність, а коефіцієнт затухання k^4. Для модуля квадрупольної матриці

$$\Gamma_q = \sigma_2\left(3Ak^2 + 2\bar{J}k^4\right).$$

Неважко показати, що дисипативні доданки в лінеаризованих рівняннях динаміки, що відповідають **квадрупольному** магнетику: $s_0 = 0$ та $q_0^2 = 3(2J - 3A)/8B > 0$, існують і стійкі, якщо $A < 0$, $B > 0$, $2J > 3A$.

$$\delta\dot{s}^{(2)}_{\parallel} = -3A\sigma_{\parallel}\Delta\delta s_{\parallel}/2 - \bar{J}\sigma_{\parallel}\Delta\Delta\delta s_{\parallel}, \qquad \delta\dot{s}^{(2)}_{\perp\alpha} = -\bar{J}\sigma_{\perp}\Delta\Delta\delta s^{\perp}_{\alpha},$$

$$\delta\dot{q}^{(2)} = \sigma_2\left[16Bq_0^2\Delta\delta q/3 - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q\right], \qquad \delta\dot{e}^{(2)}_{\lambda} = -\bar{J}\sigma_3\Delta\Delta\delta e_{\lambda}.$$

тут рівність $\delta e_{\lambda} \equiv \delta^{\perp}_{\lambda\beta}(\mathbf{n})\delta q_{\beta\gamma} n_{\gamma} / q$ дає зв'язок варіацій осі анізотропії і квадрупольної матриці. Звідси отримаємо коефіцієнти затухання в спектрах колективних збуджень: для поздовжньої і поперечної складових спінового моменту

$$\mathit{\Gamma}_{s_{\parallel}} = -3A\sigma_{\parallel}k^2/2 + \bar{J}\sigma_{\parallel}k^4, \qquad \mathit{\Gamma}_{s_{\perp}} = \bar{J}\sigma_{\perp}k^4.$$

Для осі анізотропії і модуля квадрупольної матриці коефіцієнти затухання дорівнюють

$$\mathit{\Gamma}_{q} = \sigma_2\left[16Bq_0^2k^2/3 + 2\bar{J}k^4\right], \qquad \mathit{\Gamma}_{\mathbf{e}} = \bar{J}\sigma_3 k^4.$$

Ці коефіцієнти затухання узгоджені з результатами роботи [65], в якій використаний інший модельний вид обмінної енергії.

3.5. Низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна для станів квадрупольного магнетика та феромагнетика

У заключному розділі ми досліджуємо еволюцію нерівноважних станів магнетиків зі спіном s=1 в зовнішньому полі і отримаємо динамічні рівняння, на основі яких обчислимо низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна для станів феромагнетика та квадрупольного магнетика. Двочасові запізнюючі функції Гріна визначаються рівністю [89]:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') \equiv -i\theta(t-t')tr\hat{\hat{w}}\left[\hat{a}(\mathbf{x},t),\hat{\hat{b}}(\mathbf{x}',t')\right], \qquad (3.59)$$

де $\hat{\hat{w}}$ - рівноважний статистичний оператор Гіббза. Довільні локальні оператори $\hat{a}(\mathbf{x},t) \equiv e^{i\hat{\hat{H}}t}\hat{a}(\mathbf{x})e^{-i\hat{\hat{H}}t}$, $\hat{\hat{b}}(\mathbf{x},t) \equiv e^{i\hat{\hat{H}}t}\hat{\hat{b}}(\mathbf{x})e^{-i\hat{\hat{H}}t}$ в поданні Гейзенберга та квантовий гамільтоніан є функціоналами бозе-операторів народження та знищення. Середні локальних магнітних величин, для яких ми шукаємо функції Гріна, мають вид

$$a(\mathbf{x},t) = tr\hat{\rho}\hat{a}(\mathbf{x},t) = trp\hat{\rho}(t)\hat{a}(\mathbf{x}) = a_0 + \delta a(\mathbf{x},t), \qquad b(\mathbf{x},t) = b_0 + \delta b(\mathbf{x},t),$$

де $\hat{\rho}(t) = \hat{w} + \delta\hat{\rho}(t)$ - статистичний оператор в момент часу t та $\delta\hat{\rho}(t)$- нерівноважна поправка; $\delta a(\mathbf{x},t), \delta b(\mathbf{x},t)$ - відхилення фізичних величин від їхніх рівноважних значень a_0, b_0. Функція Гріна пов'язує лінійний відгук локальної фізичної величини $\delta a_\xi(\mathbf{x},t)$ та слабке зовнішнє збурення:

$$\delta a_\xi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x \delta\xi(\mathbf{x}',t') G_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t').$$

Тут $\delta\xi(\mathbf{x},t)$ - потенціал взаємодії магнітної системи із зовнішнім полем. У Фур'є-поданні це співвідношення записується у вигляді:

$$\delta a_\xi(\mathbf{x},\omega) = G_{ab}(\mathbf{x},\omega)\delta\xi(\mathbf{x},\omega). \qquad (3.60)$$

З іншого боку, використовуючи гамільтонів формалізм, ми отримаємо рівняння макроскопічної динаміки магнітних систем у зовнішньому полі. Лінеаризована версія цих рівнянь пов'язує відхилення локальної фізичної величини δa та потенціал поля $\delta\xi$, і, тим самим, дозволяє знайти асимптотики двочасових функцій Гріна в області низьких частот $\omega\tau_r << 1$ та малих хвильових векторах $kl << 1$. Тут τ_r - час хаотизації (час встановлення локальної рівноваги магнітної системи) та l - характерні просторові масштаби зміни фізичних величин. Повний гамільтоніан магнітної системи при наявності зовнішнього поля має вид $H(t) = H + V(t)$. Тут H - гамільтоніан магнітної системи, який включає сильні обмінні взаємодії та слабкі релятивістські взаємодії. Енергія взаємодії магнітної системи із зовнішнім змінним полем $V(t)$ має вид

$$V(t)=\int d^3x\delta\xi(\mathbf{x},t)b(\mathbf{x},t), \tag{3.61}$$

де $b(\mathbf{x},t)$ - друга локальна фізична величина, для якої знаходяться функції Гріна. Ми вважаємо зміну зовнішнього поля досить повільною, так що характерна частота його зміни мала в порівнянні з τ_r^{-1}. У цьому випадку фізична система встигає підлаштовуватися до миттєвих значень поля. В області часів $t>>\tau_r$ залежність від часу величини $b(\mathbf{x},t)$ здійснюється за допомогою магнітних ступенів свободи. У разі однопідґраткових магнетиків виконується співвідношення $b(\mathbf{x,}t)\xrightarrow[t>>\tau_r]{}b(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x'},t))\approx b(\hat{g}(\mathbf{x,}t))$. Для його справедливості характерні просторові масштаби зміни фізичних величин повинні бути набагато більші від середньої міжатомної відстані $l>>a$. З огляду на (3.19) та (3.61), отримаємо рівняння магнітної динаміки магнетиків в зовнішньому полі

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x})=i\left[\hat{g}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right]+\hat{\eta}_g(\mathbf{x},\hat{g}),\qquad \hat{\eta}_g(\mathbf{x},\hat{g})=i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{g}(\mathbf{x}),\frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right]. \tag{3.62}$$

Вираз обмінної щільності енергії вибираємо у вигляді [62]:

$$e_0(s,q)=-Jg_2+Bg_2^2+As^2/2, \tag{3.63}$$

$$e_n=\bar{J}tr(\nabla_k\hat{g})^2/2.$$

В силу явного виду енергії (3.63) рівняння (3.62) спрощуються

$$\dot{s}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{J}([\hat{q},\Delta\hat{q}]+[\Delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{s}),\hat{\varepsilon}(\mathbf{s})])_{\beta\gamma}+\eta_\alpha(\mathbf{s}),$$

$$\dot{\hat{q}} = \bar{J}[\Delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{s}), \hat{q}] + [\Delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}(\mathbf{s})] + \eta_\alpha(\hat{q}). \tag{3.64}$$

Джерела в правій частині рівнянь визначаються формулами

$$\eta_\alpha(\mathbf{s}) \equiv \xi\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial b}{\partial s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\partial b}{\partial q_{\beta\lambda}}q_{\gamma\lambda}\right), \tag{3.65}$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{q}) \equiv \xi\frac{\partial b}{\partial q_{\mu\nu}}\left(\varepsilon_{\beta\nu}(\mathbf{s})\delta_{\gamma\mu} + \varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{s})\delta_{\beta\mu}\right) - \xi\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\gamma\rho} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\beta\rho}\right).$$

Розглянемо динаміку системи поблизу квадрупольного магнітного стану рівноваги ($s_0 = 0,\ \hat{q}_0 \neq 0$). Виходячи з (3.64) та (3.65), отримаємо лінеаризовані рівняння динаміки в Фур'є-поданні біля цього стану

$$i\omega\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = -k^2\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\hat{q}_0, \delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega)]_{\beta\gamma} + \eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega) = 2\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial b}{\partial q_{\beta\lambda}}q^0_{\gamma\lambda}, \tag{3.66}$$

$$i\omega\delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega) = -k^2\bar{J}\left[\hat{\varepsilon}(\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega))\hat{q}_0\right] + \eta_\alpha(\hat{q},\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_\alpha(\hat{q},\mathbf{k},\omega) = -\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q^0_{\rho\gamma} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q^0_{\rho\beta}\right).$$

Тут $\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega), \delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega)$ - відхилення щільності спіна та квадрупольної матриці від рівноважних значень $\mathbf{s}_0, \hat{q}_0$. Виключаючи варіацію квадрупольної матриці за допомогою другого рівняння в (3.66), виразимо варіацію щільність спіна в термінах потенціалу зовнішнього поля $\delta s_\lambda(\mathbf{k},\omega) = \hat{\underline{D}}^{-1}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k},\omega)\overline{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega)$. Матриця $\hat{\underline{D}}(\mathbf{k},\omega)$ та джерело $\overline{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega)$ визначені формулами

$$\underline{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = i\omega\delta_{\alpha\beta} + ik^4\bar{J}^2\left[3\hat{q}_0^2 - 2Itr\hat{q}_0^2\right]_{\alpha\beta}/\omega, \tag{3.67}$$

$$\overline{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega) \equiv \eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega) + 2ik^2\delta\xi\bar{J}\,\frac{\partial b}{\partial s_\beta}\left[3\hat{q}_0^2 - 2\hat{I}tr\hat{q}_0^2\right]_{\alpha\beta}/\omega.$$

Нехай в рівновазі квадрупольна матриця э одновісна $q^0_{\alpha\beta} = q_0(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$, де e_α - вісь магнітної анізотропії та q_0 її модуль. Відгук величини $\delta a(\mathbf{k},\omega)$ на зовнішнє збурення $\delta\xi(\mathbf{k},\omega)$ в головному наближенні по малим хвильовим векторам та частотам має вигляд

$$\delta a(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) + \frac{\partial a}{\partial q_{\alpha\beta}}\delta q_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega). \tag{3.68}$$

Використовуючи співвідношення (3.60), (3.61), (3.66)-(3.68), отримаємо вираз двочасової асимптотики функції Гріна для квадрупольного магнітного стану в термінах базисних функцій Гріна

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta} + \frac{\partial a}{\partial q_{\alpha\beta}}G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_{\gamma\rho}} +$$
$$+\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,q_{\mu\lambda}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_{q_{\mu\lambda}}} + \frac{\partial a}{\partial q_{q_{\mu\lambda}}}G_{q_{\mu\lambda},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}.$$

Для базисних функцій Гріна отримано вирази

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega) = -\frac{2\bar{J}k^2q_0^2\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{e})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)}, \qquad G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{q_0^2\bar{J}k^2F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e})}{2\Delta(\mathbf{k},\omega)},$$
$$G_{q_{\beta\gamma},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega) = \frac{i\omega q_0F^\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{e})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)} = -G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega). \tag{3.69}$$

Тут $\Delta(\mathbf{k},\omega) \equiv \omega^2 - k^4q_0^2\overline{J}^2$ та тензори, що характеризують магнітну анізотропію функцій Гріна, визначаються рівностями

$$F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e}) = F^{\mu}_{\alpha\beta}(\mathbf{e})F^{\mu}_{\gamma\rho}(\mathbf{e}), \quad F^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathbf{e}) \equiv 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{e})e_{\gamma} + 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{e})e_{\beta}, \quad \delta^{\perp}_{\mu\lambda}(\mathbf{e}) \equiv \delta_{\mu\lambda} - e_{\nu}e_{\rho}.$$

Знаменник в формулах (3.69) $\Delta(\mathbf{k},\omega) \equiv \omega^2 - k^4 \bar{J}^2 q_0^2$ визначає спектр магнітних збуджень та задає полюсні особливості функцій Гріна.

Розглянемо деякі окремі випадки формул (3.69). Вважаючи частоту $\omega = 0$, бачимо, що відповідно до теореми Боголюбова [125], базисні функції Гріна $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},0)$ та $G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},0)$ мають особливість по хвильовому вектору та функція Гріна $G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},0)$ звертається в нуль:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},0) = 2\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{e}) / \bar{J}k^2,$$

$$G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},0) = F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e}) / 4\bar{J}k^2, \qquad G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},0) = 0. \qquad (3.70)$$

Якщо хвильовий вектор $\mathbf{k} = 0$, то базисні функції Гріна $G_{s_\alpha,s_\beta}(0,\omega)$ та $G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(0,\omega)$ звертаються в нуль, а функція Гріна $G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(0,\omega)$ має особливість по частоті:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(0,\omega) = G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(0,\omega) = 0, \quad G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(0,\omega) = -iF^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathbf{e}) / \omega. \qquad (3.71)$$

З умови $\Delta(\mathbf{k},\omega) = 0$ отримаємо спектр квадрупольної хвилі $\omega = k^2 \bar{J} q_0$, що відповідає одновісному магнітному упорядкуванню. Відзначимо, що в разі двовісного квадрупольного упорядкування можливе поширення трьох квадрупольних хвиль [62].

Обчислимо асимптотики функцій Гріна для феромагнітного стану рівноваги $(s_0 \neq 0, q_0 = 0)$. Лінеаризовані рівняння близько до цього стану (3.64), (3.65) в Фур'є-поданні набувають вигляду

$$i\omega\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{J}k^2\left[\hat{\varepsilon}(\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega)),\hat{\varepsilon}(\mathbf{s}_0)\right]_{\beta\gamma} + \eta_\alpha(\mathbf{s};\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_\alpha(\mathbf{s};\mathbf{k},\omega) = 2\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_0)\frac{\partial b}{\partial s_\beta}, \tag{3.72}$$

$$i\omega\delta q_{\beta\gamma}(\mathbf{k},\omega) = \theta(\mathbf{k})\left(\varepsilon_{\beta\rho}(\mathbf{s}_0)\delta q_{\rho\gamma} + \varepsilon_{\rho\gamma}(\mathbf{s}_0)\delta q_{\rho\beta}\right) + \eta_{\beta\gamma}(\hat{q};\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{q};\mathbf{k},\omega) = \delta\xi(\mathbf{k},\omega)\left(\frac{\partial b}{\partial q_{\gamma\nu}}\varepsilon_{\beta\nu}(\mathbf{s}_0) + \frac{\partial b}{\partial q_{\beta\nu}}\varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{s}_0)\right).$$

Рівняння динаміки для щільності спіна та квадрупольної матриці в цьому випадку розділяються. З першого рівняння (3.72) отримаємо зв'язок варіації щільності спіна та потенціалу зовнішнього поля

$$\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = D^{-1}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\eta_\beta(\mathbf{s};\mathbf{k},\omega), \tag{3.73}$$

де

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = i\omega\delta_{\alpha\beta} - \bar{J}k^2\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_0). \tag{3.74}$$

Рівняння динаміки для квадрупольної матриці в (3.72) містить подвійне сумування по спіновим індексам. Для його розв'язку зручно перейти до нових змінних та одинарному підсумовуванню за допомогою підстановки: $q_{\alpha\beta} \to q_n$, $\eta_{\alpha\beta} \to \eta_n$, $n = 1,2,..,9$: $q_{11} \to q_1$, $q_{12} \to q_2, ..., q_{33} \to q_9$. Така підстановка розділяє рівняння для величин δq_m з індексами $(m = 1,2,4,5)$ та величин δq_p з індексами $(p = 3,6,7,8)$; $\delta q_9(\mathbf{k},\omega) \equiv 0$. З (3.72) получимо варіації δq_m та δq_p в термінах потенціалу зовнішнього поля

$$\delta q_m(\mathbf{k},\omega) = \delta\xi(\mathbf{k},\omega)s_0\underline{D}^{-1}_{mn}(\mathbf{k},\omega)\underline{M}_{nl}\frac{\partial b}{\partial q_l}/2, \quad m,n,l = 1,2,4,5; \tag{3.75}$$

$$\delta q_p(\mathbf{k},\omega) = \delta\xi(\mathbf{k},\omega)s_0\underline{D}^{-1}_{ps}(\mathbf{k},\omega)\underline{M}_{st}\frac{\partial b}{\partial q_t}/4, \quad p,s,t = 3,6,7,8.$$

Тут (4x4) матриці $\hat{D}$ та $\underline{\hat{D}}$, що входять в праву частину співвідношень (3.75), представлені у вигляді прямого добутку матриць Паулі $\hat{\sigma}_\alpha$ та одиничної матриці:

$$\hat{D}(\mathbf{k},\omega) = i\omega\hat{I}_4 + \theta(\mathbf{k})\hat{M}\,, \qquad \hat{M} = \hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{I}_2,$$
$$\underline{\hat{D}}(\mathbf{k},\omega) = i\omega\hat{I}_4 - \theta(\mathbf{k})\hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2, \quad \underline{\hat{M}} = \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 + \hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2.$$

Тут $\theta(\mathbf{k}) = k^2\bar{J}s_0/2$. Матриці $\hat{I}_2, \hat{I}_4$ - одиничні та мають розмірності 2x2 та 4x4. З огляду на (3.73)-(3.75) та співвідношення (3.60), отримаємо структуру низькочастотної асимптотики функції Гріна

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha} G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta} + \frac{\partial a}{\partial q_m} G_{q_m,q_n}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_n} + \frac{\partial a}{\partial q_p} G_{q_p,q_s}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_s}.$$

Наведемо явні вирази базисних функцій Гріна:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega) = s_0\left[\theta(\mathbf{k})\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m}) - i\omega\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{m})\right]/\Delta_0(\theta(\mathbf{k}),\omega), \tag{3.76}$$
$$G_{q_p,q_s}(\mathbf{k},\omega) = X_{ps}(\theta(\mathbf{k}),\omega)/\Delta_0(\theta(\mathbf{k}),\omega),$$
$$G_{q_m,q_n}(\mathbf{k},\omega) = X_{mn}(2\theta(\mathbf{k}),\omega)/\Delta_0(2\theta(\mathbf{k}),\omega).$$

Тут 4x4 матриця $\hat{X}(\theta(\mathbf{k}),\omega)$ визначається рівнянням

$$\hat{X}(\theta(\mathbf{k}),\omega) = s_0\left[\omega\left(\hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{I}_2\right) - \theta(\mathbf{k})\left(\hat{I}_4 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2\right)\right]/4. \tag{3.77}$$

Знаменники виразів (3.76) $\Delta_0 = \omega^2 - \theta^2(\mathbf{k})$ та $\Delta_1 = \omega^2 - (2\theta(\mathbf{k}))^2$ показують, що полюсні особливості базисних функцій Гріна можуть бути двох типів. Функції Гріна G_{s_α,s_β} та $G_{q_{(3,6,7,8)},q_s}$ мають особливість при $\Delta_0(\mathbf{k},\omega) = 0$, а функції Гріна $G_{q_{(1,2,4,5)},q_n}$ - при $\Delta_1(\mathbf{k},\omega) = 0$. Звідси отримаємо спектри колективних магнітних збуджень: $\omega = \kappa(\mathbf{k})$ та $\omega = 2\kappa(\mathbf{k})$. Формули (3.76), (3.77) дозволяють розв'язати задачу знаходження низькочастотних асимптотик функцій Гріна для феромагнітних станів середовища зі спіном s=1, якщо обмінна взаємодія має SU(3) симетрією. Наведемо окремий вид базисних функцій Гріна

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},0) = -\frac{2\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m})}{k^2\bar{J}}, \qquad G_{s_\alpha,s_\beta}(0,\omega) = -\frac{is_0\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{m})}{\omega}, \tag{3.78}$$

$$G_{q_p,q_s}(\mathbf{k},0) = \frac{\left(\hat{I}_4 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2\right)_{ps}}{2k^2\bar{J}},\ G_{q_p,q_s}(0,\omega) = \frac{s_0\left(\hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{I}_2\right)_{ps}}{4\omega},\ \ p,s = 3,6,7,8;$$

$$G_{q_m,q_n}(\mathbf{k},0) = \frac{\left(\hat{I}_4 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2\right)_{mn}}{2k^2\bar{J}},\ G_{q_m,q_n}(0,\omega) = \frac{s_0\left(\hat{I}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{I}_2\right)_{mn}}{2\omega},\ m,n = 1,2,4,5.$$

Тут введено позначення вектора $\mathbf{m} = \mathbf{s}_0 / s_0$.

Розглянемо тепер задачу знаходження низькочастотної асимптотики функцій Гріна з SO(3) симетричною обмінною взаємодією, для якої справедливе співвідношення симетрії $\{S_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0$. Щільність неоднорідної обмінної енергії випливає з формули для неоднорідної частини обмінної енергії зі спіном s=1 магнетиків (3.63). Вона має вигляд $e_n = \bar{J}\left(\nabla_k s_\alpha\right)^2 / 4$. Використовуючи метод «джерел», отримаємо загальну структуру низькочастотної асимптотики функції Гріна

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha} G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega) \frac{\partial b}{\partial s_\beta}. \tag{3.79}$$

Базисна функція Гріна $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)$ в (3.75) збігається з формулою (3.76) для функції Гріна $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)$ та даними [91], (дивитися стор. 92,99). Використовуючи вираз (3.79), справедливий для довільних локальних величин, та помічаючи, що $q_{\mu\nu} = s_\mu s_\nu - s^2\delta_{\mu\nu}/3$, отримаємо функції Гріна $G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)$ та $G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)$

$$G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{s_0^3}{\Delta_0(\theta(\mathbf{k}),\omega)}\left\{-i\omega\Phi_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})+2\theta(\mathbf{k})F_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})\right\},\tag{3.80}$$

$$G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{s_0^2}{\Delta_0(\theta(\mathbf{k}),\omega)}\left\{-i\omega F^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathbf{m})+2\theta(\mathbf{k})\left(\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m})m_\gamma+\delta^{\perp}_{\alpha\gamma}(\mathbf{m})m_\beta\right)\right\}.$$

Тут введено позначення

$$\Phi_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{x})\equiv\varepsilon_{\mu\beta}(\mathbf{m})m_\nu m_\gamma+\varepsilon_{\mu\gamma}(\mathbf{m})m_\nu m_\beta+\varepsilon_{\nu\beta}(\mathbf{m})m_\mu m_\gamma+\varepsilon_{\nu\gamma}(\mathbf{m})m_\mu m_\beta\,.$$

Наведемо окремі випадки асимптотик функцій Гріна (3.80):

$$G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},0)=-\frac{4s_0^2F_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})}{k^2\bar{J}},\qquad G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(0,\omega)=-\frac{is_0^3\Phi_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})}{\omega},\tag{3.81}$$

$$G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},0)=-\frac{s_0\left(\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m})m_\gamma+\delta^{\perp}_{\alpha\gamma}(\mathbf{m})m_\beta\right)}{k^2\bar{J}},\qquad G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(0,\omega)=-\frac{is_0^2F^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathbf{m})}{\omega}.$$

Формули (3.76) та (3.80) показують якісний збіг особливостей функцій Гріна по хвильовим векторам та частоті при різній унітарній симетрії обмінної взаємодії. Однак коефіцієнти при цих особливостях мають істотно іншу функціональну залежність від рівноважних значень магнітних величин. Якщо обмінна взаємодія має SU(3) симетрію, то для стану феромагнетика функція Гріна $G_{s_\alpha,q_n}(\mathbf{k},\omega)=0$ звертається в нуль, тоді як у разі SO(3) симетрії обмінної взаємодії ця величина представлена формулою (3.81). Крім того, полюсна особливість функції Гріна з SO(3) симетрією взаємодії феромагнетика демонструє наявність однієї гілки спінової хвилі, тоді як функції Гріна з SU(3) симетричною взаємодією магнетика мають полюсні особливості двох типів, що відображають поширення двох типів хвиль: спінової та квадрупольної.

3.6. Висновки до розділу 3

На основі гамільтонового формалізму побудована динаміка однопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Введено магнітні ступені свободи, що відповідають SU(3) симетрії обмінної взаємодії, та знайдені дужки Пуассона для цих величин. Отримано нелінійні рівняння динаміки для однопідґраткових магнетиків зі спіном s=1 в базисах Вейля та Рака. Раніше аналогічні рівняння були отримані в базисі Рака авторами роботи [60]. Проведена лінеаризація даних рівнянь та обчислені спектри колективних магнітних збуджень, які мають характер спінової, квадрупольної та феро-квадрупольної хвиль з квадратичним законом дисперсії. Виявлено вплив релаксаційних процесів та знайдена структура дисипативних потоків щільності адитивних інтегралів руху в термінах кінетичних коефіцієнтів теплопровідності, спінової та квадрупольної дифузії. Обчислені коефіцієнти затухання магнітних ступенів свободи для станів квадрупольного магнетика, які узгоджуються з результатами роботи [65] в одноконстантному наближенні.

Вперше отримані низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна двох довільних локальних фізичних величин для станів квадрупольного магнетика. Дані розв'язки дозволяють знайти спектри колективним магнітних збуджень, з'ясовують характер магнітної анізотропії вищевказаних функцій Гріна та дають можливість визначення кінетичних процесів нейтральних повільних частинок в розглянутих однопідґраткових магнетиках зі спіном s=1.

РОЗДІЛ 4
ДИНАМІКА БАГАТОПІДҐРАТКОВИХ МАГНЕТИКІВ З SU(3) СИМЕТРІЄЮ ОБМІННОЇ ВЗАЄМОДІЇ

В цьому розділі вивчені багатопідґраткові магнетики зі спіном s = 1. Сформульована функціональна гіпотеза та встановлені дужки Пуассона для набору з шістнадцяти магнітних ступенів свободи. Дана фізична інтерпретація додаткових магнітних величин. Отримано рівняння динаміки таких магнетиків з урахуванням дисипативних процесів. Обчислені спектри колективних магнітних збуджень для станів спінового нематика та знайдені відповідні декременти затухання. Знайдені низькочастотні асимптотики двочастинкових функцій Гріна для спінових нематиків та проведено їх порівняння з аналогічними асимптотиками квадрупольних магнетиків.

Основні результати четвертого розділу опубліковані в роботах [129-133].

4.1. Алгебра дужок Пуассона магнітних ступенів свободи в багатопідґраткових магнетиках зі спіном s=1. Закони збереження в диференціальної формі

У дослідженні нерівноважних процесів багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1 повне спонтанне порушення SU(3) симетрії стану рівноваги веде до подвоєння числа магнітних ступенів свободи. Набір магнітних ступенів свободи, які описують стани таких магнетиків, складається з ермітових та безслідних 3x3 матриць $\hat{g}(\mathbf{x})$ та $\hat{a}(\mathbf{x})$. Ці матриці задовольняють згідно з (3.17) та (3.19) дужках Пуассона:

$$i\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = (g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$i\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = (a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \qquad (4.1)$$
$$\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = 0.$$

Матриця $\hat{g}(\mathbf{x})$ являє собою щільність генератора SU(3) симетрії (3.18). Матриці $\hat{a}(\mathbf{x})$ ми надаємо фізичний зміст параметра порядку вироджених станів багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Загальна кількість дійсних магнітних величин для багатопідґраткових магнетиків в умовах повного спонтанного порушення симетрії дорівнює шістнадцяти. Неважко показати, що ця розширена алгебра дужок Пуассона має інваріанти Казиміра

$$a_n(\mathbf{x}) \equiv tr\hat{a}^n(\mathbf{x}), \qquad \{a_n(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} = 0. \qquad (4.2)$$

Представлений вибір магнітних ступенів свободи відповідає використанню базису Вейля.

Зв'яжемо ермітову матрицю $\hat{a}(\mathbf{x})$ з дійсними фізичними величинами співвідношеннями:

$$n_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_{\beta\gamma}, \qquad m_{\alpha\beta} = \left(a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}\right)/2. \qquad (4.3)$$

Симетричний та безслідний тензор $\hat{m}$ має фізичний зміст параметра порядку спінового нематика. Антиферомагнітний параметр порядку $\mathbf{n}$ представлений в термінах антисиметричної частини матриці $\hat{a}(\mathbf{x})$. Для введених величин отримаємо, згідно з (4.1) та (4.3), дужки Пуассона:

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x}), \qquad (4.4a)$$

$$\{n_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta}(\mathbf{x})\right), \qquad (4.4b)$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), m_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\gamma\rho}(\mathbf{x})\right), \qquad (4.4c)$$

$$\{m_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')n_\gamma(\mathbf{x})\left(\varepsilon_{\alpha\nu\gamma}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\mu\gamma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\nu\gamma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\delta_{\beta\nu}\right)/4. \qquad (4.4d)$$

Формули (3.24), (3.25), (4.4) дозволяють виявити підалгебри дужок Пуассона та встановити динаміку різних типів упорядкування багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. При зміні обігу часу, щільність спіна та вектор антиферомагнетизму змінюють знак: $T\mathbf{s} = -\mathbf{s}, T\mathbf{n} = -\mathbf{n},$ а квадрупольна матриця та нематический параметр порядку не змінюються: $T\hat{q} = \hat{q}, \;\; T\hat{m} = \hat{m}.$

Неважко бачити, що розширена алгебра дужок Пуассона містить підалгебри, яким можна надати відповідний зміст при описі магнітних станів.

1) Мінімальна підалгебра дужок Пуассона (3.24) містить тільки спіновий вектор. У цьому випадку опис макроскопічних станів еквівалентно фізичній картині однопідградкових пара- або феромагнетиків зі спіном s=1/2. Це випадок магнітного середовища з SO(3) симетрією.

2) Щільність спіна та квадрупольної матриці формують іншу підалгебру дужок Пуассона та описують магнітні стани SU(3) симетричного магнетика в багатопідґратковому випадку та вироджені феро -, квадро - та феро-квадрупольні стани в магнетиках з однією підґраткою. Такі стани були розглянуті в попередньому розділі.

3) Набір магнітних динамічних величин складається з щільності спіна $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ і вектора спінової анізотропії $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, для яких має місце замкнута підалгебра дужок Пуассона (3.24), (4.4a). Динаміка таких магнетиків еквівалентна випадку антиферомагнетика і феримагнетика [8-10,15,16,26-28]. Цей випадок не входить в цілі нашого дослідження.

4) Вектор спіна $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ і тензорний параметр порядку $\hat{m}(\mathbf{x})$ формують підалгебру дужок Пуассона (3.24), (4.4c). Це фізично новий випадок Т-парного порушення SO(3) симетрії, який відсутній у магнетиків зі спіном s=1/2. Такий набір магнітних параметрів описує стани спінового нематика. Детальний розгляд таких магнітних станів дано в цьому розділі.

5) Загальний випадок алгебри (4.1) включає шістнадцять магнітних ступенів свободи та описує стани феро-квадрупольних антиферомагнітних спінових нематиків.

Сформулюємо функціональну гіпотезу в досліджуваних багатопідґраткових магнетиках зі спіном s=1. Вироджені стани такого магнітного середовища характеризуються щільністю обмінної енергії, яка є функцією матриць $\hat{g}$ та $\hat{a}$, а також їх градієнтів $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}), \nabla\hat{a}(\mathbf{x}))$. Основне термодинамічне співвідношення має вид

$$de = tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial g}d\hat{g} + tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}d\nabla_k\hat{g} + tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial a}d\hat{a} + tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k a}d\nabla_k\hat{a}. \qquad (4.5)$$

Для вироджених багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1 та порушеною SU(3) симетрією, використовуючи формули (4.1), знайдемо рівняння динаміки

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right] + i\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})}\right], \qquad (4.6)$$

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i\left[\frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}, \hat{a}(\mathbf{x})\right].$$

Властивість SU(3) симетрії щільності обмінної магнітної енергії $\{\hat{G}, e(\mathbf{x})\} = 0$ приводить до співвідношення

$$\left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial g}, \hat{g}\right] + \left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}, \nabla_k\hat{g}\right] + \left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial a}, \hat{a}\right] + \left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k a}, \nabla_k\hat{a}\right] = 0,$$

враховуючи яке, рівняння динаміки для матриці $\hat{g}$ може бути представлено в диференціальному виді:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = -\nabla_k\hat{j}_k(\mathbf{x}),$$

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial\hat{e}(\hat{g},\hat{a})}{\partial\nabla_k g}\right] + i\left[\hat{a}, \frac{\partial\hat{e}(\hat{g},\hat{a})}{\partial\nabla_k a}\right] \qquad (4.7)$$

- щільність потоку генератора SU (3) симетрії для багатопідґраткових магнетиків.

Використовуючи формули (3.28) та (4.7), приходимо до рівняння динаміки щільності енергії та виразу для щільності потоку енергії

$$\dot{e}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}).$$

Тут

$$q_k = i\,tr\frac{\delta\hat{H}}{\delta a}\left[\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g},\hat{a}\right] + tr\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\,\hat{j}_k$$

- щільність потоку магнітної енергії.

Отримаємо рівняння динаміки для щільності імпульсу магнонів в багатопідґраткових магнетиках. Помічаючи, що $H(\hat{b},\hat{a}) = H(\hat{g}(\hat{b},\hat{a}),\hat{a})$ та, з огляду на формули (3.45) та (4.1), приходимо до рівняння (3.30), де щільність потоку імпульсу магнонів для вироджених нерівноважних станів має вид

$$t_{ik} = \delta_{ik}\left(-e + tr\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\,\hat{g}\right) + tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}\nabla_i\hat{g} + tr\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k a}\nabla_i a.$$

4.2. Адіабатичні процеси в спіновому нематику. Спектри колективних збуджень

Підалгебра магнітних величин s_α та $m_{\alpha\beta}$ описує стани спінового нематика. Вектор спіна $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ та тензорний параметр порядку $\hat{m}(\mathbf{x})$ формують замкнуту підалгебру дужок Пуассона (3.24), (4.4с). Враховуючи що $e = e(\mathbf{s},\nabla\mathbf{s},\hat{m},\nabla\hat{m})$, отримаємо рівняння динаміки

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = -\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho} m_{\rho\gamma}\right) \frac{\delta H}{\delta s_\alpha} . \qquad (4.8)$$

Властивість симетрії $\{H, \mathbf{s}\} = 0$ для щільності обмінної енергії дозволяє перетворити перше рівняння до виду

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k} , \qquad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta} s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial \nabla_k m_{\beta\lambda}} m_{\gamma\lambda} \right).$$

Щільність обмінної енергії вибираємо у вигляді $e = e_0 + e_n$, де для неоднорідної частини обмінної енергії ми використовуємо вираз:

$$e_n = \bar{J} \left(\nabla_k \mathbf{s}\right)^2 / 2 + \bar{\bar{J}} tr\left(\left(\nabla_k \hat{m}\right)^2\right) / 2 . \qquad (4.9)$$

Використовуючи співвідношення (4.8) та (4.9), отримаємо рівняння нелінійної динаміки для даного магнітного впорядкування

$$\begin{aligned} \dot{s}_\alpha &= -\bar{J} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta s_\beta s_\gamma - \bar{\bar{J}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta m_{\beta\lambda} m_{\gamma\lambda} , \\ \dot{m}_{\beta\gamma} &= -P s_\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho} m_{\rho\gamma}\right), \end{aligned}$$

де введено позначення $P = P\left(s^2, m_2\right) = \frac{2\partial e_0}{\partial s^2}$. Перепишемо це рівняння в матричному виді:

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \bar{J} \left[\Delta \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}\right] + \bar{\bar{J}} \left[\hat{m}, \Delta \hat{m}\right], \qquad \dot{\hat{m}} = \left[\hat{m}, P \hat{\varepsilon} - \bar{J} \Delta \hat{\varepsilon}\right].$$

Тут $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma$. Лінеаризуемо дане рівняння близько до рівноважного значення $\hat{\varepsilon}_0 \neq 0$ та $m^0_{\alpha\beta} = m_0 \left(e^0_\alpha e^0_\beta - \delta_{\alpha\beta} / 3 \right)$ (Феромагнітний спіновий нематик), дисперсійні рівняння в цьому випадку приймають вид:

а) $P_0 = P\left(s_0^2, m_2^0\right) \neq 0$, тоді умова стаціонарності приймає наступний вигляд: $\left[\hat{\varepsilon}_0, \hat{m}_0\right] = 0$, що веде до умови $\mathbf{s}_0 \parallel \mathbf{e}_0$

$$I\omega\delta\hat{\varepsilon} = \bar{J}k^2\left[\hat{\varepsilon}_0, \delta\hat{\varepsilon}\right] + \bar{\bar{J}}k^2\left[\hat{m}_0, \delta\hat{m}\right],$$
$$I\omega\delta\hat{m} = P_0\left[\delta\hat{m}, \hat{\varepsilon}_0\right] + P_0\left[\hat{m}_0, \delta\hat{\varepsilon}\right] + \bar{J}k^2\left[\hat{m}_0, \delta\hat{\varepsilon}\right].$$

Спектри колективних збуджень для даного типу магнітного впорядкування мають вид:

$$\omega = P_0 s_0, \qquad \omega = \pm\left(P_0 + \bar{J}k^2\right)s_0 / 2 + \sqrt{\left(P_0 + \bar{J}k^2\right)\left(s_0^2\left(P_0 + \bar{J}k^2\right) + 4m_0^2\bar{\bar{J}}k^2\right)} / 2$$
$$\omega = P_0 s_0 + \frac{m_0^2 \bar{\bar{J}} P_0}{s_0} k^2, \qquad \omega = \left(\bar{J}s_0^2 + \bar{\bar{J}}m_0^2\right)k^2, \text{ при } k \to 0.$$

Величина $P_0\left(s_0^2, m_2^0\right)$ є активаційною частиною спектра та характеризує вплив однорідної частини модельної енергії $e_0 = e_0\left(s_0^2, m_2^0\right)$. Якщо $\hat{m}_0 = 0$ та P_0=0, то дані спектри переходять у відомі результати для феромагнетика [62].

У разі, коли $\hat{\varepsilon}_0 = 0$, $m^0_{\alpha\beta} = m_0\left(e^0_\alpha e^0_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$ (Спіновий нематик), спектри мають вид:

$$\omega = \sqrt{\left(P_0 + \bar{J}k^2\right)\bar{J}}\, k \left|m_0\right|.$$

Даний спектр колективних збуджень є голдстоуновского типу та відповідає розв’язку роботи [44]. При P_0=0 спектр є квадратичним.

b) У випадку $P_0 = 0$ рівноважне значення вектора спіна $\mathbf{s}_0$ та вісь анізотропії $\mathbf{e}_0$ матриці $\hat{m}_0$ можуть мати довільні напрямки. Лінеаризовані рівняння динаміки приймають такий вигляд:

$$I\omega\delta\hat{\varepsilon} = \bar{J}k^2[\hat{\varepsilon}_0, \delta\hat{\varepsilon}] + \bar{\bar{J}}k^2[\hat{m}_0, \delta\hat{m}],$$

$$I\omega\delta\hat{m} = \left(F\mathrm{tr}(\hat{\varepsilon}_0\delta\hat{\varepsilon}) + H tr(\hat{m}_0\delta\hat{m})\right)[\hat{\varepsilon}_0, \hat{m}_0] + \bar{\bar{J}}k^2[\hat{m}_0, \delta\hat{\varepsilon}],$$

де $F = F\left(s_0^2, m_2^0\right) = \left.\dfrac{\partial P}{\partial\left(s^2\right)}\right|_0$, $H = H\left(s_0^2, m_2^0\right) = \left.\dfrac{\partial P}{\partial\left(m_2\right)}\right|_0$. Спектри магнітних колективних збуджень мають вид:

$$\omega = \sqrt{\bar{J}^2 s_0^2 + \bar{J}\bar{\bar{J}}m_0^2 k^2}, \quad \omega = \sqrt{4F\bar{\bar{J}}s_0^2 + \bar{J}\bar{\bar{J}}k^2}\, m_0 k, \qquad \text{при } \mathbf{s}_0 \perp \mathbf{e}_0.$$

В даному випадку, поряд з квадратичними спектрами, ми отримали спектри голдстоуновского типу.

4.3. Повне спонтанне порушення SU(3) симетрії. Магнітні стани та спектри колективних збуджень

Модельний вираз щільності обмінної енергії ми будуємо з інваріантів Казиміра. Дужки Пуассона (4.4) допускають широкий набір таких інваріантів, а саме: $tr\hat{a}^2$, $tr\hat{a}^3$, $tr\hat{a}\hat{g}$, $tr\hat{a}^2\hat{g}$ та напівказимірів підалгебри (3.19) $tr\hat{g}^2$, $tr\hat{g}^3$. При побудові моделі обмінної енергії ми використовуємо інваріанти: $tr\hat{g}^2$, $tr\hat{a}^2$. Вважаємо, що складові однорідної частини цієї енергії мають певний знак, а неоднорідна її частина є додатною. Модель щільності обмінної магнітної енергії представимо у вигляді: $e = e_o + e_{неодн}$, де $e_0 = e_0(tr\hat{g}^2, tr\hat{a}^2)$ - однорідна та e_n - неоднорідна, відповідно

$$e_{неод} = Jtr(\nabla_k \hat{g})^2 / 2 + \bar{J}tr(\nabla_k \hat{a})^2 / 2,$$

Нелинейные уравнения динамики вырожденных состояний, враховуючи модель енергії, приймають вид

$$\dot{\hat{g}} = -iJ[\hat{g}, \Delta\hat{g}] - i\bar{J}[\hat{a}, \Delta\hat{a}], \qquad \dot{\hat{a}} = i[P\hat{g} - J\Delta\hat{g}, \hat{a}], \qquad \text{де } P = 2\partial e_0 / \partial g_2.$$

Серед рівноважних станів даного магнітного середовища ми відзначимо три окремих випадки упорядкування в стані рівноваги, при яких попарно відмінні від нуля дві магнітні величини:

a) квадрупольний спіновий нематик $(\hat{q}_0 \neq 0, \hat{m}_0 \neq 0)$;

b) квадрупольний антиферомагнетик $(\hat{q}_0 \neq 0, \mathbf{n}_0 \neq 0)$;

c) антиферомагнітний спіновий нематик $(\mathbf{n}_0 \neq 0, \hat{m}_0 \neq 0)$.

Ці магнітні ступені свободи, згідно (3.24), (3.25) та (4.4), не мають замкнутої підалгебри дужок Пуассона, а тому не формують локально - рівноважне магнітне впорядкування. Стани з подібним типом упорядкування раніше розглядалися в роботах [44-46]. Спектри для магнітного упорядкування феромагнітного спінового нематика збігаються зі спектрами у розділі 4.2. В якості рівноважних значень магнітних параметрів ми будемо розглядати величини:

$$q^0_{\alpha\beta} = q_0\left(e^0_\alpha e^0_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \quad m^0_{\alpha\beta} = m_0\left(f^0_\alpha f^0_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \qquad n^0_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^0_\gamma$$

Тут вектори $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{f}_0$ та $\mathbf{n}_0$ можуть мати довільний напрямок. Далі ми отримаємо спектри колективних магнітних збуджень для вищевказаних станів.

a) Квадрупольний спіновий нематик: $\hat{q}_0 \neq 0$, $\hat{m}_0 \neq 0$. При умові $\vec{e}_0 \parallel \vec{f}_0$ спектри приймають такий вид:

$$\omega = \pm\left(P_0 - Jk^2\right)q_0 / 2 + \sqrt{\left(P_0 + Jk^2\right)\left(Jk^2 q_0^2 + 4\bar{J}k^2 m_0^2 + P_0 q_0^2\right)} / 2.$$

Тут P_0 є активаційною частиною спектрів. У разі $\vec{e}_0 \perp \vec{f}_0$ виникають додаткові розв'язки:

$$\omega = Jq_0k^2, \qquad \omega = P_0k^2, \qquad \omega = \sqrt{\bar{J}\left(P_0 + Jk^2\right)}m_0k\,.$$

Цей випадок також цікавий тим, що величина $\left[\hat{q}_0, \hat{m}_0\right] = 0$ для $\vec{e}_0 \parallel \vec{f}_0$ та $\vec{e}_0 \perp \vec{f}_0$ при ненульових значеннях P_0.

b) Квадрупольний антиферомагнетик: $\hat{q}_0 \neq 0$, $\hat{n}_0 \neq 0$. Спектри колективних збуджень в цьому випадку приймають вид:

при $\vec{e}_0 \parallel \vec{n}_0$:

$$\omega = \sqrt{\left(P_0 + Jk^2\right)\bar{J}}\,n_0k\,,$$
$$\omega = \sqrt{\left(P_0 + Jk^2\right)\left(Jk^2q_0^2 + \bar{J}k^2n_0^2 + P_0q_0^2\right)}/2 \pm \left(P_0 - Jk^2\right)q_0/2\,,$$

при P_0=0, $\vec{e}_0 \perp \vec{n}_0$:

$$\omega = \sqrt{J\bar{J}}\,n_0k^2/2\,, \quad \omega = \sqrt{J^2q_0^2 + 4n_0^2J\bar{J}}\,k^2\,,$$
$$\omega = \sqrt{\bar{J}Jk^2 + F_0q_0^2\bar{J}}\,n_0k\,, \quad \omega = \left(\sqrt{J^2q_0^2 + 4n_0^2J\bar{J}} \pm Jq_0\right)k^2/2,$$

де $F_0 = \partial^2 e_0/\partial g_2^2\big|_0$. В цьому випадку, при малих значеннях хвильового вектора $\vec{k}$, поряд з квадратичними спектрами, ми отримуємо голдстоунівскі спектри [44].

c) Антиферомагнітний спіновий нематик $\hat{g}_0 = 0$, $\hat{a}_0 \neq 0$. Спектри колективних збуджень при $\vec{f}_0 \parallel \vec{n}_0$ мають наступну форму:

$$\omega = \sqrt{\bar{J}P_0 + J\bar{J}k^2}\,n_0k\,, \qquad \omega = \left|n_0 \pm 2m_0\right|\sqrt{\bar{J}P_0 + J\bar{J}k^2}\,n_0k\,.$$

При P_0=0 та $\vec{e}_0 \perp \vec{n}_0$ спектри збуджень приймають вид

$$\omega = \sqrt{\left(n_0^2 + m_0^2\right)\left(\bar{J}P_0 + J\bar{J}k^2\right)}k\,, \quad \omega = \sqrt{\left(n_0^2 + 2m_0^2 \pm 2\sqrt{m_0^4 + m_0^2 n_0^2}\right)\left(\bar{J}P_0 + J\bar{J}k^2\right)}k\,,$$

де вираз під коренем $n_0^2 + 2m_0^2 - 2\sqrt{m_0^4 + m_0^2 n_0^2} \geq 0$ додатній для будь-яких значень m_0 та n_0.

d) Окремо розглянемо феро-квадрупольний магнетик: $\hat{g}_0 \neq 0$, $\hat{a}_0 = 0$. На відміну від нормального випадку однопідградкового SU(3) симетричного магнетика, представленого в третьому розділі, дане магнітне упорядкування має ряд наступних відмінностей в виразах спектрів колективних збуджень:

при $\vec{s}_0 \parallel \vec{e}_0$:

$$\omega = Jk^2 s_0,\ \omega = \left|s_0 \pm 2q_0\right| Jk^2/2,\ \omega = P_0 s_0,\ \omega = \left|s_0 \pm 2q_0\right| P_0/2,$$

при $\vec{s}_0 \perp \vec{e}_0$:

$$\omega = \left(\sqrt{q_0^2 + s_0^2} \pm q_0\right)k^2 J/2, \qquad \omega = \sqrt{q_0^2 + s_0^2}\,k^2 J,$$

$$\omega = \left(\sqrt{q_0^2 + s_0^2} \pm q_0\right)P_0/2\,, \omega = \sqrt{q_0^2 + s_0^2}\,P_0.$$

Порівнюючи з знайденими раніше спектрами колективних збуджень однопідградкового випадку, бачимо, що дані спектри набувають активаційний характер. Легко бачити, що при $P_0 = 0$ та в разі, коли $q_0 = 0$, або $s_0 = 0$, спектри магнітних збуджень переходять у відомі результати роботи [61].

4.4. Релаксаційні процеси в спіновому нематику

Як вже зазначалося раніше, стан рівноваги спінового нематика спонтанно порушено стосовно SO(3) симетрії T-парним параметром порядку - симетричним безслідним тензором $\hat{m}$. Енергія системи є функцією щільності ентропії, спіна, матриці $\hat{m}$ та їх градієнтів: $e = e(\sigma, \mathbf{s}, \nabla\mathbf{s}, \hat{m}, \nabla\hat{m})$. Основне термодинамічне співвідношення для цього магнітного упорядкування має вид

$$de = \frac{\partial e}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial e}{\partial s_\alpha} ds_\alpha + \frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\alpha} d\nabla_k s_\alpha + tr\frac{\partial \hat{e}}{\partial m} d\hat{m} + tr\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k m} d\nabla_k \hat{m}. \qquad (4.10)$$

Використовуючи рівняння динаміки (4.6) та (4.7) і вважаючи просторові градієнти магнітних ступенів свободи малими, отримаємо рівняння для щільності адитивних інтегралів руху та матриці параметра порядку

$$\dot{e} = -\nabla_k q_k^{(0)}, \qquad \dot{m}_{\beta\gamma} = -\left(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m_{\rho\gamma}\right) h_\alpha^{(0)},$$
$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta} s_\gamma + 2\frac{\partial e}{\partial \nabla_k m_{\beta\lambda}} m_{\gamma\lambda}\right) \equiv -\nabla_k j_{\alpha k}^{(0)}. \qquad (4.11)$$

З огляду на (4.11) та (3.28), знаходимо зв'язок щільності потоків спіна і енергії: $q_k^{(0)} = h_\alpha^{(0)} j_{\alpha k}^{(0)}$, де $h_\alpha^{(0)} = \partial e / \partial s_\alpha$. Для щільності ентропії справедливо рівняння $\dot{\sigma} = 0$, яке випливає з термодинамічного співвідношення (4.10) і рівнянь (4.11).

Врахуємо дисипативні процеси в цих магнетиках. Рівняння динаміки для щільності адитивних інтегралів руху і матриці $m_{\beta\gamma}$ мають вид

$$\dot{e} = -\nabla_k\left(q_k^{(0)} + q_k^{(1)}\right), \qquad \dot{s}_\alpha = -\nabla_k\left(j_{\alpha k}^{(0)} + j_{\alpha k}^{(1)}\right),$$
$$\dot{m}_{\beta\gamma} = \dot{m}_{\beta\gamma}^{(0)} + \dot{m}_{\beta\gamma}^{(1)} + .., \qquad \dot{m}_{\beta\gamma}^{(1)} = -\left(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m_{\rho\gamma}\right) h_\alpha^{(1)}. \qquad (4.12)$$

Тут вирази $q_k^{(1)}$ $j_{\alpha k}^{(1)}$ та $h_\alpha^{(1)}$ відображають внесок дисипативних процесів в рівняння динаміки спінового нематика. Наслідком рівнянь (3.44) та (4.12) і термодинамічного співвідношення (4.10) буде рівняння для щільності ентропії (3.45), де щільність дисипативного потоку та виробництво ентропії

$$j_{\sigma k}^{(1)} = Y_a \zeta_{ak}^{(1)} - \frac{\partial \sigma}{\partial \nabla_k m_{\beta\gamma}} \dot{m}_{\beta\gamma}^{(1)}, \qquad I = \zeta_{ak}^{(1)} \nabla_k Y_a + \Gamma_\alpha h_\alpha^{(1)}$$

представлені в термінах дисипативних потоків адитивних інтегралів руху. Вектор Γ_α визначається рівністю

$$\Gamma_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_{\beta\lambda} \frac{\delta \Sigma}{\delta m_{\gamma\lambda}}. \tag{4.13}$$

Дисипативні потоки $\zeta_{al}^{(1)}$ та $\eta_\alpha^{(1)}$ лінійні по градієнтам термодинамічних сил та величинам Γ_α:

$$\zeta_{al}^{(1)} = K_{al,bj} \nabla_j Y_b + K_{al,\alpha} \Gamma_\alpha, \qquad h_\alpha^{(1)} = K_{\alpha,bj} \nabla_j Y_b + \underline{K}_{\alpha,\beta} \Gamma_\beta.$$

Кінетичні коефіцієнти задовольняють принципу симетрії Онзагера:

$$K_{al,bj} = K_{bj,al}, \qquad K_{\alpha,bl} = K_{bl,\alpha}, \qquad \underline{K}_{\alpha\beta} = \underline{K}_{\beta\alpha}$$

та формують додатньо визначену квадратичну форму виробництва ентропії. Дисипативна функція та її щільність визначаються рівностями

$$R \equiv \int d^3 x r(\mathbf{x}), \qquad r = \Gamma_\mu K_{\mu\nu} \Gamma_\nu / 2.$$

Тут $\Gamma_\mu \equiv (\nabla_k Y_a, \Gamma_\alpha)$, $\mu \equiv ak; \alpha$. У термінах дисипативної функції релаксаційні доданки в рівнянні руху параметрів скороченого опису ζ_a та $\hat{m}$ (4.12) набудуть універсальний вид

$$\dot{\zeta}_a^{(2)} = \frac{\delta R}{\delta\left(\dfrac{\delta \Sigma}{\delta \zeta_a}\right)}, \qquad \dot{m}_{\beta\gamma}^{(1)} = \frac{\delta R}{\delta\left(\dfrac{\delta \Sigma}{\delta m}\right)_{\beta\gamma}}.$$

Тут $\Sigma = \int d^3 x \sigma(\mathbf{x})$ - повна ентропія системи.

Використаємо принцип Кюрі та припустимо, що стан рівноваги цього магнетика однорідний та ізотропний. Звідси отримаємо просторову структуру кінетичних коефіцієнтів $K_{ak,bl} = \delta_{kl} K_{ab}$ та $K_{ak,\alpha} = 0$. Значення щільності спіна та матриці $\hat{m}$ в цьому стані - постійні величини. З (4.11) та (4.12) випливає рівняння для структури цієї матриці та спіна в точці стаціонару $\left(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m_{\rho\gamma}\right)\partial e / \partial s_\alpha = 0$. Далі ми розглянемо тільки такі розв'язки, для яких $h_\alpha = 0$, $\hat{m}$ - const. Визначимо кінетичні коефіцієнти теплопровідності κ, спінової дифузії $\sigma_{\alpha\beta}$ та спінової в'язкості $c_{\alpha\beta}$ в термінах узагальнених кінетичних коефіцієнтів $\underline{K}_{\alpha\beta} = T c_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta} = T\sigma_{\alpha\beta}$, $K_{0,0} = T^2 \kappa$. Тоді, виробництво ентропії записується у вигляді

$$I = \left(\sqrt{\kappa}\nabla_k T / T\right)^2 + \nabla_k h_\alpha \left(\sigma_{\alpha\beta} / T\right) \nabla_k h_\beta + \Gamma_\alpha \left(c_{\alpha\beta} / T\right) \Gamma_\beta .$$

Зауважимо, що релаксація параметра порядку в силу нелінійного зв'язку (4.13) суттєва тільки поблизу стану рівноваги, де $\hat{m} \neq 0$. Розглянемо випадок, при якому магнетик в рівновазі володіє одновісною симетрією. Тензорна структура кінетичних коефіцієнтів $\sigma_{\alpha\beta}$ та $c_{\alpha\beta}$ мають вид

$$c_{\alpha\beta} \equiv c_\parallel n_\alpha n_\beta + c_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}), \qquad \sigma_{\alpha\beta} \equiv \sigma_\parallel n_\alpha n_\beta + \sigma_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}). \qquad (4.14)$$

В ізотропному стані рівноваги $c = c_\parallel = c_\perp$ та $\sigma = \sigma_\parallel = \sigma_\perp$. Для цього випадку отримані лінеаризовані рівняння дисипативної динаміки

$$\delta\dot{e} = -\nabla_k \delta q_k^{(0)} + \kappa\Delta\delta T, \qquad \delta\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \delta j_{\alpha k}^{(0)} + \sigma_{\alpha\beta}\Delta\delta h_\beta,$$

$$\delta\dot{m}_{\alpha\beta} = -\left(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m_{\rho\beta}^{(0)} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m_{\rho\gamma}^{(0)}\right)\left(\delta h_\alpha^{(0)} + Tc_{\alpha\sigma}\delta\Gamma_\sigma\right). \qquad (4.15)$$

Для їх подальшого розв’язку, необхідно знайти зв'язок варіацій спіна та матричного параметра порядку з ефективним полем. Звернемося до моделі обмінної енергії, що представляє собою функцію інваріанта Казиміра дужки Пуассона (3.24) та інваріантів Казиміра для розширеного набору дужок Пуассона величин $\mathbf{s}$ та $\hat{m}$ (4.4с). У разі одновісної симетрії стану рівноваги, інваріанти m_2 та m_3 зв’язані співвідношенням $m_3^2 = m_2^3/6$, так що в якості незалежної величини обрано величину $m_2 \equiv m$. В аналізі станів рівноваги магнітних систем ми використовуємо модель щільності однорідної частини енергії, запропонованої в роботі [40]. Щільність обмінної енергії обрано у вигляді:

$$e_o(s,m) = -\frac{1}{2}As^2 - \frac{1}{2}Cm^2 + \frac{1}{4}Bs^4 + \frac{1}{4}Dm^4 + \frac{1}{2}Es^2m^2,$$

$$e_n(\nabla\mathbf{s}, \nabla\hat{m}) = \bar{\bar{J}}tr(\nabla_k m_{\alpha\beta})^2/2 + \bar{J}\left(\nabla_k s_\alpha\right)^2/2. \qquad (4.16)$$

Умови на рівноважні значення спіна та модуля параметра порядку аналогічні (3.58). Для представленого виду енергії можливі такі стани рівноваги:

1) стійкий стан $s_0 = 0,\ m_0 = 0$, якщо: A<0, C<0. Реактивна складова спектрів відсутня. Коефіцієнт затухання спінової хвилі дорівнює

$$\Gamma_s = \sigma\left(-Ak^2 + \bar{J}k^4\right).$$

2) Стан $s_0^2 = A/B,\ \ m_0 = 0$ стійкий, якщо: B>0, AE>CB, A>0. Спектр магнітних збуджень має вид $\omega = Cs_0k^2$. Наведемо коефіцієнти затухання для поздовжньої складової спіна

$$\Gamma_{s_\parallel} = \sigma_\parallel \left(2Ak^2 + \bar{J}k^4\right)$$

та поперечної компоненти спіна

$$\Gamma_{s_\perp} = \sigma \bar{J} k^4 .$$

3) Стан $s_0 = 0,\ \ m_0^2 = 3C/2D$ стійкий, якщо: D>0, C>0, CE>AD. Спектр хвилі спінового нематика має вид $\omega = k\sqrt{6\bar{\bar{J}}C\left(EC - DA + D\bar{J}k^2\right)} / D$. Затухання поздовжньої частини спінової хвилі

$$\Gamma_{s_\parallel} = \sigma_\parallel \left(\left(\bar{J}B - A\bar{\bar{J}}\right)k^2 / \bar{\bar{J}} + Ek^4\right).$$

Використовуючи формули (4.13) - (4.16), неважко знайти декремент затухання хвилі для осі спінового нематика:

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = 2m_0 c_\perp \bar{\bar{J}} k^4 .$$

4.5. Низькочастотні асимптотики функцій Гріна для багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1

У заключному розділі розглянуто динаміку спінового нематика в зовнішньому полі. Як і для однопідградкових магнетиків, ми вважаємо зміну зовнішнього поля досить повільною, так що характерна частота його зміни мала в порівнянні з τ_r^{-1}, і фізична система встигає підлаштовуватися до миттєвих значень поля. В області часу $t \gg \tau_r$ залежність від часу величини $b(\mathbf{x},t)$ здійснюється за допомогою магнітних ступенів свободи. У багатопідґраткових магнетиках при великих часах для локальної фізичної величини справедливо асимптотичне співвідношення

$$b(\mathbf{x},t)\xrightarrow[t\gg\tau_r]{}b(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x}',t),\hat{a}(\mathbf{x}',t))\approx b(\hat{g}(\mathbf{x},t),\hat{a}(\mathbf{x},t)),$$

яке враховує магнітні ступені свободи, пов'язані з параметром порядку. Аналогічним чином знайдемо рівняння динаміки магнітних величин $\hat{g}(\mathbf{x})$ та $\hat{a}(\mathbf{x})$ в присутності зовнішнього поля:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x})=i\left[\hat{g}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right]+i\left[\hat{a}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})}\right]+\hat{\eta}(\mathbf{x},\hat{g}),$$

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x})=i\left[\hat{a}(\mathbf{x}),\frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right]+\hat{\eta}(\mathbf{x},\hat{a}),$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{x},\hat{g})=i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{g}(\mathbf{x}),\frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x}),\hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right]+i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{a}(\mathbf{x}),\frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x}),\hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial a(\mathbf{x})}\right],$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{x},\hat{a})=i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{a}(\mathbf{x}),\frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x},\hat{g}(\mathbf{x}),\hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right]. \qquad (4.17)$$

У правій частині рівнянь (4.17) з'являються джерела, які лінійним чином пов'язані із зовнішнім полем.

Дослідимо тепер динамічні процеси в іншому фізично важливому випадку багатопідґраткових спін s=1 магнетиків з параметром порядку спінового нематика і SO(3) симетричною обмінною взаємодією. При наявності зовнішнього поля, враховуючи, що щільність обмінної енергії є функцією спіна і параметра порядку спінового нематика та їх градієнтів $e=e(\mathbf{s},\nabla\mathbf{s},\hat{m},\nabla\hat{m})$, отримаємо рівняння динаміки:

$$\dot{s}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma+\frac{\delta H}{\delta m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right)+\eta_\alpha(\mathbf{s}),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma}=-\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}\right)\frac{\delta H}{\delta s_\alpha}+\eta_{\beta\gamma}(\hat{m}). \qquad (4.18)$$

Для джерел, що викликані зовнішнім полем, знайдені вирази:

$$\eta_\alpha(\mathbf{s}) = \delta\xi\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial b}{\partial s_\beta}s_\gamma + \frac{\partial b}{\partial m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right),$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{m}) = -\delta\xi\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}\right)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}.$$

Властивість SO(3) симетрії щільності обмінної енергії $\{S_\alpha, e\} = 0$ дозволяє перетворити перше рівняння в (4.18) до виду:

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k} + \eta_\alpha, \qquad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right). \tag{4.19}$$

Тут $j_{\alpha k}$ - щільність потоку спіна. Далі, модель обмінної енергії вибираємо у вигляді (4.16). Представлений вид енергії веде до таких магнітним станів рівноваги:

1) парамагнетик, стан $s_0 = 0, m_0 = 0$ стійкий, якщо: A<0, C<0;

2) феромагнетик, розв’язок $s_0^2 = A/B,\ m_0 = 0$ стійкий, якщо: A>0, B>0, C<0;

3) спіновий нематик, стан $s_0 = 0,\ m_0^2 = 3C/2D$ стійке, якщо: A<0, C>0, D>0.

Для простоти і визначеності ми розглядаємо одновісний нематичний параметр порядку $m_{\alpha\beta}^0 = m_0(l_\alpha l_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$.

Поблизу феромагнітного стану в лінійному наближенні за відхиленням від стану рівноваги отримані рівняння

$$\delta\dot{m}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \delta\dot{s}_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{J}s_\gamma^0\Delta\delta s_\beta/2 + \delta\xi\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial b}{\partial s_\beta}s_\gamma^0.$$

Звідси випливає низькочастотна асимптотика двочасової функції Гріна довільних локальних величин:

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega)=\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}\frac{\partial b}{\partial s_\beta}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega). \tag{4.20}$$

Вид функції Гріна $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)$ в цьому випадку збігається з аналогічним виразом співвідношень (3.76).

Близько до стану спінового нематика в лінійному наближенні за відхиленням від стану рівноваги приходимо до рівнянь динаміки:

$$\delta\dot{s}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}m^0_{\gamma\lambda}\left(-\bar{\bar{J}}\Delta\delta m_{\beta\lambda}+\delta\xi\frac{\partial b}{\partial m_{\beta\lambda}}\right),$$
$$\delta\dot{m}_{\beta\gamma}=\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m^0_{\rho\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m^0_{\rho\gamma}\right)\left(A\delta s_\alpha-\delta\xi\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\right).$$

Звідси, в рамках наведеного підходу отримаємо низькочастотну асимптотику двочасової функції Гріна спінового нематика:

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega)=\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta}+\frac{\partial a}{\partial m_{\alpha\beta}}G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial m_{\gamma\rho}}+$$
$$\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,m_{\mu\lambda}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial m_{\mu\lambda}}+\frac{\partial a}{\partial m_{\mu\lambda}}G_{m_{\mu\lambda},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}.$$

Тут асимптотики базисних функцій Гріна мають вид:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)=-\frac{\psi^2 m_0^2\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{l})}{A\Delta(\mathbf{k},\omega)},\qquad G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega)=-\frac{4Am_0^2F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{l})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)},$$

$$G_{m_{\mu\lambda},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega)=\frac{im_0\omega F^{\alpha}_{\mu\lambda}(\mathbf{l})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)}=-G_{s_\alpha,m_{\mu\lambda}}(\mathbf{k},\omega) \qquad (4.21)$$

Знаменник асимптотик функцій Гріна $\Delta(\mathbf{k},\omega)=\omega^2-m_0^2\psi^2$, $\left(\psi^2\equiv-2\bar{\bar{J}}Ak^2>0\right)$ задає їх полюсні особливості. З умови $\Delta(\mathbf{k},\omega)=0$ отримаємо голдстоуновский спектр $\omega=ck$, де $c=m_0\sqrt{-2\bar{\bar{J}}A}$ - швидкість магнітної хвилі. Приведемо асимптотику базисних функцій Гріна для окремих випадків:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},0)=0, \qquad G_{s_\alpha,m_{\mu\lambda}}(\mathbf{k},0)=0, \quad G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},0)=-F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{l})/2\bar{\bar{J}}k^2, \; (4.22)$$

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(0,\omega)=0,\; G_{s_\alpha,m_{\mu\lambda}}(0,\omega)=-im_0F^{\alpha}_{\mu\lambda}(\mathbf{l})/\omega, G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(0,\omega)=-Am_0^2F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{l})/\omega^2 .$$

Порівнюючи формули (4.22) для спінового нематика і співвідношення (3.70), (3.71) квадрупольного магнетика, бачимо, що структура магнітної анізотропії асимптотики функцій Гріна обох магнітних станів збігається в силу збігу їх трансформаційних властивостей. Функція Гріна $G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(0,\omega)$ для квадрупольного магнетика звертається в нуль, в той час як для спінового нематика $G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(0,\omega)$ має квадратичну особливість по частоті. Асимптотики функцій Гріна знаходяться відповідно до теореми Боголюбова про $1/q^2$ [96].

4.6. Висновки до розділу 4

Вперше побудована гамільтонова механіка багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Встановлена алгебра дужок Пуассона для шістнадцяти магнітних ступенів свободи і отримані нелінійні рівняння динаміки магнетиків в умовах повного спонтанного порушення SU(3) симетрії. Знайдено спектри колективних збуджень для станів спінового нематика, а також квадрупольно-нематичного, квадрупольно-антиферомагнітного, феро-нематичного упорядкувань. Враховано вплив релаксаційних процесів і встановлено структуру дисипативних потоків в термінах кінетичних коефіцієнтів теплопровідності, спінової дифузії та спінової в'язкості. Обчислені коефіцієнти затухання магнітних ступенів свободи для станів спінового нематика. Отримано низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна для магнітного впорядкування спінового нематика, які дозволяють знайти спектри колективним збуджень, встановлюють характер магнітної анізотропії.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню фазових станів рівноваги та нерівноважних процесів в магнетиках зі спіном s=1 у разі унітарної SU(3) симетрії обмінної взаємодії. Ми використовували як мікроскопічний, так і макроскопічний підходи до вивчення таких магнітних середовищ. Дослідження проводилися у рамках методів, які не використовують модельні вирази вільної енергії як функції параметра порядку. Основні результати, отримані в дисертації, полягають у наступному.

1. Розв'язана задача класифікації станів рівноваги магнетиків зі спіном s=1 при спонтанному порушенні магнітної симетрії, а також станів рівноваги зі спонтанно порушеною фазовою та магнітною симетріями. Вперше знайдений явний вид магнітних та надплинних параметрів порядку у термінах термодинамічних параметрів генератора залишкової симетрії. Показана можливість існування трьох різних надплинних станів рівноваги у разі спінорного параметра порядку та шести станів рівноваги для параметра порядку надплинного спінового нематика.
2. Побудована гамільтонова механіка однопідґрадкових та багатопідґраткових магнетиків зі спіном s=1. Побудована алгебра дужок Пуассона магнітних ступенів свободи у базисах Вейля та Рака. Отримано нелінійні рівняння динаміки магнетиків зі спіном s=1 у багатопідґратковому випадку, які узагальнюють відомі рівняння Ландау-Ліфшиця. Запропоновані моделі обмінної енергії як функції інваріантів Казиміра, що поширюють вид гамільтоніана Гейзенберга на магнетики зі спіном s=1. На цій основі вивчені магнітні стани рівноваги для однопідградкового та багатопідґраткого випадків.
3. Знайдені спектри колективних магнітних збуджень для квадрупольного, феро-квадрупольного, квадрупольно-нематичного, квадрупольно-антиферомагнітного, феро-нематичного упорядкувань. Враховано вплив релаксаційних процесів та встановлено структуру дисипативних потоків

квадрупольного магнетика та спінового нематика. Обчислені коефіцієнти затухання магнітних ступенів свободи для цих станів.

4. Розглянуто задачу впливу слабкого змінного поля на еволюцію квадрупольного магнетика та спінового нематика. Отримано нелінійні рівняння динаміки, які враховують зазначені магнітні упорядкування та вплив зовнішнього змінного поля. На основі цих рівнянь обчислені асимптотики двочасових функцій Гріна у явному виді за хвильовим вектором та частотою.

Проведені дослідження базуються на сучасних методах квантової статистичної та гамільтонової механік, які враховують SU(3) симетрію обмінної взаємодії. Отримані результати будуть корисні для аналізу та вивчення нових фізичних станів магнітних матеріалів зі спіном s=1 та з високою унітарної симетрією обмінної взаємодії.

Таким чином, мета дисертації була досягнута та поставлені завдання вирішені.

ПОДЯКИ

Автор вважає своїм приємним обов'язком висловити вдячність науковому керівнику, доктору фіз. мат. наук, професору Ковалевському Михайлу Юрійовичу за постійну підтримку на усіх етапах виконання дисертаційної роботи, за запропоновану цікаву тему дослідження та численні обговорення проблем сучасної фізики конденсованого стану речовини.

Також виражаю подяку своєму співавтору, кандидату фіз. мат. наук Мацкевич В.Т. за плідну співпрацю.

Автор вдячний директору НВК ВДЕРТ ННЦ ХФТІ професору Ткаченку В.І. за цінні рекомендації щодо дисертаційної роботи, вченому секретарю Ніколаєнко А.О. за щиру допомогу при підготовці матеріалів дисертації, доброзичливість та безмежне терпіння, а також усім співробітникам НВК ВДЕРТ за корисні дискусії, обговорення результатів досліджень та доброзичливе відношення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S. Spinning electrons and the structure of spectra. *Nature*. 1926. V. 117. №. 2938. P. 264- 265.
2. Gerlach W., Stern O. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*. 1922. V. 9. №. 1. P. 349-352.
3. Pauli W. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. *Zeitschrift für Physik*. 1925. V. 31. №. 1. P. 765-783.
4. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*. 1926. V. 43. №. 9-10. P. 601-623.
5. Heisenberg W. Zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*. 1928. V. 49. №. 9-10. P. 619-636.
6. Frenkel J. Elementare Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur. *Zeitschrift für Physik*. 1928. V. 49. №. 1-2. P. 31-45.
7. Dirac P.A.M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A*. 1928. V. 117. №. 778. P. 610-624.
8. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. Москва, 1967. 368 с.
9. Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. Москва, 1972. 288 с.
10. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. Москва, 1965. 334 с.
11. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. *Proceedings of the Royal Society A*. 1963. V. 276. №. 1365. P. 238-257.
12. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands III. An improved solution. *Proceedings of the Royal Society A*. 1964. V. 281. №. 1386. P. 401-419.
13. Вонсовский С.В. Магнетизм. Москва, 1971. 1032 с.
14. Вонсовский С.В., Туров Е.А. Об обменном взаимодействии валентных и внутренних электронов в кристаллах (sd–обменная модель переходных

металлов). *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1953. Т. 24. №. 4. С. 419-428.

15. Боровик Е.С., Еременко В.В., Мильнер А.С. Лекции по магнетизму. Москва, 2005. 512 с.
16. Mattis D.C. The theory of magnetism I: Statics and Dynamics. Luxembourg, 2012. Series 17. 300 p.
17. Wohlfarth E.P. (ed.). Ferromagnetic materials: a handbook on the properties of magnetically ordered substances. Amsterdam, 1980. 604 p.
18. Goldman A. Handbook of modern ferromagnetic materials. Luxembourg, 2012. 505 p.
19. Guo B., Ding S. Landau-Lifshitz Equations. Singapore, 2008. 416 p.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел. *Ландау Л.Д. Собрание трудов*. Москва, 1969. Т. 1. С. 128-143.
21. Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method. *Physics Letters A.* 1977. V. 64. №. 2. P. 235-237.
22. Lakshmanan M. Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system. *Physics Letters A*. 1977. V. 61. №. 1. P. 53-54.
23. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Москва, 1980. 320 с.
24. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев, 1983. 189 с.
25. А.Б. Борисов, В.В. Киселев Квазиодномерные магнитные солитоны. Москва, 2014. 520 с.
26. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн. *Физика твердого тела*. 1971. №. 6. С. 1668-1678.
27. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков. *Успехи физических наук*. 1980. Т. 130. №. 1. С. 39-63.

28. Воловик Г.Е., Дзялошинский И.Е. О дополнительных локализованных степенях свободы в спиновых стеклах. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 1978. №. 3. С. 1102-1109.
29. Morin P., Rouchy J., Schmitt D. Cooperative Jahn-Teller effect in TmZn. *Physical Review B*. 1978. V. 17. №. 9. P. 3684-3694.
30. Aleonard R., Morin P. TmCd quadrupolar ordering and magnetic interactions. *Physical Review B*. 1979. V. 19. №. 8. P. 3868-3872.
31. Ushizaka H. et al. Magnetic Properties and Phase Diagram of Mixed Crystal Ce1−xNdxAg. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1984. V. 53. №. 3. P. 1136-1144.
32. Morin P. et al. Quadrupolar interactions in cubic Ce intermetallics. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 1988. V. 76. P. 319-320.
33. Matsuoka E. et al. Evidence of the quadrupolar ordering in DyPd3S4. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2001. V. 13. №. 48. P. 11009-11016.
34. Sato T.J. et al. Ferroquadrupolar ordering in $PrTi_2Al_{20}$. *Physical Review B*. 2012. V. 86. №. 18. P. 184419(8 p.).
35. Kitagawa J. et al. Third-Order Magnetic Susceptibility and Quadrupolar Order Parameter of Kondo-Lattice Compound Ce 3 Pd 20 Ge 6. Journal of the Physical Society of Japan. 2000. V. 69. №. 3. P. 883-887.
36. Matsubayashi K. et al. Pressure-induced heavy fermion superconductivity in the nonmagnetic quadrupolar system $PrTi_2Al_{20}$. *Physical review letters*. 2012. V. 109. №. 18. P. 187004(5 p.).
37. Matsumura T. et al. Quadrupolar ordering in TmTe. *Physica B: Condensed Matter*. 1996. V. 223. P. 385-388.
38. Demishev S.V. et al. Antiferro-quadrupole resonance in CeB6. *Physica B: Condensed Matter*. 2006. V. 378. P. 602-603.
39. Hall D., Fisk Z., Goodrich R.G. Magnetic-field dependence of the paramagnetic to the high-temperature magnetically ordered phase transition in CeB 6. *Physical Review B*. 2000. V. 62. №. 1. P. 84-86.

40. Kaneko K. et al. Magnetic phase diagrams with possible field-induced antiferro-quadrupolar order in TbB_2C_2. *Physical Review B*. 2003. V. 68. №. 1. P. 012401(4 p.).
41. Papanicolaou N. Unusual phases in quantum spin-1 systems. *Nuclear Physics B*. 1988. V. 305. №. 3. P. 367-395.
42. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Москва, 1975. 436 с.
43. Nauciel-Bloch M., Sarma G., Castets A. Spin-one Heisenberg ferromagnet in the presence of biquadratic exchange. *Physical Review B*. 1972. V. 5. №. 11. P. 4603-4609.
44. Smerald A., Shannon N. Theory of spin excitations in a quantum spin-nematic state. *Physical Review B*. 2013. V. 88. №. 18. P. 184430(22 p.).
45. Smerald A., Ueda H.T., Shannon N. Theory of inelastic neutron scattering in a field-induced spin-nematic state. *Physical Review B*. 2015. V. 91. №. 17. P. 174402(27 p.).
46. Zibold T. et al. Spin-nematic order in antiferromagnetic spinor condensates. *Physical Review A*. 2016. V. 93. №. 2. P. 023614(16 p.).
47. Haldane F.D. Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel state. *Physical Review Letters*. 1983. V. 50. №. 15. P. 1153-1156.
48. Neklyudov E.A., Klevets P.N., Fridman Y.A. Spiral magnetic structure in non-Heisenberg magnets with an easy-axis anisotropy. *Physics of the Solid State*. 2016. V. 58. №. 10. P. 1999-2004.
49. Ho T.L. Spinor Bose condensates in optical traps. *Physical review letters*. 1998. V. 81. №. 4. P. 742-745.
50. Kawaguchi Y., Ueda M. Spinor Bose–Einstein condensates. *Physics Reports*. 2012. V. 520. №. 5. P. 253-381.
51. Mermin N.D. d-wave pairing near the transition temperature. *Physical Review A*. 1974. V. 9. №. 2. P. 868-872.

52. Barnett R., Turner A., Demler E. Classifying novel phases of spinor atoms. *Physical review letters*. 2006. V. 97. №. 18. P. 180412(4 p.).

53. Batista C.D., Ortiz G., Gubernatis J.E. Unveiling order behind complexity: Coexistence of ferromagnetism and Bose-Einstein condensation. P*hysical Review B*. 2002. V. 65. №. 18. P. 180402(4 p.).

54. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спином S=1. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 1986. Т. 91. №. 5. С. 1690-1701.

55. Локтев В.М., Островский В.С. Особенности статистики и динамики магнитных диэлектриков с одноионной анизотропией. *Физика низких температур*. 1994. Т. 20. С. 983- 1016.

56. Ivanov B.A., Kolezhuk A.K. Effective field theory for the S= 1 quantum nematic. *Physical Review B*. 2003. V. 68. №. 5. P. 052401(4 p.).

57. Muminov K., Yousefi Y. Semiclassical Description of Anisotropic Magnets for Spin s=1. *Advances in Condensed Matter Physics*. 2012, Article ID 749764, 3 P. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2012/749764

58. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией. *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 1996. Т. 27. №. 2. Р. 431-492.

59. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. О динамике различных магнитоупорядоченных структур. *Физика металлов и материалов*. 1994. Т. 77. №. 4. С. 20-28.

60. Bernatska J., Holod P.A generalized Landau–Lifshitz equation for an isotropic SU(3) magnet. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009. V. 42. №. 7. P. 075401(14 p.).

61. Ковалевский М.Ю. Динамика нормальных и вырожденных неравновесных состояний магнетиков со спином S=1. *Физика низких температур*. 2010. Т. 36. №. 8/9. С. 1006–1012.

62. Kovalevsky M.Y., Vuong T.Q. Nonlinear dynamics and collective excitations of spin-1 magnets. *Physics Letters A*. 2010. V. 374. №. 35. P. 3676-3680.

63. Демьяненко Д.А, Ковалевский М.Ю. Классификация состояний равновесия магнетиков с векторным и квадрупольным параметрами порядка. *Физика низких температур*. 2007. Т. 33. №. 11. С. 1271-1281.
64. Kovalevsky M.Y. The SU(3) symmetry and macroscopic dynamics of magnets with spin s=1. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*. 2011. V. 168. №. 2. P. 245-260.
65. Bar'yakhtar V.G., Butrim V.I., Kolezhuk A.K., Ivanov B.A. Dynamics and relaxation in spin nematics. *Physical Review B*. 2013. V. 87. №. 22. P. 224407(9 p.).
66. Butrim V.I. et al. Magnon relaxation in a spin nematic. *Low Temperature Physics*. 2008. V. 34. №. 12. P. 997-1004.
67. Иванов Б.А., Химии Р.С. Динамика солитонов в спиновом нематике. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2007. V. 131. №. 2. P. 343-356.
68. Mikushina N.A., Moskvin A.S. Dipole and quadrupole skyrmions in S= 1 (pseudo) spin systems. *Physics Letters A*. 2002. V. 302. №. 1. P. 8-16.
69. Ivanov B.A, Galkin A.Yu., Khymyn R.S., Merkulov A. Yu. Nonlinear dynamics and two-dimensional solitons for spin-1 ferromagnets with biquadratic exchange. *Physical Review B*. 2008. V. 77. №. 6. P. 064402(11 p.).
70. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.) Введение в квантовую статистическую механику. Москва, 1984. 384 с.
71. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. – Издание 3-е, исправленное. Москва, 1989. 720 с.
72. Mineev V.P. Superfluid 3He: introduction to the subject. *Soviet Physics Uspekhi*. 1983. V. 26. №. 2. P. 160-175.
73. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Статистическая механика квантовых жидкостей с триплетным спариванием. *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 2002. Т. 33. №. 6. С. 1357-1445.
74. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов. Москва, 2006. 368 с.

75. Боголюбов Н.Н. и др. К микроскопической теории сверхтекучих жидкостей. *Успехи физических наук*. 1989. Т. 159. №. 12. С. 585-620.

76. Prost J. The physics of liquid crystals. Oxford, 1995. S. 83. 597 с.

77. Ивашин А.П., Ковалевский М.Ю., Чеканова Н.Н. Классификация состояний равновесия сверхтекучей жидкости с d-спариванием. *Физика низких температур*. 2004. Т. **30**. №. 920. С. 920-927.

78. Боголюбов Н.Н. К теории сверхтекучести. *Известия АН СССР: Физическая серия*. 1947. Т. 11**.** № 1. С. 77-90.

79. Akhiezer A.I., Peletminskii S.V., Slyusarenko Y.V. Theory of a weakly nonideal Bose gas in a magnetic field. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1998. V. 86. №. 3. P. 501-506.

80. Ohmi T., Machida K. Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1998. V. 67. №. 6. P. 1822-1825.

81. Пелетминский А.С., Пелетминский С.В., Слюсаренко Ю.В. К теории пространственно-периодического бозе-конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа. *Теоретическая и математическая физика*. 2000. Т. 125. №. 1. С. 152-176.

82. Kawaguchi Y., Ueda M. Spinor Bose–Einstein condensates. *Physics Reports*. 2012. V. 520. №. 5. P. 253-381.

83. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Основные состояния в периодическом поле. Магнито-блоховские функции и векторные расслоения. *ДАН СССР*. 1980. Т. 253. С. 1293-1297.

84. Dzyaloshinskii I.E., Volovick G.E. Poisson brackets in condensed matter physics. *Annals of Physics*. 1980. V. 125. №. 1. P. 67-97.

85. Воловик Г.Е., Кац Е.И. О нелинейной гидродинамике жидких кристаллов. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1981. Т. 81. №. 1. С. 240-248.

86. Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов. Москва, 1988. 140 с.

87. Callen H.B., Welton T.A. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*. 1951. V. 83. №. 1. P. 34-40.
88. Kubo R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1957. V. 12. №. 6. P. 570-586.
89. Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике. *ДАН СССР*. 1959. Т. 126. С. 53-56.
90. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статической физике. Москва, 1962. 443 с.
91. Барьяхтар В.Г., Криворучко В.Н., Яблонский Д.А. Функции Грина в теории магнетизма. Киев, 1984. 336 с.
92. Mahan G.D. Many-particle physics. New York, 1990. 1032 p.
93. Li P., Zhang G.M., Shen S.Q. SU (3) bosons and the spin nematic state on the spin-1 bilinear-biquadratic triangular lattice. *Physical Review B*. 2007. V. 75. №. 10. P. 104420(8 p.).
94. Brown E.B. Green's-function theory of the spin-1 exchange-interaction model of ferromagnetism. *Physical Review B*. 1989. V. 40. №. 1. P. 775-778.
95. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической механики. Москва, 1977. 338 с.
96. Боголюбов Н.Н. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Дубна: ОИЯИ, 1963. 123 с. (Препринт ОИЯИ; Р-1395).
97. Halperin B.I., Saslow W.M. Hydrodynamic theory of spin waves in spin glasses and other systems with noncollinear spin orientations. *Physical Review B*. 1977. V. 16. №. 5. P. 2154-2162.
98. Galasiewicz Z.M. Spin hydrodynamic equations with external disturbances and suitable Green's functions for superfluid 3 He-B. New onsager relations. *Journal of low temperature physics*. 1984. V. 57. №. 1-2. P. 123-150.
99. Kovalevskii M.Y., Rozhkov A.A. On the theory of disordered magnetics. A: *Statistical Mechanics and its Applications*. 1995. V. 216. №. 1-2. P. 169-184.

100. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Москва, 1946. 120 с.
101. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. Москва, 1971. 416 с.
102. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. Москва, 1977. 367 с.
103. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Москва, 1978. 808 с.
104. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Москва, 1986. 736 с.
105. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Москва, 1983. 399 с.
106. Beris A.N., Edwards B.J. Thermodynamics of Flowing Systems with Internal Microstruc-ture (Book 36). New York, 1994. 704 p.
107. Chaikin P.M., Lubensky T.C. Principles of Condensed Matter Physics). Cambridge, 2000. 722 p.
108. Green M.S. Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. *The Journal of Chemical Physics*. 1952. V. 20. №. 8. P. 1281-1295.
109. Кубо Р. Термодинамика. Москва, 1970. 304 с.
110. Чепмен С., Каулинг Т.Д., Математическая теория неоднородных газов. Москва, 1960. 510 с.
111. Ахиезер А.И., Алексин В.Ф., Ходусов В.Д. Газодинамика квазичастиц. I. Общая теория. *Физика низких температур*, 1994, Т. 20, № 12, С. 1199-1239.
112. Ахиезер А.И., Алексин В.Ф., Ходусов В.Д. Газодинамика квазичастиц. II. Кинетические коэффициенты в уравнениях переноса квазичастиц. *Физика низких температур*, 1995, Т. 21, № 12, С. 3-23.
113. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. Москва, 1970. 400 с.
114. Барут А. Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения: у 2 т. Москва: Изд. Мир, 1980. Т. 2. 455 с.

115. Mäkelä H., Suominen K.A. Inert states of spin-S systems. *Physical review letters*. 2007. V. 99. №. 19. P. 190408(4 p.).
116. Yip S.K. Symmetry and inert states of spin Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*. 2007. V. 75. №. 2. P. 023625(9 p.).
117. Bogolyubov N.N. et al. Quasiaverages and classification of equilibrium states of condensed media with spontaneously broken symmetry. *Physics of Atomic Nuclei*. 2009. V. 72. №. 5. P. 761-767.
118. Дзялошинский И.Е. Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. I. Неметаллы. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 1964. V. 46. №. 4. P. 1420-1437.
119. Ковалевский М.Ю. Квазисредние в решении задачи классификации состояний равновесия конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией. *Теоретическая и математическая физика*. 2009. V. 160. №. 2. P. 290-303.
120. Vollhardt D., Wolfle P. The Superfluid Phases of Helium 3. New York, 2013. 656 с.
121. Биденхарн Л., Лаук Д. Угловой момент в квантовой механике. Москва, 1984. 302 с.
122. Шейнман О.К. Алгебры Кричевера–Новикова, их представления и приложения в геометрии и математической физике. *Современные проблемы математики*. 2007. Т. 10. С. 3-140.
123. Грот С., де Мазур П. Неравновесная термодинамика. Москва, 1964. 456 с.
124. Стратонович Р.Л. О флуктуациях в жидких кристаллах вблизи перехода жидкая фаза–нематическая фаза. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 1976. Т. 70. С. 1290-1299.
125. Bogolubov N.N. On some problems of the theory of superconductivity. *Physica*. 1960. V. 26. P. S1-S16.
126. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Спинорный параметр порядка и состояния равновесия бозе - систем со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. V. 43. №. 9. P. 1324-1333.

127. Боголюбов Н.Н.(мл.), Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Квазисредние и вырожденные квантовые состояния равновесия магнитных систем с SU(3) симметрией обменного взаимодействия. *Теоретическая и математическая физика.* 2018. Т. 195. № 2. С. 240–255.

128. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Моделирование динамики нормальных и вырожденных состояний магнетиков со спином s=1. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2013. №. 2 (47). С. 95-99.

129. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamics of high spin magnets. *Annals of physics*. 2014. V. 349. P. 55-72.

130. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Симметрия и релаксационная динамика магнетиков со спином s=1. *Физика низких температур,* 2014, т. 40, № 5, С. 560-569.

131. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю., Мацкевич В.Т. Спектры коллективных возбуждений и низкочастотная асимптотика функций Грина вырожденных состояний в магнетиках со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. Т. 43. №. 12. С. 1715-1723.

132. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Quantum states, symmetry and dynamics in degenerate spin s= 1 magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2014. V. 355. P. 192-196.

133. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Models of Hamiltonian and low-frequency spectra of collective excitations in spin s= 1 magnetics. *East European Journal of Physics*. 2017. V. 4. №. 2. P. 4-10.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Моделирование динамики нормальных и вырожденных состояний магнетиков со спином s=1. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2013. №. 2 (47). С. 95-99.
2. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Quantum states, symmetry and dynamics in degenerate spin s=1 magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2014. V. 355. P. 192-196.
3. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamics of high spin magnets. *Annals of physics*. 2014. V. 349. P. 55-72.
4. Kovalevsky M.Y., Glushchenko A.V. Симметрия и релаксационная динамика магнетиков со спином s=1. *Физика низких температур,* 2014, т. 40, № 5, С. 560-569.
5. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю., Мацкевич В.Т. Спектры коллективных возбуждений и низкочастотная асимптотика функций Грина вырожденных состояний в магнетиках со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. Т. 43. №. 12. С. 1715-1723.
6. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Models of Hamiltonian and low-frequency spectra of collective excitations in spin s= 1 magnetics. *East European Journal of Physics*. 2017. V. 4. №. 2. P. 4-10.
7. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Спинорный параметр порядка и состояния равновесия бозе - систем со спином s=1. *Физика низких температур*. 2017. V. 43. №. 9. P. 1324-1333.
8. Боголюбов Н.Н. (мл.), Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Квазисредние и вырожденные квантовые состояния равновесия магнитных систем с SU(3) симметрией обменного взаимодействия. *Теоретическая и математическая физика.* 2018. Т. 195. № 2. С. 240–255.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. SU(2s+1) symmetry and the dynamics of high spin systems. Materials of III International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (14-18 May 2012, Kharkiv), Kharkiv, 2012. P. 92. (доповідач).
2. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Аспекты макроскопического описания квантовых состояний и неравновесных процессов в магнетиках со спином s=1. Материалы VIII международной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложение в естественных науках и информационных технологиях» (27-28 апр. 2013 г., г. Харьков). Харьков, 2013. С. 106-107. (доповідач).
3. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Квантові стани, симетрія і нерівноважні процеси в магнетиках зі спіном s=1. Матеріали міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та прикладної фізики ЕВРИКА-2013 (15-17 трав. 2013 р., м. Львів). Львів, 2013. С. Е13. (доповідач).
4. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Модели обменной энергии и состояния магнетиков со спином s=1. Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», (26-31 мая 2013 г., г. Белгород). Белгород, 2013. С. 51 (доповідач).
5. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Magnetic Ordering and Macroscopic Dynamics of Systems with the Spin s=1. Materials of IV International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (3-7 June 2013, Kharkiv). Kharkiv, 2013. P. 50. (доповідач).
6. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamic equations of spin s magnets. Materials of Conference on Nonlinear Mathematical Physics: Twenty Years of JNMP (4-14 June 2013, Nordfjordeid), Nordfjordeid, 2013. P. 20. (участь в обговоренні).
7. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Моделі обмінного гамільтоніана і фазові стани рівноваги магнетиків зі спіном s=1. Матеріали всеукраїнської

наукової конференції "Математичне моделювання та математична фізика". Присвячена 80-річчю з дня народження Віктора Михайловича Глушкова (23-27 вересня 2013 р., м. Кременчук). Кременчук, 2013. С. 26-27. (доповідач).

8. Глущенко А.В., Ковалевський М.Ю. Обмінна релаксація в динаміці магнетиків зі спіном s=1. Матеріали XI Міжнародної наукової конференції «Фізичні явища в твердих тілах» (3-6 груд. 2013 р, м. Харків). Харків, 2013. С. 113. (доповідач).
9. Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Макроскопическая динамика и спектры коллективных возбуждений магнетиков со спином s=1. Материалы XVIII Международной научной конференции молодых ученых и специалистов к 105-летию Н.Н. Боголюбова (ОМУС-2014) (24-28 февраля 2014г., г. Дубна). Дубна, 2014. С. 33-37. (доповідач).
10. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Exchange SU(2s+1) symmetry and nonlinear dynamics of high spin magnets. Materials of XVI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-XVI) (13-18 Oct. 2014, Dubna). Dubna, 2014. P. 6. (доповідач).
11. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Relaxation dynamics of spin s=1 magnets and spectra of collective excitations. Materials of VI Conference of Young Scientists Problems of theoretical physics dedicated to 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov, (25-27 Nov. 2014, Kyiv). Kyiv, 2014. P. 38. (доповідач).
12. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Casimir invariants, exchange energy models and spectra of collective excitations in spin s=1 magnets. Materials of International Conference «Spin physics, spin chemistry and spin technology», (1-5 June 2015, Saint Petersburg). Saint Petersburg, 2015. P. 81. (доповідач).
13. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of magnetic equilibrium states of Bose systems with the spin s=1. Materials of International Symposium Spin Waves 2015 (7-13 June 2015, Saint Petersburg). Saint Petersburg, 2015. P. 62. (доповідач).

14. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Unitary symmetry and dynamics of high-spin magnets in Weyl and Racah bases. Materials of International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF-2015) (29 Sep.-2 Oct., 2015, Dnipropetrovsk). Dnipropetrovsk, 2015. Paper ID MMM-3-en (4 p.). (доповідач).
15. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of degenerate equilibrium states of magnets with the spin s=1. Materials of VII International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (6-10 June 2016, Kharkiv). Kharkiv, 2016. P. 72. (доповідач).
16. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of superfluid equilibrium states of magnets with the spin s=1. Materials of Bogolyubov Conference “Problem of Theoretical Physics” (24-26 May 2016, Kyiv). Kyiv, 2016. P. 14. (доповідач).
17. Glushchenko A.V., Kovalevsky M.Y. Classification of magnetic and superfluid equilibrium states forspin s=1 magnets. Materials of VIII International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” (29 May-2 June 2017, Kharkiv). Kharkiv, 2017. P. 74. (доповідач).