ІНСТИТУТ РАДІОФІЗИКИ ТА ЕЛЕКТРОНІКИ ІМ. О.Я. УСИКОВА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР

«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Апостолов Станіслав Сергійович

УДК 538.945, 537.876, 538.977

ДИСЕРТАЦІЯ

ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ТА ЕЛЕКТРОННИЙ ТРАНСПОРТ У НАДПРОВІДНИХ СТРУКТУРАХ

01.04.02 – Теоретична фізика

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________________________ С.С. Апостолов

Науковий консультант: **Ямпольський Валерій Олександрович**, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Апостолов С. С. Електромагнітний та електронний транспорт у надпровідних структурах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 – Фізика та астрономія). – Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, 2019.

У дисертаційній роботі представлені результати дослідження електронного та електромагнітного транспорту у надпровідних структурах, що містять шаруваті надпровідники, високотемпературні надпровідники на основі заліза, звичайні надпровідники та топологічні ізолятори. Досліджено ряд лінійних та нелінійних ефектів в таких структурах, а також виявлено специфічні особливості вказаних матеріалів.

Зокрема, досліджено електронний транспорт у ланцюгах, які включають звичайний надпровідник і високотемпературний надпровідник на основі заліза, з'єднаних нормальним або феромагнітним дротом, та отримано вирази для залежності щільності електронних станів від енергії та співвідношення між джозефсонівським струмом та різницею фаз між надпровідниками. Аналітичний результат для щільності станів демонструє особливості поблизу надпровідникових щілин при високих енергіях, а співвідношення між струмом та різницею фаз виявляє 0–π переходи для широкого діапазону параметрів. Такі специфічні ознаки можуть бути використані в експерименті для розмежування s^{+-}- та s^{++}-спаровування у високотемпературних надпровідниках на основі заліза.

Представлено модель електронного транспорту між двома надпровідниками, з'єднаними за допомогою двовимірного топологічного ізолятору, в якій враховані як ефекти багатократних андреєвських та нормальних відбиттів, так і електрон-домішкове розсіювання у топологічному ізоляторі. В рамках моделі за допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена отримано коефіцієнти нормального та андреєвського відбиттів, які відбуваються на границі надпровідника та двовимірного топологічного ізолятора із спін-орбітальною взаємодією. Використовуючи цей результат, обчислено функції розподілу електронів за енергіями та визначено характерні особливості функції розподілу, що виникають в результаті зазначених процесів. Ці особливості можуть дозволити в експерименті визначати співвідношення ролей нормального відбиття на надпровідному контакті та електрон-домішкового розсіювання в електронному транспорті в топологічному ізоляторі.

Досліджено електромагнітний хвильовий транспорт у шаруватих надпровідниках, у яких формується особливий вид твердотільної плазми, так звана джозефсонівська плазма. Завдяки специфічній кристалічній структурі шаруватого надпровідника, де тонкі надпровідні шари чергуються з більш товстими діелектричними або металевими шарами, така плазма виявляється сильно анізотропною та нелінійною, внаслідок нелінійного джозефсонівського зв’язку між надпровідними шарами. У такій плазмі можуть поширюватись так звані джозефсонівські плазмові хвилі, які забезпечують ряд нетривіальних явищ, що вивчені у даній дисертації та представляють інтерес як для фундаментальної, так і для прикладної науки.

Передбачено явище самоіндукованої прозорості шаруватих надпровідників при опроміненні хвилею терагерцового діапазону, яке виникає внаслідок нелінійності джозефсонівської плазми. Теоретично показано, що прозорість шаруватого надпровідника може змінюватися у широких межах від майже непрозорості до повної прозорості при варіюванні амплітуди падаючої хвилі. Крім того, прозорість, так само як і поверхневий реактанс шаруватого надпровідника, залежить від амплітуди неоднозначним чином, що може призводити до гістерезисних стрибків між різними гілками таких залежностей.

Сформульовано та обґрунтовано аналог принципу суперпозиції для нелінійних джозефсонівських плазмових хвиль, використання якого дає можливість проводити теоретичне дослідження нелінійного електромагнітного транспорту через сильно анізотропні шаруваті надпровідники. Такий принцип суперпозиції має місце завдяки різній фізичній природі струмів уздовж та поперек шарів. На основі цього принципу було передбачено явище крос-поляризації хвиль, що відбиваються від межі шаруватий надпровідник – вакуум. Окрім того, досліджено транспорт поперечно-магнітних та поперечно-електричних хвиль через шаруватий надпровідник та показано, що ступінь крос-поляризації залежить не тільки від кута падіння та частоти хвилі, а також від її амплітуди.

Показано, що ефекти, передбачені для зразків та пластин нескінченних розмірів, можуть спостерігатись і у зразках скінченних розмірів, розташованих у прямокутному хвилеводі, що краще відповідає постановці можливого експерименту. Зокрема, це показано для ефектів самоіндукованої прозорості та крос-поляризації.

Отримано та проаналізовано дисперсійні співвідношення для лінійних, слабо нелінійних та сильно нелінійних електромагнітних мод, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого перпендикулярні поверхні пластини. Показано, що такі моди можуть мати аномальну дисперсію у широкому діапазоні параметрів. Виявлено, що навіть у симетричній геометрії в пластині шаруватого надпровідника можуть існувати як симетричні і антисиметричні, так і несиметричні по магнітному полю локалізовані моди, що пов’язано з нелінійністю джозефсонівської плазми. Передбачено, що у нелінійному випадку дисперсійні співвідношення містять амплітуду локалізованої моди, що разом з аномальною дисперсією відкриває можливість спостерігати явище, аналогічне «зупинці світла» у нелінійній оптиці.

Досліджено резонансні ефекти у шаруватих надпровідниках, такі, як посилення прозорості, що супроводжується збудженням локалізованих мод з аномальною дисперсією, та пригнічення коефіцієнта відбиття (вудівські аномалії), що супроводжується збудженням нелінійних локалізованих мод. Показано, що коефіцієнт прозорості проявляє незвичну залежність від кута падіння хвилі, яка пов’язана із аномальною дисперсією локалізованих мод. Зокрема, передбачено існування двох резонансних піків цієї залежності та їх подальше злиття в широкий єдиний пік при збільшенні частоти хвилі. У свою чергу, нелінійність призводить до можливості спостереження вудівських аномалій за рахунок зміни не тільки частоти та кута падіння, але й амплітуди хвилі.

Досліджено терагерцовий електромагнітний транспорт через фотонний кристал, що містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого ортогональні шарам фотонного кристалу. За допомогою методу трансфер-матриць отримано дисперсійні співвідношення для електромагнітних мод, локалізованих на такому дефекті, та аналітичний вираз для коефіцієнта прозорості. Показано, що прозорість у забороненій зоні фотонного кристала може бути істотно посилена за рахунок резонансного збудження локалізованих мод, та отримано спрощений вираз для коефіцієнта прозорості поблизу резонансу.

Розроблено новий метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту через шаруватий надпровідник при його взаємодії з незмінним у часі магнітним полем. Цей метод базується на нелінійній взаємодії магнітного поля з джозефсонівською плазмою. За його допомогою теоретично показано, що таким магнітним полем можна контролювати транспортні характеристики шаруватих надпровідників. Зокрема, показано, що, варіюючи величину магнітного поля, можна змінювати прозорість пластини шаруватого надпровідника та ступінь кросполяризації відбитої хвилі. Наявність магнітного поля може призводити як до збільшення, так і зменшення цих транспортних характеристик. Визначено умови повної прозорості та повної крос-поляризації. Теоретично показано, що за допомогою магнітного поля можна змінювати дисперсійні характеристики локалізованих електромагнітних мод. Це, разом із немонотонною дисперсією локалізованих мод, може призводити до ефекту внутрішнього відбиття у неоднорідному незмінному у часі магнітному полі.

Одержані результати доповнюють і розширюють наявні уявлення про електронний транспорт у структурах, що містять звичайні надпровідники і високотемпературні надпровідники, та про електромагнітний транспорт в шаруватих надпровідниках. Ці результати можуть бути використані при розробці електроніки терагерцового діапазону, що має потенційно важливі практичні застосування в різних областях, зокрема, в системах безпеки, медичній діагностиці, контролі навколишнього середовища. Наприклад, ефекти самоіндукованої та резонансної прозорості та крос-поляризації можуть бути використані у детекторах та фільтрах терагерцового випромінювання, а контроль цих явищ за допомогою незмінного у часі магнітного поля може значно спростити налаштування таких приладів. У свою чергу, досліджені у дисертації локалізовані електромагнітні хвилі та можливість керування їх поширенням можуть бути застосовані для управління приповерхневими фізико-хімічними процесами, такими як фотокаталіз, літографія та ін.

Ключові слова: ефект Джозефсона, андреєвське відбиття, високотемпературний надпровідник, терагерцовий діапазон частот, крос-поляризація, посилена прозорість, вудівські аномалії, локалізовані хвилі.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{+-} superconductors. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86. P. 224501.

2. Apostolov S. S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89. P. 201303.

3. Апостолов С. С. Многократное андреевское отражение в двухмерном топологическом изоляторе. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 1. С. 65–71.

4. Yampol'skii V. A., Slipchenko T. M., Mayzelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S., Savel'ev S. E., Nori F. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78. P. 184504.

5. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Mayselis Z. A., Slipchenko T. M., Savel'ev S. E., Yampol'skii V. A. Hysteresis jumps of the surface reactance of a layered superconductor as the incident wave amplitude varies. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 1. P. 92–99.

6. Apostolov S. S., Bozhko A. A., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A. Amplitude hysteresis of the surface reactance of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 4. P. 265–272.

7. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82. P. 144521.

8. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Self-induced terahertz-wave transmissivity of waveguides with finite-length layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88. P. 014506.

9. Apostolov S. S., Rokhmanova T. N., Khankina S. I., Yakovenko V. M.,

Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of THz waves by their reflection and transmission through a finite layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2012. Vol. 38, No. 9. P. 880–887.

10. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 90. P. 184503.

11. Рохманова Т. Н., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Нелинейная трансформация волн с различными поляризациями в ограниченных слоистых сверхпроводниках. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 2. С. 66–71.

12. Apostolov S. S., Havrilenko V. I., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 2. P. 296–302.

13. Апостолов С. С., Кадыгроб Д. В., Майзелис З. А., Николаенко А. А., Шматько А. А., Ямпольский В. А. Нормальная и аномальная дисперсия слабонелинейных локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника. *Радиофизика и электроника*. 2017. Т. 22. С. 31–38.

14. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized modes in a plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 3. P. 238–246.

15. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear Wood anomalies in the reflectivity of layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 3. P. 199–204.

16. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampol'skii V. A. Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission. *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 97. P. 024510.

17. Apostolov S. S., Iakushev D. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Terahertz transverse-magnetic-polarized waves localized on a layered superconductor defect in photonic crystals. *Радиофизика и электроника*. 2016. Vol. 21.

P. 77–82.

18. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampolskii V. A. Resonant transparency of a photonic crystal containing layered superconductor as a defect. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 7. P. 848–854.

19. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Ямпольский В. А. Управление отражательной способностью слоистого сверхпроводника с помощью статического магнитного поля. *Радиофизика и электроника*. 2014. Т. 19. С. 49–54.

20. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol'skii V. A. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94. P. 024513.

21. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of the electromagnetic waves reflected from the layered superconductors in an external dc magnetic field. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 10. P. 916–923.

22. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 6. P. 552–560.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

23. Апостолов С. С., Сорокина М. А., Майзелис З. А., Слипченко Т. М., Ямпольский В. А. Гистерезисная амплитудная зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны через пластину слоистого сверхпроводника. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали 9-ї Міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Харків, 2009. С. 41.

24. Сорокина М. А., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Self-induced transparency of layered superconductor. *Физика низких температур*: материалы международной научной конференции молодых ученых (г. Харьков, 7–11 июня 2010 г.). Харьков, 2010. С. 62.

25. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in

proximity circuits with s_{+-} superconductors. *APS March Meeting 2013*: Bulletin of the American Physical Society, Baltimore, Maryland, USA, 18–22 March, 2013. Baltimore, 2013. P. M36.12.

26. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Self-induced THz-waves transmissivity of waveguides with layered superconductors. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 34.

27. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transformation of THz waves polarization via transmission through a finite slab of layered superconductor. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 35.

28. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Nonlinear THz-waves transmission through a finite-length layered superconductor placed inside a vacuum rectangular wave-guide. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 13th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 2–6 December, 2013. Kharkiv, 2013. P. 17.

29. Apostolov S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014. Denver, 2014. P. A42.7.

30. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Superposition principle for nonlinear waveguide modes in layered superconductors. *Low temperature physics – 2014*: Proceedings of 5th International Conference for Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 2–6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 41.

31. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg, Germany, 10–17 August, 2014. Heidelberg, 2014. P. 22.

32. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A.

Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors placed inside a vacuum waveguide. *Condensed matter in Paris 2014*: Proceedings of the international conference, Paris, France, 24–29 August, 2014. Paris, 2014. P. 365–366.

33. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 14th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October, 2014. Kharkiv, 2014. P. 19.

34. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by dc magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Vilnius, 2015. P. 64.

35. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of dc magnetic field on reflectivity of layered superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 21.

36. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of THz waves through finite-thickness layered superconductors in the presence of external dc magnetic field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. P. 23.

37. Апостолов С. С., Левченко А. А. Многократные андреевские и нормальные отражения в двумерном топологическом изоляторе. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkov, 2016. C. 13.

38. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф.,

Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Procedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkov, 2016. С. 40–41.

39. Рохманова Т., Апостолов С. С. Керування прозорістю шаруватих надпровідників зовнішнім постійним магнітним полем. *ІФКС – 2017*: матеріали 17-ї Всеукраїнської школи-семінару та Конкурсу молодих вчених (м. Львів, Україна, 8–9 червня 2017 р.). Львів, 2017. С. 17.

40. Nikolaenko A. A., Shmat'ko A. A., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Yampol'skii V. A. Weakly non-linear localized modes in layered superconductor plates. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 37.

41. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Dc magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 39.

42. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized waves in layered superconductors: Jacobi elliptic functions approach. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 177–180.

43. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Description of localized josephson plasma waves: Legendre functions vs WKB approximation. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 181–184.

ABSTRACT

Apostolov S. S. Electromagnetic and electronic transport in superconducting structures. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.04.02 “Theoretical physics” (104 – Physics and Astronomy). – O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine, – National Science Center “Kharkiv Institute of Physics and Technology” NAS of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The Doctoral Thesis presents the results of the research on the electronic and electromagnetic transport in the superconducting structures containing the layered superconductors, the iron-based high-temperature superconductors, conventional superconductors and topological insulators. Some linear and nonlinear effects in such structures were studied and the specific features of these metamaterials were identified.

In particular, the electronic transport in circuits, which includes a conventional superconductor and a iron-based high-temperature superconductor, connected by a normal or ferromagnetic wire, is studied. The expressions for the energy dependence of the electron-state density and the relation between the Josephson current and the phase difference between the superconductors are obtained. The analytical result for the state density demonstrates features near the superconducting gaps at the high energies, while the relation between current and phase difference reveals 0–π transitions for a wide range of parameters. Such specific features can be used in the experiment to distinguish s^{+-}- and s^{++}-pairing in the iron-based high-temperature superconductors.

The model of the electronic transport between two superconductors, connected by a two-dimensional topological insulator, which takes into account the effects of both multiple Andreev and normal reflections, as well as the electron-impurity scattering in the topological insulator, is introduced. In the framework of the model, using the Bogolyubov – de Gene equations, we obtain the coefficients of the normal and

Andreev reflections occurring at the boundary between the superconductor and the two-dimensional topological insulator with a spin-orbit interaction. Using this result, the electron energy distribution functions are calculated and the characteristic features of these distribution functions caused by the above processes are determined. These features can allow to determine in the experiment the correlation between the normal reflection on the superconducting contacts and the electron-impurity scattering in the electronic transport through the topological insulator.

The electromagnetic wave transport in the layered superconductors is studied, where a special type of solid-state plasma, called the Josephson plasma, is formed. Due to the specific crystal structure of the layered superconductor, where the thin superconducting layers alternate with the thicker dielectric or metallic ones, this plasma is strongly anisotropic and nonlinear, because of the nonlinear Josephson contact between the superconducting layers. In such a plasma, the so-called Josephson plasma waves can propagate, which provide some non-trivial phenomena that are studied in the Thesis and are of interest for both fundamental and applied science.

The phenomenon of the self-induced transparency of the layered superconductors irradiated by the terahertz wave is predicted. This phenomenon arises due to the non-linearity of the Josephson plasma. It is shown theoretically that the transparency of the layered superconductor changes widely from the almost opacity to the total transparency varying the amplitude of the incident wave. In addition, the transmittance of a layered superconductor, as well as the surface reactance, depends on the amplitude in an ambiguous manner, which can lead to the hysteresis jumps between the different branches of these dependencies.

An analogue of the superposition principle for the nonlinear Josephson plasma waves has been formulated and proved. The use of this superposition principle allows to study theoretically the nonlinear electromagnetic transport through strongly anisotropic layered superconductors. This principle occurs due to the different physical nature of the currents along and across the layers. On the basis of the principle, the phenomenon of cross-polarization of waves, reflected from the boundary of layer superconductor –

vacuum, was predicted. In addition, the transport of transverse-magnetic and transverse-electric waves through a layer superconductor has been examined and it has been shown that the cross-polarization degree depends not only on the incident angle and frequency of the wave, but also on its amplitude.

It is shown that the effects predicted for the samples and plates of the infinite dimensions can also be observed for the finite samples located in a rectangular waveguide that match better a possible experimental setup. In particular, this is shown for the self-induced transparency and polarization transformation phenomena.

The dispersion relations for the linear, weak nonlinear, and strong nonlinear electromagnetic modes localized on a plate of a layered superconductor, whose superconducting layers are perpendicular to the surface of the plate, are obtained and analyzed. It is shown that such modes may have anomalous dispersion over a wide range of parameters. It is revealed that even in the symmetric geometry, there can exist localized modes in a plate of a layered superconductor, symmetric and antisymmetric as well as non-symmetric with respect to the magnetic field, which is due to the non-linearity of the Josephson plasma. It is predicted that in the nonlinear case the dispersion relations contain the amplitude of the localized mode that with anomalous dispersion opens up the possibility to observe a “stop-light” phenomenon similar to the nonlinear optics.

The resonance effects in the layered superconductors, the enhanced transparency involving excitation of the localized modes with the anomalous dispersion and the suppression of the reflection (Wood anomalies) involving excitation of the nonlinear localized modes, are studied. It is shown that the transmittance have an unusual dependence on the angle of the incidence wave, which is related to the anomalous dispersion of the localized modes. In particular, the existence of two resonant peaks of this dependence and their merging into a wide single peak with increasing the wave frequency are predicted. In turn, the nonlinearity leads to the possibility of observing the Wood anomalies by changing not only the frequency and the incidence angle, but also the wave amplitude.

The electromagnetic transport through a photonic crystal containing a plate of a layered superconductor as a defect, whose superconducting layers are orthogonal to the layers of the photonic crystal, is studied. Using the transfer matrix method, we obtain the dispersion relations for the electromagnetic modes localized on such a defect and an analytical expression for the transmittance. It is shown that the transparency in the forbidden zone of a photonic crystal can be substantially enhanced by resonant excitation of the localized modes.

A new method for theoretical study of electromagnetic transport through a layered superconductor interacting with the DC magnetic field was developed. This method is based on the nonlinear interaction of the magnetic field with the Josephson plasma. This method shows the possibility to control the transport characteristics of the layered superconductors by means of such a magnetic field. In particular, it has been shown that the varying of the magnetic field magnitude can change the transparency of the layered superconductor plate and the cross-polarization degree of the reflected wave. The presence of a magnetic field can lead to both increase or decrease of these transport characteristics. The conditions of the total transparency and the total cross-polarization are determined. It is shown theoretically that it is possible to change the dispersion characteristics of localized electromagnetic modes with the help of a magnetic field. That, together with the non-monotonic dispersion of localized modes, can lead to the effect of internal reflection in a non-homogeneous DC magnetic field.

The obtained results supplement and extend the existing conceptions of the electronic transport in the circuits containing the conventional and high-temperature superconductors and the electromagnetic transport in the layered superconductors. These results can be used for the development of the terahertz electronic devices potentially important for the practical application for the various areas, in particular, for the security systems, the medical diagnostics, the environmental control, etc. In the Thesis, the finite samples of the layered superconductors and the interaction of the external DC magnetic field with Josephson plasma waves are studied, which corresponds to the possible experiment setup. The self-induced and resonant transparency effects as well as the polarization transformation can be used in the detectors and filters of the terahertz radiation, while the control of these processes by means of the external DC magnetic field can significantly simplify the tuning of such devices. In turn, the localized electromagnetic waves studied in the Thesis and the ability to control their propagation can be applied to operate the surface physical and chemical processes, such as photocatalysis, lithography, etc.

Keywords: Josephson effect, Andreev reflection, high-temperature superconductor, terahertz frequency range, polarization, enhanced transparency, Wood anomalies, localized waves.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

ВТНП	Високотемпературний надпровідник
БКШ	Бардіна – Купера – Шріффера (теорія)
ГЛ	Гінзбурга – Ландау (теорія)
SNS	«надпровідник – нормальний метал – надпровідник»
Cu-НП	Купратний надпровідник
Fe-НП	Надпровідник на основі заліза
ДПХ	Джозефсонівська плазмова хвиля
TM	Поперечно-магнітна (transverse-magnetic) поляризація
TE	Поперечно-електрична (transverse-electric) поляризація
ВКБ	Вентцеля – Крамерса – Бриллюена (метод)
J_c	Максимальний джозефсонівський струм
φ	Калібрувально-інваріантна різниця фаз параметру порядку
λ_{ab}	Лондонівська глибина проникнення магнітного поля поперек шарів
λ_c	Лондонівська глибина проникнення магнітного поля вздовж шарів
ω_J	Джозефсонівська плазмова частота
σ_c	Провідність поперек шарів надпровідника
σ_{ab}	Провідність вздовж шарів надпровідника
c	Швидкість світла
Φ_0	Квант магнітного потоку ($\Phi_0 = \pi\hbar c/e$)
γ	Параметр анізотропії шаруватого надпровідника ($\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$)
Ω	Безрозмірна частота хвилі ($\Omega = \omega/\omega_J$)

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. За останні десятиліття надпровідники знаходять все більше застосування не тільки у науковій сфері, але й у нових галузях техніки, де надпровідні матеріали використовуються для створення надсильних магнітних полів, кабелів, здатних передавати великі потоки енергії без втрат, потужних електричних генераторів і двигунів [1]. Все більшого значення набувають надпровідники в області мікро- та наноелектроніки як елементи приладів унікальної чутливості, заснованих на ефекті Джозефсона, болометрів, параметричних перетворювачів частоти, генераторів когерентного випромінювання та навіть класичного та квантового комп'ютерів [2–6]. Особлива увага при цьому приділяється високотемпературним надпровідникам (ВТНП) з критичними температурами вище температур кипіння рідкого водню 20,28 K та рідкого азоту 77,4 K.

Окрім високих критичних температур, ВТНП мають деякі специфічні властивості, які роблять їх цікавим предметом для дослідження та можливого використання. По-перше, до теперішнього часу не існує послідовної теорії формування конденсату електронних пар у ВТНП. Дійсно, мікроскопічна теорія надпровідності [7–9] передбачає критичну температуру не більше 30 K. З іншого боку, існують теорії, які передбачають критичну температуру у квазіодновимірних надпровідниках до 2000 K [10]. Це викликає великий інтерес дослідників до розробки послідовної теорії, яка може відкрити шлях для створення надпровідників з критичної температурою вище кімнатних температур.

По-друге, усі ВТНП мають незвичний тип спаровування надпровідних електронів. Якщо для купратних ВТНП вважається експериментально встановленим, що спаровування має структуру так званого d-спаровування [1, 11, 12], то для відносно недавно [13, 14] відкритих ВТНП на основі заліза тип спаровування залишається остаточно не з'ясованим [3, 15]. Очікується, що найбільш ймовірний механізм, так зване $s^{\pm}$-спаровування, може призводити до деяких незвичних явищ, притаманних лише цьому типу спаровування.

Нарешті, важливим аспектом дослідження ВТНП є те, що в них формується особливий вид нелінійної анізотропної плазми [6, 16–18]. Це пов'язано зі специфічною кристалічною структурою ВТНП — тонкі надпровідні шари (з товщиною порядку 0,2 нм) чергуються з більш товстими діелектричними або металевими шарами (з товщиною порядку 2 нм), причому між надпровідними шарами виникає нелінійний зв'язок завдяки ефекту Джозефсона, що й визначає назву — джозефсонівська плазма. Нелінійність може призвести до ряду нетривіальних явищ [19, 20], таких як самоіндукована прозорість та самофокусування світла, що представляють інтерес як для фундаментальної, так і для прикладної науки.

Треба зазначити, що електромагнітні хвилі, що можуть поширюватися у такій плазмі, так звані джозефсонівські плазмові хвилі (ДПХ), належать до важливого з прикладної точки зору терагерцового частотного діапазону, від $3 \cdot 10^{11}$ Гц до $3 \cdot 10^{13}$ Гц. В даний час цей частотний діапазон все ще є важкодоступним для електронних і оптичних приладів, хоча має широкий спектр потенційних застосувань від неінвазивного зондування та томографії у медицині до контролю навколишнього середовища та використання у системах безпеки та комунікації [21–24]. Останнім часом шаруваті ВТНП розглядаються як перспективні кандидати для електроніки терагерцового діапазону. Зокрема, на їх основі можливо створити відносно потужне джерело когерентного терагерцового випромінювання [5, 6], а взаємодія терагерцового випромінювання з шаруватими надпровідниками може відкрити нові можливості керування надпровідним станом [18].

Низка невирішених фундаментальних і прикладних проблем щодо електронного та електромагнітного транспорту у надпровідних структурах визначають важливість і актуальність досліджень, проведених в даній дисертації. Зокрема, досліджено електронний транспорт у системах, які містять сучасні метаматеріали, ВТНП на основі заліза і топологічні ізолятори, та виявлено характерні особливості такого транспорту. Також передбачено ряд лінійних та нелінійних транспортних ефектів при взаємодії терагерцових хвиль із купратними ВТНП, серед яких самоіндукована прозорість, явище крос-поляризації, резонансне збудження локалізованих ДПХ. Показано, що локалізовані ДПХ можуть мати аномальну дисперсію, що відкриває можливості спостерігати явище негативної рефракції та, завдяки нелінійності, явище, аналогічне «зупинці світла». Крім того, у дисертації розвинено метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту в шаруватому надпровіднику при його взаємодії з незмінним у часі магнітним полем, що має важливе прикладне значення для електроніки терагерцового діапазону. Саме це коло досліджень, які мають фундаментальне і прикладне значення, робить тему дисертації актуальною.

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційної праці полягає у виявленні специфічних особливостей електронного транспорту у сучасних метаматеріалах, ВТНП на основі заліза та топологічних ізоляторах, з урахуванням ефектів Джозефсона та андреєвського відбиття, а також у побудові теорії електромагнітного хвильового транспорту у структурах, що містять шаруваті надпровідники, з урахуванням специфічних особливостей джозефсонівської плазми і в дослідженні різноманітних лінійних та нелінійних ефектів в таких структурах.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано наступні завдання:

- модифікувати теорію ефекту близькості та ефекту Джозефсона для ланцюгів, що містять надпровідники із $s^{\pm}$-спаровуванням, та виявити роль такого спаровування у формуванні щільності електронних станів і залежності джозефсонівського струму від різниці фаз;

- дослідити явище багатократних андреєвських відбиттів, що виникає між двома надпровідниками, з’єднаними за допомогою двовимірного топологічного ізолятору, обчислити щільність електронних станів та з’ясувати вплив мікроскопічних процесів, зокрема, нормального відбиття та розсіювання, на електронний транспорт у двовимірному топологічному ізоляторі;

- побудувати теорію транспорту лінійних та нелінійних електромагнітних хвиль у шаруватому надпровіднику;

- дослідити явище самоіндукованої прозорості шаруватого надпровідника;
- сформулювати та обґрунтувати аналог принципу суперпозиції для нелінійних хвиль у шаруватих надпровідниках;
- знайти дисперсійні рівняння для ДПХ, які локалізовані в пластині шаруватого надпровідника та поширюються під прямим кутом до надпровідних шарів, та визначити діапазони параметрів, за яких може спостерігатися аномальна дисперсія таких хвиль;
- дослідити резонансні ефекти, зокрема, резонансну прозорість та вудівські аномалії, що виникають при збудженні локалізованих ДПХ та модифіковані за рахунок аномальної дисперсії та нелінійності;
- дослідити електромагнітний транспорт через фотонний кристал, який містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника;
- розвинути теорію електромагнітного транспорту у шаруватому надпровіднику при його взаємодії з незмінним у часі магнітним полем.

Об'єктом дослідження є транспортні електронні ефекти, що виникають у ланцюгах, що містять звичайні надпровідники, ВТНП на основі заліза та топологічні ізолятори, а також транспортні електромагнітні ефекти, що відбуваються при поширенні та збудженні лінійних та нелінійних ДПХ в сильно анізотропних шаруватих ВТНП.

Предметом дослідження є джозефсонівський струм, щільність електронних станів, коефіцієнти нормального та андреєвського відбиття, лінійні та нелінійні ДПХ, поверхневий реактанс та прозорість шаруватого надпровідника, коефіцієнти крос-поляризації хвиль, дисперсія локалізованих ДПХ.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених у дисертації задач були використані наступні методи теоретичної фізики: методи аналітичного рішення нелінійних диференціальних рівнянь, квазікласичний метод ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюена) для розв'язання рівнянь з малим параметром при старшій похідній, методи знаходження міжшарової різниці фаз параметра порядку у шаруватому надпровіднику за допомогою вирішення системи зв'язаних калібрувально-інваріантних синусоїдальних рівнянь Гордона, метод трансфер-матриць для дослідження електромагнітного транспорту, метод обчислення функцій Гріна у надпровіднику за допомогою рівнянь Узаделя, метод обчислення коефіцієнтів андреєвського та нормального відбиття за допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена, метод інтегралу зіткнень у квантово-кінетичному рівнянні Больцмана.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше отримано аналітичні вирази для залежності щільності електронних станів від енергії та співвідношення між струмом та різницею фаз у ефекті Джозефсона в ланцюгах, які включають звичайний надпровідник і надпровідник з s^{+-}- або s^{++}-спаровуванням, з'єднаних нормальним або феромагнітним дротом. Показано, що щільність станів демонструє особливості поблизу надпровідникових щілин при високих енергіях, а співвідношення між струмом та різницею фаз виявляє 0–π переходи для широкого діапазону параметрів. Такі специфічні ознаки можуть бути покладені в основу метода розмежування s^{+-}- та s^{++}-спаровування у ВТНП на основі заліза в експерименті.

2. Вперше запропоновано модель електронного транспорту між двома надпровідниками, з'єднаними за допомогою двовимірного топологічного ізолятору зі спін-орбітальною взаємодією, в якій враховані ефекти багатократних андреєвських та нормальних відбиттів, а також електрон-домішкового розсіювання. В рамках моделі вперше за допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена отримано коефіцієнти нормального та андреєвського відбиттів. Використовуючи цей результат, обчислено функції розподілу електронів за енергіями та визначено їх характерні особливості, які можуть бути використані для визначення ролей розсіювання та нормального відбиття в електронному транспорті у топологічному ізоляторі.

3. Вперше передбачено ефект самоіндукованої прозорості шаруватого ВТНП, який виникає внаслідок нелінійного зв'язку джозефсонівського струму та калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку між шарами. Теоретично показано, що прозорість шаруватого надпровідника може змінюватися

у широких межах від майже непрозорості до повної прозорості при варіюванні амплітуди падаючої хвилі.

4. Вперше сформульовано і обґрунтовано аналог принципу суперпозиції для нелінійних ДПХ, використання якого дає можливість проводити теоретичне дослідження нелінійного електромагнітного транспорту через сильно анізотропні шаруваті надпровідники. Такий принцип суперпозиції має місце завдяки різній фізичній природі струмів уздовж та поперек шарів. На основі цього принципу було передбачено явище крос-поляризації хвиль, що відбиваються від межі шаруватий надпровідник – вакуум. При цьому ступінь крос-поляризації залежить не тільки від кута падіння та частоти хвилі, а також від її амплітуди.

5. Вперше розглянуто ефекти самоіндукованої прозорості та крос-поляризації для зразків шаруватих ВТНП як нескінченних, так і скінченних розмірів, що відповідає постановці можливого експерименту. При цьому показано, що ці ефекти, які передбачено для зразків нескінченних розмірів, можуть спостерігатися і у зразках скінченних розмірів, які розташовано у прямокутному хвилеводі.

6. Вперше показано, що ДПХ, локалізовані на пластині шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого перпендикулярні поверхні пластини, можуть мати аномальну дисперсію. Вперше отримано дисперсійні рівняння як для лінійних локалізованих ДПХ у такій геометрії, так і для нелінійних, і теоретично передбачено, що завдяки аномальній дисперсії у нелінійному випадку можливо спостерігати явище, аналогічне «зупинці світла» у нелінійній оптиці.

7. Вперше досліджено такі резонансні ефекти у шаруватих ВТНП, як посилення прозорості, що супроводжується збудженням локалізованих ДПХ з аномальною дисперсією, та пригнічення коефіцієнта відбиття (вудівські аномалії), що супроводжується збудженням нелінійних локалізованих ДПХ. Теоретично показано, що коефіцієнт прозорості проявляє незвичну залежність від кута падіння хвилі, пов’язану з аномальною дисперсією локалізованих ДПХ, а нелінійність призводить до можливості управління вудівськими аномаліями за рахунок зміни амплітуди хвилі.

8. Вперше теоретично досліджено електромагнітний транспорт через фотонний кристал, що містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого ортогональні шарам фотонного кристалу. Отримано дисперсійні співвідношення для електромагнітних мод, локалізованих на такому дефекті, та аналітичний вираз для коефіцієнта прозорості. Показано, що прозорість у забороненій зоні фотонного кристала може бути істотно посилена за рахунок резонансного збудження локалізованих мод.

9. Вперше розроблено метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту через шаруватий надпровідник при його взаємодії з незмінним у часі магнітним полем. На базі цього методу теоретично показано, що за допомогою такого магнітного поля можна контролювати ступінь прозорості шаруватого надпровідника, керувати ефектом крос-поляризації та змінювати дисперсійні характеристики локалізованих ДПХ.

Практичне і наукове значення отриманих результатів полягає в тому, що результати досліджень доповнюють і розширюють наявні уявлення про електронний транспорт у ланцюгах, що містять звичайні надпровідники та ВТНП, та про електромагнітний транспорт в шаруватих ВТНП. Зокрема, за допомогою ефекту Джозефсона запропоновано в експерименті відрізняти тип спаровування електронів у ВТНП на основі заліза. Також у дисертації розглянуті зразки шаруватих ВТНП скінченних розмірів та взаємодія незмінного у часі магнітного поля з джозефсонівськими плазмовими хвилями, що відповідає постановці можливого експерименту. З іншого боку, отримані у дисертації результати можуть бути використані при розробці приладів електроніки терагерцового діапазону. Наприклад, ефекти самоіндукованої і резонансної прозорості та крос-поляризації можуть бути використані у детекторах та фільтрах терагерцового випромінювання. У свою чергу, контроль за цими явищами за допомогою незмінного у часі магнітного поля може значно спростити налаштування таких приладів у заданий режим роботи. Це дуже важливо тому, що терагерцові технології мають безліч потенційно важливих практичних застосувань в різних областях, зокрема в системах безпеки, медичній діагностиці, контролі навколишнього середовища. Відзначимо також, що у дисертації досліджені локалізовані електромагнітні хвилі та можливість керування їх поширенням за допомогою нелінійності та неоднорідного магнітного поля. Завдяки високій локалізації енергії такі хвилі можуть бути застосовані для управління приповерхневими фізико-хімічними процесами, такими як фотокаталіз, літографія та ін.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації опубліковані у статтях [25–46] і тезах доповідей наукових конференцій [47–67]. Здобувач брав участь у постановці задач, вирішених у дисертації, формулюванні основних ідей та методів дослідження, проведенні найбільш складних аналітичних і чисельних розрахунків, а також виконував контроль та перевірку результатів, отриманих іншими співавторами.

У статті [25] здобувачем було запропоновано метод відокремлення двох різних типів електронного спаровування у ВТНП на основі заліза. Він показав, що щільність станів та джозефсонівський струм у ланцюгах, які включають такий ВТНП, може виявляти специфічні ознаки s^{++}- або s^{+-}-спаровування. У працях [26, 27] здобувачем запропоновано модель електронного транспорту у ланцюгу, що складається з надпровідників та двовимірного топологічного ізолятору, з урахуванням як андреєвського, так і нормального відбиття на контактах та електрон-домішкового розсіювання. Зокрема, у статті [27] здобувач визначив величини коефіцієнтів андреєвського та нормального відбиття на границі між надпровідником і топологічним ізолятором. На підставі запропонованої моделі здобувачем визначено характерні особливості, що можуть дозволити в експерименті визначати співвідношення ролей вказаних процесів.

У статтях [28, 29], які ввійшли у кандидатську дисертацію здобувача [68], було отримано аналітичні вирази, що описують гістерезисну залежність фази електромагнітних хвиль, відбитих від пластини шаруватого ВТНП, від амплітуди хвиль, що падають симетричним чином на пластину. Для досить товстих пластин у статті [29] здобувачем розроблено підхід до вирішення зв’язаних синусоїдальних рівнянь Гордона, заснований на використанні нового класу розривних просторових розподілів калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку.

У статті [30] здобувачем показано, що ефект гістерезисної поведінки фази електромагнітної хвилі, відбитої від пластини шаруватого надпровідника, зберігається і у випадку однобічного опромінення пластини. У статтях [31, 32] здобувачем передбачено самоіндуковану прозорість пластини шаруватого надпровідника. Зокрема, ним показано, що, змінюючи амплітуду хвилі, можливо змінювати прозорість пластини у широкому діапазоні від практично нуля до одиниці, причому ефект самоіндукованої прозорості має місце як для нескінченних пластин [31], так і для зразків скінченного розміру, розташованих у хвилеводі [32].

У статті [33] здобувачем передбачено явище крос-поляризації при лінійному електромагнітному транспорті через зразок шаруватого надпровідника. Визначено типи хвиль, для яких можлива повна зміна поляризації на ортогональну. У статті [34] здобувачем сформульовано ідею і обґрунтовано специфічний аналог принципу суперпозиції для нелінійних ДПХ у шаруватих надпровідниках та запропоновано пояснення цього принципу, що базується на різній фізичній природі струмів уздовж та поперек шарів. У статті [35] здобувач запропонував використати вказаний принцип дослідження транспорту поперечно-електричних і поперечно-магнітних хвиль через шаруватий надпровідник та встановив, що ступінь крос-поляризації відбитої хвилі залежить від амплітуди падаючої хвилі.

В статтях [36–38] здобувачем отримані дисперсійні рівняння для лінійних [36], слабко лінійних [37] та сильно нелінійних [38] ДПХ, локалізованих у пластині шаруватого надпровідника. Ним показано, що у певному діапазоні параметрів такі ДПХ мають аномальну дисперсію. У статтях [37, 38] здобувачем показано, що оскільки дисперсійні співвідношення містять амплітуду хвилі, то виникає можливість спостерігати явище, аналогічне «зупинці світла» у нелінійній оптиці.

В статті [39] здобувачем досліджені вудівські аномалії у пластині шаруватого надпровідника, які виникають за рахунок резонансного збудження нелінійних локалізованих ДПХ. У статті [40] здобувачем досліджено ефект резонансної прозорості пластини шаруватого надпровідника та показано, що аномальна дисперсія локалізованих ДПХ призводить до незвичної залежності коефіцієнта прозорості пластини від кута падіння хвилі. В статті [41] здобувачем за допомогою методу трансфер-матриць отримані дисперсійні рівняння для хвиль, локалізованих у фотонному кристалі на дефекті у вигляді пластини шаруватого надпровідника. У статті [42] здобувачем досліджено резонансне проходження електромагнітних хвиль крізь такий фотонний кристал, яке виникає за рахунок збудження хвиль, локалізованих на дефекті у вигляді пластини шаруватого надпровідника.

У статтях [43–46] здобувачем розроблено метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту у зразку шаруватого надпровідника при взаємодії його з незмінним у часі магнітним полем. На основі цього методу ним показано, що за допомогою магнітного поля можна контролювати ступінь прозорості шаруватого надпровідника [44], керувати ефектом крос-поляризації [45] та змінювати дисперсійні характеристики локалізованих ДПХ [46]. Зокрема, у статті [44] здобувачем визначена величина магнітного поля, за якої пластина шаруватого надпровідника стає повністю прозорою. У статті [45] ним визначені умови повної крос-поляризації хвиль при відбитті від півнескінченного зразка, які взаємодіють з незмінним у часі магнітним полем. У статті [46] здобувач отримав та проаналізував дисперсійні рівняння для локалізованих ДПХ за наявності магнітного поля, а також передбачив можливість внутрішнього відбиття ДПХ у неоднорідному магнітному полі.

Статті [32–35, 43], окрім результатів, представлених у основних положеннях даної дисертації, містять результати, які були представлені у кандидатській дисертації Т. М. Рохманової [69]. Результати, отримані Т. М. Рохмановою, не перетинаються з результатами, отриманими здобувачем. У статтях [32–35, 43] здобувачем визначені основні методи та ідеї дослідження, зроблені принципові аналітичні розрахунки, виконаний контроль та перевірка результатів, отриманих співавторами, а також проведений аналіз та узагальнення результатів. У свою чергу, у статтях [32–35, 43] Т. М. Рохманова виконувала аналітичні та чисельні розрахунки, а також проводила аналіз отриманих залежностей від параметрів задачі. Нижче більш детально викладено результати здобувача та результати Т. М. Рохманової.

У статті [32] здобувач розвинув ідею самоіндукованої прозорості для скінченного зразка шаруватого надпровідника, яка була раніше передбачена ним у статті [31] для нескінченної пластини. У статті [32] ним сформульований основний метод розв'язання синусоїдального рівняння Гордона, що базується на виразах для різниці фаз параметру порядку, яке здобувач перетворив у диференційні рівняння з відповідними граничними умовами. У свою чергу, у статті [32] Т. М. Рохманова, використовуючи результати, отримані здобувачем у статтях [31, 32], знайшла коефіцієнт проходження нелінійних хвиль і провела аналіз його залежності від амплітуди падаючої хвилі, розв'язуючи чисельно вищевказані диференціальні рівняння з граничними умовами. На базі проведеного аналізу у статті [32] здобувачем виявлені умови для спостереження ефекту самоіндукованої прозорості та вибрані параметри, для яких побудовані відповідні графіки залежності прозорості від амплітуди падаючої хвилі.

У статті [33] здобувачем передбачене явище крос-поляризації при лінійному електромагнітному транспорті через зразок шаруватого надпровідника. Він запропонував розглянути декілька типів хвиль та проаналізував можливість повної крос-поляризації цих хвиль. У свою чергу, у статті [33] Т. М. Рохманова аналітично розрахувала коефіцієнти відбиття, проходження та трансформації лінійних хвиль, знайшла їх залежності від частоти та товщини зразка, а також зробила чисельний розрахунок цих коефіцієнтів.

У статті [34] здобувач сформулював та обґрунтував аналог принципу суперпозиції для нелінійних хвиль, який полягає в тому, що спеціальні типи електромагнітних хвиль не взаємодіють при транспорті через сильно анізотропний шаруватий надпровідник. Здобувач знехтував малим параметром анізотропії у рівняннях, що пов'язують електромагнітні поля у вакуумі та шаруватому надпровіднику, та отримав спрощені рівняння, що є обґрунтуванням вказаного принципу. Також у статті [34] здобувач запропонував пояснення цього принципу, що базується на різній фізичній природі струмів уздовж та поперек шарів. У свою чергу, у статті [34] Т. М. Рохманова, використовуючи обґрунтований здобувачем аналог принципу суперпозиції, провела чисельне розв’язання задачі про трансформацію поляризації нелінійних хвиль і сформулювала оригінальний метод розв’язання задач відбиття, проходження та трансформації нелінійних хвиль з довільними поляризаціями у шаруватих надпровідниках.

У статті [35] здобувач запропонував використати вищевказаний принцип для дослідження транспорту поперечно-електричних і поперечно-магнітних хвиль через шаруватий надпровідник та встановив, що ступінь крос-поляризації відбитої хвилі залежить від амплітуди падаючої хвилі. У свою чергу, у статті [35] Т. М. Рохманова докладно описала проведене дослідження взаємної трансформації поперечно-електричних і поперечно-магнітних хвиль.

У статті [43] здобувачем розпочато розробку методу теоретичного дослідження електромагнітного транспорту у зразку шаруватого надпровідника при його взаємодії з незмінним у часі магнітним полем. Цей метод був у подальшому розвинутий здобувачем у статтях [44–46]. Здобувач представив різницю фаз у вигляді суми незмінної у часі та змінної складових, отримав рівняння, яке визначає розподіл змінної складової, та знайшов його аналітичний розв’язок. У свою чергу, у статті [43] Т. М. Рохманова, спираючись на розроблений здобувачем метод, отримала аналітичний вираз для коефіцієнту відбиття поперечно-магнітних хвиль при наявності зовнішнього магнітного поля та дослідила його залежність від параметрів задачі.

Таким чином, особистий внесок здобувача у вирішенні задач, поставлених у дисертації, є визначальним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах відділу теоретичної фізики Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, кафедри теоретичної фізики ім. І.М. Ліфшиця Харківського національного униврситету ім. В.Н. Каразіна, а також на наступних всеукраїнських та міжнародних наукових конференціях та школах:

- 9-а та 13-а Міжнародні конференції «Фізичні явища в твердих тілах» (Україна, Харків, 1–4 грудня 2009 та 5–8 грудня 2017),
- Міжнародна наукова конференція молодих вчених «Фізика низьких температур» МКМУ–ФНТ (Україна, Харків, 7–11 червень 2010),
- The international summer school nanotechnology: from fundamental research to innovations and practice conference "Nanotechnology and nanomaterials" (Ukraine, Bukovel, 25 August-1 September 2013),
- 13th and 14th Kharkiv Young Scientist Conference on Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics (Ukraine, Kharkiv, 2–6 December 2013 and 14–17 October 2014),
- APS March Meeting (USA, Denver, Colorado, 3–7 March 2014, Baltimore, Maryland, 18–22 March 2013),
- 5th International Conference for Young Scientists "Low temperature physics" (Ukraine, Kharkiv, 2–6 June 2014),
- International Conference of Physics Students (Germany, Heidelberg, 10–17 August 2014),
- Condensed matter in Paris 2014, CMD 25-JMC 14 (France, Paris, 24–29 August 2014),
- 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences (Lithuania, Vilnius, 24–27 March 2015),
- 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, MSMW'2016 (Ukraine, Kharkiv, 21-24 June 2016),
- International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2016 (Ukraine, Kharkiv, 10–14 October 2016),

● International Jubilee Seminar «Current problems in Solid State Physics» (Ukraine, Kharkiv, 22–23 November 2016),

● 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Україна, Львів, 8–9 червня 2017),

● IEEE 17-th International conference on Mathematical methods in electromagnetic theory (Ukraine, Kyiv, 2–5 July 2018).

Зв'язок праці з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі теоретичної фізики Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України. Вона є складовою частиною наступних проектів:

● науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України "Дослідження лінійних і нелінійних властивостей твердотільних структур із застосуванням електромагнітних хвиль НВЧ діапазону і заряджених частинок" (номер державної реєстрації 0106U011978, термін виконання 2007 – 2011 рр., виконавець);

● науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України "Вивчення взаємодії електромагнітних та звукових хвиль, а також заряджених часток з твердотільними структурами" (номер державної реєстрації 0112U000211, термін виконання 2012 – 2016 рр., виконавець);

● цільова програма НАН України "Теоретичні та експериментальні дослідження властивостей періодичних і стохастичних модульованих наноструктур в оптичному, інфрачервоному та надвисокочастотному діапазонах спектру" (номер державної реєстрації 0110U005642, термін виконання 2010 – 2014 рр., виконавець);

● проект Державного фонду фундаментальних досліджень України "Квантові явища в системах на основі джозефсонівських контактів" (номер державної реєстрації 0113U006217, термін виконання – 2013 р., виконавець);

● науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України "Дослідження взаємодії електромагнітних та звукових хвиль, а також заряджених частинок з наноструктурами та метаматеріалами" (номер державної реєстрації 0117U004038, термін виконання 2017 – 2021 рр., виконавець).

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 43 наукових працях: у 22 статтях у фахових вітчизняних і міжнародних періодичних виданнях та у 21 тезах доповідей на вітчизняних і міжнародних наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, семи розділів основного тексту з 86 рисунками, висновків, списку використаних джерел із 170 найменувань та одного додатку. Обсяг загального тексту дисертації складає 335 сторінок, з них список використаних джерел займає 19 сторінок, додаток займає 6 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ФІЗИЧНІ ЯВИЩА В НАДПРОВІДНИХ СИСТЕМАХ (ОГЛЯД)

У цьому розділі наводяться основні відомості з теорії надпровідності. Викладання значною мірою ґрунтується на відомому підручнику В. В. Шмідта «Введение в физику сверхпроводников» [1] та декількох оглядових статтях [2–6, 15–18]. Додаткові посилання вказані безпосередньо у тексті.

1.1. Явище надпровідності

1.1.1. Стислий опис розвитку теорії надпровідності

Явище надпровідності було виявлено в 1911 році Г. Камерлінг-Оннесом в Лейденській лабораторії в Голландії при вивченні залежності електроопору ртуті від температури, коли при температурі близько 4 K опір зразка різко зник [70]. Стало ясно, що зразок перейшов в якийсь новий, до тих пір невідомий стан, в якому він не має електричного опору. Незабаром надпровідність була спостережена в олові, свинці, алюмінії та ін. Надпровідників виявилося багато і серед сплавів і інтерметалевих сполук. Відкриття в 1986 р. [71] високотемпературних надпровідників (ВТНП) далеко посунуло температурний кордон надпровідності і дозволило вивчати і практично використовувати надпровідні матеріали не тільки при температурі кипіння рідкого гелію (4,2 K), але і при температурі кипіння рідкого азоту (77 K), набагато дешевшої кріогенної рідини.

Цілих 22 роки після відкриття надпровідності вважалося, що надпровідник — це ідеальний провідник, тобто метал з нульовим питомим опором. Але у 1933 р.

німецькими фізиками В. Мейснером та Р. Охзенфельдом було виявлено [72], що у відносно слабкому магнітному полі в надпровіднику індукуються макроскопічні струми, які створюють власне магнітне поле, що повністю компенсує зовнішнє. Це явище отримало назву ефекта Мейснера – Охзенфельда. Це було надзвичайно важливе відкриття тому, що відсутність магнітного поля усередині надпровідника, разом з нульовим опором, можна розглядати як характеристику нового фазового надпровідного стану та використовувати для дослідження надпровідної фази речовини всю міць термодинамічного підходу.

Першою теорією, яка вдало описала електродинаміку надпровідників, була теорія Ф. та Г. Лондонів [73]. Це була феноменологічна теорія, тобто додатково до рівнянь Максвела були запропоновані рівняння електромагнітного поля у надпровіднику, з яких випливали його основні властивості: ефект Мейснера – Охзенфельда і відсутність опору постійному струму. У чому полягає мікроскопічний механізм надпровідності на електронному рівні, не пояснювалося, тобто за рамками теорії залишалася відповідь на питання: «Чому надпровідник поводить себе так, як це випливає з рівнянь Лондонів?»

Згідно з теорією Лондонів, електрони в надпровіднику можна розглядати як сукупність двох електронних колективів: надпровідної та нормальної електронних компонент з густинами n_s та n_n відповідно. Струм надпровідних електронів — це струм без опору, а нормальний струм підпорядковується звичайному закону Ома. Лондони запропонували рівняння, що пов’язували надпровідний струм $\vec{j}_s$ з електричним $\vec{E}$ та магнітним $\vec{H}$ полями у надпровіднику,

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m}\vec{E}, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc}\vec{H}, \tag{1.1}$$

де e — елементарний електричний заряд, m — маса електрона, c — швидкість світла. Ці рівняння можуть бути переписані у термінах векторного потенціалу $\vec{A}$,

$$\vec{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{A}, \tag{1.2}$$

де величина

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}} \tag{1.3}$$

має розмірність довжини та представляє собою так звану лондонівську глибину проникнення магнітного поля у масивний надпровідник.

За допомогою рівнянь Лондонів вдалося описати багато аспектів поведінки надпровідників, але ще до кінця 1940-х років стало ясно, що теорія Лондонів в деяких питаннях дає невірну відповідь. Цей недолік вдалося зняти за допомогою теорії В. Л. Гінзбурга та Л. Д. Ландау [74], яка теж була феноменологічною теорією, але враховувала квантові ефекти. Для опису поведінки надпровідника була застосована квантова механіка. Поведінка всієї сукупності надпровідних електронів описується хвильовою функцією $\Psi(\vec{r})$ від однієї просторової координати $\vec{r}$, замість $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$ для n електронів. Більш того, ця хвильова функція має сенс параметра порядку, який відрізняється від нуля при температурах, менших від критичної температури, $T < T_c$, і обертається в нуль при $T > T_c$. Таким чином, відповідно до теорії Гінзбурга – Ландау (ГЛ), надпровідність — це новий стан, перехід у який є фазовим переходом другого роду, при якому стан тіла змінюється безперервно, а його симетрія — стрибком. При цьому низькотемпературна фаза — менш симетрична фаза, тобто фаза, яка має більший порядок.

Основне рівняння теорії, так зване рівняння ГЛ, описує надпровідник поблизу критичної температури, $|T - T_c| \ll 1$:

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{4m}\Big(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Big)^2\Psi = 0, \tag{1.4}$$

де α та β — сталі, що характеризують надпровідник, m — маса електрона, $\hbar$ — стала Планка. Інше важливе рівняння теорії пов'язує надпровідний струм з параметром порядку та векторним потенціалом:

$$\vec{j}_s = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\vec{A}. \tag{1.5}$$

Неважко помітити, що останнє рівняння переходить у рівняння Лондонів (1.2), якщо знехтувати першим квантовим доданком та у другому доданку замінити $|\Psi|^2$ на $n_s/2$.

Теорія ГЛ визначає два характерних масштаби довжини: довжину когерентності ξ та глибину проникнення λ, які пов'язані зі сталими α та β наступними співвідношеннями:

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{4m|\alpha|}}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{mc^2\beta}{8\pi|\alpha|e^2}}. \tag{1.6}$$

Глибина проникнення λ має той самий фізичний сенс, що й в теорії Лондонів, а довжина когерентності визначає характерний масштаб зміни параметра порядку Ψ.

В залежності від співвідношення між цими величинами надпровідники можуть бути поділені на надпровідники I та II роду, при $\lambda/\xi < 1/\sqrt{2}$ та $\lambda/\xi > 1/\sqrt{2}$, відповідно. У надпровідниках I роду надпровідність руйнується, коли величина магнітного поля збільшується до деякого критичного значення H_c. А у надпровідниках II роду при досягненні так званого першого критичного магнітного поля H_{c1} зникає лише ефект Мейснера – Охзенфельда, тобто у надпровіднику з'являється скінченне магнітне поле, але залишається надпровідний стан. Це виникає за рахунок того, що у надпровідник починають проникати вихори надпровідного струму, в серцевині яких існує нормальна фаза та які несуть квант магнітного потоку Φ_0,

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}. \tag{1.7}$$

Такі вихори були теоретично передбачені О. О. Абрикосовим [75] та носять назву абрикосівських вихорів.

Однак ні теорія Лондонів, ні теорія ГЛ не давали відповіді на питання, що таке «надпровідні електрони», опису поведінки яких і були присвячені ці теорії. Минуло 46 років з моменту відкриття надпровідності, і з'явилась теорія, яка дала відповідь на це питання. У 1956–1957 рр. з'явилась серія праць Д. Бардіна, Л. Купера та Д. Р. Шріффера [7–9], яка стала основою нової теорії, а у 1958 р. Н. Н. Боголюбов розробив математичний метод [76, 77], що зараз широко використовується при вивченні надпровідності.

В теорії Бардіна – Купера – Шріффера (БКШ) було показано, що при певних умовах, за рахунок електрон-фононної взаємодії, частина електронів утворює так звані куперівські пари. Такі пари мають цілий сумарний спін і тому є бозе-частинками та можуть утворювати бозе-конденсат. Усі частинки, що знаходяться в конденсаті, описуються однією хвильовою функцією від однієї просторової змінної. Цей конденсат має властивість надплинності, тобто надпровідний електричний струм — це струм куперівських пар із зарядом $2e$, що переноситься без опору.

Подальший розвиток мікроскопічна теорія надпровідності отримала в працях Горькова [78, 79], який розробив метод вирішення модельної задачі БКШ за допомогою функцій Гріна. Цим методом, зокрема, йому вдалося отримати мікроскопічну розшифровку всіх феноменологічних параметрів теорії ГЛ і вказати її область застосування.

Новий поштовх розвитку теорії надпровідності дало відкриття ВТНП Й. Г. Беднорцем і К. А. Мюлером [71] у 1986 р. Послідовну мікроскопічну теорію ВТНП до цих пір не створено, незважаючи на величезну кількість праць на цю тему за минулі більш ніж 30 років. Не з'ясовано остаточно і основний механізм притягання між електронами, причому є серйозні підстави припускати, що він не пов'язаний зі звичайною електрон-фононною взаємодією. Проте, з феноменологічної точки зору макроскопічне поводження ВТНП непогано описується теорією ГЛ для надпровідників II роду, узагальненою з урахуванням незвичайної симетрії хвильової функції надпровідного конденсату та декількох поверхонь Фермі. Більш того, магнітні властивості ВТНП у багатьох випадках можна описати за допомогою лондонівського наближення.

1.1.2. Ефекти Джозефсона та ефект близькості

У 1962 р. з’явилась стаття Б. Джозефсона [80], в якій теоретично передбачалося існування двох дивовижних явищ. Перше явище полягало в тому, що в надпровідному тунельному контакті, де два масивних надпровідники розділені тонким шаром діелектрика, може підтримуватись режим надпровідного струму, при цьому падіння напруги на контакті дорівнює нулю. Це явище називається стаціонарним ефектом Джозефсона. У кожному з двох масивних надпровідників конденсат куперівських пар характеризується своїм параметром порядку, $\Delta_1 \exp(i\chi_1)$ та $\Delta_2 \exp(i\chi_2)$. Тут Δ_1 та Δ_2 — величини надпровідних щілин, а χ_1 та χ_2 — фази відповідних параметрів порядку. Тоді через тунельний контакт виникає надпровідний струм I_s, що залежить від різниці фаз параметру порядку, $\varphi = \chi_1 - \chi_2$:

$$I_s(\varphi) = I_C \sin\varphi, \tag{1.8}$$

де I_C — це так званий критичний струм, що є характеристикою самого джозефсонівського контакту.

Другий ефект Джозефсона проявляється, коли повний струм I через контакт перевищує критичне значення, $I > I_C$. Тоді на контакті з’являється ненульове падіння напруги

$$V = \frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{1.9}$$

і контакт стає джерелом високочастотного електромагнітного випромінювання з частотою

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}, \tag{1.10}$$

де R — опір контакту відносно нормального струму. Обидва ефекти Джозефсона було підтверджено експериментально в 1963–1965 рр. [81, 82].

Звернімо увагу на те, що тунельний контакт між масивними надпровідниками може бути реалізований не лише за допомогою тонкого шару діелектрика. У пристроях без концентрації струму тунельний перехід куперівських пар можливий через тонкий прошарок з діелектрика, напівпровідника або нормального металу. У пристроях з концентрацією струму тунельний перехід виникає у різноманітних геометричних обмеженнях. До таких пристроїв відноситься плівка зі звуженням, місток змінної товщини, точковий контакт, тощо. В залежності від типу контакту співвідношення між надпровідним струмом I_s та різницею фаз φ може відрізнятись від (1.8).

Вид цього співвідношення є характеристикою джозефсонівського контакту. На рис. 1.1 представлені різні типи співвідношення між надпровідним струмом I_s та різницею фаз φ [2]. Суцільна крива 1 — це стандартне синусоїдальне співвідношення (1.8). Штрихові криві 2 та 3 представляють співвідношення, в яких максимум струму $I_c > 0$ досягається при $\varphi < \pi/2$ та $\varphi > \pi/2$ відповідно. Пунктирна крива 4 відповідає співвідношенню з $I_c < 0$, що може виникати у системі, де надпровідники розділені діелектриком з магнітними домішками [83]. Система з $I_c < 0$ отримала назву π-з'єднання тому, що виник зсув фази φ на π. Такі π-з'єднання можуть використовуватись при створенні квантової дворівневої системи, або кубіту, що є основним елементом квантового комп'ютера (див., наприклад, [84]). У деяких особливих випадках (див., наприклад, [85, 86]) $I_s(\varphi)$ може змінювати знак у межах від 0 до π (штрих-пунктирна крива 5) або бути багатозначною функцією (крива 6, що складається з двох частин — суцільної та штрихової). Відзначимо, що окрім спеціальних випадків, згаданих вище, найчастіше [2] для вивчення динаміки та продуктивності довільних аналогових і цифрових пристроїв, що містять джозефсонівські контакти, використовується стандартне співвідношення (1.8).

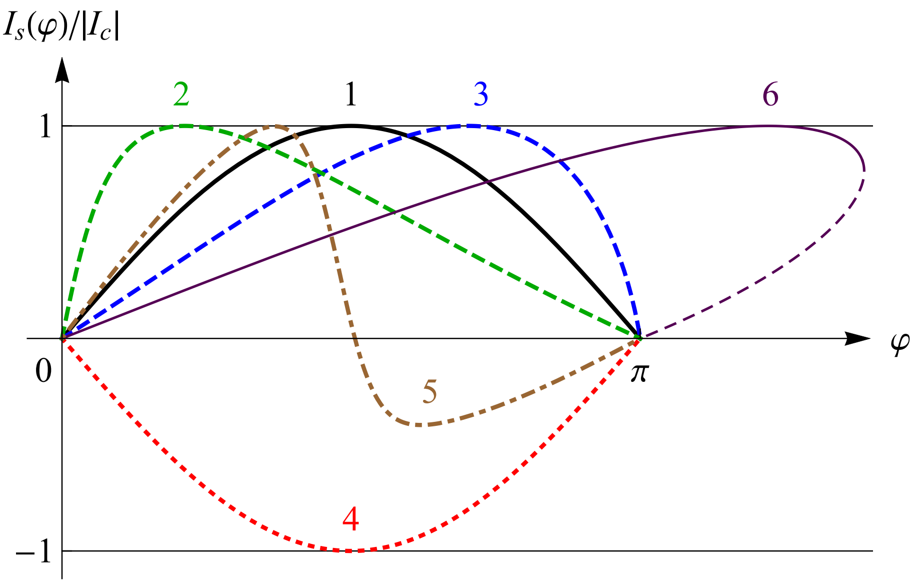


Рис. 1.1. Різні типи співвідношення між надпровідним струмом I_s та різницею фаз φ (адоптовано з [2]), де крива 1 — стандартне співвідношення (1.8), криві 2 та 3 — співвідношення, в яких максимум струму досягається при $\varphi \neq \pi/2$, крива 4 — співвідношення з $I_c < 0$, π-з'єднання, крива 5 — співвідношення з $I_s(\varphi)$, яке змінює знак, крива 6 — багатозначна функція $I_s(\varphi)$.

Розглянемо більш детально випадок, коли два надпровідника з'єднані прошарком з нормального металу. На границі надпровідника та нормального металу виникає так званий ефект близькості. Цей ефект полягає у тому, що поблизу границі у нормальному металі проявляється слабка надпровідність, а у надпровіднику навпаки — надпровідність послаблюється. З фізичної точки зору цей ефект виникає тому, що конденсат куперівських пар частково проникає у нормальну область на глибину порядку довжини когерентності ξ у металі. В чистому металі, коли довжина вільного пробігу електрона значно перевищує довжину когерентності, величина ξ може досягати досить великих значень [1], $10^{-5} \div 10^{-4}$ см. Таким чином, контакт між двома надпровідниками, розділеними відносно тонким прошарком нормального металу, може пропускати надпровідний струм за рахунок ефекту близькості.

Дуже важливим з практичної точки зору є випадок, коли система «надпровідник – нормальний метал – надпровідник» (SNS) складається з так званих «брудних» металів [87], тобто коли довжина вільного пробігу електрона набагато менше довжини когерентності. Для обчислення просторового розподілу параметра порядку в цьому випадку можна застосувати рівняння, які були отримані у 1970 році К. Д. Узаделем [88]:

$$i\hbar D\frac{d}{dx}\Big[\hat{G}(x)\frac{d}{dx}\hat{G}(x)\Big] = \big[\omega\hat{\sigma}_3 + \hat{\Delta}(x), \hat{G}(x)\big]. \tag{1.11}$$

Ці рівняння являють собою спрощені у «брудному» наближенні рівняння Горькова [78, 79] для нормальної, $G(x-x')$, та аномальної, $F(x-x')$, функцій Гріна, що підкоряються умовам нормування:

$$G^2 + FF^* = 1. \tag{1.12}$$

Тут $D = v_F l/3$ — коефіцієнт дифузії, v_f — швидкість Фермі, l — довжина вільного пробігу електрона, $\omega = \pi T(2n+1)$ — частоти Мацубари, T — температура,

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} G & F \\ F^* & -G \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

та параметр порядку $\Delta(x)$ підкоряється умові самоузгодженості

$$\Delta \ln\frac{T_c}{T} + \pi T\sum_{\omega}(F - \Delta/\omega) = 0. \tag{1.14}$$

У нескінченному надпровіднику рівняння Узаделя дають наступні результати для функцій Гріна:

$$G = \frac{\omega}{\sqrt{\Delta\Delta^* + \omega^2}}, \quad F = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta\Delta^* + \omega^2}}. \tag{1.15}$$

Для визначення функцій Гріна при з’єднанні двох матеріалів потрібно додатково до рівнянь Узаделя у надпровіднику ($\Delta_1 \neq 0$) та нормальному металі ($\Delta_2 = 0$)

записати граничні умови. Такі умови були отримані М. Ю. Купріяновим та В. Ф. Лукічовим [89] та мають наступний вигляд:

$$\gamma\xi_1\hat{G}_1\frac{d}{dx}\hat{G}_1=\xi_2\hat{G}_2\frac{d}{dx}\hat{G}_2, \tag{1.16}$$

$$\gamma_B\xi_1\hat{G}_1\frac{d}{dx}\hat{G}_1=[\hat{G}_1,\hat{G}_2], \tag{1.17}$$

де $\gamma = (\rho_2\xi_2)/(\rho_1\xi_1)$, $\gamma_B = R_B/(\rho_1\xi_1)$ — безрозмірний опір границі, R_B — опір границі для нормального струму, ρ_1 та ρ_2 — питомі опори для нормального струму, ξ_1 та ξ_2 — довжини когерентності. Індекси 1 та 2 позначають надпровідник та нормальний метал відповідно.

Нарешті, для визначення співвідношення між надпровідним струмом I_s та різницею фаз параметра порядку, $\varphi = \chi_- - \chi_+$, треба розв'язати рівняння Узаделя (1.11) з граничними умовами (1.16) та (1.17) та умовами на нескінченності: $\Delta(\pm\infty) = \Delta_0\exp(i\chi_\pm)$, де Δ_0 позначає величину надпровідної щілини, $\chi_\pm$ — фазу параметра порядку всередині надпровідника, що знаходиться на $\pm\infty$, відповідно. Отримані розв'язки треба підставити у вираз [2] для надпровідного струму:

$$I_s(\varphi)=\frac{i\pi\sigma}{2e}T\sum_\omega \mathrm{Tr}[\sigma_3\hat{G}\frac{d}{dx}\hat{G}], \tag{1.18}$$

де $\sigma = 2e^2N_0D$ — провідність для нормального струму, N_0 — густина станів на рівні Фермі.

Звернемо увагу на те, що ефект Джозефсона у SNS контакті спостерігається, коли хвильові функції конденсатів у надпровідниках взаємодіють, тобто коли товщина прошарку d з нормального металу є порівнянною з довжиною когерентності, $d \sim \xi$, та надпровідний струм переноситься за рахунок ефекту близькості. У протилежному випадку, коли товщина прошарку достатньо велика, $d \gg \xi$, критичний струм I_C стає експоненційно малим [2],

$$I_C \propto \frac{d}{\xi}\exp\Big(-\frac{d}{\xi}\Big). \tag{1.19}$$

Тоді через SNS контакт може протікати лише нормальний струм. Тим не менш, цей струм має специфічну природу тому, що при перетині границі поодинокі електрони нормального металу перетворюються у куперівські пари надпровідника. Такий процес детально розібрано у наступному підрозділі.

1.1.3. Андреєвське відбиття

Розглянемо процеси, які відбуваються на границі «нормальний метал – надпровідник». В попередньому підрозділі було показано, що за рахунок ефекту близькості у нормальному металі поблизу цієї границі з'являється слабка надпровідність. Якісно це можна описати так: величина надпровідної щілини Δ змінюється з максимального значення, $\Delta = \Delta_0$, у глибині надпровідника до нуля, $\Delta = 0$, в глибині нормальної області. Перехід від одного значення до іншого відбудеться на довжині, яка має порядок довжини когерентності ξ. Розглянемо електрон, що рухається з нормальної області в напрямку надпровідника, та нехай його енергія ε менше величини енергетичної щілини надпровідника, $\varepsilon < \Delta_0$. В міру наближення до надпровідника величина щілини Δ зростає та електрон нормального металу поступово перетворюється на електроноподібну частинку надпровідного конденсату. Оскільки величина Δ зростає, то в деякій точці параметр порядку дорівнює енергії квазічастинки, $\Delta = \varepsilon$, і тоді остання повинна мати нульову групову швидкість. У цій точці квазічастинка відбивається від границі і переходить на іншу гілку спектра елементарних збуджень, що відповідає «діркам». Його групова швидкість буде тепер спрямована вліво, тобто від надпровідника до нормального металу, а заряд вже буде протилежний. Цей процес був вперше теоретично передбачений О. Ф. Андреєвим [90] і тому називається андреєвським відбиттям. Коротко його можна описати так: при переході з нормального металу у надпровідник електрон (або дірка) знаходить собі парний електрон (або дірку) і разом з ним переходить у конденсат, а дірка (або електрон), що утворилася, повертається до нормального металу.

Відзначимо дві особливості андреєвського відбиття. По-перше, на відміну від класичного закону дзеркального відбиття, при андреєвському відбитті носій заряду рухається точно назад. Це пов'язано з тим, що електрони, які утворюють куперівську пару, мають строго протилежні імпульси. По-друге, андреєвське відбиття спостерігається не тільки тоді, коли енергія квазічастинки менше величини надпровідної щілини, $\varepsilon < \Delta_0$, але і при більших енергіях. Різниця у тому, що при $\varepsilon \geqslant \Delta_0$ андреєвське відбиття проходить лише з деякою ймовірністю $A(E) < 1$. Ця ймовірність була розрахована Г. Е. Блондером, М. Тинкхамом та Т. М. Клапвайком [91, 92] у 1982 р.

У моделі Блондера – Тинкхама – Клапвайка розглядається границя «нормальний метал – надпровідник», де можливий потенційний бар'єр на границі апроксимується δ-функцією. Припустимо, що електрон рухається з нормального металу та налітає на границю. Тоді можливі наступні процеси: андреєвське відбиття у вигляді дірки з ймовірністю $A(\varepsilon)$, нормальне відбиття з ймовірністю $B(\varepsilon)$, проходження границі, після якого квазічастинка залишається на електронній гілці спектру з ймовірністю $C(\varepsilon)$, проходження з переходом на діркову гілку спектра з ймовірністю $D(\varepsilon)$. Ці ймовірності розраховуються за допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена [76, 77, 93]:

$$\begin{pmatrix} \hat{H} & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

що являють собою зв'язані рівняння Шредингера для електрона з енергією ε та дірки з енергією $-\varepsilon$, які мають хвильові функції u та v відповідно. Тут $\hat{H}$ — гамільтоніан електрона, а Δ — параметр порядку, рівний нулю, $\Delta = 0$ у нормальному металі та $\Delta = \Delta_0 \exp(i\chi)$ у надпровіднику.

Розв'язуючи систему рівнянь (1.20), можна знайти вказані вище ймовірності. Тут ми наведемо результати лише для випадку, коли потенційний бар'єр на границі відсутній. Тоді $B(\varepsilon) = D(\varepsilon) = 0$, $C(\varepsilon) = 1 - A(\varepsilon)$ та

$$A(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-(\Delta_0/\varepsilon)^2}}{1+\sqrt{1-(\Delta_0/\varepsilon)^2}}, & \varepsilon \geqslant \Delta_0, \\ 1 & \varepsilon < \Delta_0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Тепер розглянемо докладніше SNS контакт з достатньо товстим прошарком з нормального металу. Нехай до надпровідників прикладена деяка різниця потенціалів V. Через такий контакт буде протікати нормальний струм, який буде визначатись багаторазовими андреєвськими відбиттями. На рис. 1.2 схематично представлений процес багаторазових андреєвських відбиттів для двох електронів, що рухаються з валентної зони правого надпровідного контакту. Електрон, зазнаючи андреєвського відбиття, перетворюється на дірку з енергією, симетричною енергії вихідного електрона щодо рівня Фермі. Суцільні стрілки на малюнку вказують напрямок руху та рівень енергії електронів, штрихові — дірок. Перший електрон після кількох відбиттів потрапляє в зону провідності лівого контакту, в той час як другий електрон повертається в валентну зону правого контакту у вигляді дірки.

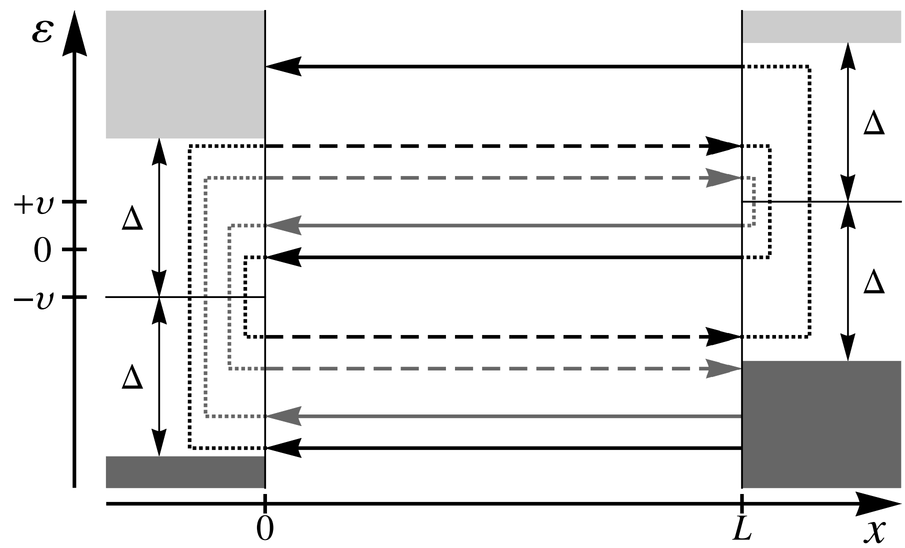


Рис. 1.2. Діаграма, що представляє багаторазові андреєвські відбиття електронів, які рухаються між двома надпровідними контактами.

У праці [94] у рамках моделі Блондера – Тинкхама – Клапвайка розраховано нерівноважні функції розподілу $f_{\rightleftarrows}(E, Z)$ електронів за енергією E, де прошарок зроблений з чистого металу. Нижні індекси $\rightarrow$ та $\leftarrow$ позначають електрони, що рухаються вправо та вліво відповідно. Результати при різних значеннях температури T та нормованої величини потенційного бар'єру на границі Z представлені на рис. 1.3, де $f_0(E)$ — рівноважна функція розподілу Фермі. Специфічні структури функцій розподілу пов'язані з багаторазовими андреєвськими відбиттями, зокрема, стрибки функції розподілу виникають з інтервалом eV.

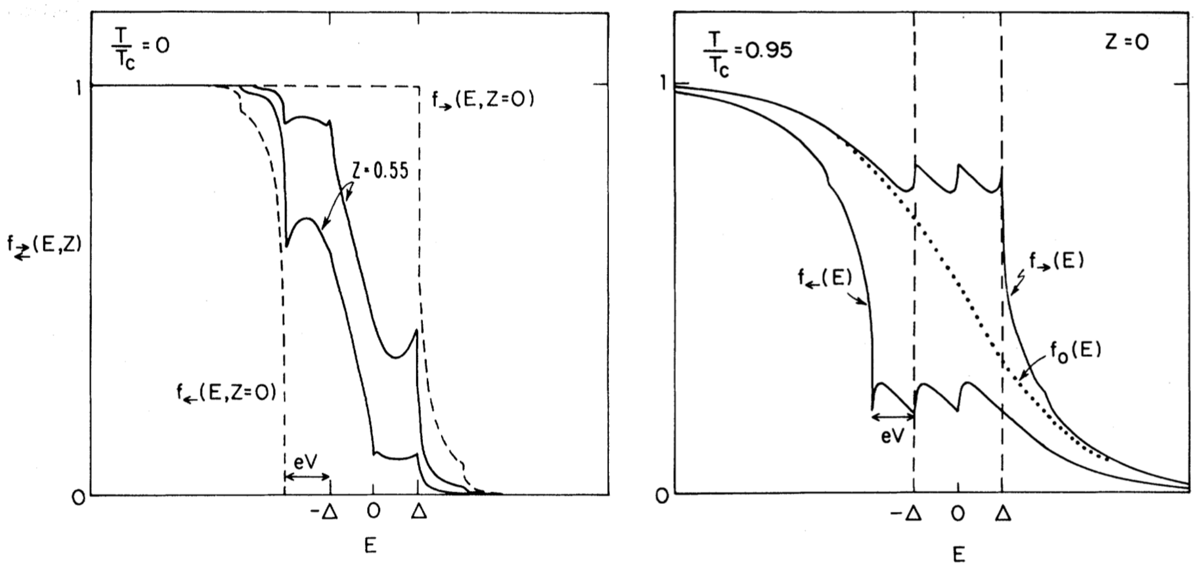


Рис. 1.3. Нерівноважні функції розподілу $f_{\rightleftarrows}(E, Z)$ електронів за енергією E у SNS контакті, де прошарок зроблений з чистого металу, Z позначає нормовану величину потенційного бар'єру на границі, R_N — опір системи у нормальному стані та $eV = \Delta$ (взято з [94]).

Зауважимо, що наведені нерівноважні функції розподілу $f_{\rightleftarrows}(E, Z = 0)$ при відсутності бар'єру на границі, тобто коли $B(\varepsilon) = D(\varepsilon) = 0$ та $C(\varepsilon) = 1 - A(\varepsilon)$, можуть бути записані в аналітичній формі [94]:

$$f_{\rightleftarrows}(\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \prod_{m=0}^{l-1} A[\varepsilon \pm (2m+1)u] \right\} C[\varepsilon \pm (2l+1)u] f_0[\varepsilon \pm (2l+1)u], \quad (1.22)$$

де $A(\varepsilon)$ задана рівнянням (1.21), а $u = eV/2\Delta$.

Таким чином, нерівноважні функції розподілу, пов'язані з андреєвським відбиттям, можуть слугувати індикатором мікроскопічних процесів, які відбуваються з електронами у SNS контакті.

1.2. Високотемпературні надпровідники

Перший етап пошуку високотемпературних надпровідників почався з піонерських праць В. А. Літтла і В. Л. Гінзбурга в 1964 р. [10, 95]. Було запропоновано вивчити можливість заміни фононного механізму притягання між електронами провідності на притягання за рахунок взаємодії електронів провідності зі зв'язаними електронами, наявними в тій же системі, енергія яких значно більша за енергію фононів (Гінзбург називав такий механізм екситонним або електрон-екситонним). У своїй праці Літтл [10] використовував квазіодновимірну модель, в якій провідна нитка з атомів вуглецю, названа автором "хребтом" ("spine"), оточена "поляризаторами", наприклад, органічними молекулами. Були проведені докладні обчислення в рамках теорії БКШ, і з'ясувалось, що критична температура таких систем може виявитись надзвичайно високою — близько 2000 K. На жаль, реалізувати модель Літтла все ще не вдалося. Річ у тому, що у квазіодновимірних системах флуктуації електронної густини настільки великі, що перехід у надпровідний стан виявляється практично неможливим [96]. Ознайомившись з працею Літтла, Гінзбург запропонував [95] замість одновимірної квазідвовимірну модель, в якій плоский провідник стикається з діелектричною плівкою. Подальший розвиток цього варіанту теорії привів до моделі "сендвіча" — системи з чергуванням провідникових шарів з діелектричними шарами [97, 98].

Тільки через майже 30 років після публікації теорії БКШ, в 1985–1986 рр., почався другий етап пошуку високотемпературних надпровідників. Й. Г. Беднорцу і К. А. Мюлеру, вченим з дослідницької лабораторії фірми IBM в Швейцарії, вдалося синтезувати сполуку барію, міді, кисню і лантану, $\mathrm{Ba-La-Cu-O}$, — так звану металооксидну кераміку $\mathrm{Ba_xLa_{5-x}Cu_5O_{5(3-y)}}$, яка при вимірюваннях опору проявляла ознаки надпровідності при рекордно високій на ті часи температурі

35 K [71].

Історично ВТНП — це надпровідник з критичною температурою вище 30 K. Відповідно можна виділити три класи ВТНП, відомі на теперішній час:

- інтерметаліди, серед яких на теперішній час знайдено [99] лише одну сполуку $\mathrm{MgB_2}$ з достатньо високою температурою переходу 39 K;
- купратні надпровідники [16–18], в яких надпровідність забезпечена шарами $\mathrm{CuO_2}$, з максимальною температурою переходу 135 K;
- надпровідники на основі заліза Fe [3, 15] з максимальною температурою переходу 55 K.

Всі представники сімейства ВТНП мають сильно анізотропну шарувату кристалічну структуру, що зумовлює назву — шаруваті надпровідники. Хоча послідовна мікроскопічна теорія ВТНП на теперішній час не створена, з феноменологічної точки зору макроскопічне поводження ВТНП досить добре описується теорією ГЛ для надпровідників II роду, узагальненою з урахуванням флуктуаційних ефектів і незвичайної симетрії надпровідної хвильової функції. Однак у випадку сильно анізотропних надпровідників, таких як, наприклад, $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$, де довжина когерентності в напрямку впоперек надпровідних шарів виявляється порівнянною або меншою за відстань між шарами, дискретність структури стає істотною. У цьому випадку необхідно використовувати нову теорію, в якій шари пов’язані між собою джозефсонівською взаємодією.

Феноменологічна модель такої шаруватої структури була запропонована В. Е. Лоуренсом і С. Доніаком [100], в якій шаруватий надпровідник ідеалізовано у вигляді масиву паралельних нескінченно тонких надпровідних пластин, розташованих на однаковій відстані та зв’язаних між собою за рахунок ефекту Джозефсона. Поблизу температури, при якій всі довжини когерентності стають значно більшими за просторовий період структури, дана модель переходить в анізотропну модель Гінзбурга – Ландау [101]. На базі цієї моделі були запропоновані також інші. Наприклад, в праці [102] Г. Дойтчер і О. Ентін-Вольман узагальнили теорію Лоуренса – Доніака на випадок системи тонких, але з скінченною товщиною, надпровідникових шарів.

Взаємодія джозефсонівського струму, що протікає упоперек шарів, з електромагнітним полем приводить до існування у шаруватих надпровідниках особливого виду елементарних збуджень, так званих джозефсонівських плазмових хвиль [16, 17]. Більш детально ефекти взаємодії шаруватих надпровідників з електромагнітним полем розглянуто у підрозділі 1.3. У наступних двох підрозділах ми коротко зупинимося на мікроскопічних теоріях двох вищевказаних класів ВТНП: купратних надпровідників (підрозділ 1.2.1) та надпровідників на основі заліза (підрозділ 1.2.2).

1.2.1. Купратні надпровідники

Купратні надпровідники (Cu-НП) являють собою клас матеріалів з загальною структурною особливістю — відносно добре розділеними мідно-кисневими $\mathrm{CuO_2}$ шарами. На даний момент відомо багато сполук, що можуть бути віднесені до цього класу, наприклад, $\mathrm{YBa_2Cu_3O_7}$ ($T_c = 90$ К), $\mathrm{BiSrCaCu_2O_\delta}$ ($T_c = 105$ К), $\mathrm{Tl_\alpha Ca_{\beta-1}Ba_2Cu_\beta O_{2(\beta+1)+\alpha}}$ ($T_c = 125$ К), $\mathrm{HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}}$ ($T_c = 130$ К та $T_c = 153$ К під тиском 150 кбар) та ін.

Кристалічна структура типового представника сімейства $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ зображена на рис. 1.4 на панелі а. Надпровідні шари $\mathrm{CuO_2}$ розташовані на відстані 1.53 нм та розділені діелектричними шарами $\mathrm{Bi_2O_2}$ та SrO. Затемнений фон позначає величину надпровідного параметру порядку $|\Psi|^2$, де темніші області представляють найвищу величину на подвійних шарах $\mathrm{CuO_2}$ та світліші області вказують на практично нульові значення на шарах $\mathrm{Bi_2O_2}$.

Відзначимо деякі прикладні застосування Cu-НП. В першу чергу, ці матеріали переходять у надпровідний стан за температури вище температури кипіння рідкого азоту. Тому вони можуть використовуватись як електричні кабелі. Наприклад, десятки кілометрів стрічок з $\mathrm{Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-\delta}}$ використовують [103] у великому адронному колайдері — найбільшому у світі прискорювачі елементарних частинок, створеному у Європейському центрі ядерних досліджень (CERN), поблизу Женеви (Швейцарія).

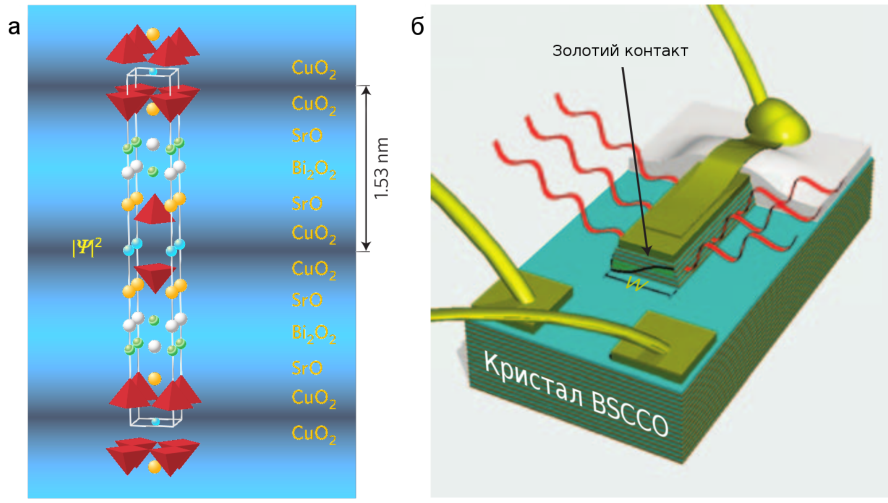


Рис. 1.4. Кристалічна структура $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ (панель а) та схематична установка випромінювача терагерцового діапазону, що базується на кристалі $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ (панель б). Адаптовано з [5].

Більш специфічне застосування пов'язане з тим, що кристали Cu-НП являють собою масив джозефсонівських контактів. Тому такі системи, завдяки нестаціонарному ефекту Джозефсона (див. підрозділ 1.1.2), використовуються для створення відносно потужних випромінювачів терагерцового діапазону [5, 6]. Цей діапазон до теперішнього часу все ще важко досяжний як для електронних, так і оптичних пристроїв. За останні десятиліття було докладено багато зусиль в розвитку науки і техніки терагерцової області через її прикладну значущість у фізиці, астрономії, біології, медичній діагностиці та ін. [16, 18, 21–24, 104, 105]. На рис. 1.4 на панелі б представлений схематично випромінювач терагерцових хвиль.

Зауважимо, що надпровідність у Cu-НП відрізняється від звичайних надпровідників. Річ в тому, що куперівська пара у звичайному надпровіднику формується з двох електронів, у яких як сумарне спінове число дорівнює нулю, $S = 0$, так і сумарне орбітальне число теж рівне нулю, $L = 0$. За аналогією з класифікацією електронних оболонок в атомі такий тип спаровування електронів називається s-спаровуванням. На відміну від s-спаровування, вважається експериментально встановленим, що спаровування в Cu-НП має структуру сінглетного d-спаровування

($S = 0$, $L = 2$) [1, 11, 12]. Мікроскопічний механізм цього спаровування до теперішнього часу не цілком ясний, і, швидше за все, він відрізняється від звичайного електрон-фононного механізму притягання і виникає в результаті екранування кулонівської взаємодії між електронами [15, 106]. Однак найбільш важливі риси такого спаровування описуються узагальненою теорією БКШ, що відповідає тетрагональній симетрії кристалів Cu-НП і приводить до спаровування з моментом $L = 2$.

Важлива властивість d-спаровування — спектр збуджень в такому стані виявляється анізотропним, причому параметр порядку змінює знак та може перетворюватись на нуль в залежності від напряму імпульсу електронів в парі. Виявляється, що якісно параметр порядку може бути описаний наступною залежністю [1]: $\Delta_{\vec{k}} = \Delta_0 \cos\theta_{\vec{k}}$, де $\theta_{\vec{k}}$ позначає кут повороту відносно кристалографічної осі z.

1.2.2. Надпровідники на основі заліза

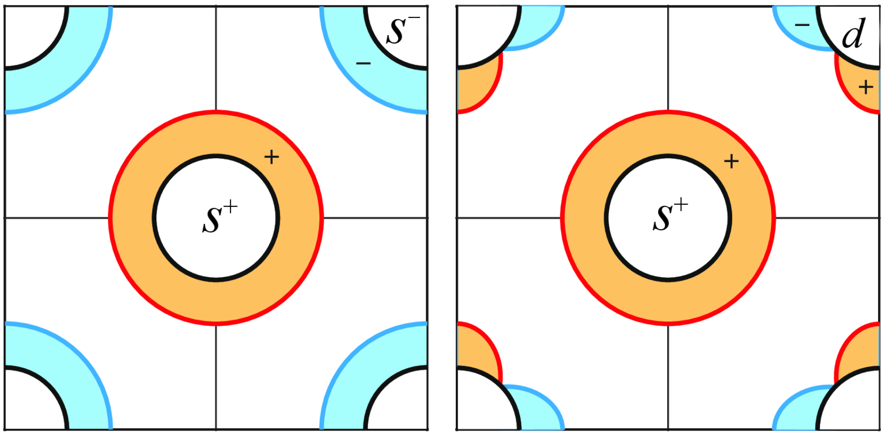
Надпровідники на основі заліза (Fe-НП) являють собою широкий клас ВТНП, надпровідність в яких базується на залізі та елементах V групи (пніктидах) або Se [15]. Цей клас включає в себе: RFeAsO, де R — рідкісноземельний метал; $\mathrm{XFe_2As_2}$, де X — лужноземельний метал; LiFeAs; а також Fe-халькогеніди — складні сполуки заліза, що містять елементи шістнадцятої групи (за старою класифікацією — головної підгрупи VI групи): S, Se, Te, наприклад, $\mathrm{FeTe_{1-\alpha}Se_\alpha}$ або $\mathrm{AFe_\alpha Se_2}$, де $\mathrm{A} = \mathrm{K}, \mathrm{Rb}, \mathrm{Cs}$.

Вперше вдалося синтезувати надпровідник на основі заліза LaOFeP в 2006 р. з температурою переходу 4 K [13]. Значна ж увага до них виникла в 2008 р., коли була отримана сполука $\mathrm{La[O_{1-\alpha}F_\alpha]FeAs}$, де $(\alpha = 0,05 \div 0,12)$ з $T_c = 26$ K [14] і показано, що при тиску в 4 ГПа можна домогтись надпровідності в цій речовині при 45 K [107]. Незважаючи на те, що температура переходу в надпровідний стан Fe-НП все ще поступається Cu-НП, їх вивчення викликає великий інтерес, так як може дати корисну інформацію для теоретичного пояснення високотемпературної надпровідності і вказати технологам шлях до підвищення критичної температури.

Зазначимо деякі відмінності між Cu-НП та Fe-НП [15]. По-перше, прошарки між надпровідними шарами в Cu-НП — це ізолятори, а Fe-НП складаються з надпровідних шарів заліза, розділених металевими прошарками. По-друге, в загальному випадку надпровідність у Fe-НП виникає при електронному або дірковому легуванні, хоча у деяких матеріалах, таких як LiFeAs та LaFePO, виникає без легування. По-третє, більшість дослідників вважають, що у слабко та помірно легованих Fe-НП надпровідність може виникати за рахунок так званого s^{+-}-, s^{++}- та $(s+d)$-спаровувань.

Вищевказані види спаровування виникають тому, що Fe-НП мають декілька незв'язаних поверхонь Фермі. Поблизу кожної поверхні Фермі виникає свій надпровідний конденсат, що має s- ($S=0$, $L=0$) або d-симетрію ($S=0$, $L=2$), тобто параметр порядку має щонайменше дві компоненти [3, 15, 108], наприклад, $\Delta_1 = \Delta_{10}\exp(i\chi_1)$ та $\Delta_2 = \Delta_{20}\exp(i\chi_2)$. Якщо обидві компоненти мають s-симетрію та зсув фази між ними дорівнює π, то $\chi_1 = \chi_2+\pi$, такий вид носить назву s^{+-}-спаровування тому, що компоненти параметра порядку мають протилежні знаки. Якщо зсув відсутній, $\chi_1 = \chi_2$, маємо s^{++}-спаровування. Нарешті, коли компоненти мають s- та d-симетрії, то отримуємо $(s+d)$-спаровування. На рис. 1.5 схематично представлені зони Брилюена Fe-НП, що мають поверхні Фермі у Г-точці ($\vec{k} = (0,0)$) та у M-точці ($\vec{k} = (\pi,\pi)$) [3]. Знак та величина параметру порядку позначені за допомогою затемнених областей поблизу поверхонь Фермі.

Зазначимо, що теоретичні розрахунки показують, що вищевказані види спаровування можуть переходити один в інший при зміні ступеня легування Fe-НП. Тому одна з важливих задач, що виникає перед дослідниками — це постановка експерименту, що дозволив би вирізняти їх між собою [15].



s^{+-}-спаровування $(s+d)$-спаровування

Рис. 1.5. Схематичне зображення зон Брилюена Fe-НП з поверхнями Фермі та типами спаровування (адаптовано з [3]).

1.3. Електродинаміка джозефсонівської плазми

Як вже було сказано, всі представники сімейства ВТНП мають сильно анізотропну шарувату кристалічну структуру. Окрім того, в даний час синтезовано штучні шаруваті надпровідники, наприклад, Nb/AlO$_x$/Nb [109] або Al/AlO$_x$/Al [110]. Завдяки шаруватій структурі струмові властивості таких надпровідників виявляються анізотропними, причому не тільки за абсолютною величиною (струми в надпровідних шарах, тобто у кристалографічній **ab**-площині, в сотні разів перевищують струми впоперек шарів, тобто вздовж кристалографічної осі **c**), але і за фізичною природою. А саме, густина струму $J_{x,y}$ уздовж **ab** площини має ту ж природу, що і струми в звичайних надпровідниках, і вона може бути описана в термінах лондонівської моделі, див. рівняння (1.2):

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_x, \quad J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_y, \tag{1.23}$$

де λ_{ab} — лондонівська глибина проникнення магнітного поля (в умовах, коли поле проникає в напрямку, перпендикулярному надпровідним шарам). Густина струму

J_z уздовж осі **c** має іншу природу — вона є джозефсонівською, див. рівняння (1.8):

$$J_z = J_c \sin\varphi, \tag{1.24}$$

де J_c — максимальна густина джозефсонівського струму.

Взаємодія джозефсонівського струму, що протікає упоперек шарів, з електромагнітним полем приводить до існування особливого виду елементарних збуджень, так званих джозефсонівських плазмових хвиль (ДПХ) [16–18]. Теоретично існування ДПХ в шаруватих надпровідниках було передбачене в працях [111, 112]. Такі збудження не мають аналогів в масивних надпровідниках і є характерною особливістю лише шаруватих надпровідних систем. Як і в звичайній плазмі, в спектрі джозефсонівських плазмових хвиль є щілина: ДПХ поширюються з частотами ω вище деякої критичної, так званої джозефсонівської плазмової частоти ω_J. Частоти поширення цих хвиль належать терагерцовому діапазону, що охоплює інтервал від 300 ГГц до 30 ТГц. У шаруватому надпровіднику можуть існувати як поздовжні, так і поперечні ДПХ [113], що поширюються впоперек і вздовж шарів зразка [111, 112, 114] відповідно. Природа цих мод і їх закони дисперсії різні. Поперечна ДПХ проявляє сильну дисперсійну залежність. Така мода виникає в результаті взаємодії джозефсонівського струму з електромагнітним полем всередині діелектричних шарів. Існування ж поздовжньої ДПХ пов'язано з порушенням електронейтральності в надпровідних шарах. Дійсно, в результаті тунелювання електронних пар через діелектрик на границі надпровідних шарів виникає просторовий заряд і пов'язане з ним електричне поле. При цьому електричне поле, що виникає в окремому джозефсонівському переході, впливає на сусідні джозефсонівські контакти, тобто виникає додатковий зв'язок між окремими джозефсонівськими переходами — так званий ємнісний зв'язок.

Як показав Сакаї з співавторами [115], рівняння для ДПХ в шаруватому надпровіднику зводяться до системи так званих зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона. У науковій літературі зустрічається дуже багато різних викладів і форм записів цих рівнянь [114, 116–121]. У наступному підрозділі ми виводимо систему зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона так, як це зроблено в працях [120, 121].

1.3.1. Зв'язані синусоїдальні рівняння Гордона

Розглянемо шаруватий надпровідник, структура якого складається з діелектричних і надпровідникових шарів з товщинами d і s відповідно. Систему координат виберемо так, щоб вісь z збігалася з кристалографічною віссю **c**, а площина xy збігалася з ab площиною, див. рис. 1.6.

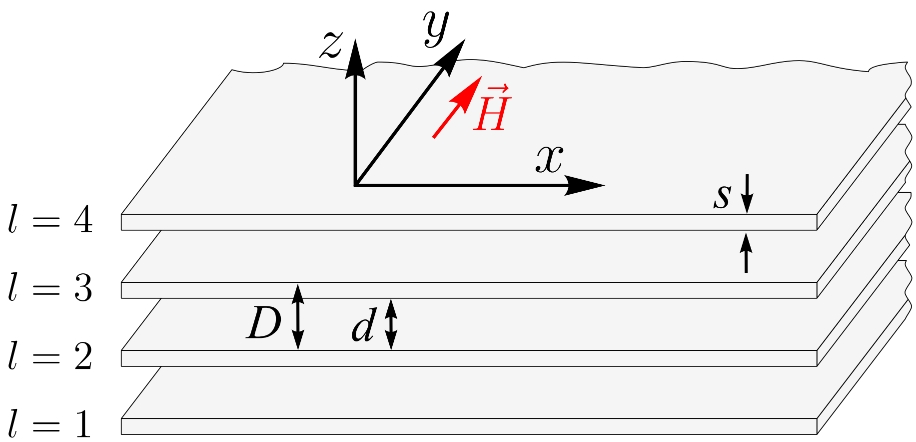


Рис. 1.6. Схематичне зображення структури шаруватого надпровідника і використовувана система координат.

Вивчимо можливість поширення в такій системі з одноосною симетрією ДПХ, електричне $\vec{E}$ і магнітне $\vec{H}$ поля в якій мають наступні компоненти (поперечно-магнітна поляризація):

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \vec{H} = \{0, H, 0\}. \tag{1.25}$$

Припустимо, що надпровідникові шари настільки тонкі ($s \ll d$), що просторовими змінами фази хвилі у напрямку осі z в межах одного надпровідникового шару можна знехтувати [120,121]. Тоді повну густину струму, що протікає між $(l+1)$-м і l-м шарами надпровідника, можна записати у вигляді суми густин джозефсонівського струму куперівських пар і квазічастинкового струму:

$$J_z^{l+1,l} = J_c \sin(\varphi^{l+1,l}) + \sigma_c E_z^{l+1,l}, \tag{1.26}$$

де $\varphi^{l+1,l}$ — калібрувально-інваріантна різниця фаз параметра порядку між $(l+1)$-м і l-м надпровідниковими шарами,

$$\varphi^{l+1,l} = \chi_{(l+1)} - \chi_l - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_l^{l+1} A_z^{l+1,l} dz\,, \tag{1.27}$$

χ_l — фаза параметра порядку в l-му шарі, $A_z^{l+1,l}$ — нормальна компонента векторного потенціалу в діелектричному проміжку між $(l+1)$-м і l-м шарами, Φ_0 — квант магнітного потоку (1.7), J_c — максимальна густина джозефсонівського струму, σ_c — дисипативна провідність квазічастинок упоперек шарів, ε_s — діелектрична проникність між надпровідниковими шарами.

Використовуючи лондонівське наближення для опису струму в надпровідних шарах, можна записати густину струму J_{xl} у l-му надпровідному шарі. Вона включає в себе густину надструму і густину струму квазічастинок, що виникає в результаті дії електричного поля в напрямку осі x:

$$J_{xl} = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2\lambda^2} \left(\frac{\partial \chi_l}{\partial x} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{xl} \right) + \sigma_{ab} E_{xl}, \tag{1.28}$$

де λ — лондонівська глибина проникнення магнітного поля в масивний надпровідник, A_{xl} — поздовжня компонента векторного потенціалу, σ_{ab} — провідність квазічастинок в надпровідниковому шарі.

Компоненти магнітного і електричного полів між $(l+1)$-м і l-м надпровідниковими шарами (тобто в діелектричному шарі) зв'язані між собою рівнянням Максвела:

$$\frac{\partial H^{l+1,l}}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} \left[J_c \sin(\varphi^{l+1,l}) + \sigma_c E_z^{l+1,l} \right] + \frac{\varepsilon_s}{c} \frac{\partial E_z^{l+1,l}}{\partial t}\,. \tag{1.29}$$

Тут перший доданок в квадратних дужках відповідає джозефсонівському струму, другий — це квазічастинковий струм, а останній доданок — струм зміщення.

Різниця між магнітними полями в $(l+1)$-м і l-м шарах визначається x-компонентою повного струму,

$$\frac{H^{l+1,l} - H^{l,l-1}}{s} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left(\frac{\partial\chi_l}{\partial x} - \frac{2\pi}{\Phi_0}A_{xl}\right) + \frac{4\pi}{c}\sigma_{ab}E_{xl} + \frac{d}{s}\frac{\varepsilon_s}{c}\frac{\partial E_{xl}}{\partial t} \,. \tag{1.30}$$

Це рівняння, по суті, є дискретною формою відповідного рівняння Максвела.

Зв'язок електричного і магнітного полів з векторним потенціалом визначається наступними співвідношеннями:

$$E_{xl} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_{xl}}{\partial t} - \frac{\partial A_{0l}}{\partial x} \,, \tag{1.31}$$

$$E_z^{l+1,l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z^{l+1,l}}{\partial t} - \frac{A_{0(l+1)} - A_{0l}}{D} \,, \tag{1.32}$$

$$H^{l+1,l} = -\frac{\partial A_z^{l+1,l}}{\partial x} - \frac{A_{x(l+1)} - A_{xl}}{D} \,. \tag{1.33}$$

У рівняннях (1.31) – (1.33) позначено: $D = s + d \approx d$ — період надпровідникової структури, A_{0l} — скалярний потенціал в l-м надпровідниковому шарі, який може бути знайдений з рівняння Пуассона.

Використовуючи рівняння (1.27), (1.32) і припускаючи, що $\int_l^{l+1} A_z^{l+1,l}dz = A_z^{l+1,l}D$, можна отримати співвідношення між компонентою електричного поля упоперек шарів і калібрувально-інваріантною різницею фаз параметра порядку $\varphi^{l+1,l}$,

$$E_z^{l+1,l} = \frac{\Phi_0}{2\pi c D}\frac{\partial\varphi^{l+1,l}}{\partial t} - \frac{\psi_{l+1} - \psi_l}{D} \,, \tag{1.34}$$

де ψ_l — калібрувально-інваріантний скалярний потенціал,

$$\psi_l = \frac{\Phi_0}{2\pi c}\frac{\partial\chi_l}{\partial t} + A_{0l} \,. \tag{1.35}$$

Рівняння (1.34), у відсутності другого доданку в правій частині, є фундаментальним співвідношенням Джозефсона між різницею фаз $\varphi^{l+1,l}$ і напругою на контакті $V^{l+1,l} = E_z^{l+1,l}D$. Внесок градієнта ψ у поперечну компоненту електричного поля $E_z^{l+1,l}$ виникає в результаті порушення електронейтральності між $(l+1)$-м і l-м надпровідниковими шарами. В результаті виникає додатковий до джозефсонівського зв'язок між надпровідниковими шарами (так званий ємнісний зв'язок). Ефект порушення електронейтральності може відігравати важливу роль в дисперсійних властивостях ДПХ [114, 116, 118, 122, 123]. Зокрема, завдяки цьому ефекту виникає нова гілка в спектрі об'ємних ДПХ, а саме поздовжні ДПХ, про які згадувалося вище. Однак ємнісним зв'язком можна знехтувати в багатьох випадках, коли параметр ємнісного зв'язку α малий. Згідно з теоретичними оцінками [116], величина $\alpha \sim 0{,}05 \div 0{,}1$ для кристалів Bi-2212 або Tl-2212. Також експериментальні дослідження [97, 124] показали, що ця величина має незначний вплив на розподіл калібрувально-інваріантної різниці фаз і електромагнітного поля в шаруватому надпровіднику. Тому в наступних розділах дисертації ми не будемо брати до уваги ефект порушення електронейтральності.

Нехтуючи [120, 121] калібрувально-інваріантним скалярним потенціалом ψ_l у рівнянні (1.34) та виключаючи векторний потенціал і компоненти електромагнітного поля з системи рівнянь (1.29)–(1.34), можна прийти до системи зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона для калібрувально-інваріантної різниці фаз $\varphi^{l+1,l}$:

$$\left(1-\frac{\lambda_{ab}^2}{D^2}\partial_l^2\right)\left[\frac{\partial^2\varphi^{l+1,l}}{\partial t^2}+\omega_r\frac{\partial\varphi^{l+1,l}}{\partial t}+\omega_J^2\sin(\varphi^{l+1,l})\right]-\frac{c^2}{\varepsilon_s}\frac{\partial^2\varphi^{l+1,l}}{\partial x^2}=0, \qquad (1.36)$$

де $\lambda_{ab} = \lambda(D/s)^{1/2}$ є лондонівською глибиною проникнення магнітного поля упоперек шарів, джозефсонівська плазмова частота ω_J визначається максимальною густиною джозефсонівського струму J_c і просторовим періодом надпровідникової структури $D = d + s$:

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi e D J_c}{\hbar\varepsilon_s}}, \qquad (1.37)$$

частота релаксації

$$\omega_r = \frac{4\pi\sigma_c}{\varepsilon_s} \tag{1.38}$$

обумовлена дисипативною провідністю квазічастинок уздовж кристалографічної осі **c**, а дискретний оператор другого порядку ∂_l^2 задано наступним співвідношенням:

$$\partial_l^2 f_l = f_{l+1} + f_{l-1} - 2f_l. \tag{1.39}$$

Вважаючи просторовий масштаб зміни електромагнітного поля уздовж осі z набагато більшим від товщин надпровідних s та діелектричних d шарів, можна перейти до континуального наближення, в якому синусоїдальні рівняння Гордона зводяться до наступного диференціального рівняння в частинних похідних:

$$\left(1 - \lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left[\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\omega_r}{\omega_J^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sin\varphi\right] - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{1.40}$$

де $\lambda_c = c/\omega_J\sqrt{\varepsilon_s}$ має зміст лондонівської глибини проникнення магнітного поля вздовж шарів.

Зауважимо, що в рівняннях (1.36) та (1.40) ми знехтували провідністю квазічастинок уздовж шарів σ_{ab}. Це можна зробити, якщо виконана наступна умова [125]:

$$\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_J^2}\right| \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_c} \frac{\varepsilon_s \omega_J^2 \lambda_{ab}^2}{c^2} \ll 1. \tag{1.41}$$

У наступному підрозділі ми представимо хвильове рівняння для векторного потенціалу, яке, по-перше, описує ДПХ довільної поляризації, що можуть поширюватись у шаруватому надпровіднику, а по-друге, включає в себе обидві квазічастинкові провідності σ_{ab} та σ_c.

1.3.2. Хвильове рівняння для векторного потенціалу. Звичайні та надзвичайні ДПХ

Як показано в праці [126], в умовах електронейтральності та у континуальному наближенні компонента A_z векторного потенціалу пов'язана з калібрувально-інваріантною різницею фаз φ співвідношенням

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi d}\varphi, \tag{1.42}$$

та замість рівняння (1.40) може бути записане хвильове рівняння для векторного потенціалу $\vec{A}$ в формі, більш звичній для макроскопічної електродинаміки:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\frac{\varepsilon_s}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}. \tag{1.43}$$

При цьому векторний потенціал $\vec{A}$ пов'язаний з електричним $\vec{E}$ і магнітним $\vec{H}$ полями стандартними співвідношеннями

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{1.44}$$

скалярний потенціал передбачається рівним нулю, а густина струму $\vec{J}$ пов'язана з векторним потенціалом $\vec{A}$ співвідношеннями (1.23) та (1.24), доповненими струмами квазічастинок:

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_x - \frac{\sigma_{ab}}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}, \tag{1.45}$$

$$J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_y - \frac{\sigma_{ab}}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}, \tag{1.46}$$

$$J_z = -J_c\sin\left(\frac{2\pi d}{\Phi_0}A_z\right) - \frac{\sigma_c}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, \tag{1.47}$$

Зауважимо, що рівняння (1.43) може бути зведене до синусоїдального рівняння Гордона (1.40) для поляризації, в якій $\vec{H} \perp \vec{c}$, див., наприклад, рівняння (1.25), та в умовах, наведених у попередньому підрозділі. Для цього потрібно виключити з рівняння (1.43) x і y проекції векторного потенціалу A_x і A_y та виразити z проекцію векторного потенціалу A_z через калібрувально-інваріантну різницю фаз φ за допомогою рівняння (1.42). Хвилі поляризації, в якій $\vec{H} \perp \vec{c}$, отримали назву надзвичайних ДПХ тому, що вони являють собою нелінійні анізотропні збудження джозефсонівської плазми.

З іншого боку, можна виділити ортогональну поляризацію, в якій $\vec{E} \perp \vec{c}$. Для такої поляризації обов'язково z проекція векторного потенціалу A_z, а, відповідно, і калібрувально-інваріантна різниця фаз φ, дорівнюють 0. Це означає, що такі хвилі лінійні та ізотропні, у зв'язку з чим отримали назву звичайних ДПХ. Більш того, вони не можуть бути описані за допомогою рівнянь Гордона, а лише за допомогою хвильового рівняння для векторного потенціалу. Таким чином, в загальному випадку ДПХ у шаруватих надпровідниках являє собою суперпозицію звичайної, в якій $\vec{E} \perp \vec{c}$, і надзвичайної, в якій $\vec{H} \perp \vec{c}$, хвиль.

В праці [126] теоретично розглянуто лінійні і слабко нелінійні ДПХ в обмежених шаруватих надпровідниках і отримано спектри як звичайних, так і надзвичайних власних мод. Зокрема, отримано дисперсійне співвідношення для звичайних хвиль:

$$\omega^2 = \omega_J^2(k^2\lambda_c^2 + \gamma^2), \tag{1.48}$$

де $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ та $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ — параметр анізотропії. З цього співвідношення бачимо, що звичайні хвилі поширюються у надпровіднику з дійсними k лише при частотах ω в γ разів більших, ніж джозефсонівська частота ω_J. Однак на таких частотах може відбуватись руйнування куперівських пар, оскільки для більшості шаруватих надпровідників $\gamma \gg 1$. Це означає, що принаймні одна з компонент хвильового вектора звичайних мод повинна бути уявною, тобто амплітуда звичайних хвиль повинна згасати принаймні в одному з напрямків. Тільки в цьому випадку частота звичайної моди може належати до терагерцового діапазона.

Як було зазначено вище, надзвичайні хвилі, на відміну від звичайних, є нелінійними. В праці [126] був отриманий закон дисперсії слабко нелінійних хвиль:

$$\omega^2 = \omega_J^2\Big[1 + \frac{(k_x^2 + k_y^2)\lambda_c^2}{k_z^2\lambda_{ab}^2 + 1}\Big] - \beta\omega_J^2\frac{a_1^2}{A_0^2}, \tag{1.49}$$

де a_1 — амплітуда хвилі,

$$A_0^2 = \frac{c}{\pi J_c\lambda_c^2}\left(\frac{\Phi_0}{\pi d}\right)^3, \tag{1.50}$$

та доданок $\beta\omega_J^2 a_1^2/A_0^2$, обумовлений нелінійністю, коефіцієнт $\beta = 9/4$ для хвиль із $k_z \neq 0$ та $\beta = 3$ для хвилі з $k_z = 0$.

З рівняння (1.49) видно, що надзвичайна хвиля може поширюватись при частотах в інтервалі

$$\omega_J\sqrt{1 - \beta a_1^2/A_0^2} < \omega < \omega_J\sqrt{\lambda_c^2(k_x^2 + k_y^2) + 1 - \beta a_1^2/A_0^2}. \tag{1.51}$$

Для надзвичайних хвиль можна виділити дві частотні області. В одній з них, а саме в інтервалі (1.51), всі компоненти хвильового вектора дійсні, що відповідає хвилі, що біжить. При інших частотах хвиля згасає в одному з напрямків. Нелінійність ефективно зменшує і нижню, і верхню межі інтервалу (1.51), тим самим зміщуючи діапазон частот, при яких можуть поширюватися надзвичайні хвилі.

1.3.3. Анізотропна діелектрична проникність шаруватого надпровідника

У лінійному наближенні, коли $\sin\varphi \approx \varphi$ у джозефсонівському струмі (1.23), електромагнітні властивості шаруватого надпровідника можуть бути описані в термінах діагонального анізотропного тензору діелектричної проникності $\hat{\varepsilon}(\omega)$ [16, 127], що залежить від частоти ω,

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ab}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c(\omega) \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

де компоненти $\varepsilon_{ab}(\omega)$ та $\varepsilon_c(\omega)$ позначають діелектричні проникності вздовж і впоперек шарів відповідно.

Переписуючи рівняння (1.43) у вигляді

$$\mathrm{grad\,div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}(\omega)\vec{A}, \tag{1.53}$$

отримуємо наступні вирази для компонент $\hat{\varepsilon}(\omega)$:

$$\varepsilon_{ab}(\omega) = \varepsilon_s\Big(1 - \gamma^2\frac{\omega_J^2}{\omega^2} - i\nu_{ab}\frac{\omega_J^2}{\omega^2}\Big), \tag{1.54}$$

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_s\Big(1 - \frac{\omega_J^2}{\omega^2} - i\nu_c\frac{\omega_J^2}{\omega^2}\Big), \tag{1.55}$$

де $\nu_{ab} = 4\pi\sigma_{ab}/(\varepsilon_s\omega_J)$, $\nu_c = 4\pi\sigma_c/(\varepsilon_s\omega_J)$.

Як видно з представлених виразів, компоненти тензора діелектричної проникності шаруватих надпровідників можуть мати різні знаки в широкому діапазоні частот. Така специфічна анізотропія може призводити до цікавих фізичних явищ, таких як негативне заломлення і аномальна дисперсія електромагнітних хвиль. Останнім часом помітно зростає інтерес до вивчення властивостей так званих ліворуких (left-handed) середовищ — метаматеріалів, які мають негативний коефіцієнт заломлення, особливо після недавніх спостережень в них негативного заломлення мікрохвиль [128] і теоретичного передбачення можливості так званого ідеального фокусування світла [129]. Часто відправним пунктом у дослідженні негативного заломлення вважається праця В. Г. Веселаго [130], хоча розуміння суті цього явища було досягнуто Мандельштамом ще в 1940-х роках [131], докладніше див. оглядову статтю [132]. У статтях [127, 133] було показано, що шаруваті надпровідники можуть бути використані як матеріали з негативним показником заломлення. Також у дисертації буде показано, що ДПХ, які поширюються у пластині шаруватого надпровідника, мають аномальну дисперсію, що може призводити до цікавих ефектів, подібних до зупинки світла та контрольованого внутрішнього відбиття.

1.3.4. Нелінійні ДПХ поблизу джозефсонівської частоти

Нелінійність може призвести до ряду нетривіальних явищ, таких як самоіндукована прозорість та самофокусування світла, що представляють інтерес як для фундаментальної, так і для прикладної науки (див., наприклад, [19, 20]). На відміну від нелінійної оптики, рівняння електродинаміки шаруватих надпровідників нелінійні за рахунок нелінійного зв’язку $J \propto \sin\varphi$ джозефсонівського струму з міжшаровою калібрувально-інваріантною різницею фаз параметра порядку φ. В сильно нелінійному режимі, коли $\varphi \sim \pi$, синусоїдальне рівняння Гордона має розв’язки у вигляді солітонів та бризерів [134, 135].

Однак навіть у випадку малих амплітуд, коли $|\varphi| \ll 1$ і $\sin\varphi$ можна розписати як $\varphi - \varphi^3/6$, в шаруватих надпровідниках можуть сильно проявитись нелінійні ефекти. Як показано в працях [136, 137], при частотах ω, близьких до джозефсонівської плазмової частоти ω_J, можна знехтувати генерацією більш високих гармонік. Тоді нелінійний член $\omega_J^2\varphi^3$ в рівнянні (1.40) може мати той же порядок малості, що і сума лінійних членів:

$$\left|\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2} + \omega_J^2\varphi\right| \simeq (\omega_J^2 - \omega^2)|\varphi| \sim \omega_J^2|\varphi|^3. \tag{1.56}$$

Лінійні доданки практично компенсують один одного, а малий нелінійний член φ^3 може грати ключову роль у задачі. Таким чином, навіть слабка нелінійність може істотно впливати на поширення ДПХ, якщо частота хвиль близька до джозефсонівської плазмової частоти.

Відзначимо також, що нелінійні ДПХ можуть поширюватись з частотами нижче джозефсонівської плазмової частоти ω_J, тобто в забороненій області спектра, завдяки тому, що нелінійність сприяє ефективному зменшенню ω_J. Дійсно, вираз в квадратних дужках у синусоїдальному рівнянні Гордона (1.40) може бути представлений у формі

$$\left[\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \sin\varphi\right] \approx \left[\frac{1}{(\omega_J^{\text{eff}})^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varphi\right], \tag{1.57}$$

де

$$\omega_J^{\text{eff}} \approx \omega_J\Big(1 - \frac{\varphi^2}{12}\Big). \tag{1.58}$$

Так, для деяких φ частота хвилі може бути більшою від ефективної джозефсонівської плазмової частоти ω_J^{eff} і, отже, нелінійні ДПХ поширюються в шаруватих надпровідниках.

Нелінійність рівнянь електродинаміки шаруватих надпровідників призводить до ряду незвичайних нелінійних ефектів, пов'язаних з поширенням ДПХ, таких як самофокусування терагерцових імпульсів [136, 137], збудження нелінійних хвилеводних мод [138] та ін. Зокрема, нелінійність може призводити до такого незвичного явища, як гістерезисна залежність поверхневого реактансу шаруватого надпровідника від амплітуди хвилі, що його опромінює. Ґрунтуючись на роботах [28, 29], покажемо, як це явище виникає у симетричній геометрії, коли пластина шаруватого надпровідника товщини D (див. рис. 1.7) опромінюється з двох сторін двома плоскими монохроматичними хвилями поперечно-магнітної поляризації (1.25) з частотою ω під кутом θ до нормалі. Передбачається також, що магнітне поле та z-компонента електричного поля симетричні відносно середини пластини, тобто відносно площини $z = 0$, а x-компонента електричного поля антисиметрична:

$$H(z) = H(-z), \quad E_x(z) = -E_x(-z), \quad E_z(z) = E_z(-z). \tag{1.59}$$

Ці умови дають можливість розглядати поле лише в верхньому півпросторі $z > 0$.

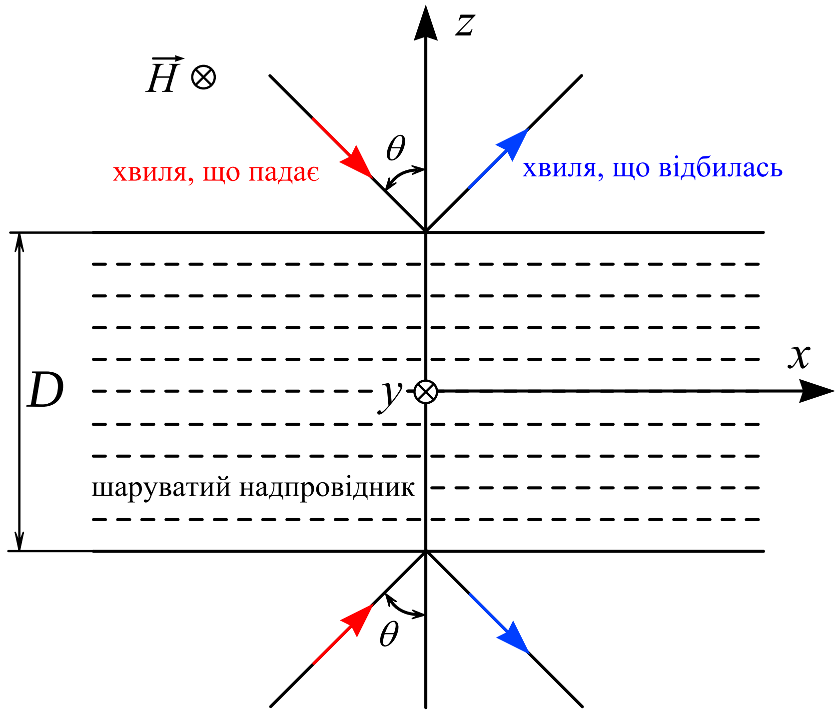


Рис. 1.7. Схематичне зображення пластини шаруватого надпровідника, яка опромінюється двома плоскими монохроматичними хвилями.

Електромагнітне поле у вакуумі, $z > D/2$, являє собою суму хвиль, що падає та дзеркально відбивається:

$$H(x,z,t) = H_0 \cos\gamma_- + H_r \cos(\gamma_+ + \chi), \tag{1.60}$$

$$E_x(x,z,t) = -\frac{k_z}{k}\Big[H_0 \sin\gamma_- - H_r \sin(\gamma_+ + \chi)\Big], \tag{1.61}$$

де H_0 та H_r — амплітуди магнітного поля у падаючий та відбитій хвилі відповідно,

$$\gamma_\pm = k_x x \pm k_z(z - D/2) - \omega t, \tag{1.62}$$

$k_x = k\sin\theta$, $k_z = k\cos\theta$, $k = \omega/c$. Величина χ являє собою зсув фази відбитої хвилі на границі зразка при $z = D/2$ та визначає поверхневий реактанс X зразка:

$$X = \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\chi}{2}\right)\cos\theta. \tag{1.63}$$

Електромагнітні поля у шаруватому надпровіднику пов'язані з калібрувально-інваріантною різницею фаз φ за допомогою рівнянь (1.29)–(1.34), які у континуальному наближенні набувають наступного вигляду:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\mathcal{H}_0}{\lambda_c}\left(\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \sin\varphi\right), \tag{1.64}$$

$$E_x = -\frac{\lambda_{ab}^2}{c}\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial t}, \qquad E_z = \frac{\mathcal{H}_0\lambda_c}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.65}$$

де $\mathcal{H}_0$ — характерне магнітне поле,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\Phi_0}{\pi d\lambda_c}, \tag{1.66}$$

яке для $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ (при $d = 1.5\times10^{-7}$ см і $\lambda_c = 4\times10^{-3}$ см) становить приблизно 100 Ерстед.

Шукаючи розв'язок рівняння Гордона (1.40) у вигляді хвилі, що біжить уздовж осі x, з амплітудою, що залежить від z,

$$\varphi(x,z,t) = a(z)(1-\Omega^2)^{1/2}\sin(k_x x - k_z D/2 - \omega t + \alpha), \tag{1.67}$$

приходимо до наступного рівняння для невідомої амплітуди $a(z)$,

$$\left[1 - \kappa^2\frac{d^2}{d\zeta^2}\right]\left(a - \frac{a^3}{8}\right) + \kappa^2 a = 0, \tag{1.68}$$

з граничними умовами:

$$a'(0) = 0, \quad a(0) = a_0, \tag{1.69}$$

які визначаються умовою симетрії (1.59). Тут $\zeta = \kappa x/\lambda_{ab}$ — безрозмірна координата, $\kappa = k_x\lambda_c/(1-\Omega^2)^{1/2}$ — нормована x-проекція хвильового вектору, та $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота. Тут і далі в цьому пункті ми припускаємо, що $\Omega < 1$, тобто частота ω менше джозефсонівської плазмової частоти.

Використовуючи умови неперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границі пластини, ми отримуємо залежність зсуву фази χ від амплітуди H_0 хвилі, що падає, у неявному вигляді:

$$h_0 = \frac{1}{2}\sqrt{h^2(\delta) + \big[Ph'(\delta)\big]^2}, \tag{1.70}$$

$$\chi = 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{Ph'(\delta)}{h(\delta)}\right], \tag{1.71}$$

де h_0 та $h(z)$ являють собою нормовані амплітуди магнітного поля у вакуумі та надпровіднику,

$$h_0 = \frac{H_0}{\mathcal{H}_0}\frac{\kappa}{(1-\Omega^2)}, \qquad h(z) = \frac{H(z)}{\mathcal{H}_0}\frac{\kappa}{(1-\Omega^2)},$$

причому $h(z)$ пов'язана з $a(z)$ нелінійним чином, як випливає з рівняння (1.64):

$$h(\zeta) = a(\zeta) - \frac{a^3(\zeta)}{8}, \tag{1.72}$$

$P = \kappa\lambda_{ab}/(\lambda_c\sqrt{\varepsilon_s})$ та $\delta = \kappa D/2\lambda_{ab}$.

Зауважимо, що залежність $\chi(h_0)$, задана рівняннями (1.70) та (1.71), є параметричною, де параметром виступає a_0 — невідоме значення амплітуди $a(z)$ в середині зразка, див. рівняння (1.69). Для подальшого аналізу цієї залежності важливо врахувати неоднозначність зв'язку між величинами $h(\delta)$ і $a(\delta)$. Дійсно, рівняння (1.72) і рис. 1.8 свідчать про існування трьох значень a, що відповідають одному і тому ж значенню h, якщо $0 < h < (32/27)^{1/2}$. Беручи до уваги рівняння (1.70), робимо висновок, що три різних значення параметра $h'(\delta)/h(\delta)$ в (1.71) відповідають одному і тому ж h_0. Все це призводить до того, що залежність

$\chi(h_0)$ має щонайменше три гілки.

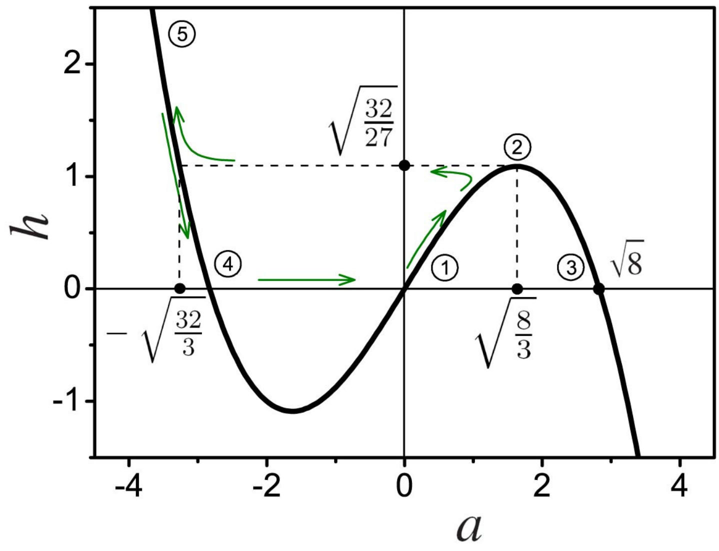


Рис. 1.8. Залежність нормованого магнітного поля h у зразку шаруватого надпровідника від амплітуди a калібрувально-інваріантної різниці фаз, що описується кубічною параболою (1.72).

На основній панелі на рис. 1.9 представлена залежність $\chi(h_0)$ у випадку відносно тонких зразків [28]. Маємо три гілки цієї залежності: низькоамплітудна гілка (суцільна крива), яка відповідає квазі-лінійним хвилям у шаруватому надпровіднику, та дві гілки (штрихова та штрих-пунктирна), які відповідають нелінійним хвилям. Нижня вставка на рис. 1.9 показує ту саму залежність у іншому масштабі. Важливо зауважити, що суцільна та штрих-пунктирна криві майже дотикаються у точці $h_0 = h_0^{\text{кр}} \approx \sqrt{8/27}$, але між ними є розрив, який виявляється малим для відносно тонких товщин.

Наведемо асимптотичний вираз, який добре описує в неявній формі усі три гілки залежності $\chi(h_0)$ для тонких зразків, $\delta \ll 1$:

$$h_0(a_0) = \frac{|a_0||8 - a_0^2|}{16}, \qquad \chi(a_0) = \frac{16P}{8 - a_0^2}\delta, \tag{1.73}$$

та на відміну від (1.70) та (1.71) не потребує чисельного вирішення диференціального рівняння (1.68). Тут параметр a_0 повинен задовольняти нерівностям

$$|a_0^2 - 8| \gg \delta, \qquad |a_0^2 - 8/3| \gg \delta.$$

Верхня вставка на рис. 1.9 показує порівняння залежностей $\chi(h_0)$, знайдених за допомогою чисельного вирішення диференціального рівняння (1.68) (кружочки) та асимптотичного виразу (1.73) (суцільна крива).

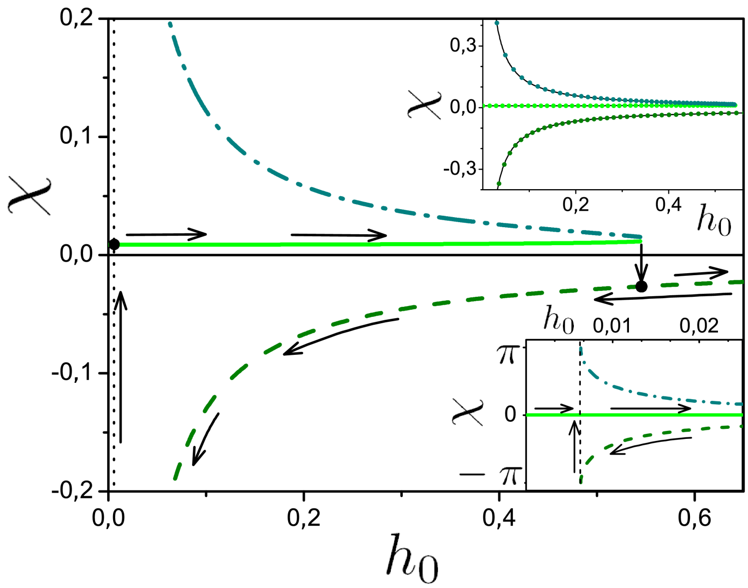


Рис. 1.9. Залежність зсуву фази χ відбитої хвилі від безрозмірної амплітуди h_0 хвилі, що падає [28]. Параметри: $D/\lambda_{ab} = 0{,}05$, $\lambda_c/\lambda_{ab} = 200$, $\kappa = 10$, $\varepsilon_s = 16$.

Опишемо тепер гістерезисну поведінку зсуву фази χ при періодичній зміні амплітуди h_0. Схематично цей рух зображено на основній панелі на рис. 1.9 за допомогою стрілок.

При збільшенні h_0 від нульового значення зсув фази $\chi(h_0)$ монотонно зростає по суцільній низькоамплітудній гілці на рис. 1.9. При досягненні $h_0 = h_0^{\text{кр}}$ перша гілка закінчується, що при подальшому збільшенні h_0 неминуче призводить до стрибка на штрихову високоамплітудну гілку.

При зменшенні h_0 зсув фази $\chi(h_0)$ зменшується по високоамплітудній гілці, проходить точку $h_0 = h_0^{\text{кр}}$, і лише в деякій точці $h_0 = h_0^{\min} \approx \sqrt{2}P\delta$ (позначено вертикальною пунктирною лінією на рис. 1.9) високоамплітудна гілка закінчується та відбувається стрибок назад на низькоамплітудну гілку.

Зауважимо, що у випадку достатньо товстих пластин залежність $\chi(h_0)$ може мати більше ніж три гілки [29]. Тим не менш, і в цьому випадку при періодичній зміні амплітуди h_0 хвилі, що падає, можуть спостерігатися гістерезисні стрибки в залежності $\chi(h_0)$.

Висновки до розділу 1

- Надпровідність виникає у металах та сплавах при достатньо низькій температурі за рахунок перетворення звичайних вільних електронів у надпровідний конденсат куперівських електронних пар. Завдяки цьому у надпровіднику може існувати струм, що переноситься без опору — струм куперівських пар. Окрім того, надпровідник характеризується ефектом Мейснера – Охзенфельда, який полягає у тому, що відносно слабке зовнішнє магнітне поле індукує в надпровіднику макроскопічні струми, які повністю компенсують його. В залежності від прояву цього ефекту надпровідники розділено на два класи: надпровідники I роду та надпровідники II роду.

- В системах, що містять надпровідники, можуть виникати явища, незвичні для нормальних систем, такі як ефект Джозефсона та андреєвське відбиття. Перший ефект полягає у тому, що між двома надпровідниками, які пов'язані слабким зв'язком, наприклад, розділені тонким прошарком діелектрику або нормального металу, може протікати надпровідний струм, який, окрім того, залежить від різниці фаз хвильових функцій надпровідних конденсатів в цих надпровідниках. Другий ефект виникає на границі між нормальним металом та надпровідником — електрон, що налітає на надпровідник, в результаті андреєвського відбиття перетворюється на «дірку», яка летить в строго протилежному напрямі.

- Окрім металів та сплавів, надпровідниками можуть бути і більш складні сполуки. Більш того, у деяких сполук температура переходу у надпровідний стан виявилася достатньо великою, більше 30 K, тому вони отримали назву — високотемпературні надпровідники (ВТНП). Серед ВТНП можна виділити два великі класи: купратні надпровідники, в яких надпровідність забезпечена шарами $\mathrm{CuO_2}$, та надпровідники на основі заліза. У таких системах надпровідність є незвичною у тому сенсі, що спаровування електронів у куперівські пари відрізняється від металів. Якщо у металах має місце s-спаровування ($S = 0$, $L = 0$), то у купратних надпровідниках — d-спаровування ($S = 0$, $L = 2$), а у надпровідниках на основі заліза тип спаровування досі є предметом активних дискусій. Найбільш ймовірним для останніх вважається $s^{\pm}$-спаровування.

- Всі відомі на сьогоднішній день високотемпературні надпровідники характеризуються дуже великою анізотропією, яка виявляється в їх шаруватій структурі. Найбільша анізотропія встановлена у вісмутовому надпровіднику $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$, де параметр анізотропії досягає значень декількох сотень. Між надпровідниковими площинами у ВТНП існує слабкий джозефсонівський зв'язок, завдяки якому в шаруватих надпровідниках формується так звана джозефсонівська плазма. Властивості цієї плазми істотно відрізняються від властивостей інших провідникових середовищ, наприклад, металів.

- У шаруватих надпровідниках можуть поширюватись елементарні збудження особливого роду — джозефсонівські плазмові хвилі. Джозефсонівські плазмові хвилі в шаруватих надпровідниках належать до терагерцового діапазону частот, що дає можливість розглядати такі матеріали як перспективні кандидати для створення пристроїв, які працюють в терагерцовому діапазоні. Рівняння, які описують ці хвилі, зводяться до системи зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона для калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку. Нелінійність та анізотропія цих рівнянь передбачає можливість ефектів як схожих із нелінійною оптикою, наприклад, самоіндукована прозорість, самофокусування та зупинка світла, так і незвичних, наприклад, гістерезисна залежність поверхневого реактансу шаруватого надпровідника від амплітуди.

Таким чином, дослідження електронного та електромагнітного транспорту у надпровідникових системах представляє інтерес як з загальнофізичної точки зору, так і з погляду різних можливих застосувань. Багато явищ, які спостерігаються в нормальних металах в оптичному діапазоні частот, можуть спостерігатись і в ВТНП, але вже в терагерцовому діапазоні. Окрім того, аналіз ефектів Джозефсона та андреєвського відбиття у ВТНП із незвичним спаровуванням може дати поштовх розвитку теорії надпровідності. Теоретичному дослідженню таких явищ і присвячена дана дисертація.

РОЗДІЛ 2

ЕЛЕКТРОННИЙ ТРАНСПОРТ У НАДПРОВІДНИХ СИСТЕМАХ

У цьому розділі, спираючись на результати праць [25–27], досліджено електронний транспорт у системах, що містять сучасні матеріали — ВТНП на основі заліза (Fe-НП) та двовимірні топологічні ізолятори. Основна увага при дослідженні приділяється можливості визначення мікроскопічних властивостей цих матеріалів за допомогою ефекту Джозефсона, ефекту близькості та багаторазового андреєвського відбиття у таких системах.

У підрозділі 2.1 вивчено ефект близькості в ланцюгах, які включають звичайний надпровідник і Fe-НП, розділені нормальним або феромагнітним дротом. Обчислено залежності щільності станів від енергії, отримані співвідношення між струмом і різницею фаз в ефекті Джозефсона та обговорюється можливість виявлення ознак s^{+-}-спаровування у Fe-НП. Зокрема, аналітичний результат для щільності станів демонструє так звану щілину Таулеса при низьких енергіях та особливості поблизу надпровідних щілин при більш високих енергіях. Ці особливості можуть бути використані для розмежування s^{+-}- та s^{++}-спаровування в експерименті за допомогою сканувальної тунельної спектроскопії. Співвідношення між струмом та різницею фаз для різних конфігурацій ланцюга виявляє 0–π переходи для широкого діапазону параметрів.

У підрозділі 2.2 досліджується електронний транспорт на краю двовимірного топологічного ізолятора між двома надпровідними електродами. Такий транспорт визначається багатократними андреєвськими відбиттями. Запропоновано модель такого транспорту з урахуванням як андреєвського, так і нормального відбиття на контакті, і електрон-електрон-домішкового розсіювання на краю. На підставі цієї моделі обчислено функції розподілу електронів за енергіями та визначено характерні особливості, що виникають в результаті зазначених процесів. Отримані результати можуть дозволити в експерименті визначати співвідношення вкладів від нормального відбиття на надпровідному контакті та від електрон-домішкового розсіювання на краю, що впливають на квантовий електронний транспорт у топологічному ізоляторі.

2.1. Джозефсонівський струм і щільність електронних станів в ланцюгах, що містять $s^{\pm}$ надпровідники

2.1.1. Модель

Ми розглядаємо ланцюг, в якому два масивних надпровідники з'єднані за допомогою дрота, зробленого з нормального або феромагнітного дифузного металу. Ми розглянемо декілька можливостей: обидва надпровідники однакові з s^{+-} або з s^{++}-спаровуванням, або один із надпровідників звичайний з s-спаровуванням, а інший незвичний з s^{+-}-спаровуванням. Для скорочення будемо позначати такі ланцюги як $s^{+-}|n|s^{+-}$, $s^{++}|n|s^{++}$ або $s|n|s^{+-}$ відповідно. Якщо нормальний метал є феромагнетиком, то будемо використовувати відповідні позначення: $s^{+-}|f|s^{+-}$ або $s|f|s^{+-}$.

Наші розрахунки ми будуємо на рівняннях Узаделя (1.11), які для зручності ми перепишемо у термінах так званої кутової параметризації [139]. В цій параметризації нормальна G та аномальна F функції Гріна

$$G = \cos\theta, \quad F = \sin\theta \exp(i\psi), \tag{2.1}$$

представляються за допомогою функцій θ та ψ та автоматично задовольняють умові нормування (1.12). Тоді рівняння Узаделя (1.11) приймають наступний вигляд (тут і далі у цьому підрозділі будемо використовувати систему одиниць, де стала Планка $\hbar = 1$ та стала Больцмана $k = 1$):

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \Big(\frac{d\psi}{dx}\Big)^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{2\omega}{D}\sin\theta - \frac{2}{D}\,\mathrm{Re}[\Delta\exp[-i\psi]]\cos\theta, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\sin^2\theta\frac{d\psi}{dx}\Big) = -\frac{2}{D}\,\mathrm{Im}[\Delta\exp[-i\psi]]\sin\theta. \tag{2.3}$$

У масивному надпровіднику розв'язок (1.15) для кутової параметризації перепишеться у вигляді

$$\theta_\lambda = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{|\Delta_\lambda|}, \quad \psi_\lambda = \chi_\lambda, \tag{2.4}$$

де індекс λ позначає номер компоненти параметру порядку, наприклад, $\lambda = 1, 2$ для двокомпонентного параметру порядку при s^{+-}- або s^{++}-спаровуванні та $\lambda = 0$ для однокомпонентного параметру порядку при звичайному s-спаровуванні. Фази χ_λ різних компонентів параметру порядку для s^{+-}- або s^{++}-спаровування пов'язані співвідношенням $\chi_1 = \chi_2 + \pi$ або $\chi_1 = \chi_2$ відповідно.

Для дроту з нормального металу ми будемо використовувати рівняння (2.2) та (2.3), у яких покладено $\Delta = 0$,

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{2\omega}{\varepsilon_{\mathrm{Th}}}\sin\theta = \Big(\frac{d\psi}{d\xi}\Big)^2\sin\theta\cos\theta, \tag{2.5}$$

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\xi} = j_\omega, \tag{2.6}$$

де для зручності введені безрозмірна координата $\xi = x/L$ та так звана енергія Таулеса $\varepsilon_{\mathrm{Th}} = D/L^2$, пропорційна оберненому часу дифузії $\tau_D = L^2/D$, за який електрон проходить вздовж дроту довжини L з коефіцієнтом дифузії рівним D. Константа j_ω виникла за рахунок того, що ми один раз проінтегрували рівняння (2.3).

На кінцях дроту повинні бути записані граничні умови Купріянова – Лукічова (1.16) та (1.17), що пов'язують θ і ψ у дроті та θ_λ і ψ_λ у масивному надпровіднику. Оскільки ми розглядаємо надпровідники із двокомпонентним параметром порядку, то потрібно використовувати узагальнення цих граничних умов (див. [140, 141]), в яких виникає підсумування за номерами компонент λ. Запишемо для правої границі $\xi = 1/2$ ці умови у кутовій параметризації:

$$j_\omega = 2\sin\theta_R \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \psi_R\right) \sum_{\lambda=1,2} \frac{\delta_\lambda}{\gamma_\lambda} \sin\theta_\lambda, \tag{2.7}$$

$$\theta_R' = 2\sum_\lambda \frac{1}{\gamma_\lambda}\left[\delta_\lambda \sin\theta_\lambda \cos\theta_R \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \psi_R\right) - \cos\theta_\lambda \sin\theta_R\right]. \tag{2.8}$$

Тут ψ_R, θ_R та θ_R' відповідають значенням функцій у нормальному металі на границі:

$$\psi_R = \psi(\xi = 1/2), \quad \theta_R = \theta(\xi = 1/2), \quad \theta_R' = \frac{d\theta(\xi = 1/2)}{d\xi}, \tag{2.9}$$

для зручності вважається, що фази у лівому та правому надпровідниках рівні $\varphi/2$ та $-\varphi/2$ відповідно, параметри γ_λ позначають безрозмірні опори границі, та множники δ_λ рівні $+1$ або -1 в залежності від типу спаровування: $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ для s^{+-}-спаровування та $\delta_1 = \delta_2 = 1$ для s^{++}-спаровування.

На лівій границі при $\xi = -1/2$ ми аналогічним чином записуємо граничні умови: для s^{+-}- або s^{++}-спаровування

$$j_\omega = 2\sin\theta_L \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi_L\right) \sum_{\lambda=1,2} \frac{\delta_\lambda}{\gamma_\lambda} \sin\theta_\lambda, \tag{2.10}$$

$$\theta_L' = -2\sum_\lambda \frac{1}{\gamma_\lambda}\left[\delta_\lambda \sin\theta_\lambda \cos\theta_L \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi_L\right) - \cos\theta_\lambda \sin\theta_L\right], \tag{2.11}$$

або для звичайного s-спаровування

$$j_\omega = \frac{2}{\gamma_0} \sin\theta_L \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi_L\right) \sin\theta_0, \tag{2.12}$$

$$\theta_L' = -\frac{2}{\gamma_0}\left[\sin\theta_0 \cos\theta_L \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi_L\right) - \cos\theta_0 \sin\theta_L\right]. \tag{2.13}$$

Тут ψ_L, θ_L та θ'_L відповідають значенням функцій у нормальному металі на границі:

$$\psi_L = \psi(\xi = -1/2), \quad \theta_L = \theta(\xi = -1/2), \quad \theta'_L = \frac{d\theta(\xi = -1/2)}{d\xi}. \tag{2.14}$$

Розв'язуючи рівняння Узаделя (2.5) та (2.6) з вищевказаними граничними умовами, можна знайти щільність електронних станів

$$N(\varepsilon)/N_0 = \mathrm{Re}[G(\omega \to i\varepsilon)] = \mathrm{Re}[\cos\theta(\omega \to i\varepsilon)], \tag{2.15}$$

як аналітичне продовження [139] в дійсні енергії ε дійсної частини нормальної функції Гріна та джозефсонівський струм (1.18),

$$eI(\varphi)R_N = 2\pi i T \sum_{\omega} \left(F\frac{dF^*}{dx} - F^*\frac{dF}{dx} \right) = \int \mathrm{th}\,\frac{\varepsilon}{2T}\,\mathrm{Im}[j_{\omega\to i\varepsilon}]d\varepsilon, \tag{2.16}$$

за допомогою підсумовування за частотами Мацубари, де T — температура, $R_N = L/e^2 D N_0 S$ — опір дроту поперечного перерізу S в нормальному стані, та N_0 — щільність електронних станів у металі.

2.1.2. Щільність електронних станів

Почнемо розгляд з симетричного $s^{++}|n|s^{++}$ або $s^{+-}|n|s^{+-}$ ланцюга та припустимо, що різниця фаз між надпровідниками відсутня, $\varphi = 0$. У цьому випадку функція ψ є константою і рівняння Узаделя (2.5) спрощується до

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{2\omega}{\varepsilon_{\mathrm{Th}}}\sin\theta = 0, \tag{2.17}$$

що представляє собою відоме рівняння математичного маятника. Його розв'язок може бути представлений за допомогою еліптичних функцій Якобі (див. [142]) у наступному вигляді:

$$\cos[\theta(\xi,\omega)/2] = \cos(\theta_0/2)\frac{\mathrm{cn}(u,m)}{\mathrm{dn}(u,m)}, \tag{2.18}$$

де

$$u = x\sqrt{\frac{2\omega}{\varepsilon_{\mathrm{Th}}}}, \quad m = \cos^2(\theta_0/2), \quad \theta_0 = \theta(\xi=0,\omega). \tag{2.19}$$

Використовуючи знайдений розв'язок (2.18) у граничній умові (2.8), ми знайдемо замкнене алгебраїчне рівняння для невідомого інтеграційного коефіцієнта m у вигляді

$$u_B\sqrt{1+m}\frac{\mathrm{sn}(u_B,m)}{\mathrm{dn}(u_B,m)} + \mathcal{F}\frac{\mathrm{cn}(u_B,m)}{\mathrm{dn}^2(u_B,m)} = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{m(1-m)}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1-m}{\mathrm{dn}^2(u_B,m)}\right], \tag{2.20}$$

де

$$u_B = \sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon_{\mathrm{Th}}}}, \quad \mathcal{G} = \sum_{\lambda=1,2}\frac{1}{\gamma_\lambda}\cos\theta_\lambda, \quad \mathcal{F} = \sum_{\lambda=1,2}\frac{\delta_\lambda}{\gamma_\lambda}\sin\theta_\lambda. \tag{2.21}$$

Рівняння (2.20) визначає параметр m і, отже, θ_0, як функцію частоти ω і разом з рівнянням (2.18) дає повний аналітичний розв'язок для функції Гріна в дроті. Далі можна знайти щільність станів (2.15) у середині дроту при $x=0$,

$$N(\varepsilon)/N_0 = \mathrm{Re}[2m-1]_{\omega\to i\varepsilon}, \tag{2.22}$$

переходячи до дійсних енергій ε.

На рис. 2.1 показано характерний профіль $N(\varepsilon)$ в $s^{++}|n|s^{++}$ ланцюзі для різних виборів параметрів. Один з них виявляє енергетичну щілину ε_g, що індукується ефектом близькості, у спектрі дроту, який масштабується з енергією Таулеса $\varepsilon_g \sim \varepsilon_{\mathrm{Th}}$. Асимптотичний аналіз поблизу $\varepsilon-\varepsilon_g \ll \varepsilon_g$ показує, що щільність станів має поведінку

$$N(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_g - 1}, \tag{2.23}$$

подібну до звичайних $s|n|s$ ланцюгів [143]. Далі функція $N(\varepsilon)$ швидко зростає, проходить через максимум і має дві додаткові пікоподібні ознаки при більш високих енергіях біля надпровідних щілин Δ_λ.

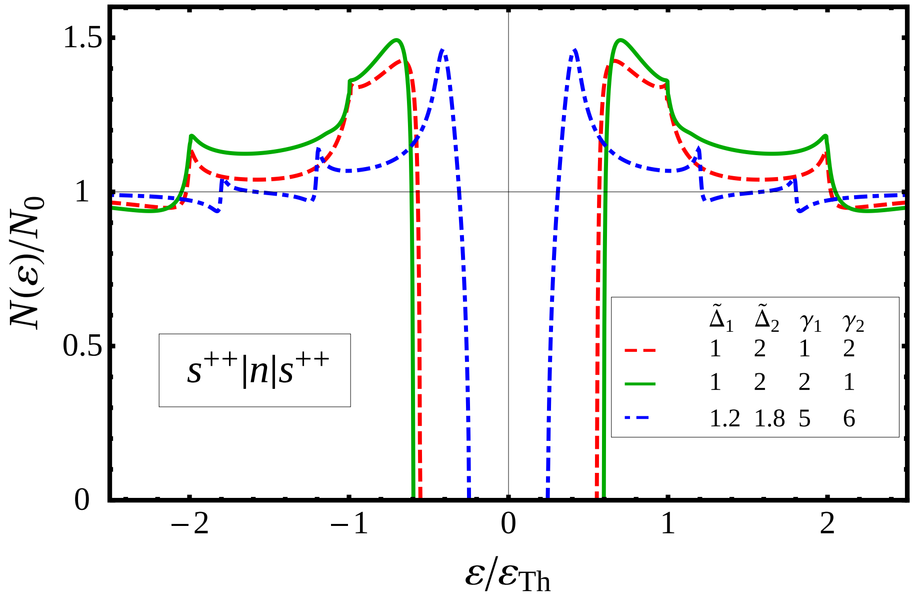


Рис. 2.1. Характерний профіль щільності електронних станів $N(\varepsilon)/N_0$ як функції енергії ε, нормованої на енергію Таулеса $\varepsilon_{\mathrm{Th}}$, у середині дроту з нормального металу, що з'єднує два однакових надпровідника з s^{++}-спаровуванням. Параметри вказані на вставці, де $\tilde{\Delta}_\lambda = \Delta_\lambda/\varepsilon_{\mathrm{Th}}$.

Така поведінка дещо відрізняється від профілю щільності станів для $s^{+-}|n|s^{+-}$ ланцюга, показаного на рис. 2.2. Поведінка при низьких енергіях схожа, але індукована енергетична щілина ε_g зменшується за рахунок ефекту «анти-близькості»: дві компоненти параметру порядку, різниця фаз між якими дорівнює π, компенсують одна одну. Концептуальну різницю можна побачити поблизу надпровідних щілин Δ_λ, де замість піків виявляються Фано-подібні антисиметричні особливості. Ця важлива деталь є специфічною для випадку s^{+-} симетрії і може слугувати відмінною рисою, яку можна шукати в експерименті.

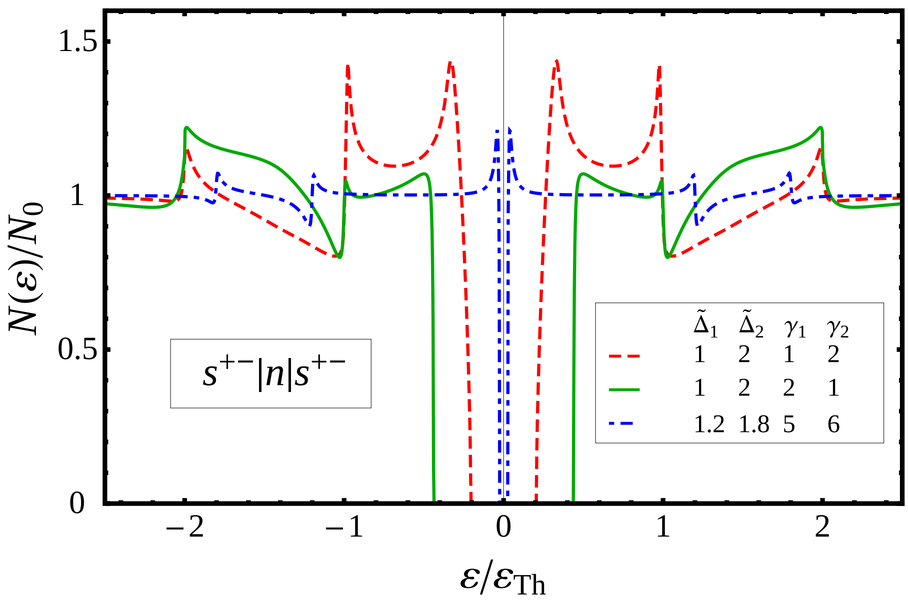


Рис. 2.2. Характерний профіль щільності електронних станів $N(\varepsilon)/N_0$ як функції енергії ε, нормованої на енергію Таулеса $\varepsilon_{\mathrm{Th}}$, усередині дроту з нормального металу, що з'єднує два однакових надпровідника з s^{+-}-спаровуванням. Параметри вказані на вставці, де $\tilde{\Delta}_\lambda = \Delta_\lambda/\varepsilon_{\mathrm{Th}}$.

2.1.3. Джозефсонівський струм

Далі ми будемо вивчати залежність джозефсонівського струму у $s|n|s^{+-}$ та $s^{+-}|n|s^{+-}$ ланцюгах від різниці фаз φ між надпровідниками. Для отримання аналітичних результатів ми розглянемо наближення довгих та коротких ланцюгів, а також низької прозорості границь.

2.1.3.1. Наближення довгих $s|n|s^{+-}$ ланцюгів

При наявності градієнта надпровідної фази в дроті знаходження аналітичного розв'язку рівнянь Узаделя представляє складну технічну проблему. Але для наближення довгих ланцюгів, $L \gg \sqrt{D/T}$, розрахунок джозефсонівського струму значно спрощується. У цьому випадку можна у головному порядку знехтувати взаємним впливом надпровідників та шукати аномальну функцію Гріна у вигляді суперпозиції [144]

$$F = e^{i\varphi/2}\sin\theta^{+} + e^{-i\varphi/2}\sin\theta^{-}, \tag{2.24}$$

де функції $\theta^{\pm}$ задовольняють рівнянню, аналогічному (2.17),

$$\frac{d^2\theta^{\pm}}{d\xi^2} - \frac{2\omega}{\varepsilon_{\mathrm{Th}}}\sin\theta^{\pm} = 0, \tag{2.25}$$

де $\theta^{\pm}(\xi)$ прямує до 0, коли ξ віддаляється від $\pm 1/2$ відповідно. За цих умов знаходимо $\theta^{\pm}(\xi)$:

$$\mathrm{tg}[\theta^{\pm}(\xi,\omega)/4] = \mathcal{B}_{\pm}(\omega)\exp[\pm(\xi \mp 1/2)L/\xi_{\omega}], \tag{2.26}$$

де $\xi_{\omega} = \sqrt{D/2\omega}$ – довжина когерентності у нормальному металі. Коефіцієнти інтегрування $\mathcal{B}_{\pm}$ повинні бути знайдені з граничних умов (2.8) на обох границях. Їх можна звести до алгебраїчних рівнянь:

$$4\mathcal{G}_{\pm}(\mathcal{B}_{\pm} - \mathcal{B}_{\pm}^3) - \mathcal{F}_{\pm}(1 - 6\mathcal{B}_{\pm}^2 + \mathcal{B}_{\pm}^4) = \pm 2(L/\xi_{\omega})(\mathcal{B}_{\pm} + \mathcal{B}_{\pm}^3), \tag{2.27}$$

де функції $\mathcal{G}_{+}$ та $\mathcal{F}_{+}$ визначені рівнянням (2.21) для s^{+-}-надпровідника справа, а

$$\mathcal{G}_{-} = \frac{1}{\gamma_0}\cos\theta_0, \quad \mathcal{F}_{-} = \frac{1}{\gamma_0}\sin\theta_0, \tag{2.28}$$

для звичайного s-надпровідника зліва. Знаходячи $\mathcal{B}_{\pm}$, ми отримуємо джозефсонівський струм у вигляді

$$I(\varphi) = I_C\sin\varphi, \qquad eI_CR_N = 128\pi T\sum_{\omega>0}\frac{L}{\xi_{\omega}}\mathcal{B}_R(\omega)\mathcal{B}_L(\omega)e^{-L/\xi_{\omega}}, \tag{2.29}$$

який можна застосувати в широкому діапазоні температур $\varepsilon_{\mathrm{Th}} \ll T \lesssim |\Delta_{\lambda}|$.

При найнижчих температурах, $T \lesssim \varepsilon_{\mathrm{Th}}$, співвідношення між струмом та фазою в рівнянні (2.29) відхиляється від простого синусоїдального, оскільки використане наближення (2.24) для аномальної функції Гріна F не дозволяє враховувати взаємний вплив надпровідників. На жаль, аналітичний розрахунок $I(\varphi)$ в цьому випадку неможливий, однак з рівняння (2.29) можна оцінити величину критичного струму як $eI_C R_N \sim \varepsilon_{\mathrm{Th}}$.

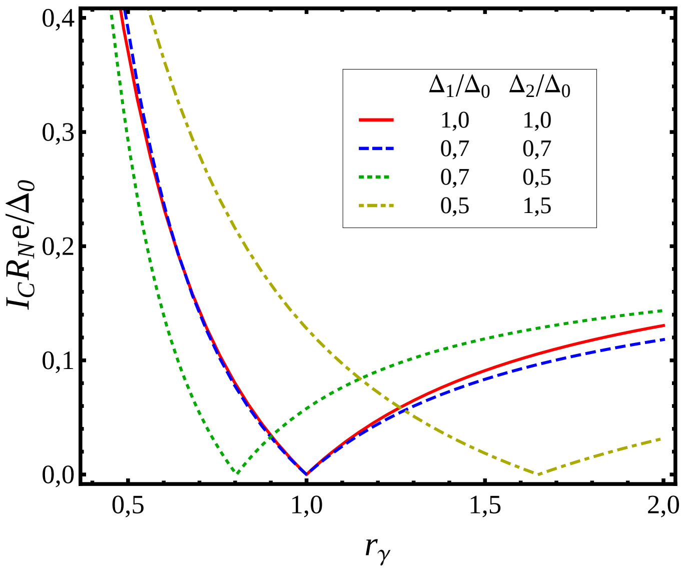


Рис. 2.3. Критичний струм I_C для $s|n|s^{+-}$ ланцюга, див. рівняння (2.29), як функція відношення опорів на границі $r_\gamma = \gamma_1/\gamma_2$. Параметри: $T = 0{,}5\Delta_0$, $\gamma_1 = \gamma_0 = 5$, $L/\xi_{\pi T} = 2$.

На рис. 2.3 зображено критичний струм I_C з рівняння (2.29) як функцію співвідношення опорів на границі $r_\gamma = \gamma_1/\gamma_2$. Відомо, що для звичайних надпровідників I_C монотонно спадає, однак критичний струм в $s|n|s^{+-}$ ланцюзі виявляє так зване 0–π перемикання [141], коли $I_C(r_\gamma)$ проходить через 0. Подібна поведінка може виникати у звичайних $s|f|s$ ланцюгах [2, 145], де проміжок між надпровідниками зроблено із феромагнетика.

Якщо ж ми використаємо феромагнітний дріт у $s|f|s^{+-}$ ланцюзі, то вказаний ефект може бути істотно посилений. Для отримання аналітичного результату розглянемо рівняння Узаделя (2.5), в якому включено обмінний потенціал h. У цьому випадку у рівнянні (2.5) треба замінити $\omega \to \omega + ih\,\mathrm{sign}(\omega)$ [2, 145]. Розв’язуючи його у лінійному наближенні, $|\theta| \ll 1$, та використовуючи припущення (2.24), ми знаходимо струм у вигляді $I(\varphi) = I_C \sin\varphi$, де

$$eI_C R_N = 4\pi T \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{(L/\xi_{|\omega|})(\mathcal{F}_+\mathcal{F}_-/\mathcal{G}_+\mathcal{G}_-)/\operatorname{ch}(L/\xi_{|\omega|})}{(1+\Gamma_\omega^2)\operatorname{th}(L/\xi_{|\omega|}) + \Gamma_\omega \mu_\omega}. \tag{2.30}$$

Тут $\mathcal{G}_\pm$ та $\mathcal{F}_\pm$ визначені так само, як у рівнянні (2.27), та

$$\Gamma_\omega = L/2\xi_{|\omega|}\sqrt{\mathcal{G}_+\mathcal{G}_-}, \quad \mu_\omega = (\mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-)/\sqrt{\mathcal{G}_+\mathcal{G}_-}. \tag{2.31}$$

Рівняння (2.30) є узагальненням аналогічної формули для $s|f|s$ ланцюга, отриманої А. Буздіним [145], на надпровідник з двокомпонентним параметром порядку. На рис. 2.4 показано залежність критичного струму як функцію r_γ з двома нулями, тобто подвійне 0–π перемикання. Таке специфічне явище пов'язане зі сполученням феромагнетика та надпровідника з s^{+-}-спаровуванням.

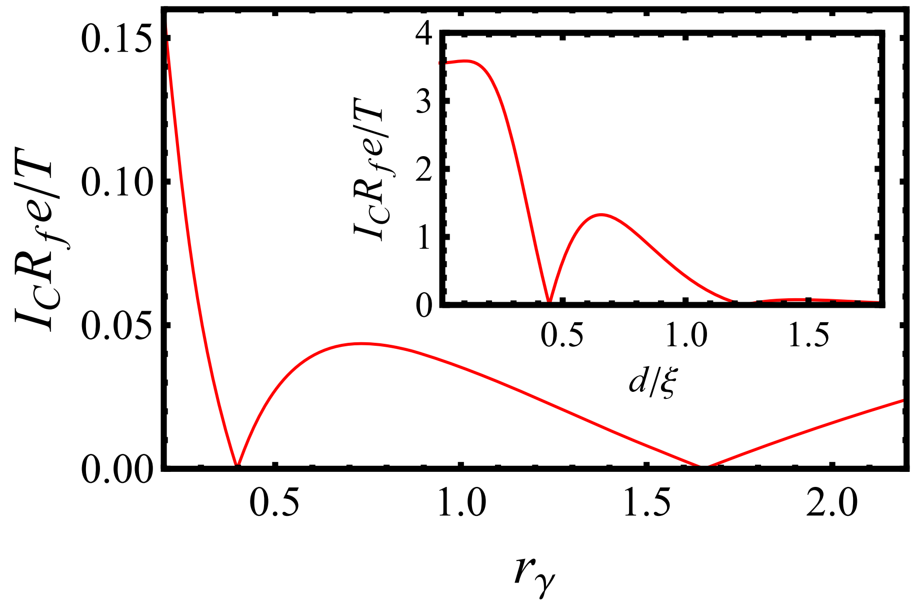


Рис. 2.4. Критичний струм I_C для $s|f|s^{+-}$ ланцюга, див. рівняння (2.30), як функція відношення опорів на границі $r_\gamma = \gamma_1/\gamma_2$. Параметри: $T = 0{,}3\Delta_0$, $\Delta_1 = 0{,}5\Delta_0$, $\Delta_2 = 1{,}5\Delta_0$, $h = 3\Delta_0$, $\gamma_1 = \gamma_0 = 5$, $L/\xi_{\pi T} = 2$.

2.1.3.2. Наближення низької прозорості границь у $s^{+-}|n|s^{+-}$ ланцюгах

У джозефсонівському переході з надзвичайно низькою прозорістю границі, коли $\gamma_\lambda \gg 1$, можна обійти необхідність вирішення рівняння Узаделя у провіднику, оскільки струм в першу чергу визначається інтерфейсом. Надпровідна фаза змінюється на границі і залишається майже нулем всередині дроту, тоді як функція θ є приблизно константою. Оскільки $j_\omega \propto \gamma^{-1} \ll 1$, то у головному порядку можна використовувати $\psi_{R,L} = 0$ в рівняннях (2.7) і (2.10) та $\theta'_{R,L} = 0$ в рівняннях (2.8) і (2.13). Зауважимо, що довжина дроту передбачається не занадто великою, $L \lesssim \sqrt{D/T}$, інакше ми повинні враховувати зміну функції θ, див. підпункт 2.1.3.1.

Ці наближення дозволяють знайти спектральний струм (2.6) у симетричній геометрії для $s^{+-}|n|s^{+-}$ ланцюга:

$$j_\omega = \mathcal{F}^2 \sin\varphi \left[\mathcal{G}^2 + \mathcal{F}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right]^{-1/2}, \tag{2.32}$$

де величини $\mathcal{F}$ та $\mathcal{G}$ визначені у (2.21). Тоді ми отримуємо джозефсонівський струм, залежність якого від різниці надпровідних фаз відрізняється від синусоїдального закону:

$$eI(\varphi)R_N = 2\pi T \sin\varphi \sum_\omega \mathcal{F}^2 \left[\mathcal{G}^2 + \mathcal{F}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right]^{-1/2}. \tag{2.33}$$

Цікаво, що в наближенні нульової температури та для рівних щілин $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$ навіть сума по мацубаровським частотам може бути обчислена в замкнутій формі, і ми знаходимо джозефсонівський струм у наступному вигляді:

$$eI(\varphi)R_N = \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2 \Delta \sin\varphi}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)} K\left[1 - \left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}\right)^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}\right], \tag{2.34}$$

де $K(x)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду. У додатковому припущенні

$\gamma_2 = \gamma_1$, тобто у ланцюзі з однаковими опорами для обох компонент надпровідного конденсату, джозефсонівський струм зникає, оскільки дві компоненти, фази яких відрізняються на π, компенсують одна одну. Зауважимо, що врахування міжзонного розсіювання може призвести до додаткових ненульових вкладів, див., наприклад, [146].

2.1.3.3. Наближення коротких $s|n|s^{+-}$ ланцюгів

Можливо отримати аналітичні результати також для наближення коротких ланцюгів при $L \ll \xi_{\omega=\Delta_\lambda}$. У цьому випадку в рівняннях Узаделя (2.5) та (2.6) градієнтні доданки є основними. Виключаючи з першого з них функцію ψ, отримуємо

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = j_\omega \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}. \tag{2.35}$$

Незважаючи на те, що останнє рівняння є нелінійним, ми можемо знайти його розв'язок $\theta(\xi)$, а потім і $\psi(\xi)$ в аналітичній формі:

$$\cos\theta(\xi) = \cos\theta_0 \cos\frac{j_\omega(\xi - \xi_0)}{\sin\theta_0}, \tag{2.36}$$

$$\mathrm{tg}\left[\psi(\xi) - \psi_0\right] = \frac{1}{\sin\theta_0}\,\mathrm{tg}\,\frac{j_\omega(\xi - \xi_0)}{\sin\theta_0}, \tag{2.37}$$

де ξ_0, θ_0 та ψ_0 — константи інтегрування.

Підставимо ці розв'язки до граничних умов (2.7), (2.8), (2.12) та (2.13) для несиметричного $s|n|s^{+-}$ ланцюга, виключимо невідомі константи інтегрування ξ_0, θ_0 і ψ_0 та отримаємо вираз для j_ω, який у свою чергу визначить остаточний вираз для джозефсонівського струму:

$$eI(\varphi)R_N = 4\pi T \sum_\omega \frac{\mathcal{A}^2(\varphi)\sin\varphi}{\mathcal{F}_R^{-1} + \mathcal{F}_L^{-1}} \left[\mathcal{A}^2(\varphi) + \frac{(\mathcal{G}_R - \mathcal{G}_L)^2}{(\mathcal{F}_R - \mathcal{F}_L)^2}\right]^{-1/2} \tag{2.38}$$

де константи $\mathcal{G}_\pm$ та $\mathcal{F}_\pm$ визначені так само, як у рівняннях (2.27) та (2.28), та

$$\mathcal{A}(\varphi) = \left[\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{(\mathcal{F}_R - \mathcal{F}_L)^2}{(\mathcal{F}_R + \mathcal{F}_L)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{-1/2}. \tag{2.39}$$

Характерною ознакою струму в рівнянні (2.38) є те, що $I(\varphi)$ змінює свій знак між $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$, як показано на рис. 2.5. Звідси випливає, що такий ланцюг може використовуватись як фазоінвертор в надпровідних схемах. Зауважимо, що така особливість поведінки $I(\varphi)$ не є унікальною для надпровідників з s^{+-}-спаровуванням і може бути реалізована в інших складних гібридних схемах із звичайними надпровідниками [2].

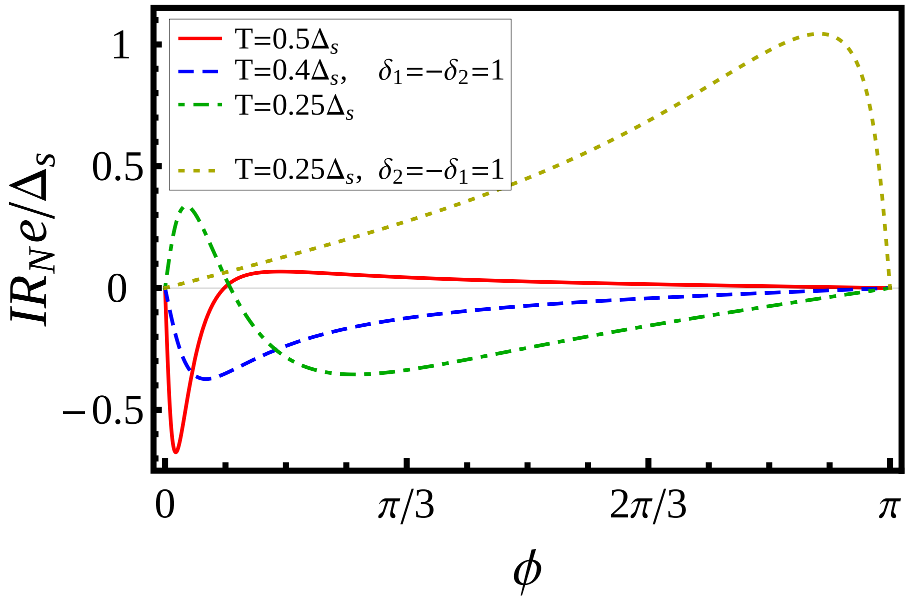


Рис. 2.5. Залежність джозефсонівського струму від різниці фаз для короткого $s|n|s^{+-}$ ланцюга. Параметри: $\Delta_1 = 0{,}5\Delta_0$, $\Delta_2 = 1{,}5\Delta_0$, $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = 2{,}4$, $\gamma_2 = 1{,}8$.

2.2. Багатократні андреєвські та нормальні відбиття у двовимірному топологічному ізоляторі

2.2.1. Двовимірний топологічний ізолятор

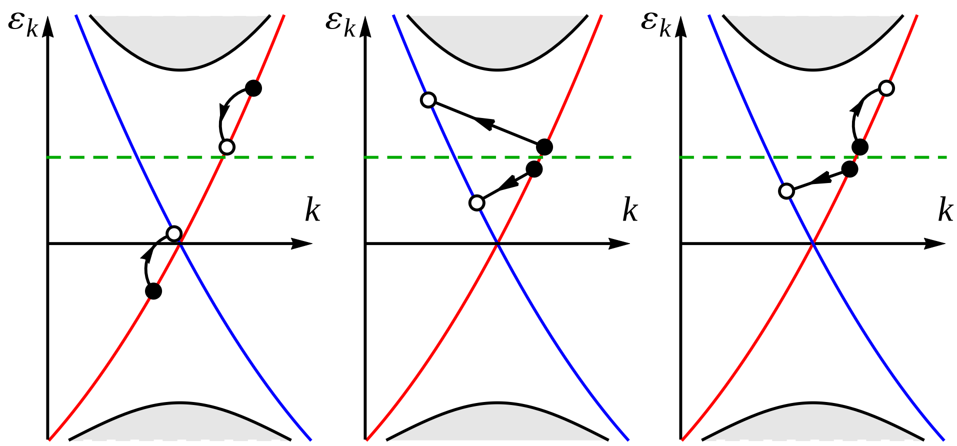
Топологічні ізолятори — це нові матеріали, які не є звичайними ізоляторами та напівпровідниками. Вони представляють собою ізолятори всередині та можуть проводити струм за рахунок специфічних крайових станів [4]. Вперше такий стан речовини був винайдений у 1980 р. [147] у квантовому ефекті Холла, де спостерігалося точне квантування провідності. Це явище пояснюється тим, що провідність є топологічним інваріантом, який може приймати цілі значення лише в одиницях e^2/h, незалежно від виду матеріалу [148,149]. Але через майже 30 років виявилося, що такий стан речовини може бути створений без використання магнітного поля. Це було підтверджено експериментально в гетероструктурах $\mathrm{HgTe/HgCdTe}$ та $\mathrm{InAs/GaSb}$ з крайовими станами [150, 151]. Ці крайові стани у двовимірному топологічному ізоляторі поширюються у взаємно протилежних напрямах і несуть протилежні спини. Така кореляція між напрямком руху та орієнтацією спину сприяла виникненню терміна — спіральна електронна рідина [152].

За рахунок симетрії обернення часу спіральні стани мають такий самий топологічний захист від пружного зворотнього розсіювання електрона на немагнітній домішці, як і у квантовому ефекті Холла. Тому і в топологічному ізоляторі провідність повинна приймати цілі значення в одиницях e^2/h. Однак були виявлені відхилення від цього значення: провідність зменшується при збільшенні розміру системи [153, 154], що передбачає наявність непружного розсіювання електронів. Ці дослідження привернули увагу і викликали безліч пропозицій для можливих механізмів розсіювання, що впливають на ідеально-балістичний транспорт у топологічному ізоляторі [4].

Найбільш очевидна причина для зворотного розсіювання окремих електронів обумовлена магнітними домішками, які можуть перевертати спини і тим самим викликати переходи між зустрічними крайовими станами. Також відбиття від домішок може виникнути безпосередньо в результаті застосування магнітного поля, коли порушена симетрія обернення часу. У дисертації ми не будемо розглядати такі магнітні розсіювання. Якщо ж симетрія обернення часу зберігається, то непружні процеси в головному порядку пов'язані зі зворотнім розсіюванням електронних пар [152, 155, 156]. Це можуть бути або процес перекиду (umklapp), або процес зворотнього розсіювання двох електронів на домішках без збереження імпульсу.

Ці процеси схематично зображені на рис. 2.6 на панелях (a) та (b) відповідно. Процес перекиду має експоненційно малу швидкість, яка пропорційна $e^{-E_F/T}$ в загальному випадку, та швидкість, яка пропорційна T^5, коли енергія Фермі E_F знаходиться у безпосередній близькості до точки Дірака. Розсіювання на домішках є менш чутливим до положення рівня Фермі та його швидкість пропорційна T^6 при слабкій взаємодії [152].

Вищезазначені процеси мають місце у спіральних електронних рідинах із додатковою симетрією, яка зберігає напрямок спіну. У випадку, коли така симетрія відсутня, наприклад, за наявності спін-орбітальної взаємодії, спін обертається з імпульсом [157–159]. Цей механізм відкриває новий канал для непружного розсіювання, а саме, зворотне розсіювання електрона на домішках без збереження імпульсу, що супроводжується збудженням електрон-діркової пари (див. панель (c) на рис. 2.6). Швидкість цього процесу при слабкій взаємодії пропорційна T^4. У дисертації ми будемо розглядати саме цей процес, оскільки при низьких температурах він має найбільшу швидкість.



(a) (b) (c)

Рис. 2.6. Діаграма, що представляє зворотні процеси розсіювання електронів у крайових станах у двовимірному топологічному ізоляторі: процес перекиду (umklapp) — панель (a), процес зворотнього розсіювання двох електронів на домішках без збереження імпульсу — панель (b) та процес зворотнього розсіювання електрона на домішках без збереження імпульсу, що супроводжується збудженням електрон-діркової пари — панель (c).

У праці [158] виведений ефективний гамільтоніан, відповідний цьому процесу розсіювання,

$$H_{\text{eff}} = H_0 + V_{\text{eff}} \cdot \Big(\sum_{\alpha=\pm} \sum_{k,k',q} \frac{k-k'}{k_F} \psi^\dagger_{\alpha,k+q} \psi^\dagger_{-\alpha,k'-q} \psi_{\alpha,k'} \psi_{\alpha,k} + \text{h.c.} \Big), \tag{2.40}$$

$$H_0 = \sum_{\alpha=\pm} \sum_k \varepsilon_{\alpha k} \psi^\dagger_{\alpha,k} \psi_{\alpha,k}, \quad \varepsilon_{\alpha k} = \alpha v_F k, \tag{2.41}$$

$$V_{\text{eff}} = 4(k_F/k_0)^2 [U(0) + U(2k_F)] V(2k_F)/(L^2 \varepsilon_F), \tag{2.42}$$

де $\varepsilon_{\alpha k}$ — енергія електрона зі спіральністю α та імпульсом k; $U(q)$ и $V(q)$ — Фур'є-перетворення кулонівського і домішкового потенціалів відповідно; L — розмір системи; v_F, k_F і $\varepsilon_F = v_F k_F$ — швидкість, імпульс і енергія Фермі відповідно.

Звернімо увагу на те, що оператори спіральних станів $\psi_{\pm,k}$ не є операторами електронних станів з певним спіном $\psi_{\uparrow\downarrow,k}$ внаслідок спін-орбітальної взаємодії. При досить малих імпульсах $k \approx k_F \ll k_0$, цей зв'язок може бути записаний [158] в наступному вигляді,

$$\psi_{\uparrow,k} = \psi_{+,k} - \gamma \psi_{-,k}, \quad \psi_{\downarrow,k} = \psi_{-,k} + \gamma \psi_{+,k}, \tag{2.43}$$

де $\gamma = k_F^2/k_0^2$ — параметр спін-орбітальної взаємодії, і k_0 характеризує масштаб, на якому вісь квантування спина обертається з імпульсом k.

2.2.2. Модель

Розглянемо двовимірний топологічний ізолятор, ділянка краю якого обмежена двома надпровідними електродами, до яких прикладено напругу V (див. рис. 2.7). Ми припускаємо, що завдяки ефекту близькості електроди індукують надпровідний стан на ділянці довжини l на краю топологічного ізолятору. Ця довжина визначається літографічною товщиною надпровідних електродів, і ми будемо вважати її порядку або у кілька разів більше, ніж надпровідна довжина когерентності $\xi = v_F/\Delta$, де Δ — ширина енергетичної щілини в надпровідниках. Відстань L між надпровідниками вважається досить великою, $L \gg l, \xi$, щоб не враховувати до розгляду ефект Джозефсона.

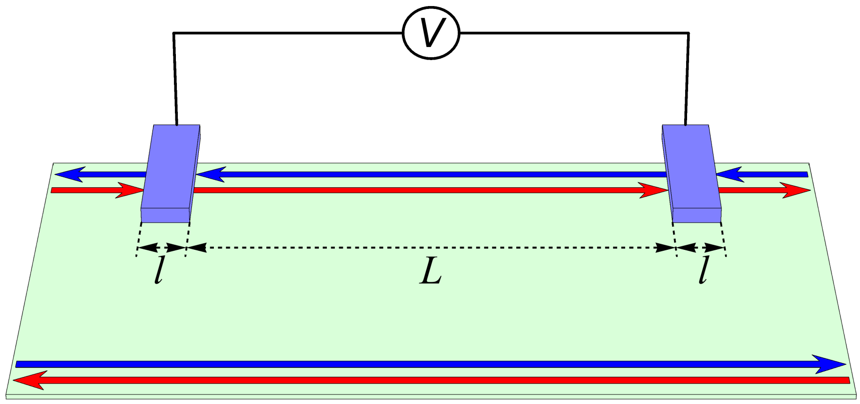


Рис. 2.7. Схематичне зображення ділянки топологічного ізолятора довжини L і двох надпровідних контактів довжини l, між якими прикладено напругу V.

Електронний транспорт між двома надпровідними контактами, з'єднаними провідником, визначається ефектом багатократних андреєвських відбиттів, див. підрозділ 1.1.3. У дисертації ми вивчаємо цей ефект у топологічному ізоляторі, де окрім андреєвських враховані і нормальні відбиття, а також розсіювання на домішках, які визначаються ефективним гамільтоніаном (2.40). Для докладного опису цього транспортного ефекту зручно ввести в розгляд функції розподілу $f_\varepsilon^\pm(x)$ електронів за енергією ε, де координата x змінюється від 0 на лівому контакті до L на правому контакті. Верхні індекси «$+$» і «$-$» позначають спіральність, тобто напрямок руху і жорстко прив'язаний до нього напрямок спину, зліва направо або справа наліво відповідно. Тут енергію ε у нижньому індексі функції розподілу ми для зручності подальшого викладу будемо відраховувати від середнього значення між рівнями Фермі в надпровідних контактах.

Оскільки у дисертації ми розглядаємо надпровідні контакти скінченної ширини l, то електрон, крім відбиття, може з певною ймовірністю пройти крізь контакт. Позначаючи коефіцієнт андреєвського і нормального відбиттів через $\mathcal{A}_\varepsilon$ та $\mathcal{R}_\varepsilon$ відповідно, ми можемо записати рівняння, яким підкоряються функції розподілу на границі «топологічний ізолятор – надпровідний контакт»,

$$f^+_{\varepsilon-u}(0) = \mathcal{A}_\varepsilon[1 - f^-_{-\varepsilon-u}(0)] + \mathcal{R}_\varepsilon f^-_{\varepsilon-u}(0) + \mathcal{T}_\varepsilon f^0_\varepsilon, \tag{2.44}$$

$$f^-_{\varepsilon+u}(L) = \mathcal{A}_\varepsilon[1 - f^+_{-\varepsilon+u}(L)] + \mathcal{R}_\varepsilon f^+_{\varepsilon+u}(L) + \mathcal{T}_\varepsilon f^0_\varepsilon, \tag{2.45}$$

де $\mathcal{T}_\varepsilon = 1 - \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{R}_\varepsilon$ позначає ймовірність електрона пройти наскрізь надпровідний контакт, $f^0_\varepsilon = [1 + \exp(\varepsilon/T)]^{-1}$ — рівноважний розподіл Фермі, T — температура та $u = eV/2\Delta$.

На рис. 2.8 схематично представлено процес відбиття на контактах, описаний рівняннями (2.44) та (2.45). Перший член у правій частині цих рівнянь відповідає андреєвському відбиттю з ймовірністю $\mathcal{A}_\varepsilon$, коли дірка з енергією $-\varepsilon$ буде відбита у вигляді електрона з енергією ε. Другий доданок враховує ймовірність $\mathcal{R}_\varepsilon$ того, що електрон відбивається, зберігаючи енергію. Нарешті, останній доданок показує, що електрони з зовнішньої частини края топологічного ізолятора можуть проникати у ділянку між контактами з імовірністю $\mathcal{T}_\varepsilon$.

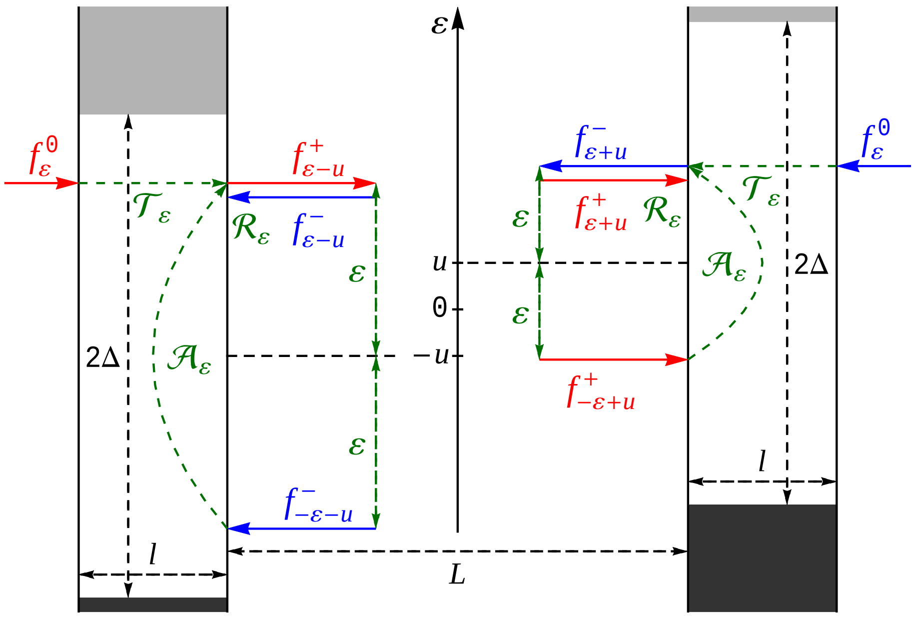


Рис. 2.8. Схематичне зображення процесів андреєвського та нормального відбиттів і наскрізного проходження у системі двох надпровідних контактів.

Для визначення варіації функцій $f^\pm_\varepsilon(x)$ між контактами ми скористаємося рівнянням Больцмана,

$$\pm L \frac{df_\varepsilon^\pm(x)}{dx} = \lambda I_\varepsilon^\pm(x), \tag{2.46}$$

де безрозмірний параметр

$$\lambda = 4(2\Delta/k_0 v_F)^4 [U(0) + U(2k_F)]^2 V^2(2k_F)/v_F^4, \tag{2.47}$$

що визначає силу розсіювання, та безрозмірний інтеграл зіткнень

$$I_\varepsilon^\pm = \sum_{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \mp} \iint \frac{d\varepsilon_1}{2\pi} \frac{d\varepsilon_2}{2\pi} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1 \pm \alpha \varepsilon_2)^2}{\Delta^4} [f_\varepsilon^\pm f_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}^\alpha g_{\varepsilon - \varepsilon_2}^\beta g_{\varepsilon_1}^\gamma - g_\varepsilon^\pm g_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}^\alpha f_{\varepsilon - \varepsilon_2}^\beta f_{\varepsilon_1}^\gamma], \tag{2.48}$$

визначаються ефективним гамільтоніаном (2.40). Тут для зручності позначено $g_\varepsilon^\pm = 1 - f_\varepsilon^\pm$.

2.2.3. Андреєвські та нормальні відбиття

Для ідеальних крайових станів з додатковою спіновою симетрією коефіцієнт нормального відбиття $\mathcal{R}_\varepsilon$ тотожно рівний нулю. Дійсно, в процесі нормального відбиття електрон змінює напрям поширення, але зберігає спін, що неможливе для ідеального крайового стану. Однак для спіральної електронної рідини з спін-орбітальною взаємодією очікується, що існує ймовірність нормального відбиття. У даній дисертації ми будемо розраховувати ймовірності андреєвського та нормального відбиттів, спираючись на рівняння Боголюбова – де Жена (1.20), які з урахуванням спін-орбітальної взаємодії (2.43) можуть бути записані у наступному вигляді:

$$\Big(\varepsilon + iv_F\frac{d}{dx}\Big)\psi_{+,\varepsilon}(x) = \Delta[\psi^{\dagger}_{-,-\varepsilon}(x) + \gamma\psi_{+,-\varepsilon}(x)], \tag{2.49}$$
$$\Big(-\varepsilon - iv_F\frac{d}{dx}\Big)\psi^{\dagger}_{-,-\varepsilon}(x) = \Delta[\psi_{+,\varepsilon}(x) - \gamma\psi^{\dagger}_{-,\varepsilon}(x)], \tag{2.50}$$
$$\Big(-\varepsilon + iv_F\frac{d}{dx}\Big)\psi_{+,-\varepsilon}(x) = \Delta[\psi^{\dagger}_{-,\varepsilon}(x) + \gamma\psi_{+,\varepsilon}(x)], \tag{2.51}$$
$$\Big(\varepsilon - iv_F\frac{d}{dx}\Big)\psi^{\dagger}_{-,\varepsilon}(x) = \Delta[\psi_{+,-\varepsilon}(x) - \gamma\psi^{\dagger}_{-,-\varepsilon}(x)]. \tag{2.52}$$

Система цих рівнянь заплутує між собою чотири оператори спіральних станів в топологічному ізоляторі: $\psi_{+,\pm\varepsilon}(x)$ електронів зі спіральністю «+» і з енергією $\pm\varepsilon$ та $\psi^{\dagger}_{-,\mp\varepsilon}(x)$ дірок зі спіральністю «−» і з енергією $\mp\varepsilon$.

Для обчислення коефіцієнтів андреєвського $\mathcal{A}_\varepsilon$ і нормального $\mathcal{R}_\varepsilon$ відбиттів ми розглянемо ділянку топологічного ізолятору поблизу лівого надпровідного контакту та виділимо три її частини: нормальна область з $\Delta = 0$ при $x < -l$, надпровідна область з $\Delta \neq 0$ при $-l < x < 0$ та нормальна область з $\Delta = 0$ при $x > 0$. Вирішуючи систему (2.49)–(2.52) для кожної ділянки окремо, ми, з огляду на безперервність функцій $\psi(x)$ на границях, можемо визначити коефіцієнти андреєвського і нормального відбиттів:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_\varepsilon = \Theta\{\mathrm{Re}^2[(1+i\gamma)k_\varepsilon \operatorname{ctg}(k_\varepsilon l/\xi)] + (\varepsilon/\Delta)^2\},\\
&\mathcal{R}_\varepsilon = \Theta(\varepsilon/\Delta)^2\mathrm{Im}^2[k_\varepsilon \operatorname{ctg}(k_\varepsilon l/\xi)],\\
&\Theta = 4\left\{(\varepsilon/\Delta)^2 + (1+\gamma^2) + |k_\varepsilon^2|\big[|1+\operatorname{ctg}^2(k_\varepsilon l/\xi)| + |\operatorname{ctg}^2(k_\varepsilon l/\xi)|\big]\right\}^{-2},
\end{aligned} \tag{2.53}$$

де $k_\varepsilon = [(\varepsilon/\Delta)^2 - (1-i\gamma)^2]^{1/2}$ — безрозмірний хвильовий вектор спіральних станів в надпровідному контакті.

У випадку відсутності спін-орбітальної взаємодії, $\gamma = 0$, відсутнє нормальне відбиття, $\mathcal{R}^{(0)}_\varepsilon = 0$, а коефіцієнт андреєвського відбиття $\mathcal{A}^{(0)}_\varepsilon$ описується наступним виразом:

$$\mathcal{A}^{(0)}_\varepsilon = [(\varepsilon/\Delta)^2 + k_\varepsilon^2 \operatorname{ctg}^2(k_\varepsilon l/\xi)]^{-1}, \tag{2.54}$$

де $k_\varepsilon = [(\varepsilon/\Delta)^2 - 1]^{1/2}$.

На рис. 2.9 зображено залежність коефіцієнту андреєвського відбиття $\mathcal{A}_\varepsilon^{(0)}$ від енергії ε для декількох значень довжини надпровідної області l. Слід звернути увагу на те, що для енергій нижче надпровідної щілини, $|\varepsilon| < \Delta$, та широкого надпровідника $l \gg \xi$ коефіцієнт андреєвського відбиття $\mathcal{A}_\varepsilon^{(0)}$ є майже 1. Для більш вузького надпровідника з $l \sim \xi$ квазічастинка може пройти наскрізь і, таким чином, зменшити абсолютні значення $\mathcal{A}_\varepsilon^{(0)}$. Для енергій поза надпровідною щілиною, $|\varepsilon| > \Delta$, k_ε^2 стає негативним та $\mathcal{A}_\varepsilon^{(0)}$ осцилює з енергією.

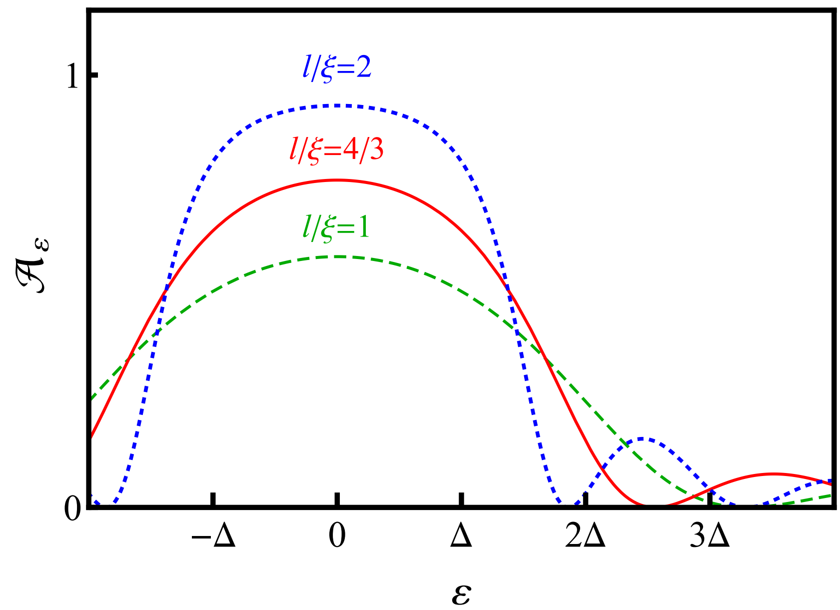


Рис. 2.9. Залежність коефіцієнту андреєвського відбиття $\mathcal{A}_\varepsilon$ від енергії ε для декількох значень довжини надпровідної області l при відсутності спін-орбітальної взаємодії, $\gamma = 0$.

Зауважимо, що величина коефіцієнта нормального відбиття залежить від величини спін-орбітальної взаємодії γ та може бути оцінена [160] як $\mathcal{R}_\varepsilon/\mathcal{A}_\varepsilon \lesssim 10^{-1}$. У подальших розрахунках ми залишаємо γ змінним параметром, величина якого приймає значення $\gamma \sim 10^{-1}$. На рис. 2.10 зображено залежність коефіцієнта нормального відбиття $\mathcal{R}_\varepsilon$ від енергії ε для декількох значень спін-орбітальної взаємодії γ при ширині надпровідних контактів $l/\xi = 4/3$.

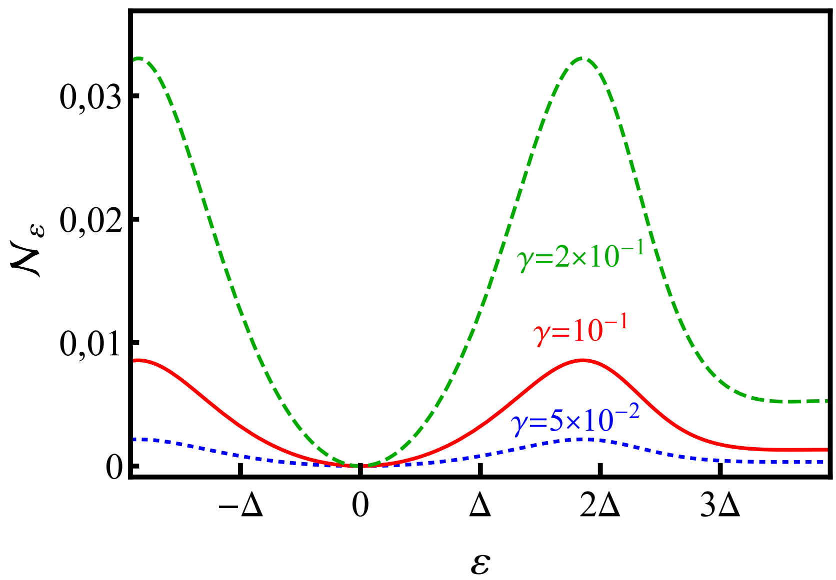


Рис. 2.10. Залежність коефіцієнта нормального відбиття $\mathcal{R}_\varepsilon$ від енергії ε для декількох значень спін-орбітальної взаємодії γ при ширині надпровідних контактів $l/\xi = 4/3$.

2.2.4. Нерівноважні функції розподілу

Рівняння Больцмана (2.46) спільно з граничними умовами (2.44) та (2.45) дозволяють визначити функції розподілу $f_\varepsilon^\pm(x)$ у топологічному ізоляторі. У дисертації ми представимо чисельну схему вирішення цього завдання для малих значень параметрів розсіювання λ і спін-орбітальної взаємодії γ.

2.2.4.1. Наближення ідеальної спіральної електронної рідини

Спочатку вирішимо задачу аналітично для ідеальної спіральної електронної рідини при $\gamma = 0$ та $\lambda = 0$. У цьому випадку функції розподілу $f_\varepsilon^\pm(x)$ виявляються незалежними від координати x, оскільки немає розсіювання електронів усередині топологічного ізолятора, тобто $f_\varepsilon^\pm(0) = f_\varepsilon^\pm(L)$. Оскільки нормальне відбиття відсутнє, $N_\varepsilon^{(0)} = 0$, ми можемо взаємно виключити з рівнянь (2.44) та (2.45) функції $f_\varepsilon^\pm$ та отримати наступні рекурентні співвідношення:

$$f_\varepsilon^+ = \mathcal{A}_{\varepsilon+u}[\mathcal{A}_{\varepsilon+3u} f_{\varepsilon+4u}^+ + \mathcal{T}_{\varepsilon+3u} f_{\varepsilon+3u}^0] + \mathcal{T}_{\varepsilon+u} f_{\varepsilon+u}^0, \tag{2.55}$$

$$f_\varepsilon^- = \mathcal{A}_{\varepsilon-u}[\mathcal{A}_{\varepsilon-3u} f_{\varepsilon-4u}^- + \mathcal{T}_{\varepsilon-3u} f_{\varepsilon-3u}^0] + \mathcal{T}_{\varepsilon-u} f_{\varepsilon-u}^0. \tag{2.56}$$

Тут ми скористалися парністю ймовірності андреєвського відбиття як функції енергії, $\mathcal{A}_{-\varepsilon} = \mathcal{A}_\varepsilon$, та співвідношенням між електронами та дірками, $f_{-\varepsilon}^\pm = 1 - f_\varepsilon^\pm$. З цих співвідношень ми отримуємо результат у замкненій формі:

$$f_\varepsilon^\pm = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\prod_{m=0}^{l-1} \mathcal{A}^{(0)}_{\varepsilon\pm(2m+1)u} \right] \mathcal{T}^{(0)}_{\varepsilon\pm(2l+1)u} f^0_{\varepsilon\pm(2l+1)u}. \tag{2.57}$$

Цей результат збігається з відомим результатом (1.22) для з'єднання надпровідників за допомогою чистого металу [94].

На рис. 2.11 зображені нерівноважні функції розподілу $f_\varepsilon^\pm$ у випадку ідеальної спіральної електронної рідини для двох різних довжин l/ξ надпровідних електродів при нульовій температурі $T = 0$, коли $f_\varepsilon^0 = \theta_{-\varepsilon}$, де $\theta_{-\varepsilon}$ — функція Хевісайда. Багата структура функцій розподілу обумовлена багатократними андреєвськими відбиттями, а розриви з'являються з періодом eV, обумовленим прикладеною напругою V.

2.2.4.2. Загальний випадок

Тепер перейдемо до випадку, коли один або обидва параметри λ і γ відмінні від нуля. Далі у цьому підпункті ми розглядаємо систему одиниць, коли $\Delta = 1$. Тут ми представимо результати чисельного розв'язку рівняння Больцмана (2.46) з граничними умовами (2.44) та (2.45). Ці рівняння були розв'язані ітераційним способом, коли для початкової ітерації використовувалося балістичне наближення (2.57), а в інтегралі зіткнень (2.48) використовувалися функції розподілу з попередньої ітерації. Зауважимо, що сітку за енергіями було вибрано як $\varepsilon_n = un/n_0$, де n_0 — ціле число, що визначає щільність сітки. Така сітка зручна в тому сенсі, що якщо значення ε належить сітці, тобто $\varepsilon = \varepsilon_n$, то й інші значення в індексах функцій розподілу в рівняннях (2.44) та (2.45) також належать сітці: $\varepsilon_n \pm u = \varepsilon_{n\pm n_0}$ и $-\varepsilon_n \pm u = \varepsilon_{-n\pm n_0}$.

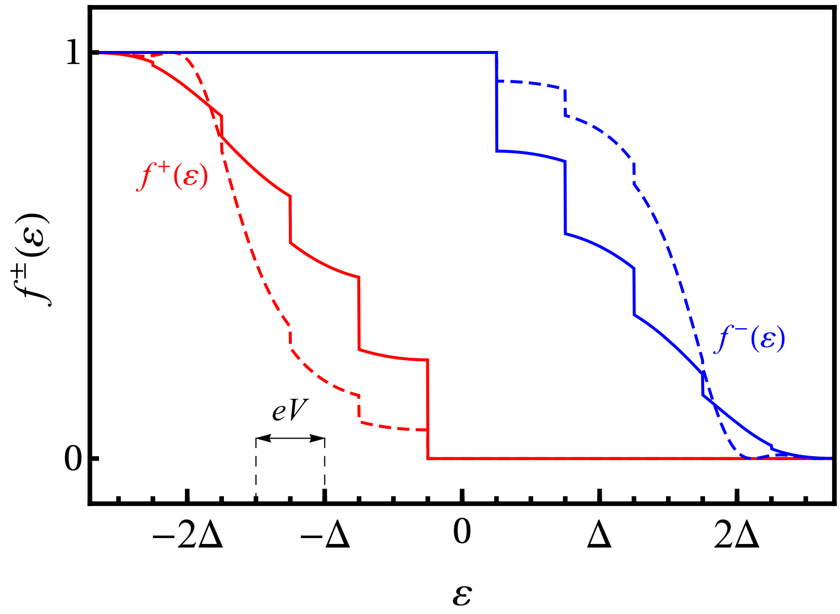


Рис. 2.11. Нерівноважні функції розподілу $f_{\varepsilon}^{\pm}$ у випадку ідеальної спіральної електронної рідини, $\lambda = 0$ та $\gamma = 0$, для двох різних довжин l/ξ надпровідних електродів при нульовій температурі $T = 0$.

В результаті було виявлено, що ненульове значення коефіцієнта нормального відбиття $\mathcal{R}_\varepsilon$ призводить до помітного зсуву розривів у функції розподілу у їх абсолютних величинах, але не в їх положеннях за енергією. Важливо відмітити, що наявність нормальних відбиттів призводить також до появи нових розривів, див. штрихову криву ($\gamma \neq 0$ та $\lambda = 0$) у порівнянні з пунктирною кривою ($\gamma = 0$ та $\lambda = 0$) на рис. 2.12. Це приводить до цікавого висновку, що, хоча специфічна структура функцій розподілу є наслідком процесів андреєвського відбиття, процеси нормального відбиття роблять цю структуру більш чіткою.

Основна роль непружного розсіювання у топологічному ізоляторі полягає в тому, що розриви у функції розподілу дещо зменшуються. Якісно це схоже з ефектом розмиття при наявності температури, але це не призводить до замивання структури розривів, див. штрих-пунктирну криву ($\lambda \neq 0$ та $\gamma = 0$) у порівнянні з пунктирною кривою ($\lambda = 0$ та $\gamma = 0$) на рис. 2.12. Зауважимо, що при відносно сильному розсіюванні, $\lambda \gtrsim 1$, та невеликій напрузі, $u \ll 1$, функція розподілу наближається до рівноважної з ефективною температурою $T_{\mathrm{eff}} \sim \Delta/\ln(\lambda/u^2) \ll \Delta$.

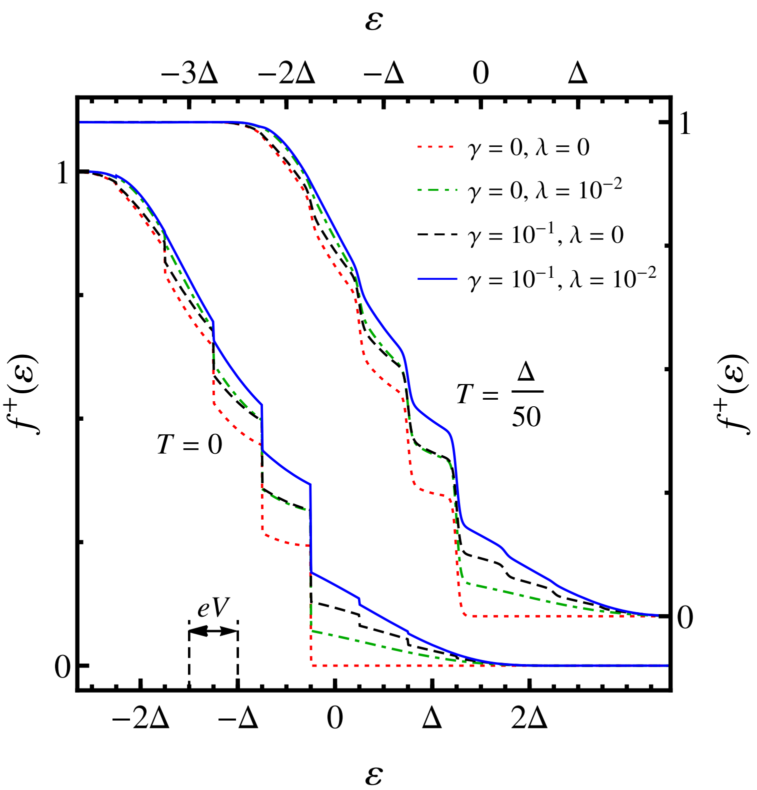


Рис. 2.12. Нерівноважні функції розподілу f_ε^+ у випадку неідеальної спіральної електронної рідини при нульовій температурі $T = 0$ (нижнє сімейство кривих, нижня та права шкали) та при кінцевій температурі $T = \Delta/50$ (верхнє сімейство кривих, верхня та ліва шкали), для надпровідних електродів з довжиною $l/\xi = 4/3$ та напруги $eV = \Delta/2$.

В залежності від співвідношення між ефектами розсіювання та нормального відбиття у функції розподілу простежуються та чи інша вищезгадані особливості або їх комбінація, див. суцільну криву ($\lambda \neq 0$ та $\gamma \neq 0$) у порівнянні з іншими на рис. 2.12. Експериментально ця функція може бути, щонайменше, якісною мірою вкладу від нормального відбиття та розсіювання в схемах, що містять топологічні ізолятори та надпровідники.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації, написаного по матеріалам праць [25–27]:

● Досліджено ефект близькості в ланцюгах, які включають звичайний надпровідник і Fe-НП, розділені нормальним або феромагнітним дротом, та отримано аналітичні вирази для залежності щільності станів від енергії та співвідношення між струмом та різницею фаз у ефекті Джозефсона, причому особлива увага приділялася виділенню ознак s^{+-}-спаровування.

● Показано, що щільність станів демонструє так звану щілину Таулеса при низьких енергіях та специфічні особливості поблизу надпровідних щілин при більш високих енергіях, а саме: замість піків для s^{++}-спаровування виявляються Фано-подібні антисиметричні особливості для s^{+-}-спаровування, що може слугувати відмінною рисою, яка можна бути ідентифікатором типу електронного спаровування в експерименті за допомогою сканувальної тунельної спектроскопії.

● Проведено аналіз співвідношень між надпровідним струмом та різницею фаз у ефекті Джозефсона та встановлено, що для різних конфігурацій ланцюга виявляє 0–π перемикання критичного струму навіть без використання феромагнетика, а при його використанні може спостерігатися подвійне 0–π перемикання.

● Виявлено, що джозефсонівський струм у ланцюгах, що містять надпровідник зі s^{+-}-спаровуванням, може змінювати знак при зміні різниці фаз між надпровідниками, що робить такі ланцюги придатними до використання, як фазоінвертори в надпровідних схемах.

● Розроблено теорію електронного транспорту у ланцюгах, які складаються з надпровідників та двовимірних топологічних ізоляторів, з урахуванням як андреєвського, так і нормального відбиття на контакті, а також електрон-електрон-домішкового розсіювання.

● За допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена отримано коефіцієнти нормального та андреєвського відбиттів, які відбуваються на границі надпровідника та двовимірного топологічного ізолятора із спін-орбітальною взаємодією.

- Складено та вирішено чисельно і аналітично рівняння для функцій розподілу електронів по енергіях і визначено якісні відмінності у впливі різних факторів на електронний транспорт в двовимірному топологічному ізоляторі.

Результати, викладені у даному розділі дисертації, можуть бути використані в експерименті для визначення мікроскопічних властивостей сучасних матеріалів – ВТНП на основі заліза та двовимірних топологічних ізоляторів.

РОЗДІЛ 3

САМОІНДУКОВАНА ПРОЗОРІСТЬ ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИКІВ

Даний розділ, заснований на статтях [30–32], присвячено дослідженню проходження електромагнітних хвиль терагерцового діапазону крізь шаруваті надпровідники, коли частота хвиль близька до джозефсонівської плазмової частоти. У цьому випадку навіть слабка нелінійність, $J_c \sin\varphi \approx J_c(\varphi - \varphi^3/6)$, призводить до сильно нелінійних ефектів (див. пункт 1.3.4). Передбачено, що коефіцієнти відбиття та прозорості можуть змінюватися в широкому діапазоні, від майже нуля до одиниці, при зміні амплітуди хвилі, що падає. Таким чином, зміна амплітуди може викликати повну прозорість шаруватого надпровідника. Крім того, залежність коефіцієнта прозорості від амплітуди хвилі має гістерезисну поведінку зі стрибками. Розглянуто наступні конфігурації шаруватого надпровідника: нескінченна пластина та зразок скінченних розмірів, який розміщено у вакуумному прямокутному хвилеводі. Вибрана така поляризація хвиль, яка не змінюється при проходженні та відбитті. Ефект крос-поляризації буде розглянутий нижче в розділі 4.

3.1. Самоіндукована прозорість пластини шаруватого надпровідника

У цьому підрозділі ми розглядаємо нескінченну пластину шаруватого надпровідника, яка опромінюється з одного боку електромагнітною хвилею, та досліджуємо коефіцієнти прозорості та відбиття цієї хвилі, а також поверхневий реактанс пластини.

3.1.1. Постановка задачі. Електромагнітне поле у вакуумі

Ми досліджуємо пластину шаруватого надпровідника товщини D, див. рис. 3.1, надпровідні шари якого паралельні поверхням пластини. Система координат вибрана таким чином, що кристалографічна площина $\mathbf{ab}$ збігається з площиною xy, а вісь $\mathbf{c}$ напрямлена вздовж осі z, причому площина $z = 0$ відповідає нижній поверхні пластини. Монохроматична електромагнітна плоска хвиля поперечно-магнітної (ТМ) поляризації (1.25) та частоти ω падає на верхню поверхню пластини під кутом θ, частково відбивається і частково проходить крізь пластину.

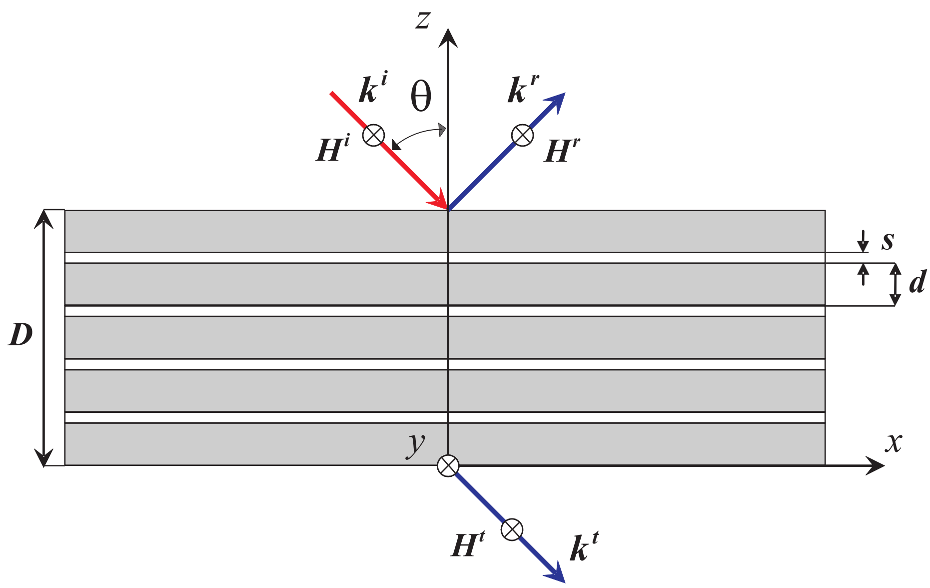


Рис. 3.1. Пластина шаруватого надпровідника, яка опромінюється з верхньої сторони електромагнітною хвилею ТМ-поляризації.

Магнітне поле H^u у верхньому вакуумному півпросторі, $z > D$, може бути представлено у вигляді суми падаючих і відбитих хвиль з амплітудами H_0 і H_R відповідно. Поле H^l у вакуумному півпросторі нижче пластини, $z < 0$, — це хвиля з амплітудою H_T, яка пройшла крізь пластину. Ці поля можуть бути записані у наступному вигляді

$$H^u = H_0 \cos\gamma_- + H_R \cos(\gamma_+ + \chi), \qquad H^l = H_T \cos(\gamma_+ + \beta). \tag{3.1}$$

Тут $k_x = k\sin\theta$, $k_y = 0$ та $k_z = k\cos\theta$ — це компоненти хвильового вектора $\vec{k}_i$ хвилі, що падає, $k = \omega/c$,

$$\gamma_{\pm} = k_x x \pm k_z(z - D) - \omega t, \quad \gamma_0 = k_x x - k_z z - \omega t, \tag{3.2}$$

χ та β — це зсуви фаз хвиль, що відбита та пройшла, відповідно.

Використовуючи рівняння Максвела, можна отримати x-компоненту електричного поля у вакуумі:

$$E_x^u = -\frac{k_z}{k}\Big[H_0 \sin\gamma_- - H_R \sin(\gamma_+ + \chi)\Big], \qquad E_x^l = -\frac{k_z}{k} H_T \sin(\gamma_- + \beta), \tag{3.3}$$

де індекси u та l позначають верхній ($z > D$) та нижній ($z < 0$) півпростори відповідно.

3.1.2. Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику

Електромагнітне поле всередині пластини шаруватого надпровідника визначається розподілом калібрувально-інваріантної різниці фаз φ параметра порядку між шарами (див. підрозділ 1.3). Будемо шукати φ у вигляді хвилі, що біжить уздовж осі x,

$$\varphi(x, z, t) = a(z)|1 - \Omega^2|^{1/2} \sin\big[k_x x - \omega t + \eta(z)\big], \tag{3.4}$$

амплітуда a та фаза η якої залежать від z, $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота.

Підставляючи цей вираз у синусоїдальне рівняння Гордона (1.40), ми отримуємо систему двох диференціальних рівнянь для невідомих фази $\eta(\zeta)$ та амплітуди $a(\zeta)$:

$$\eta'(\zeta) = \frac{L}{h^2(\zeta)}, \qquad h'' = a + \frac{L^2}{h^3} - \frac{h}{\kappa}, \tag{3.5}$$

де ми ввели безрозмірні величини

$$\zeta = \frac{\kappa z}{\lambda_{ab}}, \quad \kappa = \frac{\lambda_c k_x}{|1-\Omega^2|^{1/2}}, \tag{3.6}$$

L — константа інтегрування, штрих позначає похідну по ζ, та

$$h(\zeta) = \pm a(\zeta) - \frac{a^3(\zeta)}{8}. \tag{3.7}$$

В останньому рівнянні знак $\pm$ відповідає знаку величини $(1-\Omega)$.

Зауважимо, що функція $h(\zeta)$ являє собою нормовану амплітуду магнітного поля у шаруватому надпровіднику. Дійсно, використовуючи рівняння (1.64) та (1.65), можна представити компоненти електромагнітного поля у наступному вигляді:

$$H^s = -\mathcal{H}_0 \frac{|1-\Omega^2|}{\kappa} h(\zeta) \cos\big(k_x x - \omega t + \eta(\zeta)\big), \tag{3.8}$$

$$E_x^s = \mathcal{H}_0 \Gamma \frac{|1-\Omega^2| \cos\theta}{\kappa} \left[h(\zeta) \sin\left(k_x x - \omega t + \eta(\zeta)\right)\right]'. \tag{3.9}$$

Тут введений параметр

$$\Gamma = \frac{\lambda_{ab}\kappa}{\lambda_c \sqrt{\varepsilon_s} \cos\theta}, \tag{3.10}$$

який звичайно є малим для шаруватих надпровідників завдяки сильній анізотропії, $\lambda_{ab} \ll \lambda_c$.

Таким чином, розв'язуючи диференційні рівняння (3.5) із відповідними граничними умовами, ми можемо знайти електромагнітне поле у шаруватому надпровіднику.

3.1.3. Коефіцієнт прозорості шаруватого надпровідника

У цьому пункті ми будемо досліджувати прозорість пластини шаруватого надпровідника. Знайдемо невідомі амплітуди H_R та H_T, використовуючи умови безперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на поверхнях пластини, тобто при $z = 0$ і $z = D$. Використовуючи рівняння (3.8) і (3.9) для полів у шаруватому надпровіднику та рівняння (3.1) і (3.3) для полів у вакуумі, отримуємо наступні три граничних умови для амплітуд $a(0)$, $a(\delta)$ та їх похідних на обох поверхнях, а також для амплітуди хвилі, що пройшла:

$$\left[h(\delta) + \frac{\Gamma L}{h(\delta)}\right]^2 + \Gamma^2 \big[h'(\delta)\big]^2 = 4h_0^2, \tag{3.11}$$

$$h^2(0) = h_t^2 = \Gamma L, \qquad a'(0) = 0. \tag{3.12}$$

Тут $\delta = \kappa D/\lambda_{ab}$ — нормована товщина пластини, амплітуда h пов'язана із a рівнянням (3.7) та h_0 — нормована амплітуда хвилі, що падає:

$$h_0 = \frac{H_0}{\mathcal{H}_0} \frac{\kappa}{|1 - \Omega^2|}. \tag{3.13}$$

Граничні умови (3.11) і (3.12) разом із диференціальними рівняннями (3.5) визначають константу інтегрування L для кожної амплітуди h_0 хвилі, що падає. Важливо зазначити, що стала L безпосередньо визначає коефіцієнт прозорості T надпровідної пластини. Дійсно, згідно з першим з рівнянь (3.12), маємо

$$T = \frac{h_t^2}{h_0^2} = \frac{\Gamma}{h_0^2} L. \tag{3.14}$$

Нелінійність рівняння (3.5) призводить до багатозначної залежності коефіцієнта прозорості від амплітуди хвилі, що падає. У наступних підпунктах ми аналізуємо цю незвичайну залежність для випадків: $\omega < \omega_J$ і $\omega > \omega_J$.

3.1.3.1. Прозорість при $\omega < \omega_J$

Почнемо з випадку, коли частота падаючої хвилі менша за джозефсонівську частоту. У цьому діапазоні частот лінійні джозефсонівські плазмові хвилі не можуть поширюватися в шаруватих надпровідниках. Це відповідає експоненційно малим значенням коефіцієнту прозорості. Проте нелінійність сприяє поширенню хвиль завдяки ефективному зменшенню джозефсонівської частоти, див. рівняння (1.58).

Розв'язуючи рівняння (3.5) з граничними умовами (3.11) і (3.12), можна знайти константу L, а потім обчислити коефіцієнт прозорості за допомогою рівняння (3.14). На правій панелі рис. 3.2 представлена залежність коефіцієнту прозорості T від нормованої амплітуди h_0 хвилі, що падає, для деяких значень нормованої частоти: $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$ (суцільна крива), $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-4}$ (штрихова крива), $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-3}$ (пунктирна крива). Інші параметри: $\delta = 2$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\theta = 45°$. На вставці показано збільшену область поблизу точки 1. Стрілки показують зміну коефіцієнта прозорості при періодичній зміні амплітуди h_0. Кружки з числами позначають точки на суцільній кривій $T(h_0)$, для яких побудовані відповідні фазові траєкторії на лівій панелі рис. 3.2. Під фазовими траєкторіями тут маються на увазі криві $a'(a)$, які відповідають залежності $a(\zeta)$. Збільшення просторової координати ζ від нуля до δ відповідає руху вздовж фазової траєкторії. Точка $\zeta = 0$ (нижня поверхня пластини) відповідає початковій точці фазової траєкторії при $a' = 0$, відповідно до рівняння (3.12). Зростання просторової координати ζ позначено стрілками. Вставка показує область поблизу $(a = 0,\ a' = 0)$. Різні траєкторії $a'(a)$ можуть бути охарактеризовані значеннями $a(0)$ у цих початкових точках. Кожна траєкторія відповідає деякому значенню нормованої амплітуди h_0 падаючої хвилі, і відповідно до рівнянь (3.7), (3.12) і (3.14) значення $a(0)$ визначає константу L і коефіцієнт прозорості T.

Перейдемо тепер до більш детального аналізу залежності $T(h_0)$. Вона складається з двох гілок: низькоамплітудної (квазілінійної) та високоамплітудної. Розглянемо кожну гілку окремо.

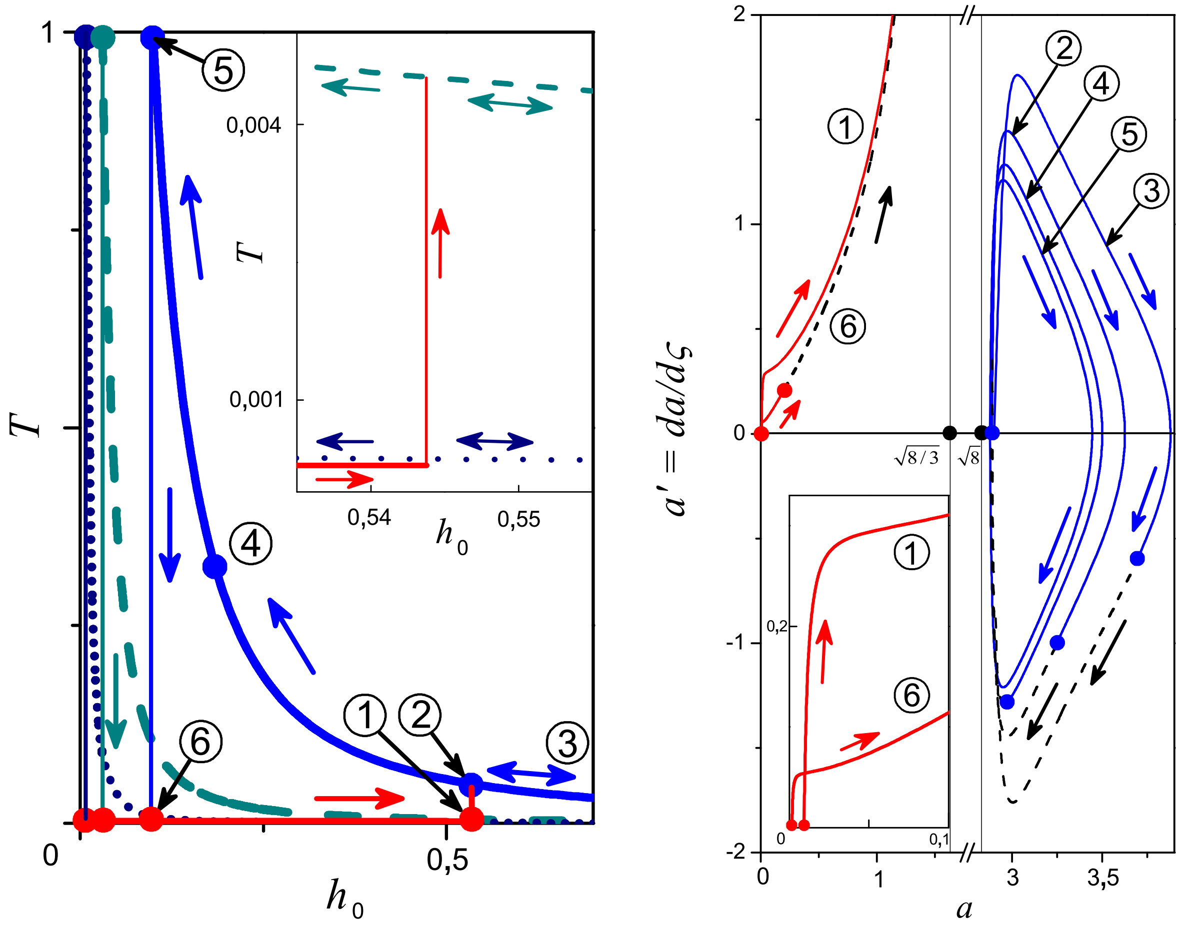


Рис. 3.2. Залежність коефіцієнту прозорості T від нормованої амплітуди h_0 хвилі, що падає (права панель), для деяких значень нормованої частоти: $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$ (суцільна крива), $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-4}$ (штрихова крива), $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-3}$ (пунктирна крива), а також відповідні фазові траєкторії $a'(a)$ (ліва панель), для $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$.

Низькоамплітудна гілка $T(h_0)$ визначена на інтервалі $0 < h_0 < (8/27)^{1/2}$ амплітуд падаючих хвиль. Ця гілка показана на лівій панелі рис. 3.2 суцільною кривою, близькою до осі абсцис. Область малих амплітуд $h_0 \ll 1$ відповідає лінійній задачі, коли електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику можна знайти у вигляді лінійних комбінацій експоненційних функцій z. У цьому випадку коефіцієнт прозорості T може бути знайдений асимптотично для малих Γ,

$$T(h_0 \ll 1) \approx \frac{4\Gamma^4}{\mathrm{sh}^2\left[\delta(1-\kappa^{-2})\right] + 4\Gamma^4}, \quad \Gamma \ll 1. \tag{3.15}$$

Цей коефіцієнт прозорості дуже близький до нуля та майже не залежить від частоти Ω. Як ми побачимо у підпункті 3.1.3.2, sh для $\omega < \omega_J$ перетвориться на $\sin$ для $\omega > \omega_J$.

Фазові траєкторії, що відповідають низькоамплітудним розв'язкам, займають область $a < (8/3)^{1/2}$. Для малих h_0 ці траєкторії близькі до точки $(a = 0,\, a' = 0)$ (як приклад такої траєкторії див. криву 6 на правій панелі рис. 3.2). Збільшення амплітуди h_0 призводить до зростання довжини фазової траєкторії, і ця довжина прямує до нескінченності при $h_0 \to (8/27)^{1/2}$ (див. криву 1 на правій панелі рис. 3.2).

Високоамплітудна гілка залежності $T(h_0)$ показана на лівій панелі рис. 3.2 пунктирною ($\Omega = 1 - 5\cdot 10^{-3}$), штриховою ($\Omega = 1 - 5\cdot 10^{-4}$) та суцільною ($\Omega = 1 - 5\cdot 10^{-5}$) кривими, не близькими до осі абсцис. Нелінійні джозефсонівські плазмові хвилі з амплітудами, що відповідають цим гілкам, можуть поширюватися в шаруватому надпровіднику навіть при частотах нижче джозефсонівської плазмової частоти, тобто для $\Omega < 1$. Відповідні фазові траєкторії є частинами замкнутих кривих при $a > 8^{1/2}$ (див. криві 2–5 на правій панелі рис. 3.2). Звернімо увагу на те, що значення h є від'ємними для $a > 8^{1/2}$. У цьому випадку можна вважати h додатнім, але фазу падаючої хвилі треба змістити на π.

Осцилюючий характер високоамплітудних розв'язків $a(\zeta)$ призводить до набагато більших значень коефіцієнта прозорості у порівнянні з експоненційно-малими квазілінійними розв'язками. Як видно на лівій панелі рис. 3.2, прозорість змінюється в широкому діапазоні від майже нуля до одиниці залежно від амплітуди h_0 хвилі, що падає. Важливо зазначити, що довжини нелінійних хвиль у надпровіднику сильно залежать від амплітуди h_0. Таким чином, при зміні h_0 можна керувати співвідношенням між довжиною хвилі та товщиною пластини.

Прозорість дуже чутлива до цього відношення, і можна досягти повної прозорості пластини, обравши оптимальне значення $h_0^{\max}$ амплітуди h_0.

Для досить високих амплітуд h_0, товщина зразка D більша, ніж половина довжини хвилі. У цьому випадку зміна координати ζ на інтервалі $0 < \zeta < \delta$ відповідає руху вздовж ділянки циклу фазової траєкторії (див. криві 2, 3 і 4 на правій панелі рис. 3.2). При зменшенні h_0 довжина хвилі зростає, рух уздовж фазової траєкторії наближається до повного циклу, а прозорість пластини зростає. Нарешті, для певного значення $h_0 = h_0^{\max}$ довжина хвилі стає рівною товщині зразка, фазова траєкторія складає замкнутий цикл, а коефіцієнт прозорості стає рівним одиниці, $T = 1$ (див. криву 5 на правій панелі та точку 5 на лівій панелі рис. 3.2).

Амплітудна залежність коефіцієнта прозорості може бути знайдена асимптотично для малих значень параметра Γ і не дуже товстих пластин, $\delta \lesssim 1$,

$$T(h_0) \simeq \frac{4\Gamma^2}{\delta^2}\Big(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}h_0} + 1\Big)^2. \tag{3.16}$$

Зауважимо, що у випадку повної прозорості ($T = 1$) пластини, для $h_0^{\max} \simeq 2^{1/2}\Gamma\delta$, як електричне, так і магнітне поля мають однакові значення на верхній і нижній поверхні пластини. Таким чином, амплітуди хвиль, що падає та пройшла, однакові.

Цікава особливість залежності $T(h_0)$ — це її гістерезисна поведінка зі стрибками. Нехай амплітуда h_0 збільшується від нуля. У цьому випадку коефіцієнт прозорості близький до нуля, а залежність $T(h_0)$ описується низькоамплітудною гілкою. Коли амплітуда досягає критичного значення $h_0 = (8/27)^{1/2}$ (точка 1 на рис. 3.2), подальший рух по цій гілці неможливий, і відбувається стрибок в точку 2 на високоамплітудній гілці. Подальше збільшення амплітуди h_0 призводить до монотонного зменшення прозорості вздовж високоамплітудної гілки.

Якщо амплітуда h_0 починає зменшуватися, то коефіцієнт прозорості T спочатку монотонно збільшується вздовж високоамплітудної гілки, причому в точці 2 не відбувається зворотнього стрибка на низькоамплітудну гілку. Лише коли прозорість стає повною, $T = 1$, (точка 5), подальший рух вздовж високоамплітудної гілки стає неможливим та відбувається зворотній стрибок до низькоамплітудної гілки у точку 6.

Слід зазначити, що при збільшенні частоти хвилі ω при постійній амплітуді H_0 також можна спостерігати стрибок від низькоамплітудної гілки (що відповідає експоненційно малій прозорості) до високоамплітудної (з більшим значенням коефіцієнта прозорості). Цей стрибок виникає, коли частота стає рівною пороговому значенню

$$\omega_{\rm cr} = \omega_J \left[1 - \frac{3}{4}\Big(\lambda_c k_x \frac{H_0}{\mathcal{H}_0}\Big)^{2/3}\right]. \tag{3.17}$$

3.1.3.2. Прозорість при $\omega > \omega_J$

Перейдемо до випадку, коли частота хвилі більша за джозефсонівську плазмову частоту, $\Omega > 1$. В цьому випадку лінійні джозефсонівські плазмові хвилі можуть поширюватися у пластині шаруватого надпровідника. Тому низькоамплітудний коефіцієнт прозорості не є експоненційно малим і може змінюватися в широкому діапазоні залежно від співвідношення між довжиною хвилі та товщиною пластини:

$$T(h_0 \ll 1) \approx \frac{4\Gamma^4}{\sin^2\left[\delta(1-\kappa^{-2})\right] + 4\Gamma^4}, \qquad \Gamma \ll 1. \tag{3.18}$$

Зауважимо, що sh у рівнянні (3.15) для $\omega < \omega_J$, перетворився на $\sin$ у рівнянні (3.18) для $\omega > \omega_J$.

За рахунок нелінійності, змінюючи амплітуду h_0, можна керувати співвідношенням між довжиною хвилі та товщиною пластини, а отже, налаштовувати величину прозорості за допомогою амплітуди хвилі, що падає. На лівій панелі рис. 3.3 зображена залежність $T(h_0)$ для різних значень частоти: $\Omega = 1 + 5 \cdot 10^{-3}$ (пунктирна крива), $\Omega = 1{+}4{,}5{\cdot}10^{-3}$ (суцільна крива) та $\Omega = 1{+}1{,}65{\cdot}10^{-3}$ (вставка).

Товщина пластини $D = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ см, що відповідає нормованим значенням товщини $\delta/\pi = 1{,}2$ (пунктирна крива), $\delta/\pi = 1{,}25$ (суцільна крива) та $\delta/\pi = 2{,}1$ (вставка). Інші параметри такі, як на рис. 3.2. Стрілки показують напрям зміни коефіцієнта прозорості T при зміні амплітуди h_0.

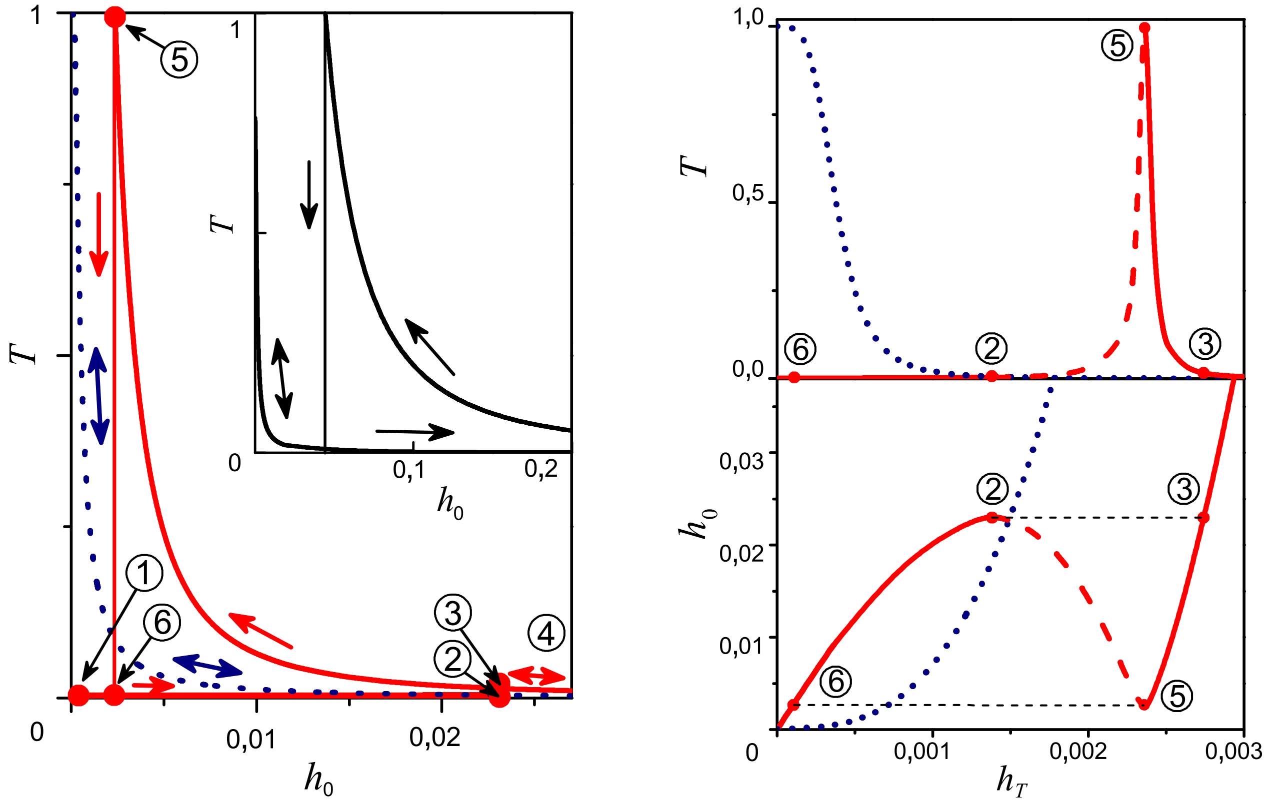


Рис. 3.3. Залежність коефіцієнта прозорості T від амплітуди h_0 хвилі, що падає, у явній (ліва панель) та у параметричній (права панель) формах, де параметром є амплітуда h_T хвилі, що пройшла.

Звернімо увагу на те, що залежність $T(h_0)$ може бути однозначною та, тим самим, не проявляти гістерезисної поведінки. Аналіз рівнянь (3.7) (з вибором знаку «$-$»), (3.5), (3.11), (3.12) і (3.14) показує, що залежність $T(h_0)$ виявляється оборотною, коли частота хвилі більша за деяке порогове значення, яке визначається при $\Gamma \ll 1$ наступним чином:

$$\omega_{\text{thr}} = \omega_J \Big[1 + \Big(\frac{D\sqrt{\varepsilon_s}\sin\theta}{\sqrt{2}\pi\lambda_{ab}}\Big)^2\Big]. \tag{3.19}$$

Приклад такої оборотної залежності $T(h_0)$ представлений пунктирною кривою на лівій панелі рис. 3.3. При нижчих частотах, $\omega < \omega_{\text{thr}}$, залежність $T(h_0)$ може проявляти гістерезисну поведінку. У цьому випадку коефіцієнт прозорості може досягати одиниці, коли амплітуда h_0 спочатку збільшується, а потім зменшується, причому може відбуватися стрибок з низькоамплітудної до високоамплітудної гілки (див. суцільну криву на лівій панелі та на вставці на рис. 3.3). Вкажемо оптимальне значення $h_0 = h_0^{\max}$, коли надпровідна пластина стає повністю прозорою:

$$h_0^{\max} \simeq \frac{3\sqrt{3}}{4I^2}\Gamma\delta^2, \quad I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{4/3}}} \approx 1{,}7972. \tag{3.20}$$

Зауважимо, що причини гістерезисної поведінки при $\omega < \omega_J$ та при $\omega > \omega_J$ якісно відрізняються. Якщо при $\omega < \omega_J$ багатозначність залежності $T(h_0)$ визначалась багатозначністю залежності $a(h)$ в рівнянні (3.7), то при $\omega > \omega_J$ залежність $a(h)$ в рівнянні (3.7) виявляється однозначною. У цьому випадку багатозначність залежності $T(h_0)$ виникає з інших причин. Для того, щоб у цьому розібратися, розглянемо обернену задачу: нехай задана нормована амплітуда h_T хвилі, що пройшла, треба визначити величини коефіцієнта прозорості T та амплітуди h_0 хвилі, що падає. Легко бачити, що ці величини однозначним чином визначаються амплітудою h_T завдяки рівнянням (3.5), (3.11), (3.12) та (3.14). На правій панелі рис. 3.3 представлені такі однозначні залежності $T(h_T)$ і $h_0(h_T)$, які можуть приводити як до однозначної залежності $T(h_0)$ (пунктирні криві рис. 3.3), так і до неоднозначної залежності $T(h_0)$ з гістерезисною поведінкою (суцільні криві рис. 3.3). Головна причина неоднозначності у залежності $T(h_0)$ пов'язана із немонотонністю залежностей $T(h_T)$ і $h_0(h_T)$.

3.1.4. Гістерезис поверхневого реактансу

Зауважимо, що разом із прозорістю пластини гістерезисний характер має також і амплітудна залежність поверхневого реактансу, який пов'язаний із зсувом фази відбитої хвилі рівнянням (1.63). Спираючись на рівняння (3.8) і (3.9) для полів у шаруватому надпровіднику та рівняння (3.1) і (3.3) для полів у вакуумі, поверхневий реактанс X може бути обчислений наступним чином:

$$X = X_0 \frac{1-\sqrt{1-S^2}}{S}, \quad S = \frac{\Gamma h(\delta) h'(\delta)}{2h_i^2\sqrt{1-T}}, \tag{3.21}$$

де $X_0 = (4\pi/c)\cos\theta$, а коефіцієнт прозорості T визначений у рівнянні (3.14).

На рис. 3.4 зображена залежність поверхневого реактансу X, нормованого на значення X_0, від нормованої амплітуди h_0 хвилі, що падає, для частоти $\Omega = 1 - 4 \cdot 10^{-3}$. Вертикальні стрілки показують гістерезисні стрибки при зміні h_0. Значення параметрів: товщина $D = 4000$ Å, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, та $\theta = 45°$.

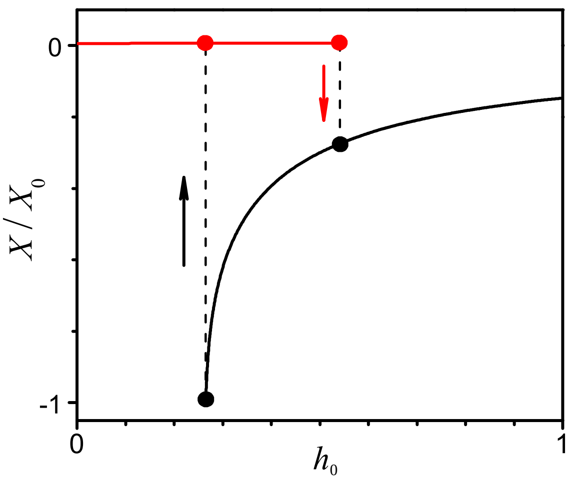


Рис. 3.4. Залежність поверхневого реактансу X, нормованого на значення X_0, від нормованої амплітуди h_0 хвилі, що падає.

Вкажемо асимптотичні вирази для поверхневого реактансу у двох важливих випадках: коли амплітуда h_0 близька до $h_0^{\max}$ (максимальна прозорість) та $h_0 \gg 1$. У першому випадку відповідні фазові траєкторії являють собою майже повні цикли (див. праву панель рис. 3.2). У цьому випадку поверхневий реактанс може бути виражений через коефіцієнт прозорості наступним чином:

$$X(h_0) = -X_0\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-T(h_0)}}{1+\sqrt{1-T(h_0)}}}. \tag{3.22}$$

У другому випадку, коли $h_0 \gg 1$, реактанс X може бути описаний рівнянням (3.22), в якому знак «$-$» перед X_0 замінений на «$+$». У проміжній області амплітуд h_0 реактанс змінює знак, коли амплітуда досягає значення $h_0 \approx \delta^2/\sqrt{2}$. При досить великих товщинах, $\delta \gg 1$, це значення відповідає великим амплітудам, і ми можемо використовувати рівняння (3.22) зі знаком «$-$» майже для всієї високоамплітудної гілки залежності $X(h_0)$. Зауважимо, що на рис. 3.4 зображена саме така ситуація, оскільки $\delta \approx 3{,}9$.

3.2. Самоіндукована прозорість обмеженого зразка шаруватого надпровідника, розміщеного в прямокутному хвилеводі

В цьому підрозділі ми вивчаємо проходження електромагнітної хвилі крізь зразок шаруватого надпровідника товщини D, розміщений у прямокутному вакуумному хвилеводі з поперечними розмірами L_1 і L_2. Як і в попередньому підрозділі, координатна система обрана таким чином, щоб кристалографічна площина $\mathbf{ab}$ шаруватого надпровідника збігалася з площиною xy, а кристалографічна вісь $\mathbf{c}$ була напрямлена уздовж осі z.

3.2.1. Вісь хвилевода паралельна кристалографічній осі c

Почнемо дослідження з конфігурації, в якій електромагнітна хвиля частоти ω поширюється вздовж кристалографічної осі $\mathbf{c}$ (впоперек шарів) в хвилеводі, причому вісь $\mathbf{c}$ шаруватого надпровідника (вісь z обраної нами координатної системи) напрямлена вздовж осі хвилеводу (див. рис. 3.5), та зразок шаруватого надпровідника товщини D розміщено в області $0 < z < D$.

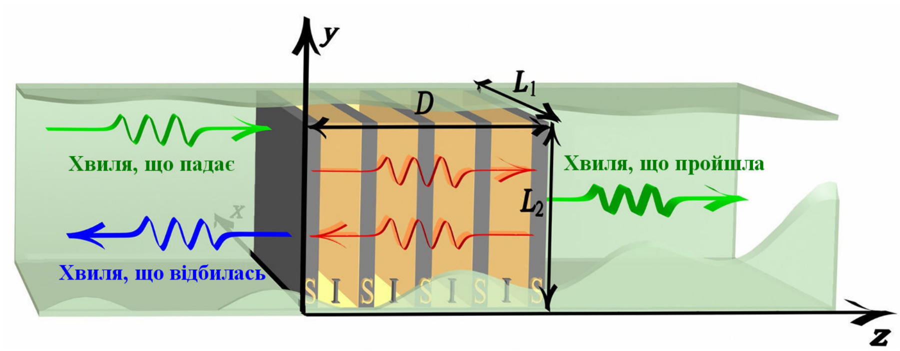


Рис. 3.5. Геометрія задачі для випадку, коли хвилі поширюються впоперек шарів. Позначення: S і I — надпровідні і діелектричні шари відповідно, D — товщина зразка, L_1 і L_2 — поперечні розміри хвилеводу.

Розглянемо падаючу хвилю надзвичайної поляризації (див. пункт 1.3.2) з наступними компонентами:

$$\vec{E} = \{E_x, E_y, E_z\}, \qquad \vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}, \tag{3.23}$$

тобто магнітне поле паралельно поверхні зразка та перпендикулярно осі z. Падаюча хвиля частково відбивається від його поверхні при $z = 0$ та частково проходить крізь зразок.

Результати для даної конфігурації схожі з результатами підрозділу 3.1 для нескінченної пластини, тому ми зупинимось лише на деяких відмінностях.

3.2.1.1. Розподіл електромагнітного поля у хвилеводі

Припускаючи, що стінки хвилеводу зроблені з ідеального металу (рівні нулю тангенціальні компоненти електричного поля на стінках хвилеводу), запишемо електромагнітне поле у першій

$$
\begin{aligned}
E_x^{v1} &= \frac{k_x k_z}{k^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\left[H_i\sin(k_z z-\omega t)-H_r\sin(k_z z+\omega t+\alpha)\right],\\
E_y^{v1} &= \frac{k_y k_z}{k^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\left[H_i\sin(k_z z-\omega t)-H_r\sin(k_z z+\omega t+\alpha)\right],\\
H_x^{v1} &= -\frac{k_y}{k}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\left[H_i\sin(k_z z-\omega t)+H_r\sin(k_z z+\omega t+\alpha)\right],\\
H_y^{v1} &= \frac{k_x}{k}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\left[H_i\sin(k_z z-\omega t)+H_r\sin(k_z z+\omega t+\alpha)\right].
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

та у другій

$$
\begin{aligned}
E_x^{v2} &= \frac{k_x k_z}{k^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)H_t\sin[k_z(z-D)-\omega t+\beta],\\
E_y^{v2} &= \frac{k_y k_z}{k^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)H_t\sin[k_z(z-D)-\omega t+\beta],\\
H_x^{v2} &= -\frac{k_y}{k}\sin(k_x x)\cos(k_y y)H_t\sin[k_z(z-D)-\omega t+\beta],\\
H_y^{v2} &= \frac{k_x}{k}\cos(k_x x)\sin(k_y y)H_t\sin[k_z(z-D)-\omega t+\beta],
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

вакуумних частинах хвилеводу. Тут амплітуди H_i, H_r і H_t відповідають хвилям, що падає, відбилась і пройшла відповідно,

$$
k_x = \frac{\pi n_1}{L_1}, \quad k_y = \frac{\pi n_2}{L_2}, \quad k_z = \left(k^2 - k_x^2 - k_y^2\right)^{1/2}, \tag{3.26}
$$

$k = \omega/c$, n_1 и n_2 — невід'ємні цілі числа, які визначають моди, що поширюються у хвилеводі (вони не можуть бути рівними нулю одночасно), α і β — зсув фаз у хвилях, що відбилась та пройшла відповідно.

Електромагнітне поле у шаруватому надпровіднику визначається калібрувально-інваріантною різницею фаз між шарами, яку ми будемо шукати у вигляді:

$$
\varphi(x,y,z,t) = a(z)|1-\Omega^2|^{1/2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\eta(z)-\omega t). \tag{3.27}
$$

Аналогічно, як і у підрозділі 3.1, ми вводимо безрозмірну координату ζ, див. рівняння (3.6), та параметр κ:

$$\kappa = \lambda_c \frac{k_{||}}{|1-\Omega^2|^{1/2}}, \quad k_{||} = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Підставляючи різницю фаз φ у рівняння (1.40), можна отримати два рівняння для функцій $\eta(\zeta)$ і $a(\zeta)$, які співпадають із рівняннями (3.5), в яких $h(\zeta)$ пов'язане із $a(\zeta)$ наступним співвідношенням:

$$h(\zeta) = -\mathrm{sign}(\Omega - 1) a(\zeta) - \frac{9}{128} a(\zeta)^3, \tag{3.29}$$

яке відрізняється від аналогічного співвідношення (3.7) лише величиною константи при a^3.

Електромагнітне поле всередині шаруватого надпровідника визначається рівняннями (1.64), (1.65) та (3.27):

$$\begin{aligned}
E_x^s &= -\mathcal{H}_0 \Gamma \frac{k_x k_z}{k} \frac{|1-\Omega^2|}{k_{||}\kappa} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\left\{h(\zeta)\cos[\eta(\zeta)-\omega t]\right\}'_\zeta, \\
E_y^s &= -\mathcal{H}_0 \Gamma \frac{k_y k_z}{k} \frac{|1-\Omega^2|}{k_{||}\kappa} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\left\{h(\zeta)\cos[\eta(\zeta)-\omega t]\right\}'_\zeta, \\
H_x^s &= \mathcal{H}_0 k_y \frac{|1-\Omega^2|}{k_{||}\kappa} h(\zeta)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin[\eta(\zeta)-\omega t]), \\
H_y^s &= -\mathcal{H}_0 k_x \frac{|1-\Omega^2|}{k_{||}\kappa} h(\zeta)\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin[\eta(\zeta)-\omega t],
\end{aligned} \tag{3.30}$$

де параметр Γ визначений аналогічно (3.10):

$$\Gamma = \frac{k^2 \lambda_{ab}}{k_z} \kappa. \tag{3.31}$$

Знайдемо невідомі амплітуди H_r та H_t за допомогою умов безперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на поверхнях пластини при $z = 0$ і $z = D$. Використовуючи рівняння (3.30) для полів у шаруватому надпровіднику та рівняння (3.24) і (3.25) для полів у вакуумі, отримуємо три граничних умови для амплітуд $a(0)$, $a(\delta)$ та їх похідних на обох поверхнях, які співпадають із рівняннями (3.11) і (3.12) з h_i замість h_0,

$$h_i = \frac{H_i}{\mathcal{H}_0}\frac{k_{||}\kappa}{k|1-\Omega^2|}. \tag{3.32}$$

Таким чином, задача розрахунку електромагнітних полів у системі майже співпадає для випадків нескінченної пластини та скінченного зразка шаруватого надпровідника, розміщеного у прямокутному хвилеводі. Відмінностями є лише визначення величин κ, Γ, h_i, а також зв'язок між нормованими амплітудами $h(\zeta)$ магнітного поля та $a(\zeta)$ калібрувально-інваріантної різниці фаз.

3.2.1.2. Коефіцієнт прозорості

Коефіцієнт прозорості визначається аналогічно рівнянню (3.14):

$$T = \frac{h^2(\delta)}{h_i^2} = \frac{\Gamma}{h_i^2}L. \tag{3.33}$$

На лівій панелі рис. 3.6 представлена залежність коефіцієнту прозорості T від нормованої амплітуди h_i хвилі, що падає, для випадку, коли частота хвилі менша за джозефсонівську частоту. Як було зауважено раніше, при таких частотах лінійні хвилі не можуть поширюватися в шаруватих надпровідниках, вони експоненційно загасають. На правій панелі рис. 3.6 представлені фазові траєкторії $a'(a)$.

Порівнюючи рис. 3.6 та рис. 3.2, неважко помітити, що якісно залежності коефіцієнту прозорості від амплітуди та відповідні фазові траєкторії співпадають, а відрізняються лише кількісно. Тому всі результати попереднього підрозділу (нескінченна пластина) можуть бути перенесені з мінімальними змінами на випадок скінченного зразка шаруватого надпровідника, який розміщено у хвилеводі та надпровідні шари якого паралельні поверхні, що опромінюється електромагнітною хвилею.

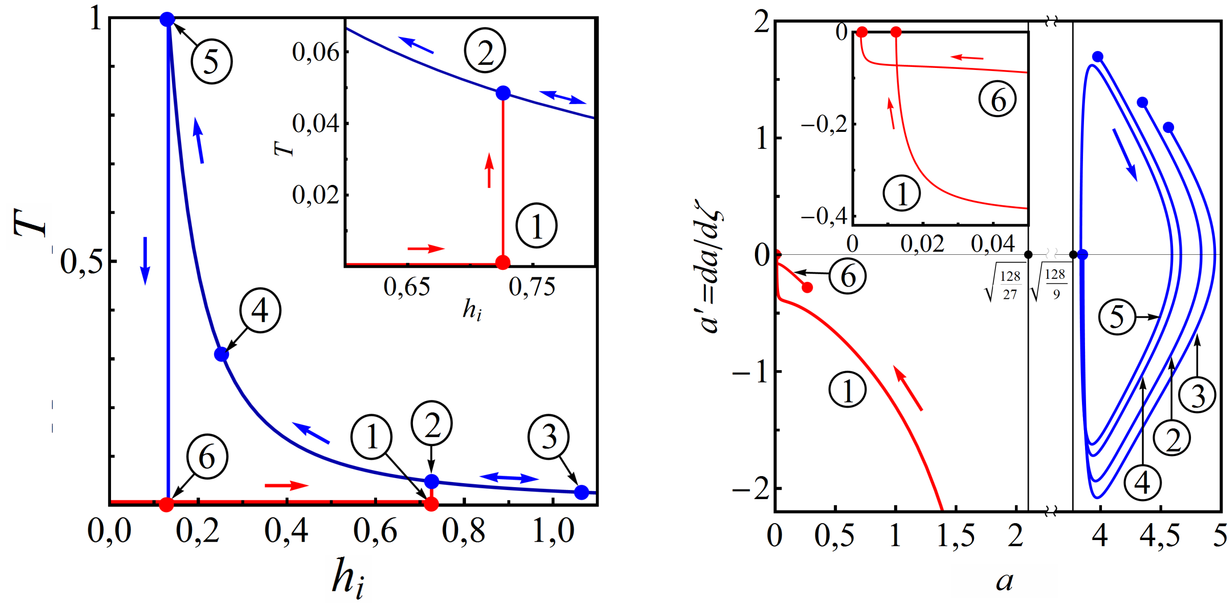


Рис. 3.6. Залежність коефіцієнта прозорості T від нормованої амплітуди h_i падаючої хвилі та фазові траєкторії $a'(a)$ для нормованої частоти $\Omega = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$. Параметри: $\delta = 2$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ THz, $n_1 = n_2 = 1$, $L_1 = L_2 = 0,1$ см.

3.2.2. Вісь хвилевода паралельна кристалографічній площині ab

Розглянемо тепер конфігурацію, в якій електромагнітна хвиля частоти ω поширюється вздовж шарів зразка шаруватого надпровідника у хвилеводі та вісь x паралельна осі хвилеводу (див. рис. 3.7), причому зразок шаруватого надпровідника товщини D розміщено в області $0 < x < D$. Будемо розглядати хвилі з поляризацією в якій магнітне поле паралельне поверхні зразка, а електричне поле перпендикулярне надпровідним шарам:

$$\vec{E} = \{0, 0, E_z\}, \qquad \vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}, \tag{3.34}$$

У цьому випадку не спостерігається крос-поляризація у хвилях, що відбились та пройшли. У зразку при цьому поширюється лише надзвичайна хвиля.

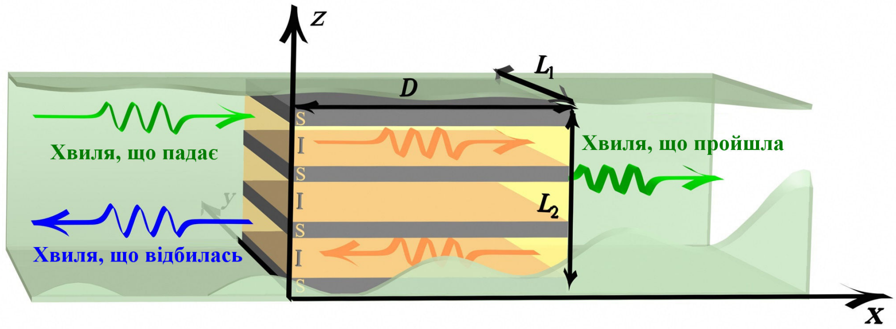


Рис. 3.7. Геометрія задачі для випадку, коли хвилі поширюються вздовж надпровідних шарів. Позначення: S і I — надпровідні і діелектричні шари відповідно, D — товщина зразка, L_1 і L_2 — поперечні розміри хвилеводу.

3.2.2.1. Розподіл електромагнітного поля у хвилеводі

Запишемо поля в вакуумних областях (див. рис. 3.7). У першій вакуумній області ($x < 0$) поле представлено хвилями, що падає та відбивається, з амплітудами H_i і H_r, відповідно. Використовуючи граничні умови (рівність нулю компонент електричного поля на границях хвилеводу) і рівняння Максвела, можна отримати наступні вирази для ненульових тангенціальних компонент поля в першій вакуумній області:

$$\begin{aligned}
E_z^{v1} &= -\left[H_i \cos(k_x x - \omega t) - H_r \cos(k_x x + \omega t + \alpha)\right] \sin(k_y y), \\
H_x^{v1} &= -\frac{k_y}{k}\left[H_i \sin(k_x x - \omega t) + H_r \sin(k_x x + \omega t + \alpha)\right] \cos(k_y y), \\
H_y^{v1} &= \frac{k_x}{k}\left[H_i \cos(k_x x - \omega t) + H_r \cos(k_x x + \omega t + \alpha)\right] \sin(k_y y).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

У другій вакуумній області ($x > D$) є тільки хвиля, що пройшла, з амплітудою H_t. Компоненти поля в цій області можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}
E_z^{v2} &= -H_t \cos[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \sin(k_y y), \\
H_x^{v2} &= -\frac{k_y}{k} H_t \sin[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \cos(k_y y), \\
H_y^{v2} &= \frac{k_x}{k} H_t \cos[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \sin(k_y y),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

де

$$k_x = \left(k^2 - k_y^2\right)^{1/2}, \quad k_y = n_1 \pi / L_1, \tag{3.37}$$

$k = \omega/c$, n_1 — невід'ємне ціле число, яке визначає моду, що поширюється у хвилеводі, α і β — зсуви фаз у хвилях, що відбита та пройшла, відповідно. Зазначимо, що ми розглядаємо хвильові моди з нульовим k_z для того, щоб уникнути крос-поляризації.

Рівняння Гордона (1.40) для даної поляризації (3.34) записується у вигляді:

$$\left(\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + k_y^2\lambda_c^2\varphi + \sin\varphi\right) - \lambda_c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{3.38}$$

З рівняння (3.38) випливає, що лінійні ДПХ можуть поширюватися в хвилеводі, якщо їх частота перевищує частоту відсічення:

$$\omega_{\text{cut}} = \omega_J (1 + k_y^2 \lambda_c^2)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Як і в попередньому підрозділі, ми розглядаємо випадок слабкої нелінійності і шукаємо розв'язок рівняння (3.38) в формі хвилі з амплітудою a і фазою η, що залежать від x:

$$\varphi(x, y, t) = (8\sqrt{2}/3) a(x) \tilde{\Omega} \sin[\eta(x) - \omega t] \sin(k_y y), \tag{3.40}$$

де $\tilde{\Omega}$ показує величину відстройки частоти,

$$\tilde{\Omega} = |\Omega^2 - \Omega_{\text{cut}}^2|^{1/2}, \quad \Omega = \omega/\omega_J, \quad \Omega_{\text{cut}} = \omega_{\text{cut}}/\omega_J. \tag{3.41}$$

Вводячи безрозмірну координату ξ і нормовану товщину зразка δ,

$$\xi = x\tilde{\Omega}/\lambda_c\,, \qquad \delta = D\tilde{\Omega}/\lambda_c\,, \tag{3.42}$$

та підставляючи різницю фаз з рівняння (3.40) до рівняння (3.38), можна отримати два диференційних рівняння для функцій $\eta(\xi)$ і $a(\xi)$:

$$\eta'(\xi) = \frac{L}{a^2(\xi)}, \qquad a''(\xi) = -\sigma a(\xi) - a^3(\xi) + \frac{L^2}{a^3(\xi)}, \tag{3.43}$$

де $\sigma = \mathrm{sign}(\Omega - \Omega_{\mathrm{cut}})$, штрих позначає похідну за ξ, та L — константа інтегрування.

Поле в зразку шаруватого надпровідника описується рівняннями (1.64) і (1.65). Підставляючи у них різницю фаз з рівняння (3.40), запишемо ненульові тангенціальні компоненти поля у зразку:

$$\begin{aligned} E_z &= -(8\sqrt{2}/3)\mathcal{H}_0\lambda_c\tilde{\Omega}ka(\xi)\cos[\eta(\xi) - \omega t]\sin(k_y y), \\ H_y &= (8\sqrt{2}/3)\mathcal{H}_0\tilde{\Omega}^2\left\{a(\xi)\sin[\eta(\xi) - \omega t]\right\}'\sin(k_y y). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Пов'язуючи тангенціальні компоненти поля в вакуумі (3.35), (3.36) і шаруватому надпровіднику (3.44) на двох границях при $x = 0$ і $x = D$, можна прийти до наступних рівнянь для амплітуд $a(0)$, $a(\delta)$ і їх похідних, а також для амплітуди хвилі, що пройшла:

$$\left[\Gamma a'(0)\right]^2 + \left[\frac{\Gamma L}{a(0)} + a(0)\right]^2 = 4h_i^2, \tag{3.45}$$

$$a^2(\delta) = h_t^2 = \Gamma L, \quad a'(\delta) = 0, \tag{3.46}$$

де коефіцієнт Γ та нормовані амплітуди h_i, h_r та h_t задані наступним чином:

$$\Gamma = \frac{\tilde{\Omega}}{k_x\lambda_c}, \qquad h_n = \frac{8\sqrt{2}}{3}\frac{H_n}{\mathcal{H}_0 k\lambda_c\tilde{\Omega}}, \quad n = i, r, t. \tag{3.47}$$

У наступному підрозділі ми аналізуємо залежність коефіцієнта прозорості T від амплітуди h_i хвилі, що падає, для частот нижче частоти відсічення, $\Omega < \Omega_{\mathrm{cut}}$. Випадок $\Omega > \Omega_{\mathrm{cut}}$ ми не наводимо у дисертації, він представлений у деталях у статті [32].

3.2.2.2. Коефіцієнт прозорості при $\omega < \omega_{\text{cut}}$

Рівняння (3.45) і (3.46) спільно з рівняннями (3.43) визначають константу інтегрування L для кожної амплітуди падаючої хвилі h_i. Відповідно до першого з рівнянь (3.43), константа L безпосередньо визначає коефіцієнт прозорості T:

$$T = \frac{h_t^2}{h_i^2} = \frac{\Gamma}{h_i^2} L. \tag{3.48}$$

Зосередимо увагу на частотах, які нижче частоти відсічення, коли

$$\Omega < \Omega_{\text{cut}}, \tag{3.49}$$

та $\sigma = -1$. Як було зазначено раніше, лінійні хвилі не можуть поширюватися за таких умов і для них коефіцієнт прозорості експоненційно малий. Однак через ефективне зменшення частоти відсічення нелінійні хвилі можуть поширюватися.

Для подальшого аналізу ми розглянемо фазові траєкторії $a'(a)$. Проінтегрувавши рівняння (3.43) і використовуючи (3.46), приходимо до рівняння для фазових траєкторій $a'(a)$:

$$a'^2(a) = \sigma\big[\Gamma L - a^2\big] + \frac{1}{2}\big[(\Gamma L)^2 - a^4\big] + L^2\big[(\Gamma L)^{-1} - a^{-2}\big]. \tag{3.50}$$

Фазові траєкторії $a'(a)$ продемонстровані на нижніх панелях рис. 3.8. Рух уздовж просторової координати ξ від нуля до δ показано стрілками. Верхні панелі рис. 3.8 представляють тривимірні криві для залежностей a і a' від координати ξ. Кожна траєкторія відповідає певному значенню амплітуди h_i. Відповідно до рівнянь (3.46) і (3.48), значення $a(\delta)$ визначає коефіцієнт прозорості зразка. Номери траєкторій відповідають точкам на рис. 3.9.

Тепер розглянемо детально залежність коефіцієнта прозорості T від амплітуди h_i хвилі, що падає. Ця залежність представлена на рис. 3.9 суцільною кривою. При збільшенні амплітуди h_i від нуля коефіцієнт прозорості зростає і проходить точки 1 і 2 на графіку $T(h_i)$. При таких амплітудах фазові траєкторії $a'(a)$ є незамкненими кривими (див. криві 1 і 2 на рис. 3.8). У точці 3 (при $h_i \approx 1{,}7$) коефіцієнт прозорості досягає максимального значення $T = 1$ і фазова траєкторія перетворюється в замкнуту петлю (крива 3 на рис. 3.8). Потім, зі збільшенням h_i, коефіцієнт проходження осцилює, досягаючи максимального значення $T = 1$ в точках 4 і 7 (див. вставку на рис. 3.9). Цікавою особливістю є те, що існує специфічне значення $h_i \approx 2{,}4$, де фазові траєкторії $a'(a)$ стягуються в точку (див. точку 4 на рис. 3.8). При такому значенні h_i амплітуда a електромагнітної хвилі, заданої рівняннями (3.44), не залежить від координати ζ всередині зразка, та фаза η змінюється лінійно при зміні ξ, як це відбувається для лінійних хвиль, і зразок виявляється повністю прозорим. Подальша плавна зміна коефіцієнта прозорості при збільшенні h_i переривається в точці 9 (при $h_i \approx 7{,}7$) на рис. 3.9 і відбувається стрибок на верхню гілку залежності $T(h_i)$ в точку 11. При подальшому збільшенні амплітуди h_i виникають нові аналогічні стрибки (див., наприклад, точку 12).

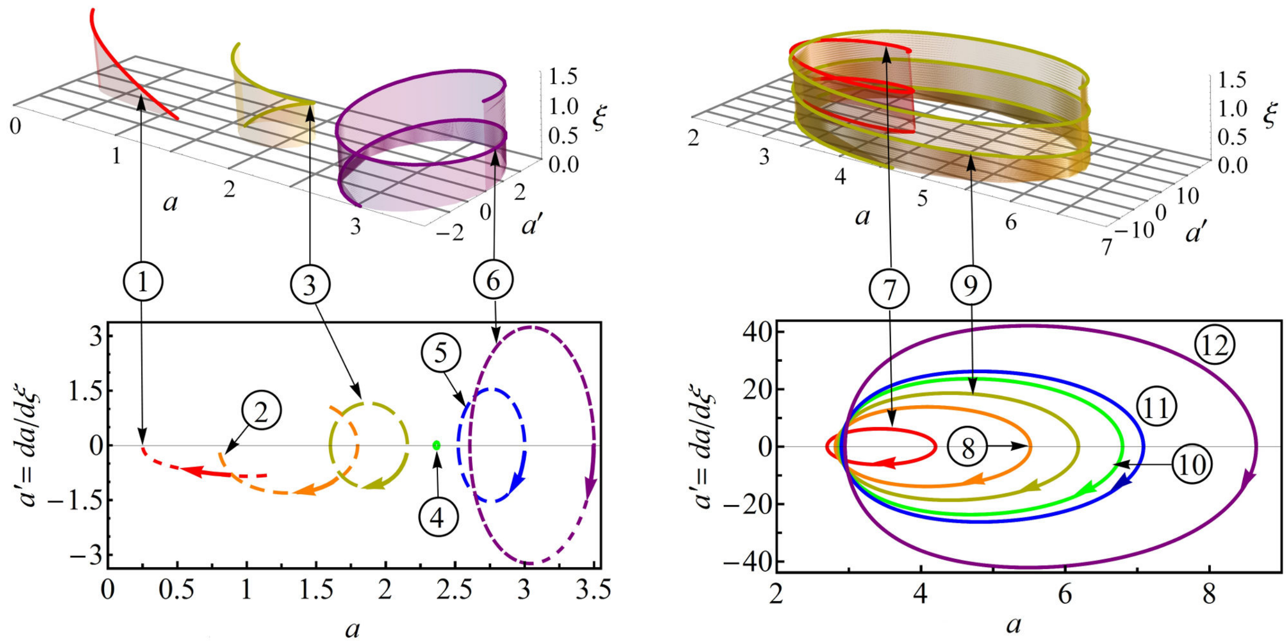


Рис. 3.8. Фазові траєкторії $a'(a)$ у двовимірній (нижні панелі) та тривимірній (верхні панелі) формах. Параметри: $\tilde{\Omega} = 0{,}1$, $\delta = 1,5$ ($D = 15\lambda_c$), $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $n_1 = 1$, $L_1 = 0{,}1$ см.

Тепер розглянемо залежність $T(h_i)$ при зворотньому зменшенні амплітуди h_i. При зменшенні h_i коефіцієнт проходження зростає до тих пір, поки зразок не стане повністю прозорим. У цій точці плавна залежність $T(h_i)$ переривається і подальший рух є можливим тільки після стрибка на нижню гілку. Як видно з рис. 3.9, зменшення амплітуди h_i призводить до подібної поведінки $T(h_i)$ (плавне зростання до одиниці з подальшим стрибком на нижню гілку) аж до тих пір, поки не досягнута точка 10 ($h_i \approx 6{,}8$), де відбувається останній стрибок (у точку 8). Подальше зменшення амплітуди не викликає стрибків.

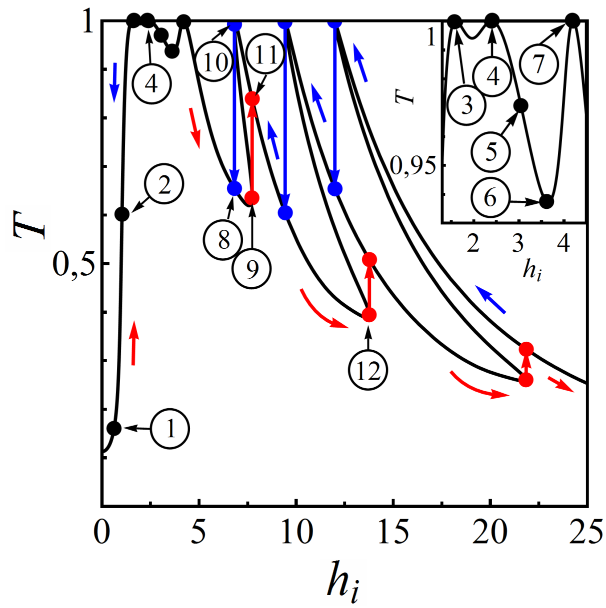


Рис. 3.9. Залежність коефіцієнта проходження T від нормованої амплітуди h_i хвилі, що падає, де стрілки позначають можливу гістерезисну зміну T зі стрибками при періодичній зміні h_i. Параметри: такі ж, як і на рис. 3.8.

Таким чином, і для конфігурації, в якій електромагнітна хвиля поширюється вздовж шарів зразка шаруватого надпровідника, розташованого у хвилеводі, може спостерігатися явище самоіндукованої прозорості, яке супроводжується амплітудним гістерезисом коефіцієнта прозорості.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [30–32]:

- Передбачено нове нелінійне явище в шаруватих надпровідниках — самоіндукована прозорість. Показано, що коефіцієнти відбиття і прозорості шаруватого надпровідника залежать від амплітуди падаючої хвилі внаслідок нелінійності співвідношення між джозефсонівським струмом та калібрувально-інваріантною різницею фаз. У результаті коефіцієнт прозорості може змінюватись у широкому діапазоні від майже нуля до одиниці.

● Виявлено, що особливістю явища самоіндукованої прозорості є гістерезисна поведінка зі стрибками коефіцієнтів відбиття і прозорості, а також поверхневого реактансу шаруватого надпровідника, при періодичній зміні амплітуди хвилі, що падає.

● Показано, що явище самоіндукованої прозорості може спостерігатися як для нескінченної пластини шаруватого надпровідника, так і для зразка скінченних розмірів, розміщеного у вакуумному прямокутному хвилеводі.

● Для зразка скінченних розмірів розглянуто два випадки розташування шаруватого надпровідника — надпровідні шари паралельні або перпендикулярні поверхні зразка, на яку падає електромагнітна хвиля. Виявлено, що для обох випадків має місце амплітудний гістерезис коефіцієнта прозорості. У першому випадку можна виділити лише дві основні гілки цієї залежності, між якими відбуваються гістерезисні стрибки. У другому випадку виявляється багато гілок залежності та при зміні амплітуди може відбуватися декілька стрибків. Такий характер залежності коефіцієнта прозорості від амплітуди падаючої хвилі був недавно експериментально виявлений в роботі [161].

Результати, що викладені в даному розділі дисертації, можуть бути використані при розробці пристроїв фільтрування терагерцового випромінювання.

РОЗДІЛ 4

ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ТРАНСПОРТ ЧЕРЕЗ ШАРУВАТІ НАДПРОВІДНИКИ

У цьому розділі, спираючись на результати робіт [33–35], досліджено електромагнітний транспорт хвиль довільної поляризації через зразок шаруватого надпровідника, поміщений у вакуумний прямокутний хвилевід з ідеальними металевими стінками. Вважаємо, що хвилі поширюються вздовж шарів, тобто вісь хвилеводу паралельна надпровідним шарам (див. рис. 4.1). Важливим аспектом такого транспорту є ефект крос-поляризації електромагнітних хвиль, обумовлений сильною анізотропією границі розділу «шаруватий надпровідник – вакуум». Як і в попередньому розділі, координатна система обрана таким чином, що кристалографічна площина $\mathbf{ab}$ шаруватого надпровідника збігається з площиною xy, а кристалографічна вісь $\mathbf{c}$ спрямована вздовж осі z. Розглянуто два випадки: лінійні хвилі довільної частоти (підрозділ 4.1) та нелінійні хвилі з частотою, близькою до частоти відсічення (підрозділ 4.2).

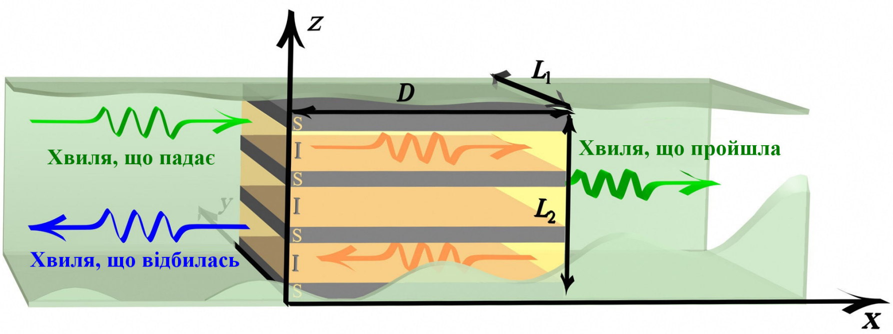


Рис. 4.1. Геометрія задачі про електромагнітний транспорт через зразок шаруватого надпровідника у прямокутному хвилеводі.

У даному розділі для опису електромагнітного поля у шаруватому надпровіднику ми будемо використовувати векторний потенціал та хвильове рівняння (1.43) для нього. Такий підхід дозволяє описати як хвилі звичайної, так і надзвичайної поляризації (див. пункт 1.3.2).

Нехай хвилевід має поперечні розміри L_1 і L_2 і містить три області: область $0 < x < D$, заповнену шаруватим надпровідником товщини D, і дві вакуумні області $x < 0$ та $x > D$. Вісь x паралельна осі хвилеводу, осі y і z паралельні стінкам хвилеводу і вісь z напрямлена вздовж кристалографічної осі **c**. В цьому випадку кристалографічна вісь **c** і вісь хвилеводу x не збігаються і завдяки анізотропії шаруватого надпровідника практично за будь-якої поляризації хвилі, що падає, у зразку виникають хвилі обох поляризацій: звичайної ($E_z = 0$) і надзвичайної ($H_z = 0$). При цьому хвилі, що відбилась та пройшла, мають поляризації, які в загальному випадку не збігаються з поляризацією хвилі, що падає. Іншими словами, відбувається ефект крос-поляризації хвилі.

4.1. Електромагнітний транспорт у лінійному наближенні

У цьому підрозділі ми дослідимо хвилі різних поляризацій та можливість їх крос-поляризації при відбитті та проходженні крізь зразок шаруватого надпровідника у лінійному наближенні. Таке наближення означає, що $\sin\varphi$ у рівнянні (1.47) зв'язку джозефсонівського струму з калібрувально-інваріантною різницею фаз буде замінений на φ. В результаті цього дослідження ми покажемо, що хвилі двох спеціальних поляризацій (див. пункт 4.1.3) майже не перетворюються при відбитті та проходженні крізь зразок шаруватого надпровідника.

Векторний потенціал хвилі з частотою ω та хвильовими числами

$$k_y = \frac{n_1\pi}{L_1}, \quad k_z = \frac{n_2\pi}{L_2}, \tag{4.1}$$

де n_1 і n_2 — цілі числа, що визначають хвилеводну моду, задовольняє умовам рівності нулю тангенціальних компонент електричного поля на стінках хвилеводу:

$$\begin{aligned} A_x(x,y,z,t) &= \mathcal{A}_x(x)e^{-i\omega t}\sin(k_y y)\sin(k_z z), \\ A_y(x,y,z,t) &= \mathcal{A}_y(x)e^{-i\omega t}\cos(k_y y)\sin(k_z z), \\ A_z(x,y,z,t) &= \mathcal{A}_z(x)e^{-i\omega t}\sin(k_y y)\cos(k_z z). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.1. Крос-поляризація поперечно-електричної та поперечно-магнітної хвиль

Почнемо розгляд з хвиль, поляризація яких узгоджена з віссю хвилеводу, тобто віссю x: поперечно-електричної (ТЕ), $E_x = 0$, і поперечно-магнітної (ТМ), $H_x = 0$, поляризацій. У першій вакуумній області ($x < 0$) векторний потенціал хвиль, що поширюються вздовж осі x, можна представити у вигляді лінійної комбінації ТЕ- і ТМ-хвиль:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x^{v1}(x) &= -i(k^2 - k_x^2)[a^{(H)}e^{ik_x x} + b^{(H)}e^{-ik_x x}], \\ \mathcal{A}_y^{v1}(x) &= \left[k_x k_y a^{(H)} - k k_z a^{(E)}\right]e^{ik_x x} - \left[k_x k_y b^{(H)} + k k_z b^{(E)}\right]e^{-ik_x x}, \\ \mathcal{A}_z^{v1}(x) &= \left[k_x k_z a^{(H)} + k k_y a^{(E)}\right]e^{ik_x x} - \left[k_x k_z b^{(H)} - k k_y b^{(E)}\right]e^{-ik_x x}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тут амплітуди a і b описують хвилі, що падають та відбились, відповідно, а верхні індекси $^{(H)}$ або $^{(E)}$ вказують на ТМ- або ТЕ-поляризацію ($H_x = 0$ або $E_x = 0$) відповідно, та

$$k_x = (k^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{4.4}$$

У другій вакуумній області (при $x > D$) векторний потенціал містить тільки хвилі, що пройшли, з амплітудами $f^{(H)}$ и $f^{(E)}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{v2} &= -i(k^2 - k_x^2) f^{(H)} e^{ik_x(x-D)}, \\
\mathcal{A}_y^{v2} &= \left[k_x k_y f^{(H)} - k k_z f^{(E)}\right] e^{ik_x(x-D)}, \\
\mathcal{A}_z^{v2} &= \left[k_x k_z f^{(H)} + k k_y f^{(E)}\right] e^{ik_x(x-D)}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

У шаруватому надпровіднику ми представляємо поле у вигляді суми хвиль, поляризація яких узгоджена з орієнтацією надпровідних шарів: звичайні ($E_z = 0$) і надзвичайні ($H_z = 0$) хвилі. Для векторного потенціалу хвиль, що задовольняє рівнянням (1.43), (1.23) і (1.24), в області $0 < x < D$ запишемо:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{s} &= iSk_x k_z \left[c^{(e)} e^{ik_x x} - d^{(e)} e^{-ik_x x}\right] + ikk_y \left[c^{(o)} e^{p_x x} + d^{(o)} e^{-p_x x}\right], \\
\mathcal{A}_y^{s} &= Sk_y k_z \left[c^{(e)} e^{ik_x x} + d^{(e)} e^{-ik_x x}\right] + ikp_x \left[c^{(o)} e^{p_x x} - d^{(o)} e^{-p_x x}\right], \\
\mathcal{A}_z^{s} &= (Sk_z^2 + k^2) \left[c^{(e)} e^{ik_x x} + d^{(e)} e^{-ik_x x}\right],
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

де

$$
\begin{gathered}
S = \frac{\Omega^2}{\varepsilon \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_J}, \\
k_x = \left[-k_y^2 - \lambda_c^{-2} + \varepsilon k^2\right]^{1/2}, \quad p_x = \lambda_{ab}^{-1}.
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

Верхні індекси $^{(o)}$ і $^{(e)}$ вказують на звичайні і надзвичайні хвилі, відповідно. У виразах (4.7) ми нехтуємо величиною $\gamma^{-1} = \lambda_{ab}/\lambda_c$ в порівнянні з 1.

На границях «шаруватий надпровідник – вакуум» повинні виконуватися умови безперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів. Ці умови призводять до системи лінійних рівнянь, з якої можна при заданій поляризації хвилі, що падає, тобто при заданих амплітудах $a^{(H)}$ і $a^{(E)}$, визначити поляризацію хвиль, що відбилась та пройшла, — визначити амплітуди $b^{(H)}$, $b^{(E)}$, $f^{(H)}$ и $f^{(E)}$.

Наприклад, будемо опромінювати шаруватий надпровідник хвилею ТМ-поляризації. Це означає, що амплітуда $a^{(E)} = 0$, а амплітуду $a^{(H)}$ візьмемо для зручності рівній 1. Тоді квадрати модулів амплітуд $b^{(H)}$ і $f^{(H)}$ — це коефіцієнти відбиття і проходження TM-поляризованої хвилі, відповідно, а $b^{(E)}$ і $f^{(E)}$ — коефіцієнти перетворення в TE-хвилю. Також відзначимо, що моди в вакуумній частині хвилеводу можуть поширюватися тільки з частотами $\omega > \omega_{\rm cr}$, де критична частота

$$\omega_{\rm cr} = c(k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \qquad (4.8)$$

що випливає з рівняння (4.4).

Чисельний аналіз показав, що для досить тонких пластин при частотах, близьких до критичної частоти $\omega_{\rm cr}$, TM-хвиля (при $a^{(E)} = 0$) перетворюється при відбитті від зразку шаруватого надпровідника у TE-хвилю з невеликою домішкою TM-компоненти, тобто $|b^{(H)}/b^{(E)}|^2 \ll 1$. Як приклад такої ситуації, на лівій панелі рис. 4.2 зображені графіки залежностей $|b^{(H)}|^2$, $|b^{(E)}|^2$, $|f^{(E)}|^2$ від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$. У свою чергу, TE-хвиля (при $a^{(H)} = 0$) перетворюється при проходженні крізь зразок у TM-хвилю з невеликою домішкою TE-компоненти, тобто $|f^{(E)}/f^{(H)}|^2 \ll 1$. Відповідні залежності $|b^{(H)}|^2$, $|b^{(E)}|^2$, $|f^{(H)}|^2$ і $|f^{(E)}|^2$ від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$ зображені на правій панелі рис. 4.2. Зауважимо, що згідно з законом збереження енергії

$$|b^{(H)}|^2 + |b^{(E)}|^2 + |f^{(H)}|^2 + |f^{(E)}|^2 = 1.$$

При інших значеннях частоти хвилі та товщини зразка не відбувається майже повної крос-поляризації.

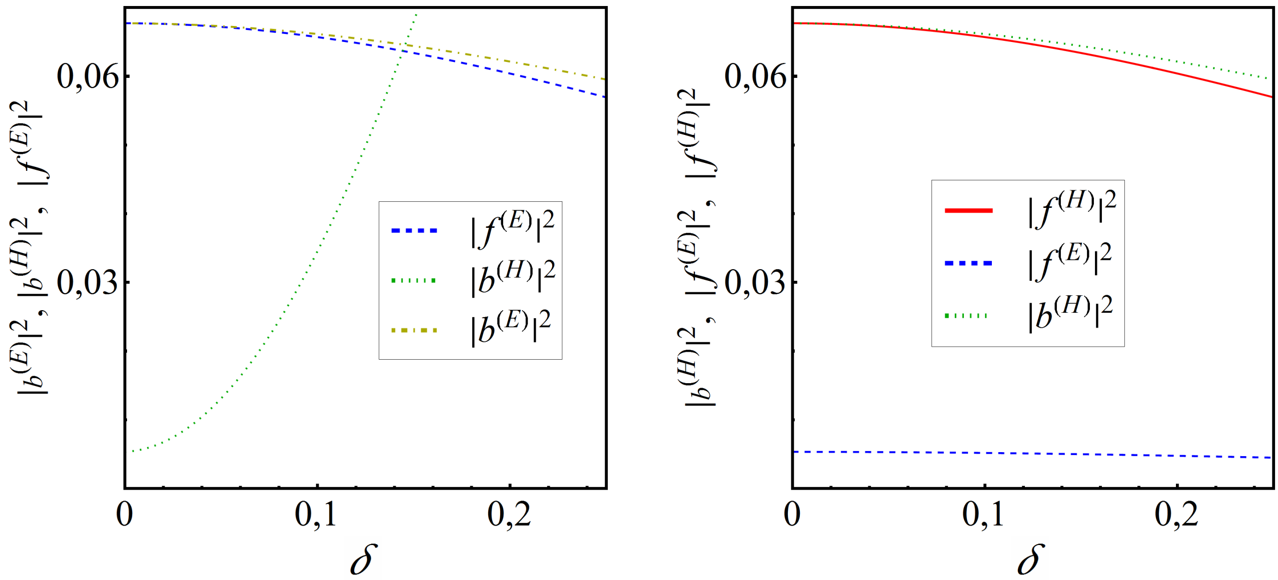


Рис. 4.2. Залежності квадратів амплітуд $|b^{(H)}|^2$, $|b^{(E)}|^2$, $|f^{(H)}|^2$, $|f^{(E)}|^2$ TM- та TE-хвиль, що відбились та пройшли, від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$ для двох випадків: падає хвиля TM-поляризації (ліва панель, $a^{(H)} = 1$, $a^{(E)} = 0$) або TE-поляризації (права панель, $a^{(H)} = 0$, $a^{(E)} = 1$). Параметри: $\omega = 0,565\omega_J = 1,01\omega_{\rm cr}$, $L_1 = 1$ мм, $L_2 = 2$ мм, $n_1 = n_2 = 1$, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0,3$ ТГц, $\varepsilon = 16$.

4.1.2. Крос-поляризація для хвиль, узгоджених з кристалографічною віссю c

Тепер розглянемо хвилі, поляризація яких узгоджена з кристалографічною віссю **c** шаруватого надпровідника. Будемо для зручності називати їх так само, як і у шаруватому надпровіднику — звичайні ($E_z = 0$) і надзвичайні ($H_z = 0$) хвилі. У першій вакуумній області ($x < 0$) для векторного потенціалу хвилі, що поширюється вздовж осі x, можна записати:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{v1} &= i\big[k_x k_z a^{(e)} + k k_y a^{(o)}\big]e^{ik_x x} - i\big[k_x k_z b^{(e)} - k k_y b^{(o)}\big]e^{-ik_x x},\\
A_y^{v1} &= \big[k_y k_z a^{(e)} - k k_x a^{(o)}\big]e^{ik_x x} + \big[k_y k_z b^{(e)} + k k_x b^{(o)}\big]e^{-ik_x x},\\
A_z^{v1} &= -(k^2 - k_z^2)\big[a^{(e)}e^{ik_x x} + b^{(e)}e^{-ik_x x}\big].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Аналогічно, у другій вакуумній області ($x > D$) виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{v2} &= i\left[k_x k_z f^{(e)} + k k_y f^{(o)}\right] e^{ik_x(x-D)}, \\
\mathcal{A}_y^{v2} &= \left[k_y k_z f^{(e)} - k k_x f^{(o)}\right] e^{ik_x(x-D)}, \\
\mathcal{A}_z^{v2} &= -(k^2 - k_z^2) f^{(e)} e^{ik_x(x-D)}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

У рівняннях (4.9) і (4.10) верхні індекси $^{(o)}$ і $^{(e)}$ вказують на хвилі звичайної і надзвичайної поляризації.

Поля в надпровіднику визначаються рівняннями (4.6). Умови безперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на границях «шаруватий надпровідник – вакуум» призводять до системи лінійних рівнянь, з якої при заданій поляризації падаючої хвилі, тобто при заданих амплітудах $a^{(e)}$ і $a^{(o)}$, можна визначити поляризації хвиль, що відбилась та пройшла, — знайти амплітуди $b^{(e)}$, $b^{(o)}$, $f^{(e)}$ и $f^{(o)}$.

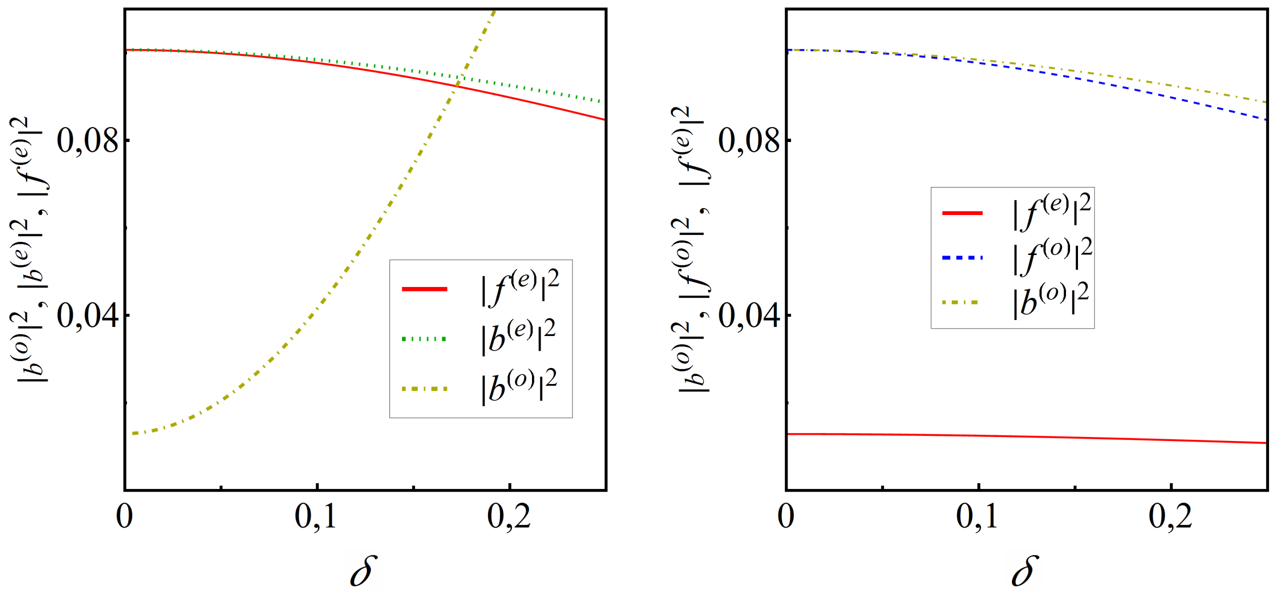


Рис. 4.3. Залежності квадратів амплітуд $|b^{(o)}|^2$, $|b^{(e)}|^2$, $|f^{(o)}|^2$, $|f^{(e)}|^2$ звичайної та надзвичайної хвиль, що відбились та пройшли, від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$ для двох випадків: падає хвиля звичайної (ліва панель, $a^{(o)} = 1$, $a^{(e)} = 0$) або надзвичайної (права панель, $a^{(o)} = 0$, $a^{(e)} = 1$) поляризації. Параметри: такі, як на рис. 4.2.

Чисельний аналіз зазначеної системи рівнянь показує, що пластина шаруватого надпровідника може служити перетворювачем надзвичайної хвилі в звичайну, і навпаки. Для досить тонких пластин при частотах, близьких до критичної частоти $\omega_{\rm cr}$, рівняння (4.8), хвиля звичайної поляризації (при $a^{(e)} = 0$) перетвориться при відбитті від шаруватого надпровідника у надзвичайну з невеликою домішкою звичайної компоненти, тобто $|b^{(o)}/b^{(e)}|^2 \ll 1$ (див., наприклад, ліву панель рис. 4.3). У свою чергу надзвичайна хвиля (при $a^{(o)} = 0$) перетворюється при проходженні крізь зразок у звичайну хвилю з невеликою домішкою надзвичайної компоненти, тобто $|f^{(e)}/f^{(o)}|^2 \ll 1$ (див., наприклад, праву панель рис. 4.3).

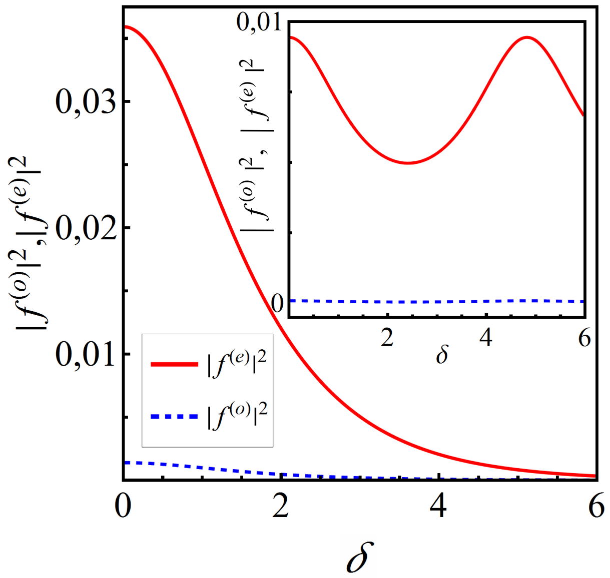


Рис. 4.4. Залежність квадратів амплітуд $|f^{(o)}|^2$ і $|f^{(e)}|^2$ хвиль, що пройшли, від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$ для випадку падіння хвилі звичайної поляризації ($a^{(e)} = 0$, $a^{(o)} = 1$) та двох значень частоти: $\omega = 0,9\omega_J$ (основна панель), $\omega = 1,2\omega_J$ (вставка). Параметри: такі, як на рис. 4.2.

У разі, коли частота ω не близька до критичної частоти $\omega_{\rm cr}$, звичайна хвиля (при $a^{(e)} = 0$) перетворюється при проходженні у надзвичайну хвилю з невеликою домішкою звичайної, тобто $|f^{(o)}/f^{(e)}|^2 \ll 1$. У такої крос-поляризації існує просте фізичне пояснення. Через анізотропію падаюча хвиля звичайної поляризації збуджує в шаруватому надпровіднику не тільки звичайну хвилю, але і невелику домішку надзвичайної хвилі. Звичайна хвиля в пластині швидко згасає і, в умовах $D \gg \lambda_{ab}$, на іншій стороні пластини залишається, в основному, хвиля надзвичайної поляризації з експоненційно малою домішкою звичайної хвилі. Як приклад такої ситуації, на рис. 4.4 зображений графік залежностей амплітуд $|f^{(o)}|^2$ і $|f^{(e)}|^2$ від безрозмірної товщини зразка $\delta = D/\lambda_c$ у двох випадках. У першому випадку (основна панель) частота хвилі менше джозефсонівської частоти і обидві хвилі (звичайна і надзвичайна) в пластині згасають. У другому випадку (вставка) частота хвилі більше джозефсонівської частоти і надзвичайна хвиля в пластині поширюється.

4.1.3. Транспорт хвиль з поляризаціями, пов'язаними з віссю y

Розглянемо ще два типи поляризації хвиль, які узгоджено з віссю y, перпендикулярною осі хвилеводу (осі x) і кристалографічній осі **c** шаруватого надпровідника (осі z). Хвилі, у яких $E_y = 0$, ми будемо називати хвилями $E_\perp$ поляризації, а хвилі, у яких $H_y = 0$, — хвилями $H_\perp$ поляризації.

У першій вакуумній області (при $x < 0$) для векторного потенціалу хвилі, що поширюється вздовж осі x, запишемо:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{v1} &= i\big[k_x k_y a^{(1)} + k k_z a^{(2)}\big]e^{ik_x x} - i\big[k_x k_y b^{(1)} - k k_z b^{(2)}\big]e^{-ik_x x},\\
\mathcal{A}_y^{v1} &= -(k^2 - k_y^2)\big[a^{(1)}e^{ik_x x} + b^{(1)}e^{-ik_x x}\big],\\
\mathcal{A}_z^{v1} &= \big[k_y k_z a^{(1)} - k k_x a^{(2)}\big]e^{ik_x x} + \big[k_y k_z b^{(1)} + k k_x b^{(2)}\big]e^{-ik_x x}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Тут верхні індекси $^{(1)}$ і $^{(2)}$ позначають поляризації $H_\perp$ і $E_\perp$, відповідно. Аналогічно, у другій вакуумної області (при $x > D$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{v2} &= i\big[k_x k_y f^{(1)} + k k_z f^{(2)}\big]e^{ik_x(x-D)},\\
\mathcal{A}_y^{v2} &= -(k^2 - k_y^2) f^{(1)} e^{ik_x(x-D)},\\
\mathcal{A}_z^{v2} &= \big[k_y k_z f^{(1)} - k k_x f^{(2)}\big]e^{ik_x(x-D)}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Як і в попередніх розділах, поля в надпровіднику визначаються виразами (4.6). Використовуючи умови безперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на границях «шаруватий надпровідник – вакуум», отримаємо систему лінійних рівнянь, розв'язуючи яку при заданих амплітудах $a^{(1)}$ і $a^{(2)}$, можна визначити поляризацію хвиль, що відбилась і пройшла, — знайти амплітуди $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$.

Чисельний аналіз зазначеної системи призводить до цікавих результатів. Як виявилося, хвилі H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій не перетворюються одна в іншу. Хвилі H$_\perp$ поляризації повністю відбиваються, а E$_\perp$-хвилі частково відбиваються і частково проходять, але не перетворюються у H$_\perp$-хвилю. Залежності квадратів амплітуд $|b^{(o)}|^2$, $|b^{(e)}|^2$, $|f^{(o)}|^2$, $|f^{(e)}|^2$ від нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$ у випадку падіння E$_\perp$-хвилі ($a^{(1)} = 0$, $a^{(2)} = 1$) наведені на рис. 4.5.

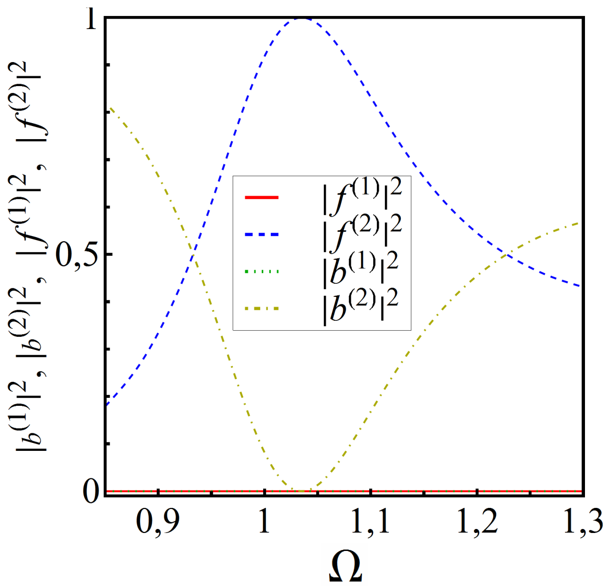


Рис. 4.5. Залежності квадратів амплітуд $|b^{(o)}|^2$, $|b^{(e)}|^2$, $|f^{(o)}|^2$, $|f^{(e)}|^2$ від нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$ у випадку падіння E$_\perp$-хвилі ($a^{(1)} = 0$, $a^{(2)} = 1$) при $D = 80$ мкм. Параметри: такі, як на рис. 4.2.

У наступному підрозділі 4.2 ми дослідимо крос-поляризації хвиль з урахуванням нелінійності джозефсонівської плазми. Буде показано, що і у нелінійному випадку хвилі H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій також не перетворюються одна в іншу, що може бути використано для спрощення задачі крос-поляризації.

4.2. Нелінійний електромагнітний транспорт через шаруваті надпровідники

У цьому підрозділі ми сформулюємо та обґрунтуємо специфічний аналог принципу суперпозиції для нелінійних хвиль у шаруватому надпровіднику. Цей принцип полягає у тому, що, незважаючи на нелінійність, хвилі $\mathrm{H}_\perp$ і $\mathrm{E}_\perp$ поляризацій, які в лінійному випадку були розглянуті в пункті 4.1.3, практично не взаємодіють і транспорт цих хвиль може бути досліджений незалежно. Тому для вивчення відбиття і проходження хвиль будь-яких інших поляризацій (наприклад, TE- і TM-хвиль) можна зробити наступні кроки. По-перше, подати хвилю, що падає, у вигляді суперпозиції $\mathrm{H}_\perp$- і $\mathrm{E}_\perp$-хвиль. По-друге, дослідити відбиття і проходження цих хвиль окремо. А по-третє, представити $\mathrm{H}_\perp$- та $\mathrm{E}_\perp$-хвилі, що відбились та пройшли, у вигляді суперпозиції TE- и TM-хвиль.

Як і у попередньому підрозділі, ми розглядаємо хвилевід з поперечними розмірами L_y і L_z, всередині якого знаходиться зразок шаруватого надпровідника товщини D (див. рис. 4.1). Електромагнітна хвиля частоти ω поширюється у хвилеводі вздовж осі x, паралельної надпровідним шарам. Ця хвиля частково відбивається і частково проходить крізь зразок, при цьому відбувається крос-поляризація, яку ми будемо досліджувати. Залежність векторного потенціалу від поперечних координат y та z має вигляд, наведений у рівняннях (4.2):

$$
\begin{aligned}
A_x(\vec{r},t) &= \mathcal{A}_x(x,t)\sin(k_y y)\sin(k_z z),\\
A_y(\vec{r},t) &= \mathcal{A}_y(x,t)\cos(k_y y)\sin(k_z z),\\
A_z(\vec{r},t) &= \mathcal{A}_z(x,t)\sin(k_y y)\cos(k_z z),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

де k_y, k_z визначені у рівняннях (4.1), а n_y і n_z — цілі числа, що визначають моду, яка поширюється у хвилеводі. Вирази для $\mathcal{A}_x(x,t)$, $\mathcal{A}_y(x,t)$ і $\mathcal{A}_z(x,t)$ в різних областях хвилеводу будуть представлені нижче.

4.2.1. Розподіл електромагнітного поля у хвилеводі

Електромагнітне поле в вакуумі може бути представлено у вигляді суперпозиції хвиль H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій. У хвилі H$_\perp$ поляризації магнітне поле перпендикулярно осі y,

$$\vec{E}^{(1)} = \{E_x^{(1)}, E_y^{(1)}, E_z^{(1)}\},\ \vec{H}^{(1)} = \{H_x^{(1)}, 0, H_z^{(1)}\}, \tag{4.14}$$

у той час як у хвилі E$_\perp$ поляризації електричне поле перпендикулярно осі y,

$$\vec{E}^{(2)} = \{E_x^{(2)}, 0, E_z^{(2)}\},\ \vec{H}^{(2)} = \{H_x^{(2)}, H_y^{(2)}, H_z^{(2)}\}. \tag{4.15}$$

Тут і далі верхні індекси $^{(1)}$ і $^{(2)}$ позначають хвилі H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій відповідно.

У першій вакуумній області (при $x < 0$) існують хвилі, що падає та відбилась. Векторний потенціал $\vec{\mathcal{A}}_{\rm inc}(x,t)$ хвилі, що падає, може бути представлений як суперпозиція хвиль H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{x\,\rm inc}(x,t) &= -H_{\rm inc}^{(1)}\frac{k_x k_y}{k^3}\sin[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(1)}] - H_{\rm inc}^{(2)}\frac{k_z}{k^2}\sin[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(2)}],\\
\mathcal{A}_{y\,\rm inc}(x,t) &= -H_{\rm inc}^{(1)}\frac{k^2 - k_y^2}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(1)}],\\
\mathcal{A}_{z\,\rm inc}(x,t) &= H_{\rm inc}^{(1)}\frac{k_y k_z}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(1)}] - H_{\rm inc}^{(2)}\frac{k_x}{k^2}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(2)}],
\end{aligned} \tag{4.16}$$

де $H_{\rm inc}^{(1)}$ і $H_{\rm inc}^{(2)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm inc}^{(1)}$ і $\phi_{\rm inc}^{(2)}$ — фази магнітного поля хвиль, що падають.

Аналогічні вирази можуть бути записані для векторного потенціалу відбитих хвиль,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{x\,\rm ref}(x,t) &= -H_{\rm ref}^{(1)}\frac{k_x k_y}{k^3}\sin[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(1)}] + H_{\rm ref}^{(2)}\frac{k_z}{k^2}\sin[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(2)}],\\
\mathcal{A}_{y\,\rm ref}(x,t) &= -H_{\rm ref}^{(1)}\frac{k^2 - k_y^2}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(1)}],\\
\mathcal{A}_{z\,\rm ref}(x,t) &= H_{\rm ref}^{(1)}\frac{k_y k_z}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(1)}] + H_{\rm ref}^{(2)}\frac{k_x}{k^2}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(2)}],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

де $H_{\rm ref}^{(1)}$ і $H_{\rm ref}^{(2)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm ref}^{(1)}$ і $\phi_{\rm ref}^{(2)}$ — фази магнітного поля відбитих хвиль.

У другій вакуумній області (при $x > D$) поширюється хвиля, що пройшла крізь зразок шаруватого надпровідника. Векторний потенціал цієї хвилі може бути записаний у формі суперпозиції хвиль $\rm H_\perp$ і $\rm E_\perp$ поляризацій:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{x\,\rm tr}(x,t) &= -H_{\rm tr}^{(1)}\frac{k_x k_y}{k^3}\sin[k_x x-\omega t+\phi_{\rm tr}^{(1)}] - H_{\rm tr}^{(2)}\frac{k_z}{k^2}\sin[k_x x-\omega t+\phi_{\rm tr}^{(2)}],\\
\mathcal{A}_{y\,\rm tr}(x,t) &= -H_{\rm tr}^{(1)}\frac{k^2-k_y^2}{k^3}\cos[k_x x-\omega t+\phi_{\rm tr}^{(1)}],\\
\mathcal{A}_{z\,\rm tr}(x,t) &= H_{\rm tr}^{(1)}\frac{k_y k_z}{k^3}\cos[k_x x-\omega t+\phi_{\rm tr}^{(1)}] - H_{\rm tr}^{(2)}\frac{k_x}{k^2}\cos[k_x x-\omega t+\phi_{\rm tr}^{(2)}],
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

де $H_{\rm tr}^{(1)}$ і $H_{\rm tr}^{(2)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm tr}^{(1)}$ і $\phi_{\rm tr}^{(2)}$ — фази магнітного поля хвиль, що пройшли крізь зразок.

Для знаходження електромагнітного поля в зразку шаруватого надпровідника ми використовуємо хвильове рівняння (1.43) для векторного потенціалу та вирази для щільності струмів (1.23) та (1.24) (див. пункт 1.3.2). Ми досліджуємо випадок слабкої нелінійності $|\varphi| \ll 1$, коли $\sin\varphi$ можна представити у вигляді $\varphi - \varphi^3/6$. Навіть слабка нелінійність може призводити до сильно нелінійних ефектів, якщо частота хвилі близька до частоті відсічення $\omega_{\rm cut}$. Тут $\omega_{\rm cut}$ — мінімальна частота, з якою лінійні хвилі можуть поширюватися в зразку шаруватого надпровідника, див. нижче рівняння (4.21).

У шаруватому надпровіднику виникають звичайні та надзвичайні хвилі (див. пункт 1.3.2 та підрозділ 4.1). Оскільки векторний потенціал разом із електричним полем звичайної хвилі перпендикулярний осі z, то джозефсонівський струм уздовж осі z відсутній і така хвиля завжди лінійна. З огляду на рівність $A_z = 0$, тобто $\mathcal{A}_z^{\rm ord} = 0$, можна вирішити рівняння (1.43) і отримати вирази для компонент векторного потенціалу звичайної моди,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_x^{\rm ord} &= \frac{k_y}{k^2}\Big[e^{-p_x x}H_-^{\rm ord}\sin(\omega t-\phi_-^{\rm ord}) + e^{p_x(x-D)}H_+^{\rm ord}\sin(\omega t-\phi_+^{\rm ord})\Big],\\
\mathcal{A}_y^{\rm ord} &= \frac{p_x}{k^2}\Big[e^{-p_x x}H_-^{\rm ord}\sin(\omega t-\phi_-^{\rm ord}) - e^{p_x(x-D)}H_+^{\rm ord}\sin(\omega t-\phi_+^{\rm ord})\Big],
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

де H_-^{ord} і H_+^{ord} — амплітуди, а ϕ_-^{ord} і ϕ_+^{ord} — фази магнітного поля звичайних хвиль у зразку шаруватого надпровідника. Знаки «+» та «−» у нижніх індексах показують напрямок затухання хвиль, а $p_x = \lambda_{ab}^{-1}$ — декремент цього затухання.

Поляризація надзвичайної хвилі перпендикулярна звичайній, і її магнітне поле перпендикулярно осі z. Саме у цієї хвилі проявляються нелінійні властивості джозефсонівської плазми. Ми шукаємо розв'язок для A_z у формі хвилі з залежними від x амплітудою $a(x)$ і фазою $\eta(x)$,

$$\mathcal{A}_z^{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}_0 \tilde{\Omega} \lambda_c a(x) \sin[\omega t - \eta(x)], \quad \mathcal{H}_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{\Phi_0}{d\lambda_c}, \tag{4.20}$$

де $\tilde{\Omega} = |\Omega^2 - \Omega_{\mathrm{cut}}^2|^{1/2}$, $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота хвилі та Ω_{cut} — нормована частота відсічення, тобто мінімальна частота, з якою лінійні надзвичайні хвилі можуть поширюватись в шаруватому надпровіднику,

$$\Omega_{\mathrm{cut}} = \left(1 + \frac{k_y^2 \lambda_c^2}{1 + \lambda_{ab} k_z^2}\right)^{1/2}. \tag{4.21}$$

Вводячи безрозмірну координату, $\xi = \tilde{\Omega} x/\lambda_c$, і, відповідно, нормовану товщину зразка, $\delta = \tilde{\Omega} D/\lambda_c$, а також підставляючи рівняння (4.20) в рівняння (1.43), можна знайти інші компоненти векторного потенціалу надзвичайних мод,

$$\mathcal{A}_x^{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}_0 \tilde{\Omega}^2 \lambda_{ab}^2 k_z \left[a \sin(\omega t - \eta)\right]', \quad \mathcal{A}_y^{\mathrm{ext}} = \mathcal{H}_0 \tilde{\Omega} \lambda_{ab}^2 \lambda_c k_y k_z a \sin(\omega t - \eta), \tag{4.22}$$

і два диференціальних рівняння для функцій $\eta(\xi)$ і $a(\xi)$,

$$(a^2 \eta')' = 0, \quad a'' = -\sigma a - a^3 + a\eta'^2. \tag{4.23}$$

Тут $\sigma = \mathrm{sign}(\Omega - \Omega_{\mathrm{cut}})$, а штрих позначає похідну за ξ. Ми будемо використовувати ці рівняння для чисельного аналізу електромагнітного поля всередині зразка шаруватого надпровідника.

4.2.2. Обгрунтування аналогу принципу суперпозиції для нелінійних хвиль

Використовуючи рівняння для векторних потенціалів в вакуумі (4.16)–(4.18) і шаруватому надпровіднику (4.19), (4.22), (4.20), а також вирази (1.44) та (4.13), можна зв'язати тангенціальні компоненти електричних і магнітних полів на двох границях зразка (при $x = 0$ і $x = D$) і отримати два набора рівнянь. Граничні умови на першій границі ($x = 0$) призводять до рівнянь, записаних у комплексній формі:

$$\mu\big[\tilde{h}^{(1)}_{\rm inc} + \tilde{h}^{(1)}_{\rm ref}\big] = i(k_x\lambda_c)^{-1}\alpha\tilde{\gamma}\tilde{h}^{\rm ord}_{-} - i\tilde{\gamma}^2 a(0)e^{i\eta(0)}, \tag{4.24}$$

$$\tilde{h}^{(1)}_{\rm inc} + \tilde{h}^{(1)}_{\rm ref} - \alpha\big[\tilde{h}^{(2)}_{\rm inc} - \tilde{h}^{(2)}_{\rm ref}\big] = ia(0)e^{i\eta(0)}, \tag{4.25}$$

$$\mu\big[\tilde{h}^{(2)}_{\rm inc} + \tilde{h}^{(2)}_{\rm ref}\big] = \tilde{\gamma}^2\tilde{h}^{\rm ord}_{-} - \beta\big[a(\xi)e^{i\eta(\xi)}\big]'_{\xi=0}, \tag{4.26}$$

$$\alpha\big[\tilde{h}^{(1)}_{\rm inc} - \tilde{h}^{(1)}_{\rm ref}\big] + \tilde{h}^{(2)}_{\rm inc} + \tilde{h}^{(2)}_{\rm ref} = -\tilde{h}^{\rm ord}_{-}, \tag{4.27}$$

де введені нормовані амплітуди хвиль $\mathrm{H}_\perp$ і $\mathrm{E}_\perp$ поляризацій у вакуумі і звичайних мод в зразку і додаткові параметри:

$$\tilde{h}^{(1),(2)}_{\rm inc,\,ref,\,tr} = h^{(1),(2)}_{\rm inc,\,ref,\,tr}\exp\big[i\phi^{(1),(2)}_{\rm inc,\,ref,\,tr}\big], \qquad h^{(1),(2)}_{\rm inc,\,ref,\,tr} = \frac{k_y k_z}{\mathcal{H}_0 k^3\tilde{\Omega}\lambda_c} H^{(1),(2)}_{\rm inc,\,ref,\,tr}, \tag{4.28}$$

$$\tilde{h}^{\rm ord}_{\pm} = h^{\rm ord}_{\pm}\exp(i\phi^{\rm ord}_{\pm}), \qquad h^{\rm ord}_{\pm} = \frac{H^{\rm ord}_{\pm}}{\mathcal{H}_0 k^3\tilde{\Omega}\lambda_c\lambda_{ab}^2},$$

$$\alpha = \frac{kk_x}{k_y k_z},\ \beta = \frac{\tilde{\Omega}}{kk_yk_z\lambda_c^3}, \qquad \mu = \frac{k^2 - k_y^2}{k_y^2k_z^2\lambda_c^2},\ \tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_c} = \gamma^{-1}.$$

Граничні умови на другій границі ($x = D$) призводять до наступної системи:

$$\mu\tilde{h}^{(1)}_{\rm tr} = -i(k_x\lambda_c)^{-1}\alpha\tilde{\gamma}\tilde{h}^{\rm ord}_{+} - i\tilde{\gamma}^2 a(\delta)e^{i\eta(\delta)}, \tag{4.29}$$

$$\tilde{h}^{(1)}_{\rm tr} - \alpha\tilde{h}^{(2)}_{\rm tr} = ia(\delta)e^{i\eta(\delta)}, \tag{4.30}$$

$$\mu\tilde{h}^{(2)}_{\rm tr} = \tilde{\gamma}^2\tilde{h}^{\rm ord}_{+} - \beta\big[a(\xi)e^{i\eta(\xi)}\big]'_{\xi=\delta}, \tag{4.31}$$

$$\alpha\tilde{h}^{(1)}_{\rm tr} + \tilde{h}^{(2)}_{\rm tr} = -\tilde{h}^{\rm ord}_{+}. \tag{4.32}$$

Тут ми нехтуємо доданками з $\exp(-p_x D)$, оскільки вважаємо, що товщина зразка D набагато більша від лондонівської глибини проникнення λ_{ab}.

Оскільки $\tilde{\gamma} = \lambda_{ab}/\lambda_c \ll 1$, права частина рівняння (4.24) відносно мала. Таким чином, в головному наближенні за параметром $\tilde{\gamma}$ ми отримуємо

$$\tilde{h}^{(1)}_{\text{ref}} \approx -\tilde{h}^{(1)}_{\text{inc}}. \tag{4.33}$$

Це означає, що падаюча хвиля H$_\perp$ поляризації практично повністю відбивається від шаруватого надпровідника, а амплітуда $\tilde{h}^{(1)}_{\text{tr}}$ H$_\perp$-хвилі, що пройшла, набагато менша за амплітуду $\tilde{h}^{(1)}_{\text{inc}}$, тобто $|\tilde{h}^{(1)}_{\text{tr}}/\tilde{h}^{(1)}_{\text{inc}}| \sim \tilde{\gamma} \ll 1$. Більш того, поведінка H$_\perp$ поляризованих хвиль майже не залежить від наявності ортогональної моди з E$_\perp$ поляризацією.

У головному наближенні за $\tilde{\gamma} \ll 1$ вирази (4.25), (4.26), (4.30) і (4.31) дають наступні рівняння для опису відбиття та проходження хвиль E$_\perp$ поляризації:

$$\begin{gathered}
-\alpha\big(\tilde{h}^{(2)}_{\text{inc}} - \tilde{h}^{(2)}_{\text{ref}}\big) = ia(0)e^{i\eta(0)}, \\
\mu\big(\tilde{h}^{(2)}_{\text{inc}} + \tilde{h}^{(2)}_{\text{ref}}\big) = -\beta e^{i\eta(0)}\left[a'(0) + ia(0)\eta'(0)\right], \\
-\alpha\tilde{h}^{(2)}_{\text{tr}} = ia(\delta)e^{i\eta(\delta)}, \\
\mu\tilde{h}^{(2)}_{\text{tr}} = -\beta e^{i\eta(\delta)}\big[a'(\delta) + ia(\delta)\eta'(\delta)\big].
\end{gathered} \tag{4.34}$$

Даний набір рівнянь так само, як і рівняння (4.23), не містить параметрів H$_\perp$ поляризованої хвилі. Це означає, що відбиття та проходження хвиль з E$_\perp$ поляризацією не залежить від присутності H$_\perp$-хвилі. Таким чином, ми бачимо, що в головному наближенні за параметром анізотропії $\tilde{\gamma} \ll 1$ моди H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій відбиваються і проходять крізь зразок шаруватого надпровідника незалежно одна від одної. Тобто для хвиль H$_\perp$ і E$_\perp$ поляризацій навіть у сильно нелінійному режимі виявляється справедливим своєрідний аналог принципу суперпозиції. Після знаходження амплітуд H$_\perp$- і E$_\perp$-хвиль, що відбились і пройшли, ми можемо використовувати рівняння (4.27) і (4.32) для визначення амплітуд $\tilde{h}^{\text{ord}}_{-}$

і $\tilde{h}_{+}^{\rm ord}$ звичайних мод в шаруватому надпровіднику.

З фізичної точки зору незалежність відбиття і проходження хвиль $\mathrm{H}_{\perp}$ і $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризацій пов'язана з наступними обставинами. У падаючої хвилі $\mathrm{H}_{\perp}$ поляризації присутня y-компонента електричного поля, паралельна як межі поділу «вакуум – шаруватий надпровідник», так і кристалографічній площині **ab** (див. рівняння (4.14)). Ця хвиля викликає сильні струми екранування вздовж шарів. Тому вона проникає в шаруватий надпровідник тільки на короткі відстані в формі сильно згасаючої хвилі і практично повністю відбивається від зразка, не впливаючи на поширення хвилі $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації. У той же час у хвилі $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації немає y-компоненти електричного поля (див. рівняння (4.15)). Струми екранування цієї хвилі протікають тільки вздовж кристалографічної осі **c**, тому вони відносно малі в цьому випадку. Таким чином, хвиля $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації може поширюватися в зразку шаруватого надпровідника і проникати на великі відстані. Ця хвиля частково відбивається і частково проходить крізь зразок, що й випливає з системи рівнянь (4.34).

Щоб продемонструвати сформульований аналог принципу суперпозиції, ми розглянемо три задачі відбиття і проходження, в яких падаюча хвиля являє собою: тільки моду $\mathrm{H}_{\perp}$ поляризації з $h_{\rm inc}^{(1)} = 2$; тільки моду $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації з $h_{\rm inc}^{(2)} = 2$; суперпозицію хвиль $\mathrm{H}_{\perp}$ і $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризацій з $h_{\rm inc}^{(1)} = h_{\rm inc}^{(2)} = 2$. Рисунок 4.6 зображує просторовий розподіл нормованої характерної амплітуди $\bar{W}$ електромагнітного поля всередині хвилеводу для цих трьох випадків,

$$\bar{W} = \frac{k_y k_z}{\mathcal{H}_0 k^3 \tilde{\Omega} \lambda_c} \sqrt{\left\langle |\vec{E}(\vec{r},t)|^2 + |\vec{H}(\vec{r},t)|^2 \right\rangle_t}, \tag{4.35}$$

де $\langle \ldots \rangle_t$ позначає усереднення за часом t.

Як видно з панелі (a) на рис. 4.6, де $h_{\rm inc}^{(1)} = 2$, $h_{\rm inc}^{(2)} = 0$, хвиля $\mathrm{H}_{\perp}$ поляризації повністю відбивається від зразка шаруватого надпровідника і не збуджує хвиль, що поширюються всередині нього. Існує тільки згасаюча хвиля в області, близькій до поверхні зразка. Тому в даному випадку відсутня хвиля, що пройшла. Хвиля $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації, панель (b) на рис. 4.6, де $h_{\mathrm{inc}}^{(1)} = 0$, $h_{\mathrm{inc}}^{(2)} = 2$, частково відбивається і частково проходить крізь шаруватий надпровідник. Коли ж падаюча хвиля представлена сумою хвиль $\mathrm{H}_{\perp}$ і $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризацій з такими ж амплітудами, $h_{\mathrm{inc}}^{(1)} = h_{\mathrm{inc}}^{(2)} = 2$, панель (c) на рис. 4.6, розподіл поля в шаруватому надпровіднику і в другій вакуумній області ($x > D$) залишається таким же, як на панелі (b) на рис. 4.6. Це наочно демонструє, що моди $\mathrm{H}_{\perp}$ і $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризацій не взаємодіють одна з одною і можуть бути розглянуті незалежно.

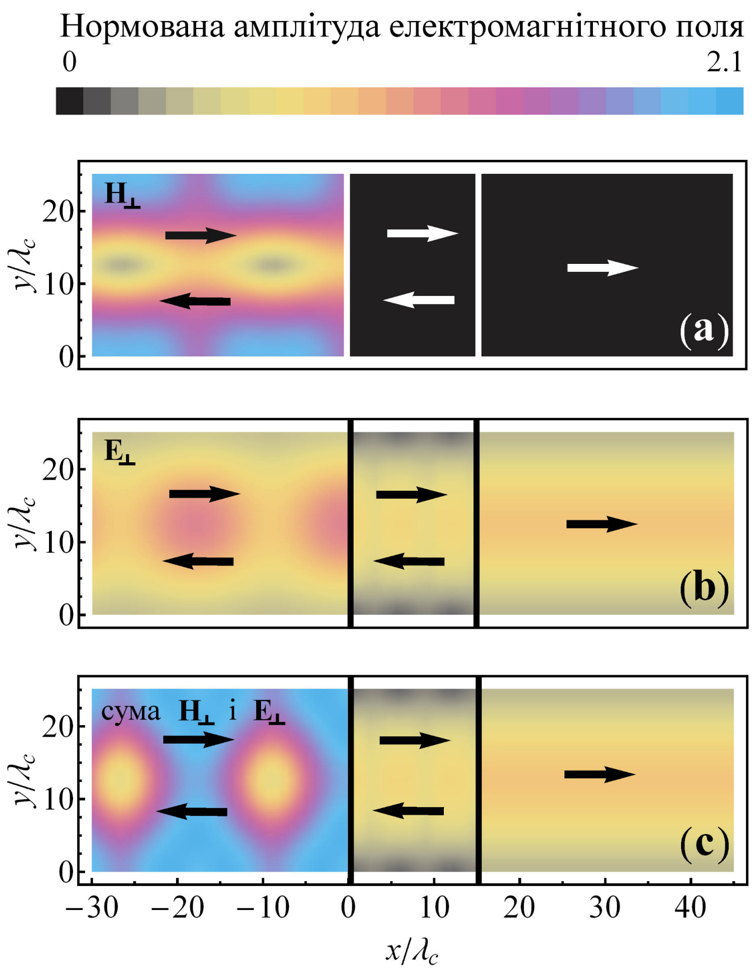


Рис. 4.6. Розподіл величини нормованої амплітуди $\bar{W}$ електромагнітного поля у вакуумній частині та шаруватому надпровіднику для трьох випадків: падає тільки $\mathrm{H}_{\perp}$-хвиля [панель (a)], падає лише хвиля $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації [панель (b)], та падає сума цих двох хвиль [панель (c)]. Параметри: $\tilde{\Omega} = 0{,}1$, $\sigma = -1$, $D = 15\lambda_c$, $L_y = L_z = 0{,}1$ см, $n_y = n_z = 1$, $\phi_{\mathrm{inc}}^{(1)} = \phi_{\mathrm{inc}}^{(2)} = 0$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц.

4.2.3. Транспорт хвиль з $\mathrm{E}_\perp$ поляризацією

У цьому пункті ми обговоримо нелінійне відбиття і проходження хвиль з $\mathrm{E}_\perp$ поляризацією, тобто випадок $h^{(1)}_{\mathrm{inc,ref,tr}} = 0$. Рівняння (4.34) можна переписати у формі:

$$\big[2h^{(2)}_{\mathrm{inc}}\big]^2 = \left[\frac{\beta}{\mu}a'(0)\right]^2 + a^2(0)\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu}\eta'(0)\right]^2, \tag{4.36a}$$

$$\eta'(\delta) = \frac{\mu}{\alpha\beta}, \tag{4.36b}$$

$$a'(\delta) = 0, \tag{4.36c}$$

$$|h^{(2)}_{\mathrm{tr}}| = \frac{|a'(\delta)|}{\alpha}. \tag{4.36d}$$

Як і для хвиль з $k_z = 0$, розглянутих в підрозділі 3.2, поведінка хвиль $\mathrm{E}_\perp$ поляризації всередині зразка в головному наближенні за параметром анізотропії γ визначається тільки надзвичайними хвилями. Використовуючи рівняння (4.23) і (4.36), розрахуємо амплітуди хвиль, що відбились і пройшли. Для аналізу ми будемо також розглядати фазові траєкторії $a'(a)$, які відповідають певним розв'язкам цих рівнянь. Інтегруючи рівняння (4.23) з урахуванням (4.36b), отримаємо рівняння для фазових траєкторій в явному вигляді:

$$a'^2(a) = \sigma\big[a^2(\delta) - a^2\big] + \frac{1}{2}\big[a^4(\delta) - a^4\big] + \frac{a^4(\delta)}{(\alpha\beta/\mu)^2}\big[a^{-2}(\delta) - a^{-2}\big]. \tag{4.37}$$

На рис. 4.7 продемонстрована зміна фазових траєкторій $a'(a)$ при збільшенні константи інтегрування $a(\delta)$. При $a(\delta) < a_1 \approx 1{,}39$ (криві 1 і 2 на рис. 4.7 при $a(\delta) = 0{,}2$ і $a(\delta) = 0{,}7$ відповідно) фазові траєкторії являють собою незамкнуті петлі. При $a(\delta) = a_1$ фазова траєкторія формує замкнуту петлю (крива 3 на рис. 4.7 при $a(\delta) = 1{,}39$). Якщо $a(\delta) > a_1$, фазова траєкторія починає повторний рух уздовж замкнутої петлі, тобто витки фазової траєкторії починають накладатися один на одного (криві 4–9 на рис. 4.7 при $a(\delta) = 2{,}4$, $a(\delta) = 2{,}7$, $a(\delta) = 2{,}84$, $a(\delta) = 3$, $a(\delta) = 3{,}2$ відповідно). Стрілки вказують напрямок руху при збільшенні координати ξ.

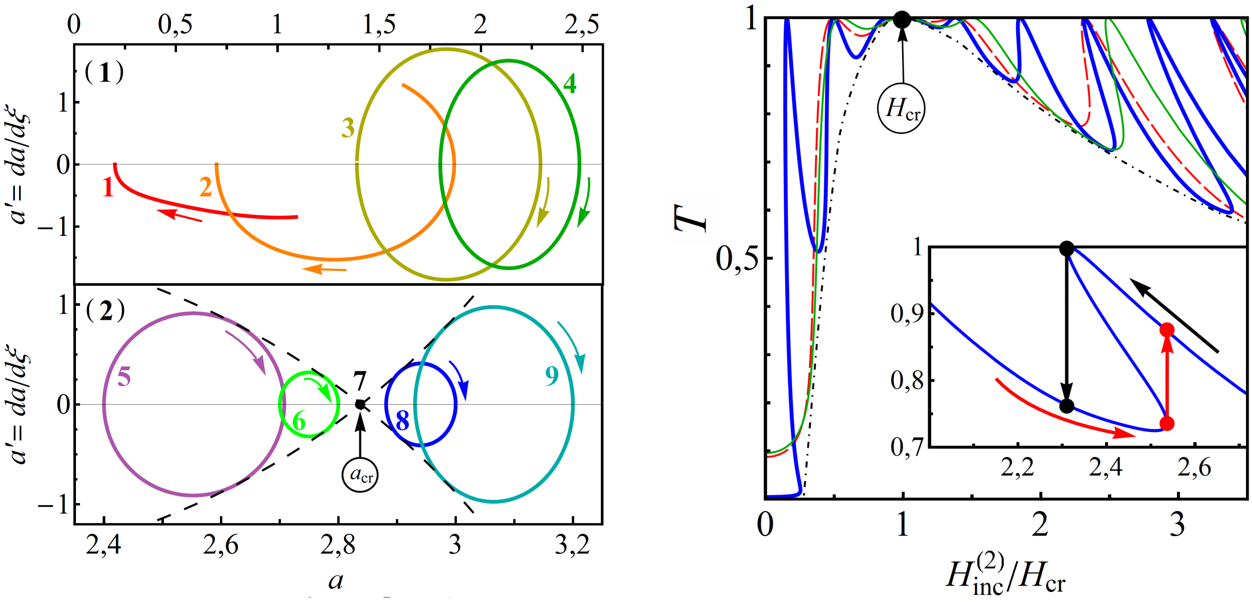


Рис. 4.7. Фазові траєкторії $a'(a)$ при $\delta = 3$ (ліва панель) та залежність коефіцієнта проходження T від нормованої амплітуди $H^{(2)}_{\rm inc}/H_{\rm cr}$ падаючої хвилі $\mathrm{E}_{\perp}$ поляризації (права панель). Параметри: $L_y = L_z = 0{,}1$ см, $D = 30\lambda_c$ (суцільна товста крива), $L_y = L_z = 0,3$ см, $D = 15\lambda_c$ (суцільна тонка крива), $L_y = L_z = 0,1$ см, $D = 15\lambda_c$ (штрихова крива), інші параметри такі ж, як і на рис. 4.6.

Як зазначалося в підрозділі 3.2, у фазових траєкторій існує цікава особливість — існування особливого значення $a(\delta) = a_{\rm cr} \approx 2,84$, при якому фазова траєкторія $a'(a)$ стискається в точку (див. точку 7 на рис. 4.7). Зразок шаруватого надпровідника повністю прозорий у цьому випадку. Використовуючи те, що a'' дорівнює нулю в цій точці, з рівняння (4.23) отримаємо вираз для $a_{\rm cr}$:

$$a_{\rm cr} = \left[\left(\frac{\mu}{\alpha\beta}\right)^2 - \sigma\right]^{1/2}. \tag{4.38}$$

Підставивши в рівняння (4.36а) значення $a(0) = a_{\rm cr}$ і $\eta'(0) = \mu/(\alpha\beta)$, можна отримати критичне значення амплітуди $h^{(2)}_{\rm inc} = h_{\rm cr}$, при якому виникає однорідний просторовий розподіл амплітуди: $a(\xi) = a_{\rm cr}$ для всіх ξ. Значення магнітного поля H_{cr}, з урахуванням нормування (4.28), визначається виразом

$$H_{\text{cr}} = \mathcal{H}_0 \frac{k^2 \lambda_c}{k_x} \sqrt{\left[\frac{(k^2 - k_y^2)\lambda_c}{k_x}\right]^2 + \frac{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}{\omega_J^2}}. \tag{4.39}$$

У цьому випадку, відповідно до рівняння (4.23), фаза η змінюється з ростом ξ за лінійним законом. Це означає, що електромагнітне поле всередині зразка змінюється так само, як в лінійній хвилі, що поширюється вздовж осі x, причому амплітуда відбитої хвилі від границі $x = D$ дорівнює при цьому нулю. Важливо зазначити, що траєкторії при $a < a_{\text{cr}}$ і $a > a_{\text{cr}}$ відповідають амплітудам $H_{\text{inc}}^{(2)} < H_{\text{cr}}$ і $H_{\text{inc}}^{(2)} > H_{\text{cr}}$ відповідно.

Права панель рис. 4.7 представляє залежність коефіцієнта проходження T від амплітуди $H_{\text{inc}}^{(2)}$ (нормованої на H_{cr}) падаючої хвилі $\text{E}_{\perp}$ поляризації для різних розмірів D, L_x і L_y зразка шаруватого надпровідника. Всі криві на правій панелі рис. 4.7 мають осцилюючу структуру, причому коефіцієнт проходження T досягає максимального значення $T = 1$ при деяких амплітудах падаючої хвилі. Крім випадку $H_{\text{inc}}^{(2)} = H_{\text{cr}}$, повна прозорість зразка ($T = 1$) спостерігається, коли фазові траєкторії $a'(a)$ на рис . 4.7 являють собою замкнуті петлі з цілим числом повних обертів, тобто коли $a(0) = a(\delta)$. З фізичної точки зору такі умови відповідають випадку, коли товщина зразка D дорівнює цілому числу довжин хвиль нелінійної моди.

Всі криві $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$ на рис. 4.7 побудовані для зразків з різними розмірами L_x, L_y і D, але мають загальну обвідну криву (штрих-пунктирна крива). Критична амплітуда $H_{\text{inc}}^{(2)} = H_{\text{cr}}$ є єдиною точкою, де всі криві, включаючи обвідну, торкаються одна одної.

У залежності $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$ є гістерезисна особливість, аналогічна детально дослідженій у підрозділі 3.2. Вставка на правій панелі рис. 4.7 представляє фрагмент такої залежності. При збільшенні амплітуди $H_{\text{inc}}^{(2)}$ відбувається рух уздовж нижніх стрілок. Коли досягається кінцева точка цієї гілки, подальший рух по ній стає неможливим і збільшення амплітуди падаючої хвилі призводить до стрибка на більш високу гілку, вздовж вертикальної стрілки. Аналогічні стрибки відбуваються також і при зменшенні амплітуди $H_{\rm inc}^{(2)}$, див. верхні стрілки. Спочатку коефіцієнт проходження зростає, але коли досягнута точка закінчення гілки, відбувається стрибок на більш низьку гілку, вздовж вертикальної стрілки.

4.2.4. Використання аналогу принципу суперпозиції для дослідження транспорту хвиль поперечно-електричної та поперечно-магнітної поляризацій

У цьому пункті розглянуто нелінійне проходження, відбиття і крос-поляризація хвиль ТЕ і ТМ поляризації у хвилеводі зі зразком шаруватого надпровідника. Для даної геометрії (див. рис. 4.1) хвилі ТЕ (ТМ) поляризації визначені як такі, у яких електричне (магнітне) поле перпендикулярно осі x. Векторний потенціал у першій вакуумній області (при $x < 0$) представлений хвилями, що падають та відбились. Векторний потенціал $\vec{\mathcal{A}}^{(\rm TE)}$ ТЕ поляризованих компонент електромагнітного поля може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_x^{(\rm TE)} = 0, \\
&\mathcal{A}_y^{(\rm TE)} = -H_{\rm inc}^{(\rm TE)}\frac{kk_z}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(\rm TE)}] - H_{\rm ref}^{(\rm TE)}\frac{kk_z}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(\rm TE)}], \\
&\mathcal{A}_z^{(\rm TE)} = H_{\rm inc}^{(\rm TE)}\frac{kk_y}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(\rm TE)}] + H_{\rm ref}^{(\rm TE)}\frac{kk_y}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(\rm TE)}],
\end{aligned} \tag{4.40}$$

де $H_{\rm inc}^{(\rm TE)}$ і $H_{\rm ref}^{(\rm TE)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm inc}^{(\rm TE)}$ і $\phi_{\rm ref}^{(\rm TE)}$ — фази магнітного поля у хвилях, що падають та відбились.

Для відповідних ТМ поляризованих компонент маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_x^{(\rm TM)} = H_{\rm inc}^{(\rm TM)}\frac{k^2-k_x^2}{k^3}\sin[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(\rm TM)}] - H_{\rm ref}^{(\rm TM)}\frac{k^2-k_x^2}{k^3}\sin[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(\rm TM)}], \\
&\mathcal{A}_y^{(\rm TM)} = H_{\rm inc}^{(\rm TM)}\frac{k_x k_y}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(\rm TM)}] - H_{\rm ref}^{(\rm TM)}\frac{k_x k_y}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(\rm TM)}], \\
&\mathcal{A}_z^{(\rm TM)} = H_{\rm inc}^{(\rm TM)}\frac{k_x k_z}{k^3}\cos[k_x x - \omega t + \phi_{\rm inc}^{(\rm TM)}] - H_{\rm ref}^{(\rm TM)}\frac{k_x k_z}{k^3}\cos[k_x x + \omega t - \phi_{\rm ref}^{(\rm TM)}],
\end{aligned} \tag{4.41}$$

де $H_{\rm inc}^{\rm (TM)}$ і $H_{\rm ref}^{\rm (TM)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm inc}^{\rm (TM)}$ і $\phi_{\rm ref}^{\rm (TM)}$ — фази магнітного поля у хвилях, що падають та відбились.

Нарешті, в другій вакуумній області (при $x > D$) існують тільки хвилі, що пройшли. У цій області компоненти векторного потенціалу можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{x\,\rm tr}^{\rm (TE)} = 0,\\
&\mathcal{A}_{y\,\rm tr}^{\rm (TE)} = -H_{\rm tr}^{\rm (TE)}\frac{kk_z}{k^3}\cos[k_x(x-D)-\omega t+\phi_{\rm tr}^{\rm (TE)}], \qquad (4.42)\\
&\mathcal{A}_{z\,\rm tr}^{\rm (TE)} = H_{\rm tr}^{\rm (TE)}\frac{kk_y}{k^3}\cos[k_x(x-D)-\omega t+\phi_{\rm tr}^{\rm (TE)}],\\
&\mathcal{A}_{x\,\rm tr}^{\rm (TM)} = H_{\rm tr}^{\rm (TM)}\frac{k^2-k_x^2}{k^3}\sin[k_x(x-D)-\omega t+\phi_{\rm tr}^{\rm (TM)}],\\
&\mathcal{A}_{y\,\rm tr}^{\rm (TM)} = H_{\rm tr}^{\rm (TM)}\frac{k_xk_y}{k^3}\cos[k_x(x-D)-\omega t+\phi_{\rm tr}^{\rm (TM)}], \qquad (4.43)\\
&\mathcal{A}_{z\,\rm tr}^{\rm (TM)} = H_{\rm tr}^{\rm (TM)}\frac{k_xk_z}{k^3}\cos[k_x(x-D)-\omega t+\phi_{\rm tr}^{\rm (TM)}],
\end{aligned}$$

де $H_{\rm tr}^{\rm (TM/TE)}$ і $H_{\rm tr}^{\rm (TM/TE)}$ — амплітуди, а $\phi_{\rm tr}^{\rm (TM/TE)}$ і $\phi_{\rm tr}^{\rm (TM/TE)}$ — фази магнітного поля у хвилях, що пройшли, ТМ та ТЕ поляризацій.

Очевидно, що електромагнітне поле ТЕ і ТМ мод може бути представлено у вигляді суперпозиції хвиль $\rm H_\perp$ і $\rm E_\perp$ поляризацій. Аналіз рівнянь (4.16)–(4.18) і (4.40)–(4.43) призводить до наступних співвідношень між комплексними безрозмірними амплітудами $\tilde{h}_{\rm inc,\,ref,\,tr}^{\rm (TE),\,(TM)}$ хвиль ТЕ і ТМ поляризацій та амплітудами $\tilde{h}_{\rm inc,\,ref,\,tr}^{(1),(2)}$ хвиль $\rm H_\perp$ і $\rm E_\perp$ поляризацій:

$$\tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{\rm (TE)} = \frac{kk_z\tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{(1)} - k_xk_y\tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{(2)}}{k_y^2+k_z^2}, \quad \tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{\rm (TM)} = -\frac{k_xk_y\tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{(1)} + kk_z\tilde{h}_{\rm inc,\,tr}^{(2)}}{k_y^2+k_z^2}, \qquad (4.44)$$

$$\tilde{h}_{\rm ref}^{\rm (TE)} = \frac{kk_z\tilde{h}_{\rm ref}^{(1)} + k_xk_y\tilde{h}_{\rm ref}^{(2)}}{k_y^2+k_z^2}, \qquad \tilde{h}_{\rm ref}^{\rm (TM)} = \frac{k_xk_y\tilde{h}_{\rm ref}^{(1)} - kk_z\tilde{h}_{\rm ref}^{(2)}}{k_y^2+k_z^2}. \qquad (4.45)$$

Тут амплітуди $\tilde{h}_{\rm inc,\,tr,\,ref}^{\rm (TE),\,(TM)}$ нормовані таким же чином, як у рівнянні (4.28).

Оскільки ТЕ і ТМ хвилі являють собою комбінації мод $\rm H_\perp$- і $\rm E_\perp$-поляризацій, вони обидві частково відбиваються, частково проходять крізь зразок і можуть перетворюватись одна в іншу.

Почнемо розгляд з випадку падіння TE поляризованої хвилі. Використовуючи рівняння (4.44) і (4.45), аналог принципу суперпозиції для хвиль $\mathrm{H}_\perp$ і $\mathrm{E}_\perp$ поляризацій, а також результати попередніх пунктів по відбиттю і проходженню хвиль $\mathrm{H}_\perp$ і $\mathrm{E}_\perp$ поляризацій, ми можемо знайти коефіцієнти відбиття $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$ і проходження $T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$ для TE-хвиль,

$$R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}} = \left|\frac{h_{\mathrm{ref}}^{(\mathrm{TE})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}}\right|^2, \quad T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}} = \left|\frac{h_{\mathrm{tr}}^{(\mathrm{TE})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}}\right|^2, \tag{4.46}$$

і коефіцієнти перетворення $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}$ і $T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}$ в TM хвилю, яка виникає в вакуумних областях $x < 0$ і $x > D$ відповідно,

$$R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}} = \left|\frac{h_{\mathrm{ref}}^{(\mathrm{TM})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}}\right|^2, \quad T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}} = \left|\frac{h_{\mathrm{tr}}^{(\mathrm{TM})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}}\right|^2. \tag{4.47}$$

Ліва панель на рис. 4.8 представляє результати чисельного аналізу залежностей коефіцієнтів $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$, $T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$, $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}$ і $T_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}$ від безрозмірної амплітуди $h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}$ TE-хвилі, що падає. Суцільні криві відповідають хвилям, що відбита та пройшла, TE поляризації. Штрихові криві відповідають хвилям TM поляризації, які утворились при відбитті та проходженні, що підтверджує ефект крос-поляризації. Відзначимо, що всі ці залежності проявляють гістерезисну поведінку при зміні амплітуди хвилі, що падає.

Тепер розглянемо випадок падіння хвилі TM поляризації і чисельно розрахуємо коефіцієнти відбиття $R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}}$ і проходження $T_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}}$ TM-хвиль,

$$R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}} = \left|\frac{h_{\mathrm{ref}}^{(\mathrm{TM})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}}\right|^2, \quad T_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}} = \left|\frac{h_{\mathrm{tr}}^{(\mathrm{TM})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}}\right|^2, \tag{4.48}$$

а також коефіцієнти перетворення $R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}}$ і $T_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}}$ в TE-хвилю, яка виникає в вакуумних областях $x < 0$ і $x > D$ відповідно,

$$R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}} = \left|\frac{h_{\mathrm{ref}}^{(\mathrm{TE})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}}\right|^2, \quad T_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}} = \left|\frac{h_{\mathrm{tr}}^{(\mathrm{TE})}}{h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}}\right|^2. \tag{4.49}$$

Права панель на рис. 4.8 представляє залежності цих коефіцієнтів від безрозмірної амплітуди $h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}$ падаючої ТМ-хвилі.

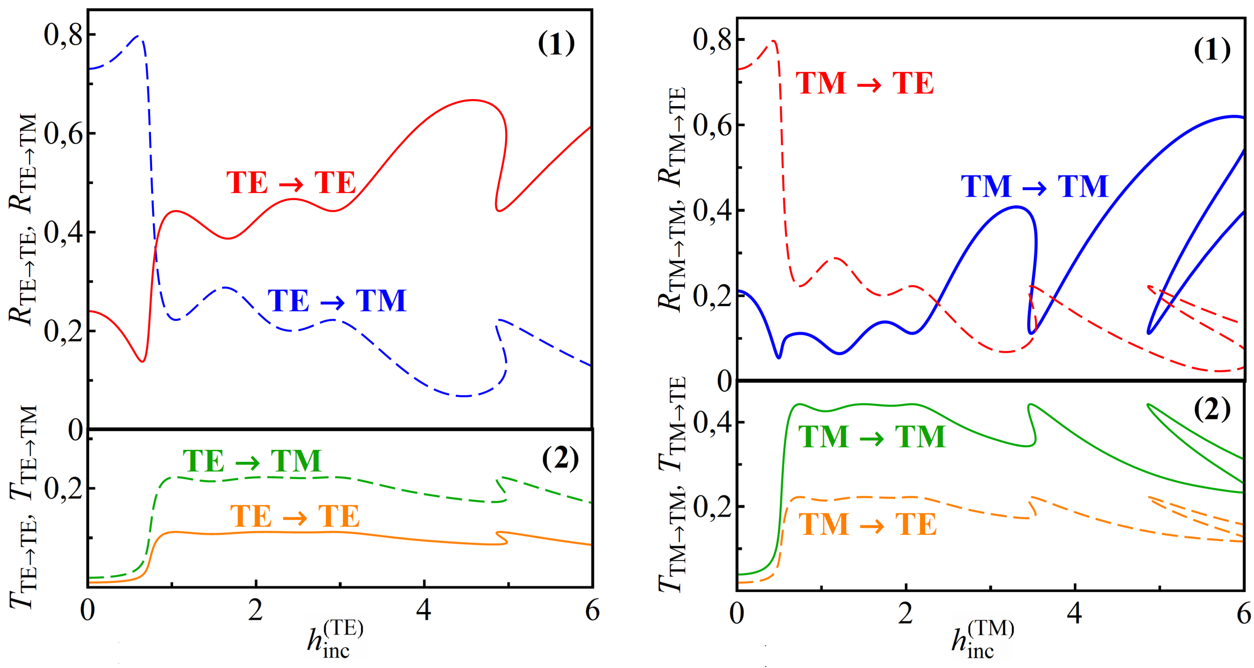


Рис. 4.8. Залежності коефіцієнтів відбиття і проходження (суцільні криві), а також коефіцієнтів перетворення (штрихові криві), від безрозмірної амплітуди падаючої ТЕ-хвилі (ліва панель) або ТМ-хвилі (права панель). Параметри такі ж, як на рис. 4.6.

Як можна побачити з рис. 4.8, при певних значеннях амплітуди хвилі, що падає, амплітуди перетворених хвиль перевищують амплітуди неперетворених хвиль. Відношення коефіцієнту перетворення $R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}}$ до коефіцієнту відбиття $R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}}$ та відношення коефіцієнту перетворення $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}$ до коефіцієнту відбиття $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$ представлені на основній панелі та на вставці на рис. 4.9 відповідно, як функції амплітуди хвилі, що падає. Ці залежності показують, за яких амплітуд можлива ефективна крос-поляризація у хвилі, що відбилась. Хвилі, що пройшли, завжди мають $\mathrm{E}_\perp$ поляризацію через те, що в другій вакуумній області ($x > D$) хвилі

$H_\perp$ поляризації відсутні. Тому у цій області спостерігається лише часткова крос-поляризація ТЕ- та ТМ-хвиль.

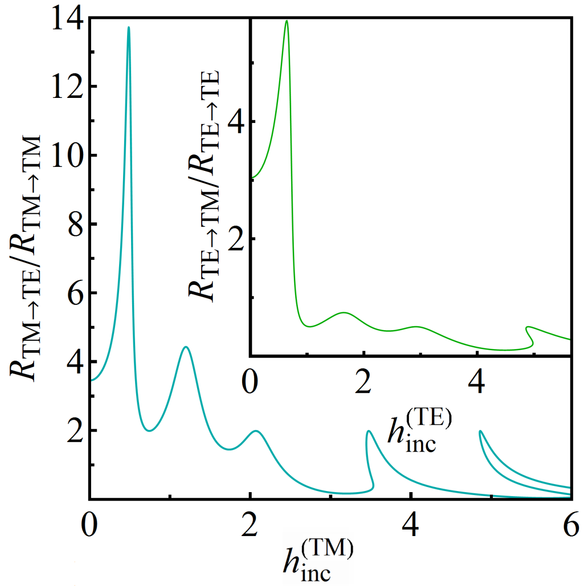


Рис. 4.9. Залежність відношення $R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TE}}/R_{\mathrm{TM}\to\mathrm{TM}}$ від безрозмірної амплітуди $h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TM})}$ падаючої хвилі ТМ поляризації (основна панель) і відношення $R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TM}}/R_{\mathrm{TE}\to\mathrm{TE}}$ від безрозмірної амплітуди $h_{\mathrm{inc}}^{(\mathrm{TE})}$ падаючої хвилі ТЕ поляризації (вставка). Параметри ті ж, що і на рис. 4.6.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [33–35]:

- Передбачено ефект крос-поляризації терагерцових електромагнітних хвиль при їх проходженні та відбитті від зразка шаруватого надпровідника, який розміщено у вакуумному прямокутному хвилеводі з ідеальними металевими стінками та надпровідні шари якого паралельні осі хвилевода.

- Показано, що у вказаній геометрії у зразку шаруватого надпровідника збуджується два типа хвиль, звичайна та надзвичайна, властивості яких якісно відрізняються між собою у зв’язку з сильною анізотропією шаруватого надпровідника. Саме це обумовлює ефект крос-поляризації.

- Виявлено два специфічних типа поляризацій, в яких $H_y = 0$ або $E_y = 0$ (де вісь y перпендикулярна осі хвилеводу і кристалографічній осі **c**). Для цих типів хвиль сформульовано та обґрунтовано специфічний аналог принципу суперпозиції, який показує, що хвилі цих поляризацій практично не перетворюються одна в іншу не тільки в лінійному наближенні, а і при врахуванні нелінійності у джозефсонівській плазмі.

- Такий принцип суперпозиції має місце завдяки наступним процесам у шаруватому надпровіднику. Хвиля першої поляризації викликає сильні струми екранування вздовж кристалографічної площини **ab** і тому практично повністю відбивається від зразка. Хвиля другої поляризації не містить компоненти електричного поля, паралельної як поверхні зразка, так і кристалографічній площині **ab**. Тому вона частково відбивається і частково проходить крізь зразок, причому через нелінійність задачі її коефіцієнт відбиття може змінюватися зі зміною амплітуди хвилі.

- Застосовано вказаний принцип до задачі нелінійної крос-поляризації поперечно-магнітних і поперечно-електричних хвиль та показано, що ступінь крос-поляризації залежить не тільки від кута падіння та частоти хвилі, а також від її амплітуди.

РОЗДІЛ 5

ПОШИРЕННЯ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ХВИЛЬ З АНОМАЛЬНОЮ ДИСПЕРСІЄЮ У ПЛАСТИНІ ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА

У цьому розділі, спираючись на результати робіт [36–38], досліджено поширення електромагнітних хвиль поперечно-магнітної (ТМ) поляризації, локалізованих в пластині шаруватого надпровідника, яка знаходиться в однорідному діелектричному оточенні. Передбачається, що надпровідні шари ортогональні поверхні пластини та хвилі поширюються впоперек шарів, див. рис. 5.1. Отримано дисперсійні співвідношення для лінійних, слабко нелінійних та сильно нелінійних локалізованих хвиль. Показано, що такі хвилі мають аномальну дисперсію у широкому діапазоні параметрів, та визначено умови, за яких групова швидкість таких хвиль обертається в нуль.

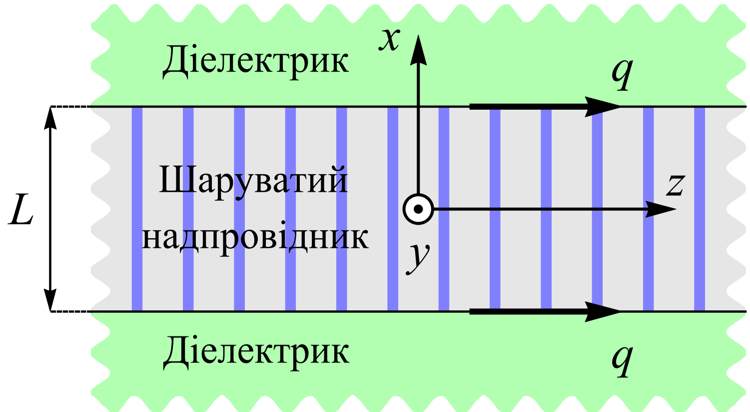


Рис. 5.1. Геометрія задачі. Хвиля з поздовжньою компонентою хвильового вектора q поширюється вздовж пластини шаруватого надпровідника товщини L, яка знаходиться в однорідному діелектричному оточенні з проникністю ε_d.

У нелінійному випадку показано, що незважаючи на симетрію системи, у пластині можуть існувати як симетричні й антисиметричні, так і несиметричні по магнітному полю локалізовані моди. Оскільки дисперсійні співвідношення для нелінійних локалізованих мод містять амплітуду моди, відкривається можливість для спостереження у шаруватих надпровідниках явища, аналогічного «зупинці світла». Цей ефект обговорюється у пункті 5.2.4.

5.1. Лінійні локалізовані моди

У цьому підрозділі ми досліджуємо лінійні локалізовані моди у системі, зображеній на рис. 5.1. Розглядається пластина шаруватого надпровідника товщини L, розміщена в діелектрику з проникністю ε_d. Система координат вибрана таким чином: осі x і y спрямовані паралельно надпровідним шарам, перпендикулярно і паралельно поверхням пластини, відповідно, а вісь z співнапрямлена з кристалографічною віссю **c**. Поверхням пластини відповідають площини $x = \pm L/2$.

Об'єктом дослідження є власні електромагнітні моди TM поляризації (1.25) з частотою ω, що поширюються вздовж пластини з поздовжньою компонентою хвильового вектора q строго перпендикулярно надпровідним шарам. Електромагнітне поле у такій хвилі може бути представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x,y,z,t) &= \{0, H(x), 0\} \exp(iqz - i\omega t), \\ \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(iqz - i\omega t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Звернімо увагу на те, що в силу симетрії задачі щодо площини $x = 0$ лінійні локалізовані моди також мають симетрію. В даному випадку ми можемо шукати розв'язок задачі у вигляді симетричних і антисиметричних по магнітному полю мод.

5.1.1. Електромагнітне поле у системі

5.1.1.1. Поля в діелектрику

Оскільки електромагнітне поле локалізованої хвилі згасає в діелектрику при віддаленні від поверхні пластини, рівняння Максвелла дають такі вирази для компонент електромагнітного поля:

$$\begin{aligned} &E_x^{\pm}(x) = \frac{cq}{\omega\varepsilon_d} h^{\pm} \exp\big[k_d(\mp x + L/2)\big], \\ &E_z^{\pm}(x) = \mp\frac{ick_d}{\omega\varepsilon_d} h^{\pm} \exp\big[k_d(\mp x + L/2)\big], \\ &H^{\pm}(x) = h^{\pm} \exp\big[k_d(\mp x + L/2)\big], \end{aligned} \tag{5.2}$$

де верхній індекс $+$ або $-$ позначає верхній ($x > L/2$) або нижній ($x < -L/2$) півпростір, заповнений діелектриком, а параметр

$$k_d = \sqrt{q^2 - \omega^2/c^2\varepsilon_d} > 0 \tag{5.3}$$

визначає швидкість зменшення електромагнітного поля при віддаленні від пластини, h^+ і h^- — амплітуди магнітного поля на верхній і нижній гранях пластини відповідно. В силу симетрії задачі, $h^+ = h^-$ для симетричних і $h^+ = -h^-$ для антисиметричних по магнітному полю мод.

5.1.1.2. Поля в пластині шаруватого надпровідника

При визначенні полів в шаруватому надпровіднику ми будемо використовувати хвильове рівняння (1.43) для векторного потенціалу (див. пункт 1.3.2) та вважати просторовий масштаб зміни поля вздовж осі z істотно більшим за період структури, що дозволяє використовувати континуальне наближення. Оскільки ми розглядаємо лінійні хвилі, $\sin\varphi$ у рівнянні (1.47) зв'язку джозефсонівського току з калібрувально-інваріантною різницею фаз буде замінений на φ. У цьому випадку електромагнітне поле в пластині шаруватого надпровідника (при $|x| < L/2$), пов'язане з векторним потенціалом рівняннями (1.44), може бути представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} H^s(x) &= h_{\text{even}} \cos k_s x + h_{\text{odd}} \sin k_s x, \\ E^s_x(x) &= \frac{cq}{\varepsilon_{ab}\omega} H^s(x), \\ E^s_z(x) &= \frac{ick_s\omega}{\varepsilon_c \omega_J^2}[h_{\text{even}} \sin k_s x - h_{\text{odd}} \cos k_s x], \end{aligned} \tag{5.4}$$

де індекси «even» і «odd» позначають парну і непарну по магнітному полю компоненти електромагнітних полів як функції x щодо середини пластини $x = 0$; k_s — x-проекція хвильового вектора,

$$k_s^2 = \frac{\varepsilon_c q^2}{\varepsilon_{ab}} - \frac{\varepsilon_c \omega^2}{c^2}. \tag{5.5}$$

Тут поздовжня ε_{ab} і поперечна ε_c компоненти тензора ефективної діелектричної проникності шаруватого надпровідника визначаються рівняннями (1.54) і (1.55), де ми нехтуємо провідністю квазічастинок, $\nu_{ab} = \nu_c = 0$.

5.1.1.3. Дисперсійні співвідношення для симетричних і антисиметричних мод

Для виводу дисперсійних співвідношень нам необхідно записати умови безперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границях пластини. Як вже було сказано, система має симетрію відносно площини $x = 0$, що призводить до симетричності/антисиметричності власних мод. У цьому випадку нам достатньо використати безперервність поля тільки на верхній границі пластини,

$$H^+(x = L/2) = H^s(x = L/2), \qquad E_z^+(x = L/2) = E_z^s(x = L/2), \tag{5.6}$$

та умову парності

$$h^- = h^+, \quad h_{\text{odd}} = 0, \tag{5.7}$$

або непарності

$$h^- = -h^+, \quad h_{\text{even}} = 0, \tag{5.8}$$

магнітного поля. В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих амплітуд полів. Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю, що дає нам дисперсійні співвідношення

$$\text{ctg}(\kappa_s \Lambda) = \beta \tag{5.9}$$

для симетричних і

$$\text{tg}(\kappa_s \Lambda) = -\beta \tag{5.10}$$

для антисиметричних по магнітному полю локалізованих мод, де

$$\beta = \frac{\kappa_s \Omega^2}{\epsilon \kappa_d \big(\Omega^2 - 1\big)}. \tag{5.11}$$

Тут ми ввели безрозмірні параметри

$$\kappa_s = k_s \lambda_c = \sqrt{(\Omega^2 - 1)[1 + \kappa^2/(1 - \Omega^2/\gamma^2)]}, \quad \kappa_d = k_d \lambda_c = \sqrt{\gamma^2 \kappa^2 - \epsilon^{-1} \Omega^2},$$
$$\Omega = \omega/\omega_J, \quad \kappa = q \lambda_{ab}, \quad \Lambda = L/2\lambda_c, \quad \gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}, \quad \epsilon = \varepsilon_s/\varepsilon_d. \tag{5.12}$$

Зауважимо, що ці два дисперсійних співвідношення можуть бути об'єднані в одне:

$$\operatorname{ctg}(2\kappa_s\Lambda) = \frac{\beta^{-1} - \beta}{2}. \tag{5.13}$$

5.1.2. Аналіз дисперсійних співвідношень

Ми почнемо аналіз дисперсійних співвідношень (5.9) і (5.10) з визначення областей параметрів, в яких локалізовані хвилі являють собою поверхневі або хвилеводні моди. Поверхневі моди, яким відповідає $\kappa_s^2 < 0$, можуть існувати тільки з частотами нижче джозефсонівської плазмової частоти,

$$\Omega < 1. \tag{5.14}$$

Хвилеводні моди ($\kappa_s^2 > 0$) існують як при відносно низьких частотах:

$$1 < \Omega < \gamma, \tag{5.15}$$

так і при більш високих частотах:

$$\Omega > \gamma\sqrt{\kappa^2 + 1}. \tag{5.16}$$

Область над світловою лінією $\Omega = \sqrt{\epsilon}\gamma\kappa$ заборонена, оскільки величина κ_d в рівнянні (5.3) повинна бути дійсною, тобто частота хвилеводних мод обмежена наступною умовою:

$$\Omega < \sqrt{\epsilon}\gamma\kappa. \tag{5.17}$$

Звернімо увагу на те, що в разі, коли проникність ε_s діелектричних шарів в пластині менше проникності ε_d навколишнього діелектрика, тобто при $\epsilon < 1$, високочастотна область (5.16) для хвилеводних мод виявляється забороненою завдяки умові (5.17).

Проміжна область частот

$$\gamma < \Omega < \gamma\sqrt{\kappa^2 + 1} \tag{5.18}$$

є забороненою, оскільки в цій області κ_s приймає уявні значення, і дисперсійні співвідношення (5.9) і (5.10) стають невирішуваними.

На рис. 5.2 представлені дисперсійні криві, описувані рівняннями (5.9) для симетричних (суцільні лінії) і (5.10) для антисиметричних (штрихові лінії) локалізованих мод. Сірою заливкою позначені заборонені області.

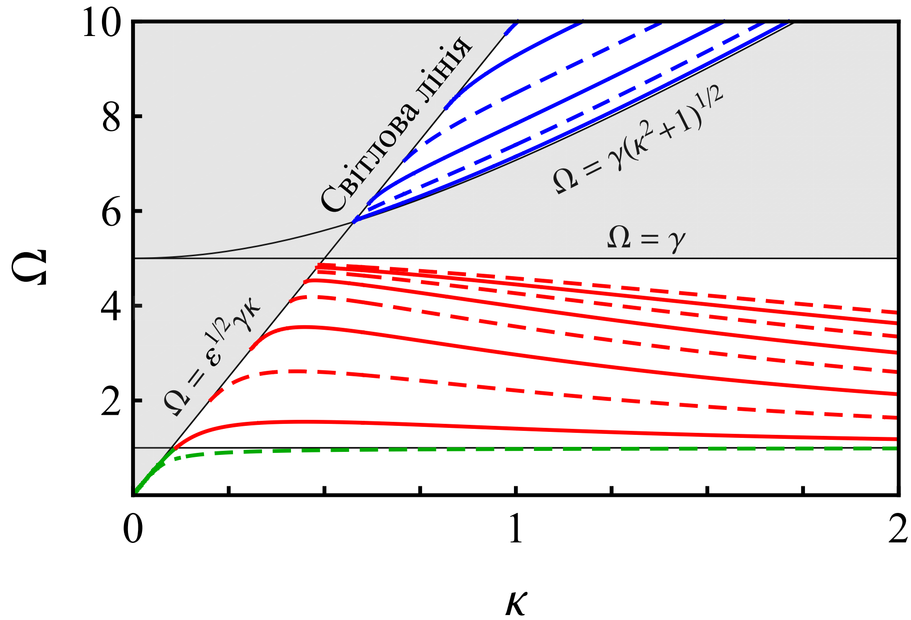


Рис. 5.2. Дисперсійні криві $\Omega(\kappa)$ для симетричних (суцільні криві, рівняння (5.9)) і антисиметричних (штрихові криві, рівняння (5.10)) локалізованих мод. Параметри: $\gamma = 5$, $\epsilon = 4$, $\Lambda = 1$.

У подальшому аналізі ми будемо припускати, що параметр анізотропії γ досить великий, $\gamma \gg 1$, наприклад, $\gamma \gtrsim 100$ для $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$. Це означає, що область (5.16) високочастотних мод відповідає дуже високим частотам, при яких може руйнуватися надпровідність. Для таких великих γ ми обмежимося досліджeнням тільки низькочастотної області (5.15), з частотами $\Omega \ll \gamma$. В кінці розділу ми коротко обговоримо область частот $\Omega \sim \gamma$ для шаруватих надпровідників з не дуже сильною анізотропією, наприклад, $\gamma \gtrsim 5$ для $\mathrm{YBa_2Cu_3O_{7-\delta}}$. Також ми будемо припускати, що зовнішнє оточення не дуже оптично щільне, $\epsilon \gg \gamma^{-1}$, тобто $\varepsilon_d \ll \gamma\varepsilon_s$.

5.1.2.1. Поверхневі моди, $\Omega < 1$

В області $\Omega < 1$ дисперсійні співвідношення (5.9) і (5.10) визначають криві, поведінка яких якісно відрізняється. Крива, відповідна антисиметричним локалізованим модам (див. штрихову криву на рис. 5.3 і в області $\Omega < 1$ на рис. 5.2), починається в точці з $\Omega = 0$ і $\kappa = 0$, монотонно зростає при збільшенні κ і прямує асимптотично до $\Omega = \Omega_\infty$, де

$$\Omega_\infty \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2\epsilon^2}. \tag{5.19}$$

Тут і далі наближена рівність $\approx$ позначає асимптотичний вираз, справедливий в умовах сильної анізотропії, при $\gamma \gg 1$.

Дисперсійна крива для антисиметричних мод при малих значеннях $\kappa \ll 1$ може бути описана як функція $\kappa(\Omega)$ в явному вигляді,

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon}\sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2}\,\mathrm{cth}^2(\Lambda\sqrt{1-\Omega^2})}. \tag{5.20}$$

При $\kappa \gtrsim 1$ цей вираз також наближено описує дисперсійну криву, але виявляється недостатньо точним, якщо нам важливо відхилення кривої від $\Omega = 1$. Для тієї частини кривої, де Ω близько до 1, більш точною є наступна асимптотика:

$$\Omega(\kappa) = \Omega_\infty\sqrt{1 - \frac{\alpha_\infty}{\kappa^2}}, \quad \alpha_\infty \approx \frac{1}{\gamma^2\epsilon^2}. \tag{5.21}$$

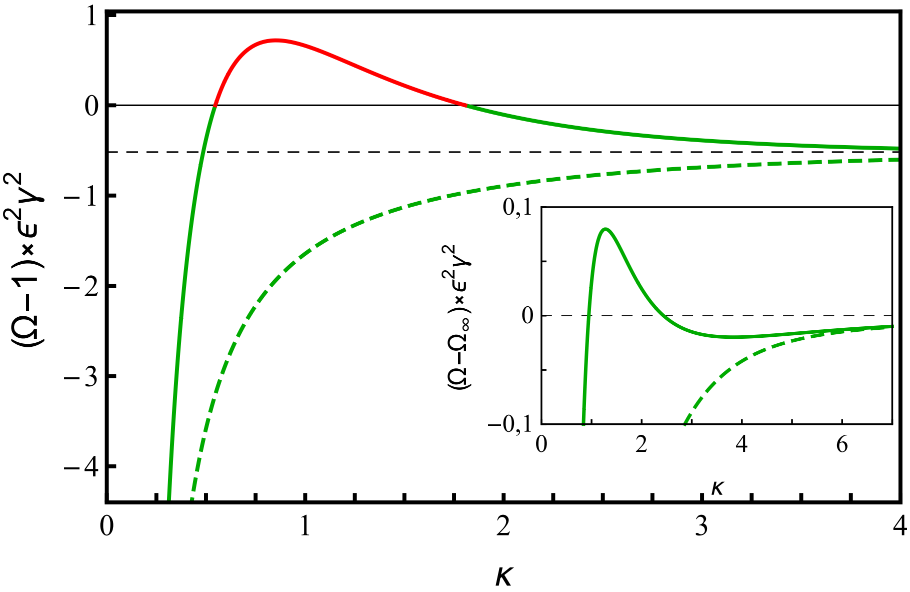


Рис. 5.3. Дисперсійні криві $\Omega(\kappa)$ для симетричних (суцільна крива) і антисиметричних (штрихова крива) власних мод, розташованих в області $\Omega < 1$ і частково в області $\Omega > 1$, де горизонтальні прямі відповідають $\Omega = 1$ (суцільна пряма) і $\Omega = \Omega_\infty$ (штрихова пряма), а також на вертикальних осях частота Ω відрахована від 1 (основна панель) і від Ω_∞ (вставка) і нормована на $1/\epsilon^2\gamma^2$. Параметри: $\gamma = 5$, $\epsilon = 4$, $\Lambda = 8{,}5$ (основна панель) та $\Lambda = 12$ (вставка).

Крива, відповідна симетричним власним модам (див. суцільну криву на рис. 5.3), також починається в точці з $\Omega = 0$ і $\kappa = 0$ і поводиться при малих $\kappa \ll 1$ як

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon}\sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2}\,\mathrm{th}^2(\Lambda\sqrt{1-\Omega^2})}, \tag{5.22}$$

а при досить великих $\kappa \gg \gamma\epsilon/\Lambda$ — як функція (5.21). Однак її поведінка в проміжній області якісно залежить від безрозмірної товщини пластини Λ. Якщо товщина пластини відносно мала, $\Lambda < \Lambda_1$, де

$$\Lambda_1 = \frac{\left(\gamma^2 - 1\right)\epsilon}{2\sqrt{\gamma^2 - 1 + \epsilon^{-1}}} \approx \frac{\gamma\epsilon}{2}, \tag{5.23}$$

то дисперсійна крива для симетричних мод розташовується не тільки в частотній області поверхневих хвиль, $\Omega < 1$, а частково заходить в область більш високих частот, $\Omega > 1$, де вона описує хвилеводну моду (див. суцільну криву на головній панелі рис. 5.3). При цьому вона перетинає пряму $\Omega = 1$ двічі: перший раз при $\kappa = \kappa_0$, коли $\Omega(\kappa)$ зростає,

$$\kappa_0 \approx \frac{2\sqrt{\Lambda^2 + \epsilon}}{\gamma\epsilon + \sqrt{\gamma^2\epsilon^2 - 4\Lambda^2}}, \tag{5.24}$$

а другий раз при $\kappa = \kappa_0'$, де $\Omega(\kappa)$ зменшується,

$$\kappa_0' \approx \frac{\gamma\epsilon + \sqrt{\gamma^2\epsilon^2 - 4\Lambda^2}}{2\Lambda}. \tag{5.25}$$

Якщо ж товщина пластини приймає досить великі значення, $\Lambda > \Lambda_1$, то дисперсійна крива для симетричних мод повністю лежить в області поверхневих хвиль, $\Omega > 1$. При значеннях товщини, менших певного критичного значення, $\Lambda < \Lambda_2 \approx \beta\gamma\epsilon$, де постійна $\beta = 0{,}706...$, дисперсійна крива має точки максимуму і мінімуму (див. вставку до рис. 5.3). Якщо ж $\Lambda > \Lambda_2$, то дисперсійна крива стає монотонною і при $\Lambda \to \infty$ зливається з кривою, що відповідає поверхневим антисиметричним модам. Остання обставина легко пояснюється з фізичної точки зору: за такої великої товщини пластини поля, локалізовані поблизу різних її поверхонь, не взаємодіють одне з одним, і пластину можна розглядати як півнескінченний зразок. Такі поверхневі моди досліджувалися в роботі [162].

Звернімо увагу на те, що досліджувані дисперсійні криві при значеннях Ω, близьких до 1, $|\Omega - 1| \ll 1$, можуть бути описані таким єдиним асимптотичним виразом,

$$\Omega(\kappa) = \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2(\kappa^2+1)} I^2\Big[\frac{\gamma\epsilon\kappa}{\Lambda(\kappa^2+1)}\Big]}, \tag{5.26}$$

де функція $I[y]$ — це обернена функція до $\operatorname{th} x/x$,

$$I\Big[\frac{\operatorname{th} x}{x}\Big] = x, \tag{5.27}$$

або до $\operatorname{cth} x/x$,

$$I\left[\frac{\operatorname{cth} x}{x}\right] = x, \tag{5.28}$$

для симетричних або антисиметричних локалізованих мод відповідно. Якщо товщина Λ має порядок $\gamma\epsilon$, то вираз (5.26) описує дисперсійну криву при всіх $\kappa \gg 1/\gamma\epsilon$.

5.1.2.2. Хвилеводні низькочастотні моди, $\Omega \ll \gamma$

Всі дисперсійні криві, відповідні хвилеводним низькочастотним модам (крім ділянки дисперсійної кривої для симетричної моди, описаної у попередньому підрозділі), починаються на світловій лінії $\Omega = \epsilon^{1/2}\gamma\kappa$ в точках $\Omega = \bar{\Omega}_n$,

$$\bar{\Omega}_n = \sqrt{(\pi n/2\Lambda)^2 + 1}, \quad 1 \leqslant n \ll \gamma\Lambda. \tag{5.29}$$

Тут $n = 1, 2, 3, \ldots$ нумерує криві від низу до верху, причому непарні номери, $n = 1, 3, 5, \ldots$, відповідають антисиметричним локалізованим модам, рівняння (5.10), а парні, $n = 2, 4, 6, \ldots$, — симетричним, рівняння (5.9).

Поблизу світлової лінії криві зростають з ростом κ, і їх асимптотична поведінка при $\kappa \ll 1$ може бути описана наступною формулою:

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon}\sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1} J^2(\Lambda\sqrt{\Omega^2 - 1})}. \tag{5.30}$$

Тут n-й дисперсійній кривій відповідають значення частоти в інтервалі $\bar{\Omega}_n \leqslant \Omega < \bar{\Omega}_{n+1}$, а функція $J(x)$ періодична, $J(x + \pi/2) = J(x)$, і визначена на періоді як

$$J(x) = \operatorname{tg} x, \text{ при } 0 \leqslant x < \pi/2. \tag{5.31}$$

Дисперсійні криві зменшуються і прямують до $\Omega = 1$ при великих $\kappa \to \infty$. Асимптотична поведінка n-ї кривої поблизу $\Omega = 1$, при

$$\sqrt{\Omega^2 - 1} \ll 1/\epsilon\gamma, \tag{5.32}$$

така:

$$\Omega_n(\kappa) = \sqrt{\frac{(\pi n/2\Lambda)^2}{\kappa^2 + 1} + 1}. \tag{5.33}$$

Однак в проміжній області, далекій як від світлової лінії, так і від частоти $\Omega = 1$,

$$\gamma \gg \sqrt{\Omega^2 - 1} \gg 1/\epsilon\gamma, \quad \kappa \gtrsim 1, \tag{5.34}$$

попередній вираз має бути змінений наступним чином:

$$\Omega_n(\kappa) = \sqrt{\frac{[\pi(n+1)/2\Lambda]^2}{\kappa^2 + 1} + 1}. \tag{5.35}$$

Видно, що в проміжній області (5.34) асимптотика n-ї дисперсійної кривої (5.35) збігається з асимптотикою (5.33) для $(n+1)$-ї кривої в області великих κ (5.32).

На рис. 5.4 показані дисперсійні криві (суцільні лінії), відповідні рівнянням (5.9) і (5.10), і їх асимптотики (штрихові лінії), описувані рівнянням (5.35), в частотному діапазоні $\Omega \ll \gamma$. Кружечки позначають наближені положення точок максимуму (докладніше див. пункт 5.1.3).

5.1.2.3. Високочастотні дисперсійні криві, $\Omega \sim \gamma$

В цьому підрозділі ми коротко обговоримо властивості дисперсійних кривих при $\Omega \sim \gamma \gg 1$. Криві $\Omega_n(\kappa)$ починаються на світловій лінії в точках $\Omega = \bar{\Omega}_n$ в області $\Omega < \gamma$,

$$\bar{\Omega}_n = \gamma - \frac{2\gamma^3\Lambda^2}{\pi^2 n^2 \epsilon}, \text{ при } n \gg \gamma\Lambda, \tag{5.36}$$

і в точках $\Omega = \tilde{\Omega}_n$ в області $\Omega > \gamma\sqrt{\kappa^2+1}$,

$$\tilde{\Omega}_n = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\epsilon^{-1}}}\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{2\Lambda^2\gamma^2\epsilon}\right), \text{ при } 0 \leqslant n \ll \gamma\Lambda. \tag{5.37}$$

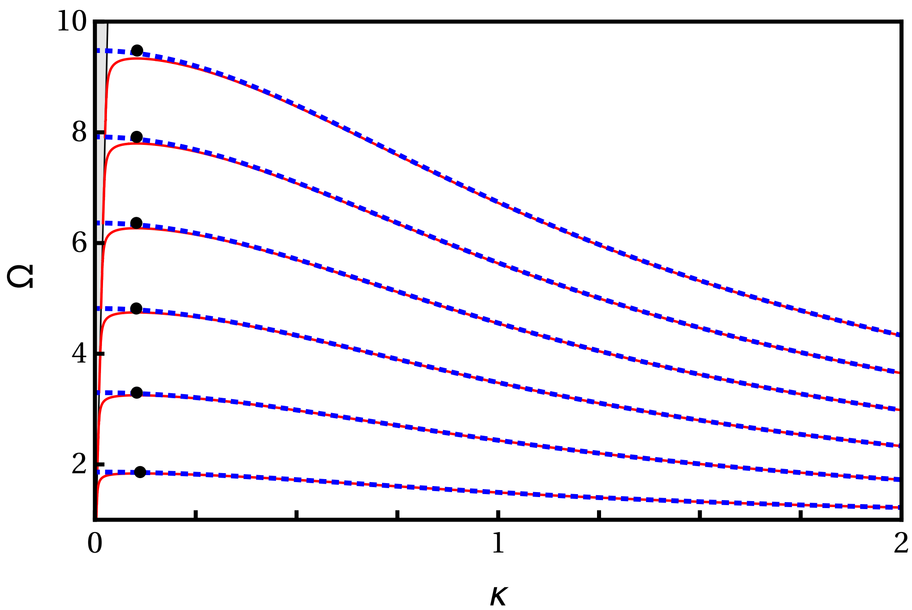


Рис. 5.4. Дисперсійні криві $\Omega_n(\kappa)$ для низькочастотних хвилеводних мод (суцільні криві), розташовані в області $1 < \Omega \ll \gamma$, і асимптотичні криві, задані рівнянням (5.35) (штрихові криві) . Кружками позначені наближені положення точок максимуму, що визначаються рівняннями (5.46) і (5.47). Параметри: $\gamma = 100$, $\epsilon = 10$, $\Lambda = 1$.

Дисперсійні криві в області $\Omega < \gamma$ поводяться якісно так само, як криві $\Omega_n(\kappa)$, описані в попередньому підрозділі: зростають поблизу світлової лінії згідно з рівнянням (5.30), а потім зменшуються в області $1 \lesssim \kappa \ll n/\gamma\Lambda$ за законом

$$\Omega_n(\kappa) = \gamma - \frac{2\gamma^3\Lambda^2}{\pi^2 n^2}\kappa^2. \tag{5.38}$$

Дисперсійні криві в області $\Omega > \gamma\sqrt{\kappa^2+1}$ монотонно зростають. Нагадаємо також, що ці криві існують тільки у випадку $\epsilon > 1$.

5.1.3. Аномальна дисперсія

У попередньому пункті нами показано, що локалізовані моди характеризуються аномальною дисперсією в певному діапазоні хвильових чисел, де

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial \kappa} < 0, \tag{5.39}$$

див., наприклад, рівняння (5.33), (5.35) і (5.38). При довільному значенні частоти в інтервалі $1 < \Omega < \gamma$ і досить далеко від світлової лінії, при $\kappa \gtrsim 1$, можна подати вираз для n-ї дисперсійної кривої у вигляді:

$$\begin{aligned} \kappa_n(\Omega) &= \frac{\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}}{\gamma} \sqrt{\frac{\left[\pi n/2 + \alpha_n(\Omega)\right]^2}{(\Omega^2 - 1)\Lambda^2} - 1}, \\ \alpha_n(\Omega) &= \operatorname{arctg} \frac{\epsilon\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega^2}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Точки максимуму на дисперсійних кривих, в яких групова швидкість локалізованих хвиль обертається в нуль, можуть бути знайдені розв'язанням наступної системи рівнянь:

$$D(\kappa, \Omega) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \kappa} D(\kappa, \Omega) = 0, \tag{5.41}$$

де

$$D(\kappa, \Omega) = \operatorname{ctg}(\kappa_s \Lambda) - \beta \quad \text{або} \quad D(\kappa, \Omega) = \operatorname{tg}(\kappa_s \Lambda) + \beta, \tag{5.42}$$

для симетричних або антисиметричних по магнітному полю мод, див. рівняння (5.9) або (5.10) відповідно.

Виключаючи з рівнянь (5.41) члени з тригонометричними функціями, ми можемо звести систему до поліноміального рівняння, наприклад, кубічного рівняння відносно $\kappa_d = \sqrt{\gamma^2\kappa^2 - \epsilon^{-1}\Omega^2}$,

$$\begin{aligned} &\kappa_d^2\big[\epsilon - \Lambda\epsilon^2(1-\Omega^{-2})\kappa_d\big](\gamma^2-\Omega^2) = \\ &\quad = \big[\epsilon(\gamma^2-\Omega^2) - \Lambda\kappa_d\Omega^2\big]\big[\kappa_d^2 + \gamma^2 - \Omega^2(1-\epsilon^{-1})\big]. \end{aligned} \tag{5.43}$$

У припущенні, що частота не дуже близька до 1 або γ, і що товщина пластини не надто велика,

$$1 \lesssim \Omega - 1 \ll \gamma, \quad \Lambda \ll \gamma^2\epsilon^2/\Omega^3, \tag{5.44}$$

ми можемо привести рівняння (5.43) до вигляду:

$$\kappa_d^3 = \frac{\gamma^2\Omega^2}{\Lambda\epsilon(\Omega^2-1)}. \tag{5.45}$$

Його розв'язок може бути записано в формі

$$\kappa_{\max}(\Omega) = \frac{\Omega}{\epsilon\gamma}\sqrt{\epsilon + \Big[\frac{\gamma^2\epsilon^2}{\Lambda\Omega(\Omega^2-1)}\Big]^{2/3}}. \tag{5.46}$$

Лінія, яка визначається цією функцією, обмежує область $\kappa > \kappa_{\max}(\Omega)$, в якій спостерігається аномальна дисперсія. Ця лінія перетинає дисперсійні криві в точках максимуму. В умовах (5.44) точки максимуму розташовані при частотах Ω, рівних

$$\Omega_n^{\max} = \sqrt{[\pi(n+1)/2\Lambda]^2 + 1}, \quad n \ll \Lambda\gamma. \tag{5.47}$$

Відповідні значення хвильових чисел можуть бути знайдені з рівняння (5.46). На рис. 5.4 кружками зображені наближені положення точок максимуму, що визначаються рівняннями (5.46) і (5.47).

5.2. Нелінійні локалізовані моди

У цьому підрозділі ми досліджуємо нелінійні локалізовані електромагнітні моди в пластині шаруватого надпровідника.

Як і у попередньому підрозділі, розглядаємо пластину шаруватого надпровідника товщини L, розміщену в діелектрику з проникністю ε_d, див. рис. 5.1. Система координат вибрана так: осі x і y спрямовані паралельно надпровідним шарам, перпендикулярно і паралельно поверхням пластини відповідно, а вісь z співнапрямлена з кристалографічною віссю **c**. Поверхням пластини відповідають площини $x = \pm L/2$.

Ми будемо досліджувати локалізовані електромагнітні моди ТМ-поляризації с частотою ω, що поширюються з хвильовим вектором $\vec{q}$ поперек надпровідних площин в пластині шаруватого надпровідника. Електромагнітне поле в такій хвилі може бути представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} &\vec{H}(x, y, z, t) = \{0, H_y(x)\cos(qz - \omega t), 0\}, \\ &\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_x(x)\cos(qz - \omega t), 0, E_z(x)\sin(qz - \omega t)\}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Електромагнітне поле локалізованих мод повинно експоненційно послаблюватися при віддаленні від границі пластини. Аналогічним чином, в півнескінченному зразку на границі поділу «діелектрик – шаруватий надпровідник» виникають поверхневі моди [162]. Поля таких поверхневих мод експоненційно згасають в обох середовищах. У даній геометрії наявність другої границі призводить до того, що в лінійному режимі електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику може як експоненційно затухати, так і осцилювати поперек пластини (див. попередній підрозділ 5.1). Як буде показано нижче, у сильно нелінійному режимі поперечний розподіл поля в шаруватому надпровіднику описується не тригонометричними функціями, а еліптичними функціями Якобі (див. [142]). Більш того, незважаючи на симетрію задачі щодо площини $x = 0$, нелінійність призводить до того, що моди можуть бути не тільки симетричними або антисиметричними, але і несиметричними по магнітному полю.

5.2.1. Електромагнітне поле у системі

5.2.1.1. Поля в діелектрику

Компоненти електромагнітного поля у діелектрику визначаються рівняннями (5.2), отриманими у підпункті 5.1.1.1.

5.2.1.2. Поля в пластині шаруватого надпровідника

Як у підпункті 5.1.1.2, при визначенні полів в шаруватому надпровіднику ми будемо використовувати хвильове рівняння (1.43) для векторного потенціалу (див. пункт 1.3.2) та вважати просторовий масштаб зміни поля вздовж осі z істотно більшим за період структури, що дозволяє використовувати континуальне наближення. Тут ми будемо розглядати нелінійні хвилі, коли $|\varphi| \ll 1$ та $\sin\varphi$ у рівнянні (1.47) зв'язку джозефсонівського току з калібрувально-інваріантною різницею фаз може бути замінений на $\varphi - \varphi^3/6$. Як було зазначено у пункті 1.3.4, нелінійний член φ^3 істотно впливає на поширення ДПХ, якщо частота хвилі ω близька до джозефсонівської плазмової частоти ω_J. Якщо ж частота хвилі не близька до джозефсонівської плазмової частоти, то нелінійний член φ^3 призводить лише до слабко нелінійних ефектів.

Будемо шукати розв'язок хвильового рівняння (1.43) у вигляді:

$$A_z(x, z, t) = A_0 a(\xi) \cos(qz - \omega t), \tag{5.49}$$

де для зручності подальшого викладу введені безрозмірна амплітуда $a(\xi)$, безрозмірна координата ξ, яка являє собою поперечну координату x, нормовану на модуль x-проекції k_s хвильового вектора лінійної хвилі в шаруватому надпровіднику (див. підрозділ 5.1),

$$\xi = |k_s|x, \quad k_s^2 = \frac{1}{\lambda_c^2}(\Omega^2 - 1)[1 + q^2\lambda_{ab}^2/(1 - \Omega^2/\gamma^2)], \tag{5.50}$$

а Ω та γ визначені у рівнянні (5.12).

Як показано в роботі [136], втратами на генерацію хвиль вищих частот $3\omega, 5\omega, 7\omega, \ldots$ для малих амплітуд можна знехтувати. Це дозволяє замінити нелінійний член $A_z^3 \propto \cos^3(qz - \omega t)$, який виникає з φ^3, на

$$A_z^3 = (3/4)A_0^3 a^3(\xi)\cos(qz - \omega t), \tag{5.51}$$

відкидаючи доданки, що містять більш високі частоти.

Підставляючи вирази (5.49) і (5.51) в хвильове рівняння (1.43), виключаючи A_x і вибираючи $A_0 = \mathcal{H}_0\lambda_c\sqrt{8}\,|\Omega^2 - 1|^{1/2}$, отримуємо рівняння для безрозмірної амплітуди $a(\xi)$:

$$a''(\xi) + \sigma a(\xi) + a^3(\xi) = 0\,, \tag{5.52}$$

де штрих позначає похідну за ξ, а $\sigma = \mathrm{sign}(\Omega - 1)$ приймає значення $+1$ або -1 у відповідності зі знаком виразу $(\Omega - 1)$.

Компоненти електромагнітного поля можуть бути знайдені з рівнянь (1.44) та (5.49):

$$\begin{aligned} H_y^s(x) &= -\mathcal{H}_0\frac{\sqrt{8}\,|\Omega^2 - 1|^{3/2}}{\lambda_c|k_s|}\,a'(\xi), \\ E_z^s(x) &= -\mathcal{H}_0\frac{\sqrt{8}\,\Omega\,|\Omega^2 - 1|^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon_s}}\,a(\xi). \end{aligned} \tag{5.53}$$

Рівняння (5.52) являє собою відоме рівняння для осцилятора Дюфінга [163]. Розв'язки цього рівняння можуть бути знайдені в аналітичній формі в термінах еліптичних функцій Якобі (див. [142]). На основі цих розв'язків у пункті 5.2.3 будуть виведені дисперсійні співвідношення для локалізованих нелінійних мод. Але спочатку, у наступному пункті 5.2.2, ми отримаємо дисперсійні співвідношення для локалізованих слабко нелінійних мод.

5.2.2. Дисперсійні співвідношення для слабко нелінійних мод

Для отримання дисперсійних співвідношень для локалізованих мод слід використовувати умову безперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границях пластини:

$$\left.\frac{E_z^{\pm}}{H_y^{\pm}}\right|_{x=\pm L/2} = \left.\frac{E_z^{s}}{H_y^{s}}\right|_{x=\pm L/2}. \tag{5.54}$$

Перепишемо граничні умови в термінах функції $a(\xi)$, використовуючи вирази для електромагнітних полів (5.2) в діелектрику і (5.53) в пластині шаруватого надпровідника:

$$\left.\frac{a'(\xi)}{a(\xi)}\right|_{\xi=\pm\xi_b} = \pm\beta, \tag{5.55}$$

де

$$\xi_b = |k_s|L/2, \qquad \beta = \frac{\varepsilon_d |k_s|\, \Omega^2}{\varepsilon_s k_d |\Omega^2 - 1|}. \tag{5.56}$$

Як відомо, метод знаходження слабко нелінійних розв'язків рівняння осцилятора Дюфінга у вигляді прямого розкладання для амплітуди дає так звані секулярні (вікові) члени, що розходяться в кожному порядку теорії збурень. Тому потрібно використовувати схему розв'язання, описану в [163], таким чином, щоб враховувати неізохорність:

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 + a_1 + \dots\,, \quad a_0 \gg a_1 \gg \dots\,, \\
\varkappa &= \varkappa_0 + \varkappa_1 + \dots\,, \quad \varkappa_0 \gg \varkappa_1 \gg \dots,
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

де $\varkappa$ являє собою «частоту» осцилятора Дюфінга. Перші члени розкладання (з нульовим індексом) являють собою амплітуду і частоту лінійних коливань. Наступні поправки враховують ефекти неізохорності.

5.2.2.1. Слабко нелінійні моди при $\Omega > 1$

У цьому випадку розв'язок рівняння (5.52) в лінійному наближенні має вигляд тригонометричних функцій:

$$
a_0(\xi) = A_0 \sin\xi \quad \text{або} \quad a_0(\xi) = A_0 \cos\xi \tag{5.58}
$$

для симетричного або антисиметричного по магнітному полю розв'язків відповідно, тобто $\varkappa_0 = 1$. Обчислюючи поправки наступного порядку, знаходимо:

$$
a(\xi) = A_0 \sin(\varkappa\xi) + \frac{A_0^3}{32}\sin(3\varkappa\xi) \quad \text{або} \quad a(\xi) = A_0 \cos(\varkappa\xi) + \frac{A_0^3}{32}\cos(3\varkappa\xi) \tag{5.59}
$$

для симетричного або антисиметричного по магнітному полю розв'язків відповідно, де

$$
\varkappa = 1 + \frac{3A_0^2}{8}. \tag{5.60}
$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (5.55), отримуємо дисперсійні співвідношення:

$$\left[\varkappa + \frac{A_0^2}{4}\cos^2(\varkappa\xi_b)\right]\operatorname{ctg}(\varkappa\xi_b) = \beta, \tag{5.61}$$

$$\left[\varkappa + \frac{A_0^2}{4}\cos^2(\varkappa\xi_b)\right]\operatorname{tg}(\varkappa\xi_b) = -\beta \tag{5.62}$$

для симетричних і антисиметричних локалізованих мод відповідно. Звернімо увагу на те, що в лінійному режимі $A \to 0$ і вирази в квадратних дужках та $\varkappa$ обертаються в 1. У цьому випадку дисперсійні співвідношення збігаються з отриманими в підрозділі 5.1, див. рівняння (5.9) та (5.10).

5.2.2.2. Слабко нелінійні моди при $\Omega < 1$

Діючи аналогічно до попереднього підпункта, отримуємо дисперсійні співвідношення, що містять гіперболічні функції:

$$\left[\frac{\varkappa_0}{\varkappa} - \frac{A_0^2}{4}\operatorname{ch}^2(\varkappa\xi_b)\right]\operatorname{th}(\varkappa\xi_b) = -\beta, \qquad \varkappa = 1 + \frac{3A_0^2}{8} \tag{5.63}$$

для симетричних і

$$\left[\varkappa - \frac{A_0^2}{4}\operatorname{ch}^2(\varkappa\xi_b)\right]\operatorname{cth}(\varkappa\xi_b) = \beta, \qquad \varkappa = 1 - \frac{3A_0^2}{8}, \tag{5.64}$$

для антисиметричних по магнітному полю локалізованих мод.

5.2.3. Дисперсійні співвідношення для сильно нелінійних мод

Загальний вид дисперсійних співвідношень, заданий рівнянням (5.55), залишається вірним і для сильно нелінійного режиму. Але у цьому пункті ми отримаємо точні розв’язки рівняння (5.52), використовуючи функції Якобі (див. [142]), і за їх допомогою виведемо дисперсійні співвідношення для сильно нелінійних мод.

Звернімо увагу на те, що дана система має симетрію відносно площини $x = 0$ (або в безрозмірних змінних $\xi = 0$), що в лінійному (див. підрозділ 5.1) та слабко нелінійному (див. пункт 5.2.2) випадках призводило до наявності симетрії у локалізованих мод: моди є симетричними або антисиметричними по магнітному полю. Однак в сильно нелінійному режимі можуть існувати несиметричні локалізовані моди. У наступному підпункті ми проаналізуємо різні типи фазових траєкторій рівняння (5.52), тобто криві на фазовій площині (a, a'), які відповідають розподілу електромагнітного поля в пластині надпровідника, і обґрунтуємо наявність таких несиметричних мод.

5.2.3.1. Аналіз фазових траєкторій

Проінтегруємо один раз рівняння (5.52) і отримаємо рівняння для фазових траєкторій, тобто кривих на площині (a, a'), в неявному вигляді:

$$2(a')^2 + 2\sigma a^2 + a^4 = (2\alpha + 1)^2 - 1. \tag{5.65}$$

Константа інтегрування в правій частині рівняння обрана в такому вигляді, який спростить подальший виклад.

Вид фазових траєкторій залежить від значення σ. У випадку $\sigma = 1$, тобто $\Omega > 1$, єдина особлива точка $(a, a') = (0, 0)$ має тип «центр» і фазові траєкторії являють собою концентричні цикли, зображені тонкими суцільними лініями на вставці рис. 5.5, при цьому параметр $\alpha > 0$. У разі $\sigma = -1$, тобто $\Omega < 1$, є три особливі точки: точка $(a, a') = (0, 0)$ має тип «сідло», а точки $(a, a') = (\pm 1, 0)$ — тип «центр». Виходячи з цього, можна виділити два типи фазових траєкторій, зображених тонкими суцільними лініями на основній панелі рис. 5.5: малі цикли при $-1/2 < \alpha < 0$, які охоплюють одну з точок $(a, a') = (\pm 1, 0)$, і великі цикли при $\alpha > 0$, що охоплюють всі три особливі точки. Області, що містять різні типи фазових траєкторій, розділені між собою сепаратрисою $2(a')^2 - 2a^2 + a^4 = 0$ при $\alpha = 0$, зображеною тонкою штриховою лінією на основній панелі рис. 5.5.

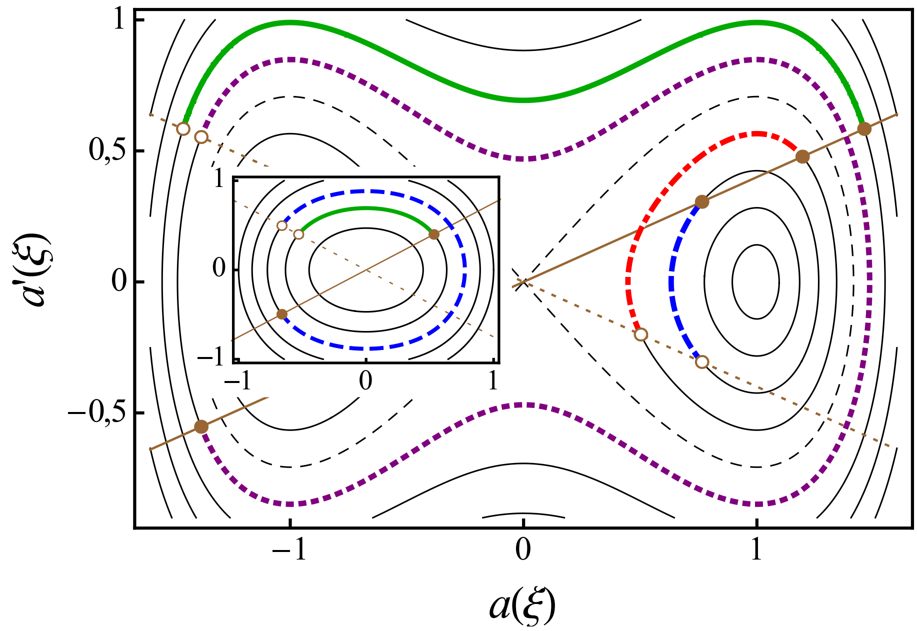


Рис. 5.5. Фазові траєкторії для рівняння (5.52) при $\sigma = -1$ (основна панель) і $\sigma = 1$ (вставка).

Розглянемо тепер різні типи розв'язків рівняння (5.52) при накладенні граничних умов (5.55). На рис. 5.5 суцільною і пунктирною прямими лініями зображені прямі $a' = +\beta a$ і $a' = -\beta a$ відповідно. Поперечному розподілу поля в пластині шаруватого надпровідника відповідає ділянка фазової траєкторії, початок якої при $x = -L/2$ розташований на пунктирній прямій і позначений порожнім кружком, а кінець при $x = +L/2$ розташований на суцільній прямій і відзначений суцільним кружком. При цьому рух уздовж фазової траєкторії має відбуватися за годинниковою стрілкою, що відповідає збільшенню координати x, або безрозмірної координати ξ.

Можна виділити наступні основні типи розв'язків рівняння (5.52) з граничними умовами (5.55), які зображені товстими кривими на рис. 5.5. Для $\sigma = 1$, тобто $\Omega > 1$, є два типи розв'язків: симетричний і антисиметричний по магнітному полю $H_y \propto a'(\xi)$, які зображені на вставці рис. 5.5 суцільною і штриховою товстими кривими відповідно. Такі типи нелінійних розв'язків якісно схожі на відповідні лінійні розв'язки, і лише кількісно модифіковані за рахунок нелінійності, тому ми не будемо їх детально аналізувати.

Для $\sigma = -1$, тобто $\Omega < 1$, є чотири типи розв'язків: симетричний, антисиметричні високо- і низькоамплітудний та несиметричний по магнітному полю $H_y \propto a'(\xi)$, зображені на основній панелі рис. 5.5 суцільною, пунктирною, штриховою та штрих-пунктирною товстими кривими відповідно. Аналітичний вид розв'язків представлено у наступних підпунктах. Тут ми обговоримо якісну відмінність цих типів. Два перших типа, симетричний і високоамплітудний антисиметричний розв'язки, відповідають великим циклам на фазовій діаграмі при $\alpha > 0$. Два інших типа, антисиметричний низькоамплітудний і несиметричний, відповідають малим циклам при $-1/2 < \alpha < 0$.

Звернімо увагу на те, як побудовано несиметричний розв'язок. Нехай прямі $a' = \pm\beta a$ перетинають деякий малий цикл в точках $(a, a') = (a_1, \pm a_1')$ і $(a, a') = (a_2, \pm a_2')$. Тоді в якості початкової і кінцевої точок фазової траєкторії можна вибрати, наприклад, $(a, a') = (a_1, -a_1')$ і $(a, a') = (a_2, +a_2')$ відповідно. Такий розв'язок, очевидно, не є ані симетричним, ані антисиметричним.

На рис. 5.6 представлено розподіли $a'(\xi)$ и $a(\xi)$, відповідні зазначеним фазовим траєкторіям на основній панелі рис. 5.5. Оскільки $H_y(x)$ і $E_z(x)$ пропорційні цим розподілам, $H_y(x) \propto a'(\xi)$ і $E_z(x) \propto a(\xi)$, див. рівняння (5.53), то рис. 5.6 демонструє поперечний розподіл електромагнітних полів у пластині шаруватого надпровідника.

У наступних підпунктах будуть представлені аналітичні розв'язки рівняння (5.52), виражені через еліптичні функції Якобі (див. [142]). Зауважимо, що, окрім стандартних еліптичних синуса $\mathrm{sn}(u;m)$, косинуса $\mathrm{cn}(u;m)$ та дельта-амплітуди $\mathrm{dn}(u;m)$ ми будемо використовувати еліптичний тангенс

$$\mathrm{tn}(u;m) = \frac{\mathrm{sn}(u;m)}{\mathrm{cn}(u;m)}, \tag{5.66}$$

а також деякі додаткові еліптичні функції, які позначаються двома латинськими буквами з набору s, c, d, t і n. Будуються вони за наступним принципом:

$$\mathrm{pq}(u;m) = \frac{\mathrm{pr}(u;m)}{\mathrm{qr}(u;m)}, \tag{5.67}$$

де всі літери p, q, і r є будь-якими буквами з набору s, c, d, t і n, а функції виду $\mathrm{pp}(u;m)$ тотожно рівні 1, $\mathrm{pp}(u;m) = 1$. Зокрема, далі в цьому підрозділі використані такі еліптичні функції:

$$\mathrm{cd}(u;m) = \frac{\mathrm{cn}(u;m)}{\mathrm{dn}(u;m)}, \qquad \mathrm{td}(u;m) = \frac{\mathrm{tn}(u;m)}{\mathrm{dn}(u;m)}, \qquad \mathrm{dt}(u;m) = \frac{\mathrm{dn}(u;m)}{\mathrm{tn}(u;m)}.$$

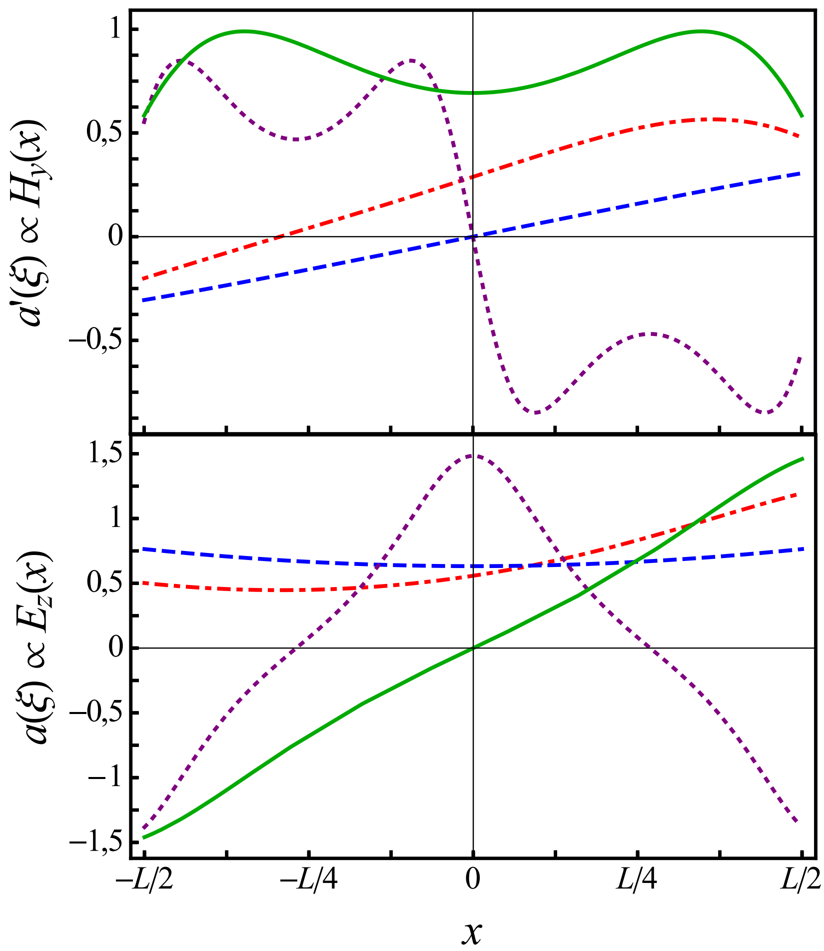


Рис. 5.6. Функції $a'(\xi)$ і $a(\xi)$, відповідні поперечним просторовим розподілам компонент $H_y(x)$ і $E_z(x)$ електромагнітного поля в пластині шаруватого надпровідника, зображені суцільною, штриховою, пунктирною і штрих-пунктирною кривими, згідно з фазовими траєкторіями на основній панелі рис. 5.5.

Також, за аналогією з гіперболічними тригонометричними функціями зручно ввести «гіперболічні» еліптичні функції Якобі

$$\begin{aligned} \operatorname{snh}(u;m) &= -i\,\operatorname{sn}(iu;m),\ \operatorname{cdh}(u;m) = \operatorname{cd}(iu;m), \\ \operatorname{tdh}(u;m) &= -i\,\operatorname{td}(iu;m),\ \operatorname{dth}(u;m) = i\,\operatorname{dt}(iu;m). \end{aligned} \tag{5.68}$$

5.2.3.2. Високочастотні моди, $\Omega > 1$

Відповідні фазові траєкторії зображені на вставці рис. 5.5 товстими суцільною і штриховою лініями. У цьому випадку розв'язки рівняння (5.52) з $\sigma = 1$ виражаються через еліптичні функції $\operatorname{sn}(u;m)$ і $\operatorname{cd}(u;m)$ для симетричної й антисиметричної по магнітному полю моди відповідно,

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \sqrt{2\alpha}\,\operatorname{sn}\left[\sqrt{1+\alpha}\,\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right], \\ a(\xi) &= \sqrt{2\alpha}\,\operatorname{cd}\left[\sqrt{1+\alpha}\,\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right], \end{aligned} \tag{5.69}$$

де $\alpha > 0$.

Підставляючи $a(\xi)$ в умову (5.55) на верхній границі (в силу симетричності розв'язку на нижній границі умова (5.55) виконається автоматично), отримуємо дисперсійні співвідношення для симетричних і антисиметричних мод,

$$\sqrt{1+\alpha}\,\operatorname{dt}\left[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right] = \beta, \tag{5.70}$$

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\operatorname{td}\left[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right] = -\beta, \tag{5.71}$$

відповідно. Тут $\alpha > 0$, а ξ_b і β визначені рівняннями (5.56).

Відзначимо, що еліптичні функції $\operatorname{dt}(u;m)$ і $\operatorname{td}(u;m)$ перетворюються при $m \to 0$ в $\operatorname{ctg}(u)$ і $\operatorname{tg}(u)$ відповідно. Таким чином, при $\alpha \to 0$ ми приходимо до дисперсійних співвідношень для лінійних симетричних і антисиметричних мод, див. рівняння (5.9) та (5.10) відповідно.

5.2.3.3. Симетричні та низькоамплітудні антисиметричні моди, $\Omega < 1$

Відповідні фазові траєкторії позначені на основній панелі рис. 5.5 товстими лініями: суцільна — для симетричних та штрихова — для низькоамплітудних антисиметричних по магнітному полю мод.

Для таких розв'язків рівняння (5.52) результати аналогічні попередньому підпункту 5.2.3.2:

$$a(\xi) = \sqrt{2\alpha}\,\mathrm{snh}\left[\sqrt{1+\alpha}\,\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right], \tag{5.72}$$

при $\alpha > 0$ для симетричних і

$$a(\xi) = \sqrt{2|\alpha|}\,\mathrm{cdh}\left[\sqrt{1+\alpha}\,\xi; |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right], \tag{5.73}$$

при $-1/2 < \alpha < 0$ для низькоамплітудних антисиметричних по магнітному полю мод. Тут $\mathrm{snh}(u; m)$ і $\mathrm{cdh}(u; m)$ — «гіперболічні» еліптичні функції (5.68).

Підставляючи $a(\xi)$ в умову (5.55) на верхній границі, отримуємо дисперсійні співвідношення

$$\sqrt{1+\alpha}\,\mathrm{dth}\left[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}\right] = \beta, \tag{5.74}$$

при $\alpha > 0$ для симетричних і

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\,\mathrm{tdh}\left[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right] = \beta, \tag{5.75}$$

при $-1/2 < \alpha < 0$ для низькоамплітудних антисиметричних по магнітному полю мод. Тут ξ_b і β визначені рівняннями (5.56).

Відзначимо, що еліптичні функції $\mathrm{dth}(u; m)$ і $\mathrm{tdh}(u; m)$ перетворюються при $m \to 0$ в $\mathrm{cth}(u)$ і $\mathrm{th}(u)$ відповідно. Таким чином, при $\alpha \to 0$ ми приходимо до дисперсійних співвідношень для лінійних симетричних і антисиметричних мод, див. рівняння (5.9) та (5.10) відповідно.

5.2.3.4. Високоамплітудні антисиметричні моди, $\Omega < 1$

Відповідні фазові траєкторії позначені на основній панелі рис. 5.5 пунктирною товстою лінією високоамплітудних антисиметричних по магнітному полю мод.

Розв'язок рівняння (5.52) для високоамплітудних антисиметричних мод має вигляд:

$$a(\xi) = \sqrt{2(1+\alpha)}\,\mathrm{cd}\left[\sqrt{\alpha}\,\xi; -\alpha^{-1}(1+\alpha)\right] \tag{5.76}$$

при $\alpha > 0$. Відзначимо, що такі моди не мають лінійного аналога, оскільки амплітуда цих мод в середині пластини досягає значення $a(\xi = 0) = \sqrt{2(1+\alpha)} \geqslant \sqrt{2}$, яке може бути реалізовано тільки поблизу $\Omega \approx 1$, оскільки амплітуда $a(\xi)$ повинна бути достатньо малою, $|a(\xi)| \ll |\Omega^2 - 1|^{-1/2}$.

Підставляючи $a(\xi)$ в умову (5.55) на верхній границі пластини, одержуємо дисперсійне співвідношення для високоамплітудних антисиметричних мод,

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{td}\left[\sqrt{\alpha}\xi_b; -\alpha^{-1}(1+\alpha)\right] = -\beta, \tag{5.77}$$

при $\alpha > 0$. Тут ξ_b і β визначені рівняннями (5.56).

5.2.3.5. Несиметричні моди, $\Omega < 1$

Відповідні фазові траєкторії позначені на основній панелі рис. 5.5 товстою штрих-пунктирною лінією — для несиметричних по магнітному полю мод.

Розв'язок рівняння (5.52) для цього випадку збігається з розв'язком (5.73) для низькоамплітудних мод з тією різницею, що ми вводимо в еліптичну функцію зсув ξ_0:

$$a(\xi) = \sqrt{2|\alpha|}\,\mathrm{cdh}\left[\sqrt{1+\alpha}\,(\xi_0+\xi); |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right] \tag{5.78}$$

при $-1/2 < \alpha < 0$.

Підставляючи $a(\xi)$ в умову (5.55) на верхній і нижній границях пластини, одержуємо дисперсійне співвідношення у вигляді пари зв'язаних рівнянь:

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\,\mathrm{tdh}\left[\sqrt{1+\alpha}(\xi_0 \pm \xi_b); |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right] = \pm\beta \tag{5.79}$$

при $-1/2 < \alpha < 0$. Тут ξ_b і β визначені рівняннями (5.56).

Звернімо увагу на те, що такі моди не мають лінійного аналога, незважаючи на те, що розв'язок (5.78) за структурою збігається з розв'язком (5.73) для низькоамплітудних антисиметричних мод. Справа в тому, що при переході в лінійний режим, $\alpha \to 0$, ми отримуємо пару рівнянь:

$$\mathrm{th}(\xi_0 \pm \xi_b) = \pm\beta, \tag{5.80}$$

які в силу монотонності і непарності функції $\mathrm{th}(\xi)$ мають розв'язок тільки при $\xi_0 = 0$, тобто ми повертаємося до низькоамплітудних антисиметричних мод.

Для виводу дисперсійного співвідношення в замкнутій формі необхідно виключити невідомий зсув ξ_0 з цієї пари рівнянь. Для цього використаємо такі властивості функції $\mathrm{tdh}(u;m)$, див. рис. 5.7. Її період дорівнює $2K(1-m)$, де $K(m)$ — повний еліптичний інтеграл 1-го роду. Нехай відомий u_0 — корінь рівняння $\mathrm{tdh}(u;m) = v$, що задовольняє умові $0 < u_0 < K(1-m)/2$. Тоді решта коренів цього рівняння може бути знайдена у вигляді $u = (-1)^n u_0 + nK(1-m)$, а корені рівняння $\mathrm{tdh}(u;m) = -v$ — у вигляді $u = -(-1)^n u_0 + nK(1-m)$, де n — довільне ціле число.

На рис. 5.7 суцільною лінією зображена функція $\mathrm{tdh}(u;m)$, кружками позначені точки, в яких $\mathrm{tdh}(u;m) = \pm v$, вертикальними пунктирними і горизонтальними штриховими прямими позначені координати цих точок. Точки 1 і 2 з $u_1 = u_0$ і $u_2 = K - u_0$ відповідають розв'язкам рівняння $\mathrm{tdh}(u;m) = v$, а точки 3 і 4 з $u_3 = K + u_0$ і $u_4 = 2K - u_0$ відповідають розв'язкам рівняння $\mathrm{tdh}(u;m) = -v$.

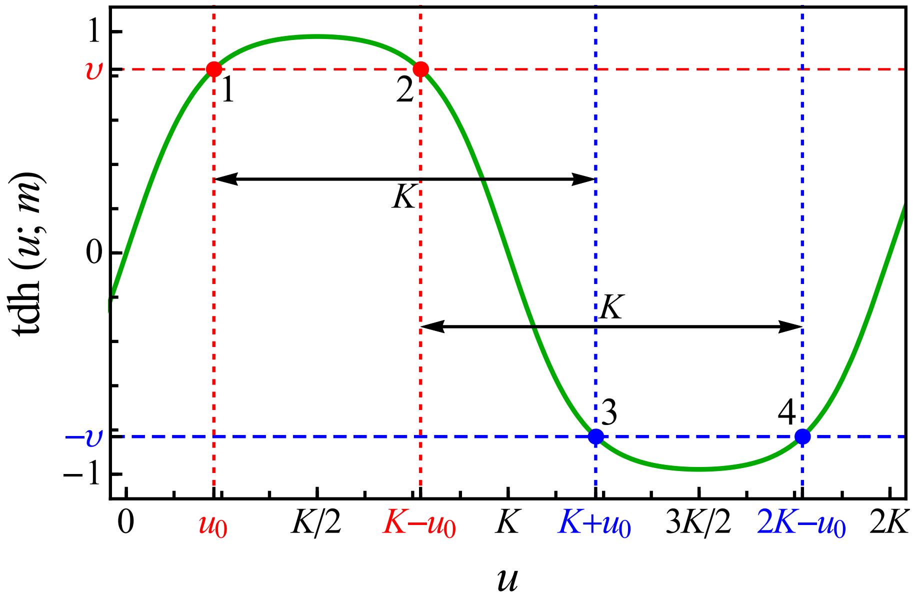


Рис. 5.7. Графік функції $\mathrm{tdh}(u,m)$, де кружками зображені розв'язки рівняння $\mathrm{tdh}(u;m) = \pm v$.

З вищезазначеного зрозуміло, що різниця двох «несиметричних» коренів рівнянь $\mathrm{tdh}(u;m) = \pm v$ дорівнює півцілому числу періодів, тобто $(2n+1)K(1-m)$, де n — ціле число. Наприклад, на рис. 5.7 стрілками показано, що $u_3 - u_1 = u_4 - u_2 = K(1-m)$.

Остаточно ми можемо записати дисперсійне співвідношення для несиметричних мод у вигляді

$$2\sqrt{1+\alpha}\xi_b = (2n+1)K\left[1 - |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right], \tag{5.81}$$

де n — ціле число. У випадку сильної анізотропії, $\gamma \gg 1$, можемо записати дисперсійне рівняння в явному вигляді:

$$\omega(q) = \omega_J \sqrt{1 - \frac{K^2\left[1 - |\alpha|(1+\alpha)^{-1}\right]}{1+\alpha} \frac{(2n+1)^2}{1+q^2\lambda_{ab}^2} \frac{\lambda_c^2}{L^2}}. \tag{5.82}$$

Звернімо увагу на те, що отримане дисперсійне співвідношення не містить параметрів, що характеризують середовище, в якому розміщена пластина шаруватого надпровідника. Дисперсійне співвідношення лише вказує на те, що поперек пластини вкладається непарне число півдовжин нелінійних хвиль. Однак параметри діелектричного оточення впливають на розподіл поля у зразку, оскільки визначають корені рівнянь (5.79). До того ж для існування таких несиметричних локалізованих мод необхідно, щоб, по-перше, електромагнітне поле в діелектрику було згасаючим, тобто $\omega < cq/\sqrt{\varepsilon_d}$, а, по-друге, існували корені рівнянь (5.79), тобто

$$\beta < \frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{|\alpha|}}. \tag{5.83}$$

5.2.4. Аналіз дисперсійних кривих

Почнемо розгляд з режиму слабкою нелінійності. При частотах ω, далеких від джозефсонівської плазмової частоти ω_J, тобто при $|\Omega - 1| \gtrsim 1$, цей режим має місце для відносно тонких пластин з $L \ll |\alpha|^{-1}\lambda_c$, коли параметр нелінійності α малий, $|\alpha| \ll 1$. Обмеження $L \ll |\alpha|^{-1}\lambda_c$ необхідне для того, щоб аргумент еліптичних функцій, що входять в дисперсійні співвідношення, слабо відрізнявся від аргументу відповідних тригонометричних функцій в лінійному випадку. Порівняємо ці аргументи в рівняннях (5.9) і (5.72). Очевидно, що слабка нелінійність реалізується тільки в разі, коли $|\alpha|\xi_b \ll 1$. Якщо ми вважаємо, що $|\Omega - 1| \sim 1$ і $q\lambda_{ab} \sim 1$, то приходимо до нерівності $L \ll |\alpha|^{-1}\lambda_c$.

На рис. 5.8 представлені дисперсійні криві для симетричних [суцільні лінії, рівняння (5.70) і (5.72)] і низькоамплітудні антисиметричні [штрихові лінії, рівняння (5.71) і (5.73)] в лінійному випадку (тонкі лінії) і нелінійному режимі при малому значенні параметра нелінійності $|\alpha| = 0,1$ (товсті лінії). Інші параметри: $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 2\lambda_c$. Криві пронумеровані знизу вгору: $n = 1, 2, \ldots$, причому непарним номерам $n = 1, 3, \ldots$ відповідають антисиметричні, а парним номерам $n = 2, 4, \ldots$ — симетричні по магнітному полю моди. З графіка видно, що в режимі слабкої нелінійності дисперсійні криві незначно відрізняються від лінійного випадку, дослідженого у підрозділі 5.1.

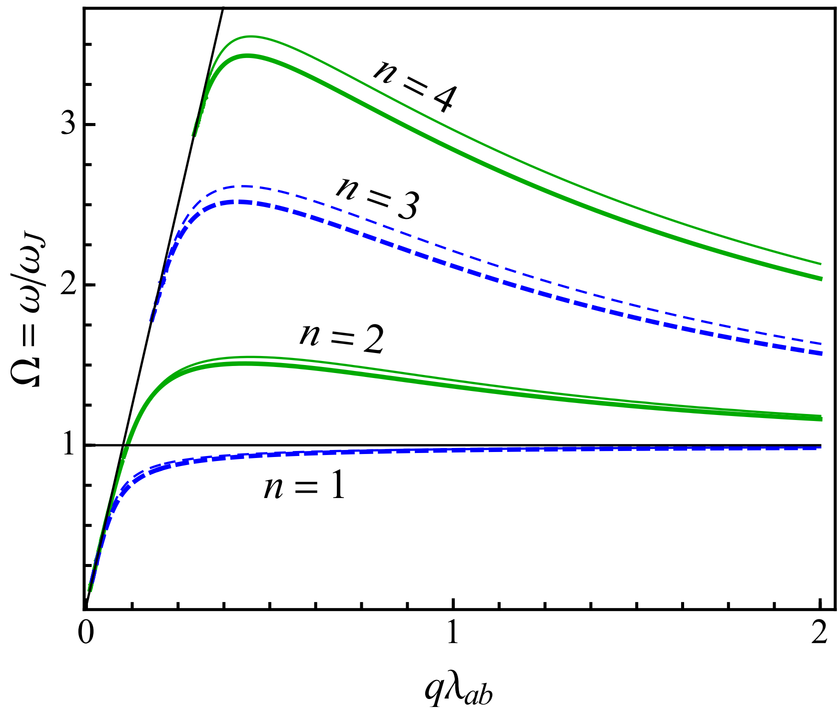


Рис. 5.8. Дисперсійні криві для симетричних (суцільні лінії) і антисиметричних (штрихові лінії) в лінійному випадку (тонкі лінії) і нелінійному режимі при $|\alpha| = 0{,}1$ (товсті лінії). Параметри: $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 2\lambda_c$.

Далі ми розглянемо область частот, близьких до джозефсонівської плазмової частоти ω_J, $|\Omega - 1| \ll 1$, а також випадок порівняно великих значень товщини пластини, $L \sim \lambda_c/|\alpha|$. Тоді режим сильної нелінійності має місце, якщо $a(\xi) \sim 1 \ll |\Omega - 1|^{-1/2}$. На рис. 5.9 представлені дисперсійні криві для симетричних (суцільні лінії), низькоамплітудних (штрихові лінії) і високоамплітудних (пунктирні лінії) антисиметричних, та несиметричних (штрих-пунктирні лінії) по магнітному полю мод в лінійному (тонкі лінії) і нелінійному (товсті лінії) режимах. Параметри: $|\alpha| = 0{,}2$, $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 4\lambda_c$. Бачимо, що є сімейство дисперсійних кривих при $\Omega < 1$, відповідних сильно нелінійному режиму, тоді як в лінійному випадку для кожного типу кривої (симетричної і антисиметричної) була тільки одна крива. Поява сімейства дисперсійних кривих в нелінійному режимі замість однієї кривої в лінійному випадку пов'язана з тим, що в лінійному випадку електромагнітне поле згасає поперек пластини, а в нелінійному випадку осцилює завдяки періодичності еліптичних функцій. При цьому кожна наступна крива сімейства відповідає додатковій довжині нелінійної хвилі, що вкладається поперек пластини.

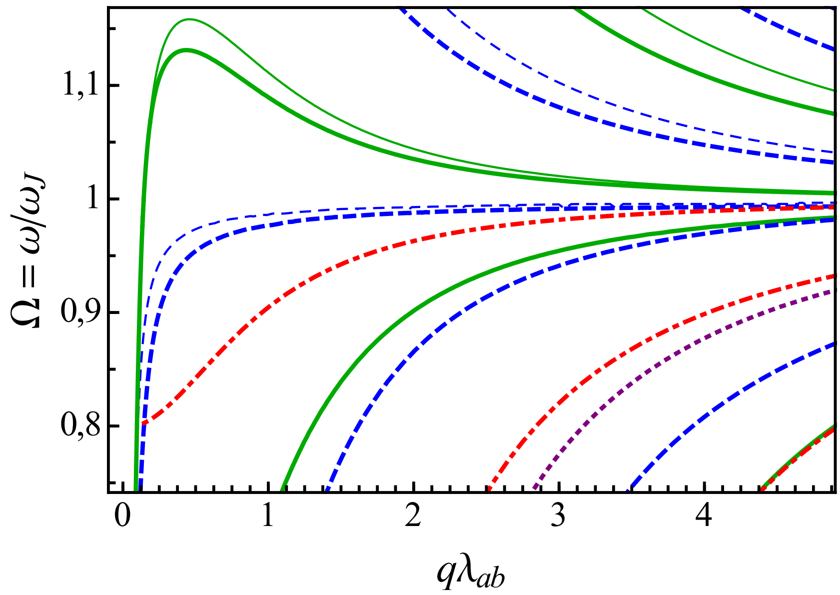


Рис. 5.9. Дисперсійні криві для симетричних (суцільні лінії), низькоамплітудних (штрихові лінії) і високоамплітудних (пунктирні лінії) антисиметричних, та несиметричних (штрих-пунктирні лінії) по магнітному полю мод в лінійному (тонкі лінії) і нелінійному (товсті лінії) режимах. Параметри: $|\alpha| = 0{,}2$, $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 4\lambda_c$.

Відзначимо, що режим сильної нелінійності для низькочастотних кривих при $\Omega < 1$ може досягатися навіть при малих значеннях параметра α, якщо аргумент еліптичних функцій в дисперсійному співвідношенні виявляється порівняним або перевершує період цих функцій. З фізичної точки зору це означає, що нелінійна хвиля осцилює, коли відповідна лінійна повинна згасати. Розглянемо, наприклад, співвідношення (5.75) для низькоамплітудних антисиметричних мод, що містить еліптичну функцію $\mathrm{tdh}(u; m)$, проаналізовану в підпункті 5.2.3.5. Період цієї функції, як вже було сказано, дорівнює $K(1-m)$. Тоді при малому α нелінійний режим для низькоамплітудних антисиметричних мод досягається при

$$\xi_b \gtrsim 2K[1 - |\alpha|] \approx \ln(2/|\alpha|), \quad |\alpha| \ll 1. \tag{5.84}$$

У додатковому припущенні $1 - \Omega^2 \ll 1$ і $\lambda_{ab} q \gg 1$ можна переписати останнє співвідношення у вигляді умови на товщину пластини:

$$L \gtrsim \frac{\lambda_c \ln(2/|\alpha|)}{q\lambda_{ab}\sqrt{1-\Omega^2}}. \tag{5.85}$$

Покажемо, як лінійний режим переходить в нелінійний при малому параметрі α і досить великій товщині L на прикладі дисперсійних кривих з номером $n = 1$ (антисиметрична мода) і $n = 2$ (симетрична мода). У лінійному випадку (див. підрозділ 5.1 та рис. 5.3) показано, що крива з $n = 1$ завжди монотонна і розташована в області $\Omega < 1$. При досить малих товщинах, $L \ll (\varepsilon_s \lambda_c^2)/(\varepsilon_d \lambda_{ab})$, крива з $n = 2$ розташовується як в області $\Omega > 1$, так і при $\Omega < 1$, як показано на рис. 5.8. При цьому крива з $n = 2$ немонотонна і має точку максимуму. Якщо ж товщина стає досить великою, $L \sim (\varepsilon_s \lambda_c^2)/(\varepsilon_d \lambda_{ab})$, то дисперсійна крива з $n = 2$ опускається повністю в область $\Omega < 1$. В цьому випадку вона також буде немонотонна, але крім точки максимуму матиме ще й точку мінімуму. Зазначені дисперсійні криві зображені на рис. 5.10 тонкими штриховою ($n = 1$) і суцільною ($n = 2$) лініями. Параметри: $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 24\lambda_c$.

Тепер звернімося до нелінійного випадку. На рис. 5.10 товстими штриховою ($n = 1$) і суцільною ($n = 2$) лініями показані такі ж дисперсійні криві при значенні параметра $|\alpha| = 2 \cdot 10^{-5}$. Видно, що при відносно невеликих значеннях хвильового вектора, $q\lambda_{ab} \sim 1$, криві в лінійному і нелінійному режимі майже збігаються. Але при $q\lambda_{ab} \gg 1$ криві починають розходитися у відповідності з умовою (5.85). При цьому дисперсійна крива з $n = 1$ стає немонотонною і має точку максимуму, а на кривій з $n = 2$ з'являється ще один додатковий максимум, а мінімум зміщується в область менших частот, див. вставку на рис. 5.10.

Звернімо увагу на те, що зміна положень мінімумів і максимумів на дисперсійних кривих при зміні параметра α дозволяє спостерігати явище, аналогічне «зупинці світла» для локалізованих мод. Розглянемо локалізовану моду певної частоти ω, яка поширюється вздовж пластини, і припустимо, що амплітуда цієї хвилі змінюється при поширенні (наприклад, зменшується внаслідок дисипації або зростає при зовнішньому накачуванні). Оскільки амплітуда моди може бути певним чином виражена через параметр α, то при поширенні відбувається зміна параметра α і, як наслідок, дисперсії хвилі. Це означає, що хвильовий вектор також змінюється при поширенні. Припустимо, що в певній точці пластини значення хвильового вектора досягло максимуму або мінімуму на дисперсійній кривій. Тоді при подальшому поширенні хвилі в таких же умовах її хвильовий вектор повинен стати комплексною величиною, а хвиля — згасаючою. Оскільки згасаюча хвиля не може переносити енергію, то в зазначеній точці пластини відбувається явище, аналогічне «зупинці світла».

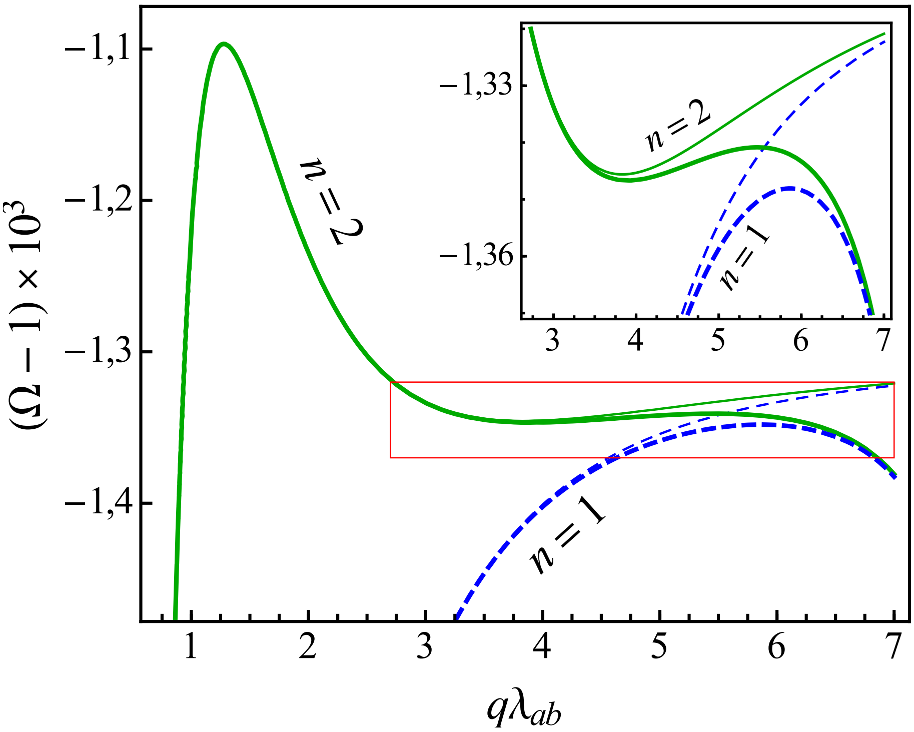


Рис. 5.10. Дисперсійні криві з номерами $n = 1$ (штрихові лінії) і $n = 2$ (суцільні лінії) в лінійному (тонкі лінії) і нелінійному (товсті лінії) режимі, де вставка показує в збільшеному масштабі область основної панелі, обведену прямокутником. Параметри: $|\alpha| = 2 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $L = 24\lambda_c$.

Висновки до розділу 5

У п’ятому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [36–38]:

● Теоретично досліджено поширення локалізованих електромагнітних хвиль уздовж пластини шаруватого надпровідника, яка знаходиться в однорідному діелектричному оточенні та надпровідні шари якої ортогональні поверхні пластини.

● Показано, що при частотах нижче джозефсонівської плазмової частоти, $\omega < \omega_J$, у пластині можуть поширюватися поверхневі моди, електромагнітне поле у яких згасає при віддаленні від поверхонь пластини як у навколишнє діелектричне середовище, так і в глибину пластини, а при більш високих частотах, $\omega > \omega_J$, в пластині можуть поширюватися хвилеводні моди, поля яких осцилюють всередині пластини.

● Визначено дисперсійні співвідношення для лінійних, слабко нелінійних та сильно нелінійних хвиль ТМ поляризації, які поширюються впоперек надпровідних шарів. Показано, що такі хвилі мають аномальну дисперсію поверхневих і хвилеводних мод у пластині шаруватого надпровідника, що забезпечує можливість спостереження явищ, аналогічних відомим ефектам у лівосторонніх (lefthanded) середовищах. Знайдено умови спостереження аномальної дисперсії, а також умови обернення в нуль групової швидкості локалізованих мод.

● Показано, що, незважаючи на симетрію системи, поряд з симетричними і антисиметричними по магнітному полю локалізованими модами, у пластині шаруватого надпровідника можуть існувати несиметричні моди. Такі хвилі можуть існувати завдяки нелінійності джозефсонівської плазми. Окрім того електромагнітне поле у нелінійних хвилях може бути описане за допомогою рівнянням Дюффінга із кубічною нелінійністю.

● Встановлено, що у нелінійному режимі дисперсійні співвідношення містять амплітуду локалізованої моди, що, разом із аномальною дисперсією, відкриває можливість для спостереження у шаруватих надпровідниках явища, аналогічного «зупинці світла».

РОЗДІЛ 6

РЕЗОНАНСНІ ЕФЕКТИ ПРИ ЗБУДЖЕННІ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ХВИЛЬ У ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИКАХ

У цьому розділі, ґрунтуючись на результатах статей [39–42], досліджено резонансні ефекти, що виникають при збудженні локалізованих джозефсонівських плазмових хвиль. Зокрема, розглянуто ефект резонансного пригнічення коефіцієнту відбиття (вудівські аномалії) при симетричному опроміненні пластини шаруватого надпровідника, див. підрозділ 6.1. Завдяки нелінійності коефіцієнт відбиття залежить не тільки від частоти та кута падіння хвилі, але також і від її амплітуди. Показано, що повне пригнічення коефіцієнту відбиття може бути досягнуто шляхом відповідного вибору частоти, кута падіння й амплітуди хвилі.

Також досліджено ефект резонансної прозорості пластини шаруватого надпровідника, який виявляє специфічні особливості, пов'язані з аномальною дисперсією локалізованих хвиль, див. підрозділ 6.2. За допомогою методу трансфер-матриць отримано аналітичний результат та передбачено, що залежність коефіцієнта прозорості від кута падіння хвилі має два резонансних піки, які з підвищенням частоти хвилі зливаються в широкий одиничний пік.

В останньому підрозділі 6.3 представлено дослідження резонансної прозорості фотонного кристалу з дефектом у вигляді пластини шаруватого надпровідника. Розвиваючи метод трансфер-матриць, який використано у підрозділі 6.2, отримано дисперсійні співвідношення для терагерцових електромагнітних мод, локалізованих на такому дефекті, та аналітичний вираз для резонансного коефіцієнта проходження.

6.1. Нелінійні вудівські аномалії

У цьому підрозділі теоретично вивчається резонансне пригнічення коефіцієнту відбиття, так званих вудівських аномалій, при симетричному опроміненні пластини шаруватого надпровідника, яке виникає внаслідок збудження нелінійних локалізованих хвиль. Для дослідження цього явища ми розглянемо конфігурацію Отто [164], в якій пластина шаруватого надпровідника відокремлена від двох діелектричних призм вакуумними проміжками, див. рис. 6.1.

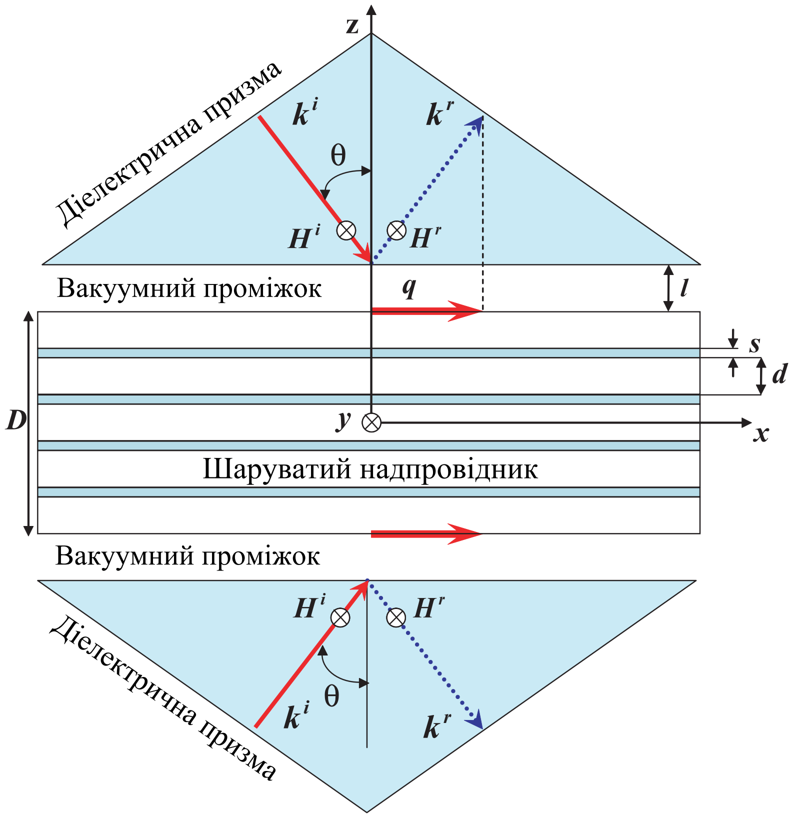


Рис. 6.1. Геометрія задачі резонансного збудження локалізованих електромагнітних хвиль у пластині шаруватого надпровідника.

У цій конфігурації електромагнітні хвилі частоти ω поширюються в призмах з діелектричною проникністю ε_d так, що їх кути падіння θ перевищують кут θ_t повного внутрішнього відбиття,

$$\theta > \theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_d}}\right). \tag{6.1}$$

Таким чином, за відсутності шаруватого надпровідника хвилі, що падають, повністю б відбивались від дна призм. Проте згасаючі хвилі проникають у вакуумні проміжки. Таким чином, можна очікувати, що при певних значеннях частоти ω та кута падіння θ у пластині можуть збуджуватись локалізовані хвилі. Такий метод збудження відомий як метод порушення повного внутрішнього відбиття [165, 166].

6.1.1. Розподіл електромагнітного поля у системі

6.1.1.1. Геометрія задачі

Ми досліджуємо пластину шаруватого надпровідника товщини D, розташовану між двома діелектричними призмами та відокремлену від них вакуумними проміжками товщини l, див. рис. 6.1. Система координат вибирається таким чином, що кристалографічна площина $\mathbf{ab}$ збігається з площиною $\mathbf{xy}$, кристалографічна вісь $\mathbf{c}$ знаходиться вздовж осі z, а площина $z = 0$ відповідає середині пластини. Будемо припускати, що надпровідні шари паралельні поверхням пластини, та їх товщина s значно менше, ніж товщина d діелектричних шарів.

Нехай дві плоских електромагнітних хвилі поперечно-магнітної поляризації (1.25) поширюються всередині діелектричних призм. Будемо розглядати випадок симетричного падіння хвиль, тобто магнітне поле в цих хвилях симетричне по відношенню до середини пластини:

$$H(x, y, -z, t) = H(x, y, z, t). \tag{6.2}$$

Це дозволяє нам розглянути розподіл полів лише для $z > 0$.

6.1.1.2. Електромагнітне поле в діелектричних призмах і вакуумних проміжках

Магнітне поле H^d в діелектричній призмі може бути представлено як сума хвиль, що падає та відбивається, з амплітудами H^i та H^r відповідно:

$$H^d = H^i \cos(qx - k_d z - \omega t) + H^r \cos(qx + k_d z - \omega t + \chi). \tag{6.3}$$

Тут тангенціальна q та нормальна k_d компоненти хвильового вектора у призмі:

$$q = k_0 \sqrt{\varepsilon_d} \sin\theta, \quad k_d = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - q^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_d} \cos\theta, \quad k_0 = \omega / c \tag{6.4}$$

і χ — зсув фази у відбитій хвилі.

При $q > \omega/c$ магнітне поле у вакуумному проміжку може бути записано у такому вигляді:

$$H^v = H^i \big[h^+ \cos(qx - \omega t + \chi^+) \exp(k_v z) + h^- \cos(qx - \omega t + \chi^-) \exp(-k_v z) \big]. \tag{6.5}$$

Тут h^+ та h^- — безрозмірні амплітуди хвиль, які експоненційно зростають та зменшуються зі зростанням z, χ^+ і χ^- — їх фази, а також

$$k_v = \sqrt{q^2 - k_0^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_d \sin^2\theta - 1} > 0. \tag{6.6}$$

Використовуючи рівняння Максвела, можна виразити x-компоненти електричного поля E_x^d в діелектричній призмі та E_x^v у вакуумному проміжку через амплітуди магнітного поля:

$$E_x^d = -\frac{k_d}{k_0 \varepsilon_d} \big[H^i \cos(qx + k_d z - \omega t) - H^r \cos(qx - k_d z - \omega t + \chi) \big], \tag{6.7}$$

$$E_x^v = \frac{k_v}{k_0} H^i \big[h^+ \sin(qx - \omega t + \chi^+) \exp(k_v z) - h^- \sin(qx - \omega t + \chi^-) \exp(-k_v z) \big].$$

6.1.1.3. Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику

Електромагнітне поле всередині пластини шаруватого надпровідника визначається розподілом калібрувально-інваріантної різниці фаз φ параметра порядку між шарами (див. підрозділ 1.3). У цьому підрозділі ми будемо розглядати випадок слабкої нелінійності, коли щільність джозефсонівського струму $J_c \sin\varphi$ може бути розкладена в ряд за малим φ до третього порядку $J_c \sin\varphi \approx J_c(\varphi - \varphi^3/6)$. Для значень частоти ω близьких до джозефсонівської плазмової частоти ω_J навіть така слабка нелінійність може призводити до сильно нелінійних ефектів, див. пункт 1.3.4.

Будемо розглядати випадок, коли $\omega < \omega_J$, та вважати, що у пластині шаруватого надпровідника присутня мала, але ненульова дисипація:

$$\nu = \frac{\omega_r}{\omega_J(1-\Omega^2)} \ll 1, \tag{6.8}$$

де ω_r — частота релаксації, рівняння (1.38), а $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота хвиль. Як буде показано далі, саме завдяки наявності дисипації збудження локалізованих хвиль призводить до резонансного пригнічення коефіцієнту відбиття, тобто до вудівських аномалій.

Ми шукаємо розв'язок синусоїдального рівняння Гордона (1.40) для калібрувально-інваріантної різниці фаз φ у такій формі:

$$\varphi = (1-\Omega^2)^{-1/2}\big[A_0(z)\sin(qx-\omega t) + A_1(z)\cos(qx-\omega t)\big] \tag{6.9}$$

з амплітудами A_0 та A_1, які залежать від координати z. Введемо безрозмірну координату

$$\zeta = \frac{\kappa z}{\lambda_{ab}}, \quad \kappa = \frac{\lambda_c q}{(1-\Omega^2)^{1/2}}, \tag{6.10}$$

так, що нормована півтовщина зразка становить $\delta = D\kappa/2\lambda_{ab}$.

Підставляючи різницю фаз φ у вигляді (6.9) в рівняння Гордона (1.40), отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left(A_0 - \frac{A_0^3}{8}\right)'' = A_0, \qquad \left(A_1 - \frac{A_1 A_0^2}{8}\right)'' - \nu A_0'' = A_1, \tag{6.11}$$

де штрих означає диференціювання за ζ.

Розв'язуючи цю систему в наближенні слабкої нелінійності та малої дисипації, отримуємо:

$$\begin{aligned} A_0(\zeta) &= a_0 \exp\zeta + \frac{9}{64} a_0^3 \exp(3\zeta), \\ A_1(\zeta) &= a_1 \exp\zeta + \frac{\nu a_0}{2}\zeta \exp\zeta + \frac{9a_0^2 a_1}{64}\exp(3\zeta) + \frac{9\nu a_0^3}{128}\zeta\exp(3\zeta), \end{aligned} \tag{6.12}$$

з константами a_0 та a_1.

Таким чином, ми виразили електромагнітне поле у верхньому півпросторі $z > 0$ через амплітуди H_i, H_r, h^+, h^-, a_0 і a_1. Нижче ми знайдемо взаємозв'язок між ними, отримаємо та проаналізуємо залежність коефіцієнту відбиття від параметрів задачі.

6.1.2. Коефіцієнт відбиття

Перейдемо до аналізу коефіцієнту відбиття хвилі: $R = H_r^2/H_i^2$. З цією метою ми прирівнюємо тангенціальні компоненти електричного та магнітного полів на границях «призма – вакуум» і «вакуум – шаруватий надпровідник». Це дає наступний вираз для коефіцієнту відбиття:

$$R = \frac{S + 4p^2Y^2 + 4(X-Y)^2}{S + 4p^2Y^2 + 4(X+Y)^2}, \tag{6.13}$$

де параметр

$$p = \frac{k_v}{k_0 \cos\theta_t} = \frac{\sqrt{\varepsilon_d \sin^2\theta - 1}}{\cos\theta_t} \tag{6.14}$$

визначається кутом падіння θ та виявляється малим, коли θ близький до кута повного внутрішнього відбиття,

$$\begin{gathered} S = (X - X_0)^2(p^{-2} - 1) + 2(X_0^2 - X^2), \\ X_0 = C(p\cos\theta_t + Z), \quad X = Z - p\cos\theta_t, \\ Y = \left(-\frac{A_1}{A_0} + \frac{8\nu}{8 - A_0^2}\right) C\cos\theta_t, \end{gathered} \tag{6.15}$$

Z — поверхневий імпеданс пластини за відсутності дисипації,

$$Z = \Gamma\frac{A_0'(8 - 3A_0^2)}{A_0(8 - A_0^2)}, \qquad \Gamma = \frac{\Omega\lambda_{ab}\kappa}{\lambda_c\varepsilon_s^{1/2}}. \tag{6.16}$$

Тут функції A_0 і A_1 та похідна A_0' взяті на поверхні $\zeta = \delta$ пластини шаруватого надпровідника, а параметр C визначає зв'язок електромагнітного поля в діелектричній призмі і у пластині шаруватого надпровідника та визначається товщиною вакуумного проміжку l,

$$C = \exp(-2k_v l). \tag{6.17}$$

Зауважимо, що рівність $X = 0$ являє собою дисперсійне співвідношення для хвиль, локалізованих у пластині шаруватого надпровідника за відсутності діелектричних призм, а дисперсійне співвідношення за наявності призм відповідає знаменнику у рівнянні (6.13), прирівняному нулю. Для більш детального аналізу розглянемо випадок малих значень параметра зв'язку C, $C \ll 1$. У цьому випадку може виникати сильне збудження локалізованих хвиль, що призводить до зменшення величини коефіцієнта відбиття R, який стає меншим за одиницю. Крім того, як показано нижче, відбиття хвиль з частотою $\omega < \omega_J$ може бути повністю пригнічено належним вибором кута падіння θ та амплітуди хвилі, що падає. Це може бути використано як спосіб контролю, виявлення та фільтрації терагерцового випромінювання.

6.1.2.1. Пригнічення дзеркального відбиття

Основний внесок у чисельник і знаменник рівняння (6.13) дає доданок $S(h, \theta, C)$. Це призводить до різкої кутової залежності коефіцієнту відбиття в малому околі кута

$$\theta_{\mathrm{res}} = \theta_t + \frac{\Gamma^2}{2\sqrt{\varepsilon_d - 1}}, \tag{6.18}$$

близького до кута повного внутрішнього відбиття. Якщо кут падіння θ знаходиться в околі θ_{res}, то коефіцієнт відбиття стає чутливим до інших параметрів задачі: нормованої амплітуди

$$h = \frac{\kappa}{1 - \Omega^2} \frac{H^i}{\mathcal{H}_0} \tag{6.19}$$

і параметра зв'язку C. Ця залежність дається наступним виразом:

$$R = \frac{(h - h_{\mathrm{res}})^2 + B^2\,(C - C_{\mathrm{res}})^2}{(h - h_{\mathrm{res}})^2 + B^2 (C + C_{\mathrm{res}})^2}, \qquad B = \frac{\nu^3 (C + C_{\mathrm{res}})^2}{C C_{\mathrm{res}}^3}, \tag{6.20}$$

де h_{res} та C_{res} представляють резонансні значення амплітуди та параметра зв'язку відповідно:

$$h_{\mathrm{res}}^2 = 128 \frac{\varepsilon_d^2 (C + C_{\mathrm{res}})^2}{C \sqrt{\varepsilon_d - 1}} (\theta - \theta_{\mathrm{res}}) \qquad C_{\mathrm{res}} = \frac{\nu}{8 \varepsilon_d \Gamma} \sqrt{\varepsilon_d - 1}. \tag{6.21}$$

Рівняння (6.20) описує різку залежність коефіцієнту відбиття від амплітуди h

падаючої хвилі. Якщо його значення далеке від h_{res}, то відбивна здатність близька до 1. Мінімальна величина відбивної здатності досягається для $h = h_{\text{res}}$,

$$R_{\min} = \Big(\frac{C - C_{\text{res}}}{C + C_{\text{res}}}\Big)^2. \tag{6.22}$$

Крім того, змінюючи товщину вакуумного проміжку, можна досягти повного пригнічення відбитої хвилі. Дійсно, умова $C = C_{\text{res}}$ та рівняння (6.17) та (6.21) дають оптимальне значення товщини l:

$$l_{\text{opt}} = \frac{1}{2k_0\Gamma} \ln \frac{8\Gamma\delta\varepsilon_d}{\nu\sqrt{\varepsilon_d - 1}}. \tag{6.23}$$

6.1.2.2. Результати чисельних розрахунків

У цьому підпункті ми представляємо результати чисельних розрахунків, які підтверджують отримані аналітичні результати. Рівняння (6.11) були вирішені чисельно, а потім був розрахований коефіцієнт відбиття R за формулою (6.13).

Залежності коефіцієнту відбиття від кута падіння θ та нормованої амплітуди h падаючої хвилі показані на рис. 6.2 на лівій та правій панелях відповідно. На обох панелях побудовано по дві криві для двох різних значень товщини вакуумного проміжку, $l = 0{,}04$ см (штрихова крива) і $l = l_{\text{opt}} = 0{,}05$ см (суцільна крива), причому суцільна крива відповідає ситуації, коли параметр зв'язку дорівнює його оптимальному значенню. Ліва панель побудована при певному значенні нормованої амплітуди падаючої хвилі, $h = 0{,}14$, тоді як права панель — при певному значенні кута падіння, $\theta = 30{,}7^\circ$.

Для ілюстрації ефекту повного пригнічення дзеркального відбиття на рис. 6.3 представлений розподіл магнітного поля у вакуумі та діелектричній призмі. Інтерференційна картина спостерігається для нерезонансного випадку (див. ліву панель на рис. 6.3), коли амплітуди падаючої та відбитої хвиль практично збігаються. У резонансному випадку (див. праву панель на рис. 6.3), коли відбита хвиля повністю пригнічується, інтерференційна картина в призмі зникає, тоді як структура поля у вакуумному проміжку поблизу пластини шаруватого надпровідника показує збудження локалізованих хвиль.

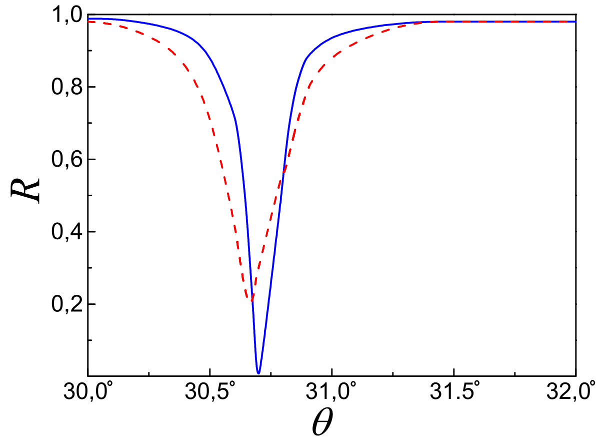


Рис. 6.2. Залежності коефіцієнту відбиття R від кута падіння θ (ліва панель) та від нормованої амплітуди h падаючої хвилі (права панель) для двох різних товщин вакуумного проміжку, $l = 0{,}04$ см (штрихова крива) і $l = l_{\mathrm{opt}} = 0{,}05$ см (суцільна крива). Параметри: $h = 0{,}14$, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\lambda_c/\lambda_{ab} = 60$, $\varepsilon_d = 4$, $\nu = 0{,}05$, $(1 - \Omega^2) = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$, $D/\lambda_{ab} = 0{,}3$.

6.2. Резонансна прозорість, викликана збудженням локалізованих мод з аномальною дисперсією

У цьому підрозділі ми досліджуємо поширення електромагнітної хвилі через пластину шаруватого надпровідника, при якому відбувається збудження моди, локалізованої на пластині.

Як і у попередньому підрозділі 6.1, ми будемо використовувати конфігурацію Отто [164], в якій пластина c шаруватого надпровідника товщиною d_c розташована між двома діелектричними півпросторами a_L та a_R з діелектричною проникністю ε_a, див. рис. 6.4. Діелектрики a_L та a_R відділені від пластини c просторовими проміжками b_L і b_R з однаковою товщиною d_b, заповненими діелектриком з проникністю ε_b. Будемо вважати, що у діелектриках a та b відсутня дисипація, тобто значення ε_a і ε_b є дійсними та позитивними. Звернімо увагу на те, що просторові проміжки у реальному експерименті найімовірніше будуть заповнені вакуумом з $\varepsilon_b = 1$. Тим не менш, ми збережемо позначення ε_b в наших теоретичних результатах, щоб розширити їх можливе застосування.

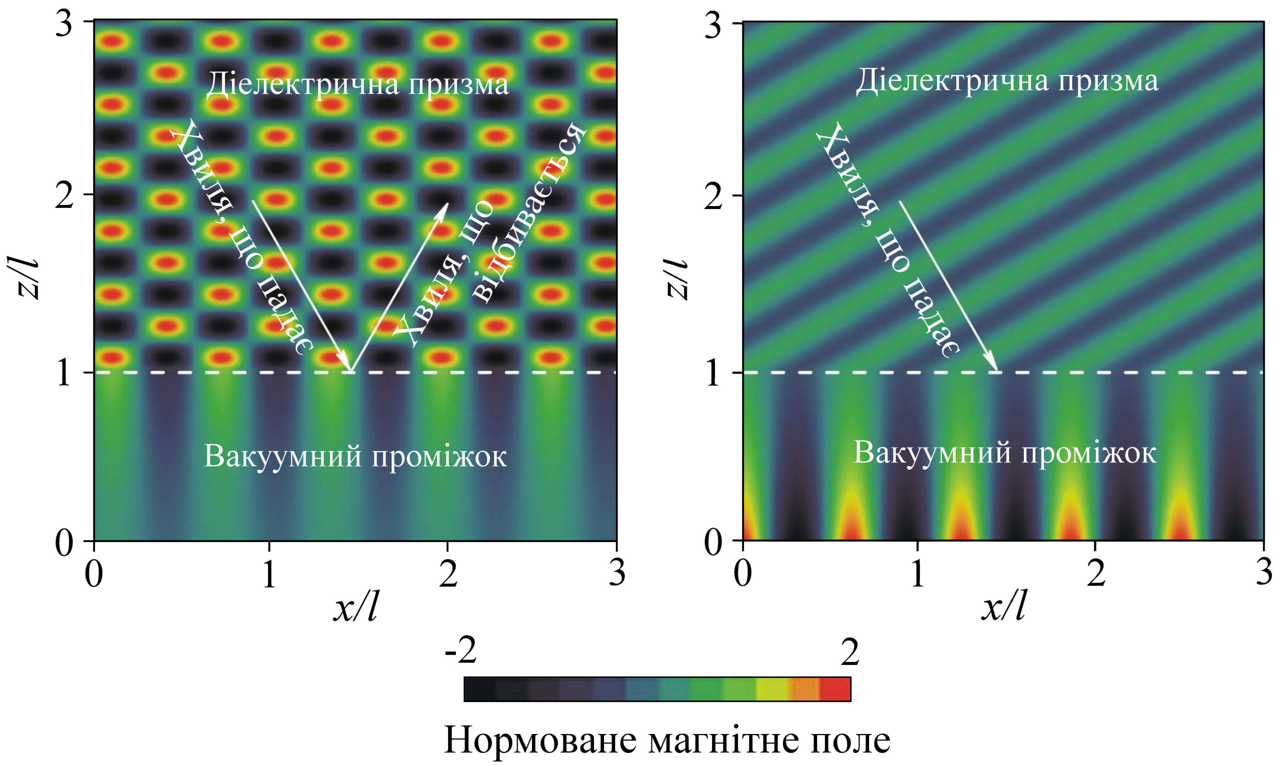


Рис. 6.3. Розподіл поля для нерезонансного ($h = 0{,}8$, ліва панель) та резонансного ($h \approx 0{,}13$, права панель) випадків при оптимальній товщині вакуумного проміжку, $l = l_{\rm opt} = 0{,}05$ см. Параметри: такі ж, як на рис. 6.2.

Також введемо припущення, що діелектрик a є більш оптично щільним, ніж діелектрик b, тобто

$$\varepsilon_b < \varepsilon_a. \tag{6.24}$$

Це припущення дає можливість збуджувати локалізовані моди у пластині c шаруватого надпровідника, які згасають у просторових проміжках b, але при цьому хвиля, що їх збуджує, може поширюватись у діелектрику a.

Система координат вибирається таким чином, щоб вісь x була ортогональною, а площина (y, z) була паралельною до всіх границь між a, b і c. До того ж вісь z, як і у попередніх розділах, обрана перпендикулярною надпровідним шарам, тобто вздовж кристалографічної осі **c**.

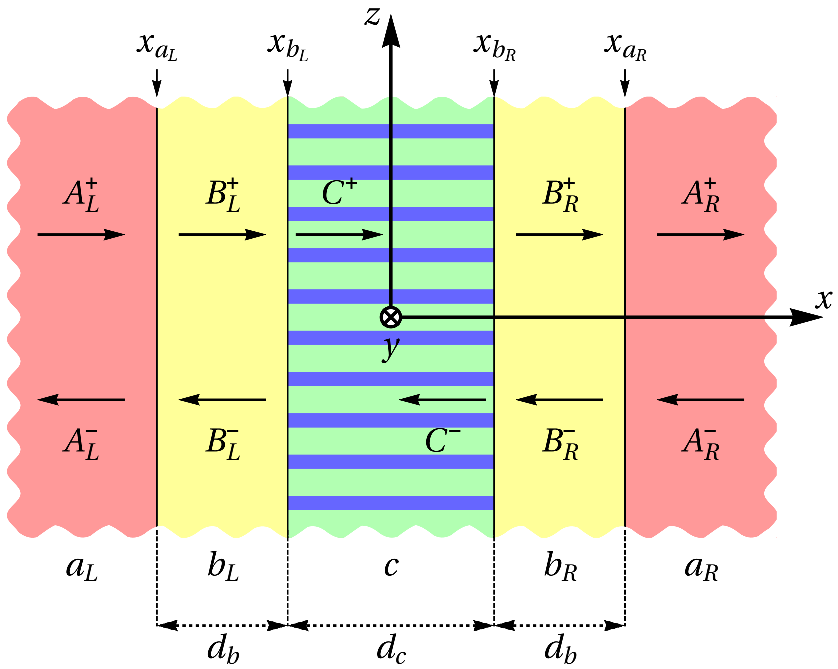


Рис. 6.4. Схематичне зображення системи, де пластина c шаруватого надпровідника розташована між двома діелектричними півпросторами a_L та a_R та відділена від них просторовими проміжками b_L і b_R.

6.2.1. Постановка задачі

Будемо розглядати електромагнітну хвилю ТМ-поляризації (1.25), компоненти електромагнітного поля в якій можна представити у наступному вигляді:

$$\vec{E}(x,z,t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(-i\omega t + ik_z z),$$
$$\vec{H}(x,z,t) = \{0, H_y(x), 0\} \exp(-i\omega t + ik_z z). \tag{6.25}$$

Тут ω — частота хвилі, а k_z — z-проекція хвильового вектора. Ці дві фізичні величини є зовнішніми параметрами задачі. Але поширення хвилі в діелектрику a означає, що

$$k_z < k_0\sqrt{\varepsilon_a}, \qquad k_0 = \omega/c. \tag{6.26}$$

Ця умова дозволяє ввести більш зручний параметр — кут θ падіння хвилі з діелектрику a_L на границю $(a_L|b_L)$:

$$k_z = k_0\sqrt{\varepsilon_a}\sin\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2. \tag{6.27}$$

Крім того, зважаючи на обов'язкову умову (6.24), можна ввести характеристичний кут падіння θ_b,

$$\sin\theta_b = \sqrt{\varepsilon_b/\varepsilon_a}, \quad 0 < \theta_b < \pi/2. \tag{6.28}$$

Цей кут зазвичай розглядається як граничний кут для повного внутрішнього відбиття від границі між двома півпросторами, заповненими діелектриками a та b. На рис. 6.5 схематично зображено відбиття хвиль на цій границі. Хвиля, що падає під кутом $\theta < \theta_b$ з діелектрика a, частково відбивається у діелектрик a і частково переходить у діелектрик b. Хвиля, що падає під кутом $\theta > \theta_b$ з діелектрика a, повністю відбивається у діелектрик a і створює лише згасаючу хвилю в діелектрику b.

Надалі ми будемо розглядати лише такі кути падіння, коли в діелектрику b створюється згасаюча хвиля:

$$\theta_b < \theta < \pi/2, \quad \text{тобто} \quad k_0\sqrt{\varepsilon_b} < k_z < k_0\sqrt{\varepsilon_a}. \tag{6.29}$$

Завдяки цій умові в загальному випадку слід очікувати майже повного внутрішнього відбиття на границі $(a_L|b_L)$. Однак, як показано у пункті 6.2.4, збудження мод, локалізованих на пластині c шаруватого надпровідника, може призводити до резонансного посилення прозорості, аж до повної прозорості, при деяких значеннях параметрів задачі.

Зауважимо, що за умови (6.29) x-проекція k_a хвильового вектора в діеле-

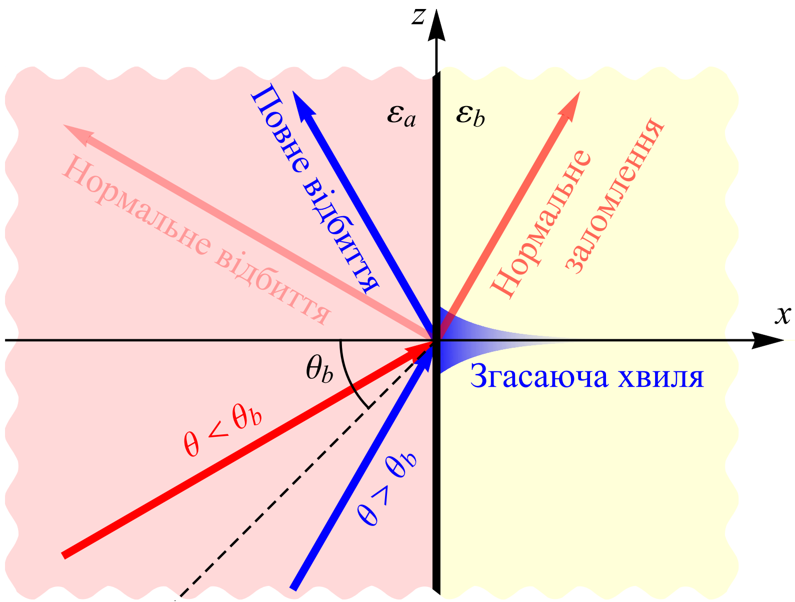


Рис. 6.5. Схематичне зображення відбиття хвиль на границі між двома півнескінченними діелектричними середовищами з діелектричною проникністю ε_a та ε_b.

ктрику a приймає дійсні значення:

$$k_a = \sqrt{k_0^2\varepsilon_a - k_z^2} = k_0\sqrt{\varepsilon_a}\cos\theta, \tag{6.30}$$

а x-проекція k_b хвильового вектора в діелектрику b виявляється уявною:

$$k_b = i\kappa_b, \qquad \kappa_b = \sqrt{k_z^2 - k_0^2\varepsilon_b} = k_0\sqrt{\varepsilon_a}\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}\,. \tag{6.31}$$

Електромагнітне поле лінійної хвилі всередині пластини c шаруватого надпровідника в континуальному наближенні може бути описано за допомогою рівнянь Максвела з анізотропним частотнозалежним тензором діелектричної проникності, див. пункт 1.3.3, з компонентами, що описуються рівняннями (1.54) і (1.55). Ефективне хвильове число k_c, яке відповідає за поширення ТМ-поляризованої хвилі (6.25) вздовж осі x через пластину c з таким анізотропним тензором діелектричної проникності, може бути записано у такому вигляді:

$$k_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}}\sqrt{k_0^2\varepsilon_{xx} - k_z^2} = k_0\sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}\varepsilon_a}\sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_a} - \sin^2\theta}. \tag{6.32}$$

Завдяки специфічній залежності ε_{xx} і ε_{zz}, див. рівняння (1.54) і (1.55), від частоти ω і кута падіння θ, залежність k_c від цих параметрів виявляється досить складною. Припускаючи відсутність розсіювання квазічастинок, $\nu_x = \nu_z = 0$, проведемо короткий аналіз цієї залежності.

У низькочастотному діапазоні при $\omega < \omega_J \ll \gamma\omega_J$ усі компоненти тензора діелектричної проникності від'ємні, $\varepsilon_{xx} < 0$ і $\varepsilon_{zz} < 0$. Тому k_c є уявним і його абсолютне значення зростає з кутом падіння θ, тобто з хвильовим числом k_z.

У проміжному діапазоні частот при $\omega_J < \omega < \gamma\omega_J$ компоненти тензора діелектричної проникності мають різні знаки: $\varepsilon_{xx} < 0$ і $\varepsilon_{zz} > 0$. Оскільки у цьому випадку поверхня постійної частоти у k-просторі має гіперболоїдну форму, то шаруватий надпровідник являє собою так зване гіперболічне середовище. При цьому k_c є дійсним і зростає з кутом падіння θ (з хвильовим числом k_z). Звернімо увагу на те, що саме ця нетривіальна залежність забезпечує незвичайні хвильові властивості шаруватих надпровідників, зокрема, аномальну дисперсію локалізованих мод, див. розділ 5.

У межах високочастотного діапазону при $\omega_J \ll \gamma\omega_J < \omega$ всі компоненти тензора діелектричної проникності є додатніми, $\varepsilon_{xx} > 0$ і $\varepsilon_{zz} > 0$. Значення k_c може бути дійсним або уявним залежно від k_z. Проте в експерименті високочастотний діапазон є важкодоступним через руйнування куперівських пар. Більш того, не існує випромінювання електромагнітної хвилі для досить високих частот $\omega > 2\Delta/\hbar$, де Δ — надпровідна енергетична щілина, для якої недавно встановлено експериментальне обмеження [167] приблизно 11 THz для $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$. Тому у цьому розділі ми не будемо розглядати високочастотний діапазон.

6.2.2. Метод трансфер-матриць

У цьому пункті представлено застосування методу трансфер-матриць (див., наприклад, [168]) для розв'язання поставленої задачі. Спочатку ми визначимо електромагнітні поля окремо у кожній частині: діелектричних півпросторах a_L

і a_R, просторових проміжках b_L і b_R та у пластині c шаруватого надпровідника. А потім граничні умови, які зв'язують ці поля, перепишемо у вигляді трансфер-матричних співвідношень.

6.2.2.1. Електромагнітні поля у системі

У межах кожного середовища a, b чи c загальний розв'язок рівняння Максвела представляється у вигляді суперпозиції хвиль, що біжать вперед і назад:

$$\begin{aligned}
H_y^{a_n} &= A_n^+ \exp[ik_a(x - x_{a_n})] + A_1^- \exp[-ik_a(x - x_{a_n})], \\
E_z^{a_n} &= -\frac{k_a}{k_0\varepsilon_a}\big\{A_n^+ \exp[ik_a(x - x_{a_n})] - A_n^- \exp[-ik_a(x - x_{a_n})]\big\}, \\
H_y^{b_n} &= B_n^+ \exp[ik_b(x - x_{b_n})] + B_n^- \exp[-ik_b(x - x_{b_n})], \\
E_z^{b_n} &= -\frac{k_b}{k_0\varepsilon_b}\big\{B_n^+ \exp[ik_b(x - x_{b_n})] - B_n^- \exp[-ik_b(x - x_{b_n})]\big\}, \\
H_y^{c} &= C_+ \exp[ik_c(x - x_{b_L})] + C_- \exp[-ik_c(x - x_{b_L})], \\
E_z^{c} &= -\frac{k_c}{k_0\varepsilon_{zz}}\big\{C_+ \exp[ik_c(x - x_{b_L})] - C_- \exp[-ik_c(x - x_{b_L})]\big\},
\end{aligned} \tag{6.33}$$

де $A_n^\pm$, $B_n^\pm$ та $C_\pm$ позначають амплідуди хвиль у середовищах a, b чи c відповідно, індекс $n = R, L$; координати x_{a_L}, x_{b_L}, x_{b_R} і x_{a_R} відповідають границям $(a_L|b_L)$, $(b_L|c)$, $(c|b_R)$ та $(b_R|a_R)$ між різними середовищами, див. рис. 6.4, причому:

$$x_{a_2} - x_{b_2} = d_b, \quad x_{b_1} - x_{a_1} = d_b, \quad x_{b_2} - x_{b_1} = d_c; \tag{6.34}$$

та хвильові числа k_a, k_b і k_c визначені у рівняннях (6.30), (6.31) і (6.32) відповідно.

6.2.2.2. Трансфер-матричні співвідношення

На границях між сусідніми середовищами тангенціальна складова поля повинна бути неперервна,

$$\begin{aligned} H_y^{a_n}(x_{a_n}) &= H_y^{b_n}(x_{a_n}), \quad E_z^{a_n}(x_{a_n}) = E_z^{b_n}(x_{a_n}), \\ H_y^{c}(x_{b_n}) &= H_y^{b_n}(x_{b_n}), \quad E_z^{c}(x_{b_n}) = E_z^{b_n}(x_{b_n}). \end{aligned} \tag{6.35}$$

Поєднуючи розв'язки (6.33) з граничними умовами (6.35), можна отримати матричні відношення, які описують хвильовий транспорт через кожну границю:

$$\begin{pmatrix} A_R^+ \\ A_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(ba)}\hat{M}^{(b)} \begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(cb)}\hat{M}^{(c)} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}, \tag{6.36}$$

$$\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(bc)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(b)}\hat{M}^{(ab)} \begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix}, \tag{6.37}$$

та через всю систему:

$$\begin{pmatrix} A_R^+ \\ A_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(T)} \begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix}, \qquad \hat{M}^{(T)} = \hat{M}^{(ba)}\hat{M}^{(b)}\hat{\mathcal{C}}\hat{M}^{(b)}\hat{M}^{(ab)}. \tag{6.38}$$

Матриця $\hat{M}^{(ab)}$ описує хвильовий транспорт через границю $(a_L|b_L)$ — з лівого діелектричного півпростору a_L до лівого просторового проміжку b_L:

$$\hat{M}^{(ab)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} & 1 - \dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} \\ 1 - \dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} & 1 + \dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} \end{pmatrix}. \tag{6.39}$$

Звернімо увагу на те, що матриця $\hat{M}^{(ba)}$, яка описує хвильовий транспорт через границю $(b_R|a_R)$, з правого просторового проміжку b_R до правого діелектричного півпростору a_R, дорівнює оберненій матриці (6.39), тобто

$$\hat{M}^{(ba)} = \hat{M}^{(ab)^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b} & 1-\dfrac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b} \\ 1-\dfrac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b} & 1+\dfrac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b} \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$

Визначники цих матриць є

$$\det \hat{M}^{(ab)} = \frac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a}, \qquad \det \hat{M}^{(ab)^{-1}} = \frac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b}. \tag{6.41}$$

Діагональна матриця $\hat{M}^{(b)}$ відповідає за вільний пробіг хвилі у просторових проміжках b, зокрема, між границями $(a_L|b_L)$ і $(b_L|c)$ та між границями $(c|b_R)$ і $(b_R|a_R)$:

$$\hat{M}^{(b)} = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi_b) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi_b) \end{pmatrix}, \qquad \det \hat{M}^{(b)} = 1. \tag{6.42}$$

Діагональні елементи цієї матриці — експоненти, що містять зсув фази $\varphi_b = k_b d_b$, отриманий хвилею при вільному пробігу вздовж просторових проміжків b товщини d_b. Відповідно до рівнянь (6.31) значення φ_b є уявним:

$$\varphi_b = i\phi_b, \qquad \phi_b = d_b\sqrt{k_z^2 - k_0^2\varepsilon_b} = k_0 d_b\sqrt{\varepsilon_a}\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}\,. \tag{6.43}$$

Слід підкреслити, що рівняння (6.38) для трансфер-матриці всієї системи містить дві взаємно обернені матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)} = \hat{M}^{(ab)^{-1}}$ та дві однакові матриці $\hat{M}^{(b)}$. Перші дві матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)}$ описують хвильовий транспорт через границі $(a_L|b_L)$ і $(b_R|a_R)$ відповідно. Оскільки інтерфейси симетричні, ці матриці взаємно зворотні. Навпаки, інші дві матриці $\hat{M}^{(b)}$ описують вільний пробіг хвилі через ідентичні просторові проміжки b. Оскільки хвиля, яка пробігає кожен проміжок b, отримує один і той же зсув фази φ_b, то й дві матриці $\hat{M}^{(b)}$ рівні, а не взаємно зворотні. Проте ці дві матриці $\hat{M}^{(b)}$ не порушують симетрії системи, оскільки їх детермінанти дорівнюють 1, див. рівняння (6.42).

Трансфер-матриця $\hat{\mathcal{C}}$ через пластину c шаруватого надпровідника є добутком трьох матриць:

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{M}^{(cb)}\hat{M}^{(c)}\hat{M}^{(bc)}. \tag{6.44}$$

Матриці $\hat{M}^{(bc)}$ і $\hat{M}^{(cb)}$ визначають хвильовий транспорт через границі $(b_L|c)$ та $(c|b_R)$ відповідно:

$$\hat{M}^{(bc)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{k_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} & 1-\dfrac{k_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} \\ 1-\dfrac{k_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} & 1+\dfrac{k_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} \end{pmatrix}, \quad \hat{M}^{(cb)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{k_c\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_{zz}} & 1-\dfrac{k_c\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_{zz}} \\ 1-\dfrac{k_c\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_{zz}} & 1+\dfrac{k_c\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}. \tag{6.45}$$

Вони мають таку ж структуру, як і матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)}$, див. рівняння (6.39) і (6.40), за умови заміни індексів a і b на b і c відповідно, а також ε_c на ε_{zz}.

Діагональна матриця $\hat{M}^{(c)}$ відповідає вільному пробігу хвилі від лівої до правої границі всередині пластини c:

$$\hat{M}^{(c)} = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi_c) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi_c) \end{pmatrix}, \qquad \varphi_c = k_c d_c. \tag{6.46}$$

Тому вона відрізняється від матриці $\hat{M}^{(b)}$, рівняння (6.42), лише в зсуві фази, який визначається хвильовим числом k_c, рівняння (6.32), та товщиною d_c пластини c.

Пряме множення матриць визначає наступний вигляд для матриці $\hat{\mathcal{C}}$:

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_c - \alpha_+\sin\varphi_c & \alpha_-\sin\varphi_c \\ -\alpha_-\sin\varphi_c & \cos\varphi_c + \alpha_+\sin\varphi_c \end{pmatrix}, \tag{6.47}$$

та для матриці всієї системи:

$$
\begin{aligned}
2M_{11}^{(T)} &= \big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} + \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) - i\beta_+\big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) + 2i\beta_-\mathcal{C}_{12},\\
2M_{12}^{(T)} &= -2i\beta_+\mathcal{C}_{12} + i\beta_-\big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big),\\
2M_{21}^{(T)} &= 2i\beta_+\mathcal{C}_{12} - i\beta_-\big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big),\\
2M_{22}^{(T)} &= \big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} + \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) + i\beta_+\big(\mathcal{C}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{C}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) - 2i\beta_-\mathcal{C}_{12}.
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

Тут коефіцієнти $\alpha_\pm$ визначають зв'язок пластини c і просторових проміжків b, а коефіцієнти $\beta_\pm$ — просторових проміжків b і діелектричних півпросторів a:

$$
\alpha_\pm = \frac{1}{2}\Big(\frac{\kappa_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} \mp \frac{k_c\varepsilon_b}{\kappa_b\varepsilon_{zz}}\Big), \quad \beta_\pm = \frac{1}{2}\Big(\frac{k_a\varepsilon_b}{\kappa_b\varepsilon_a} \mp \frac{\kappa_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b}\Big). \tag{6.49}
$$

Відзначимо, що коефіцієнти $\beta_\pm$ не залежать від частоти ω, а лише від кута падіння θ хвилі, а також характеристичного кута θ_b,

$$
\beta_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_b\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}} \mp \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}}{\sin^2\theta_b\cos\theta}\right). \tag{6.50}
$$

Зауважимо, що визначник матриці $\hat{\mathcal{C}}$, як і визначник матриці всієї системи $\hat{M}^{(T)}$, дорівнюють одиниці за загальною властивістю для трансфер-матриць симетричних систем,

$$
\begin{gathered}
\det\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22} - \mathcal{C}_{12}\mathcal{C}_{21} = 1,\\
\det\hat{M}^{(T)} = M_{11}^{(T)}M_{22}^{(T)} - M_{12}^{(T)}M_{21}^{(T)} = 1.
\end{gathered}
\tag{6.51}
$$

6.2.3. Локалізовані електромагнітні хвилі

В основі ефекту резонансного посилення прозорості є збудження електромагнітних хвиль, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника. Такі хвилі були досліджені у підрозділі 5.1 дисертації. Тут ми коротко покажемо, як отримати дисперсійні співвідношення для цих хвиль за допомогою методу трансфер-матриць, розвинутого у попередньому пункті 6.2.2.

Локалізовані хвилі існують у системі, в якій пластина c шаруватого надпровідника знаходиться у нескінченному середовищі з діелектриком b, тобто $d_b \to \infty$ та півпростори a відсутні. Хвильовий транспорт через таку систему може бути описаний співвідношенням, яке з'єднує амплітуди $B_L^{\pm}$ і $B_R^{\pm}$ на лівій $(b_L|c)$ і правій $(c|b_R)$ границях відповідно:

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

Локалізація електромагнітної хвилі на пластині c шаруватого надпровідника передбачає, що поза межами пластини c, тобто всередині обох діелектриків b_L і b_R, така хвиля повинна бути згасаючою. З цього випливає, по-перше, що хвильове число k_b повинно бути уявним згідно з умовою (6.31), а по-друге, амплітуди зростаючих компонент хвилі повинні дорівнювати нулю, тобто $B_L^+ = 0$ і $B_R^- = 0$. Таким чином, рівняння (6.52) може бути записано у такій формі:

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_L^- \end{pmatrix}. \tag{6.53}$$

Легко визначити, що нетривіальний розв'язок $B_R^+ = \mathcal{C}_{12} B_L^-$ цього матричного рівняння існує тоді і тільки тоді, коли виконана наступна умова [168]:

$$\mathcal{C}_{22} = 0. \tag{6.54}$$

З використанням рівнянь (6.31), (6.46), (6.47) і (6.49), рівняння (6.54) можна переписати як

$$\operatorname{ctg}(k_c d_c) = \frac{1}{2}\Big[\frac{k_c \varepsilon_b}{\kappa_b \varepsilon_{zz}} - \frac{\kappa_b \varepsilon_{zz}}{k_c \varepsilon_b}\Big]. \tag{6.55}$$

Останнє рівняння являє собою дисперсійне співвідношення для локалізованих хвиль. Неважко переконатися, що воно співпадає з рівнянням (5.13), яке було отримано і проаналізовано у підрозділі 5.1.

Слід підкреслити, що існування немонотонних дисперсійних кривих $\Omega = \Omega_n(k_z)$, див., наприклад, рис. 5.2, для локалізованих хвиль приводить до специфічних особливостей у залежності прозорості шаруватого надпровідника від кута падіння хвилі. Ці особливості досліджені у наступному пункті.

6.2.4. Коефіцієнт прозорості

У цьому пункті ми дослідимо хвильовий транспорт через систему, зображену на рис. 6.4, за одностороннього опромінення. Нехай хвиля падає на систему зліва з амплітудою $A_L^+ = 1$. Тоді амплітуда $A_L^- = r$ визначає амплітуду відбитої хвилі, а $A_R^+ = t$ — хвилі, що пройшла крізь систему. При цьому амплітуда $A_R^- = 0$, тому що немає хвилі, яка падає на систему справа.

Амплітуди $A_L^\pm$ і $A_R^\pm$ пов'язані між собою за допомогою матричного співвідношення

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{M}^{(T)} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \tag{6.56}$$

з якого можна виразити величини t і r через елементи трансфер-матриці $\hat{M}^{(T)}$, див. рівняння (6.38) і (6.48):

$$t = \frac{1}{M_{22}^{(T)}}, \qquad r = -\frac{M_{21}^{(T)}}{M_{22}^{(T)}} \,. \tag{6.57}$$

Отже, коефіцієнт прозорості дорівнює:

$$T \equiv |t|^2 = \left|M_{22}^{(T)}\right|^{-2} = \left[1 + M_{12}^{(T)} M_{21}^{(T)} + M_{22}^{(T)}\left(M_{22}^{(T)*} - M_{11}^{(T)}\right)\right]^{-1}. \tag{6.58}$$

Останній вираз для коефіцієнта прозорості безпосередньо випливає з умови $\det \hat{M}^{(T)} = 1$ та зірочкою * позначено комплексне спряження.

Для подальшого аналізу припустимо відсутність дисипації в шаруватому надпровіднику, тобто безрозмірні частоти релаксації зникають у рівняннях (1.54) і (1.55), $\nu_x = 0$ і $\nu_z = 0$. У пункті 6.2.6 буде представлено чисельне моделювання з урахуванням дисипації.

Без дисипації тензор ефективної діелектричної проникності (1.54) і (1.55) стає дійсним. Як наслідок, трансфер-матриця $\hat{M}^{(T)}$ підкорюється симетрії обернення часу,

$$M_{22}^{(T)} = M_{11}^{(T)*}\,, \qquad M_{21}^{(T)} = M_{12}^{(T)*}. \tag{6.59}$$

Дійсно, параметри κ_b, ϕ_b і $\beta_\pm$ у рівняннях (6.48) приймають дійсні значення, див. рівняння (6.31), (6.43) і (6.50) відповідно. У той же час k_c разом з φ_c та $\alpha_\pm$ можуть бути як дійсними, так і уявними. Однак $\cos\varphi_c$ і добуток $\alpha_\pm \sin\varphi_c$ завжди є дійсними. Тому трансфер-матриця $\hat{\mathcal{C}}$ для пластини c є дійсною. Звідси випливає, що трансфер-матриця $\hat{M}^{(T)}$ задовольняє умові (6.59).

Завдяки симетрії (6.59) загальний вираз (6.58) для коефіцієнта прозорості T спрощується до більш простої форми:

$$T = \frac{1}{1 + \left|M_{12}^{(T)}\right|^2} = \frac{1}{1 + \left[\beta_- \operatorname{sh} 2\phi_b \cos\varphi_c + \left(\beta_-\alpha_+ \operatorname{ch} 2\phi_b + \beta_+\alpha_-\right)\sin\varphi_c\right]^2}. \tag{6.60}$$

Таким чином, прозорість системи, що відповідає симетрії обернення часу, повністю визначається недіагональними елементами її трансфер-матриці. Слід також підкреслити, що відповідно до симетрії обернення часу (6.59) вираз у квадратних дужках рівняння (6.60) завжди є дійсним. Отже, коефіцієнт прозорості T повинен бути меншим або рівним одиниці, $T \leqslant 1$. Повна прозорість $T = 1$ досягається лише для таких значень параметрів, коли вираз у квадратних дужках дорівнює нулю.

6.2.5. Резонансна прозорість при збудженні локалізованих хвиль з аномальною дисперсією

Основний інтерес у дослідженні коефіцієнта прозорості (6.60) за умови (6.29) обумовлений резонансним характером залежності $T(\theta)$, пов'язаним зі збудженням локалізованих хвиль. На рис. 6.6 представлено схематичний розподіл магнітного поля в хвилі, що проходить через систему. Штрихова лінія побудована для регулярного проходження, коли електромагнітне поле згасає у просторових проміжках b. Це призводить до того, що прозорість експоненційно мала. У свою чергу, суцільна лінія демонструє резонансну прозорість, коли електромагнітне поле у просторових проміжках b збільшується, і локалізована хвиля (див. товсту суцільну лінію в підсистемі b_L–c–b_R) збуджується. В останньому випадку прозорість може бути значно посилена, аж до 1.

Це явище чітко виражено, якщо просторові проміжки b досить великі, тобто коли модуль ϕ_b фазового зсуву φ_b великий, див. рівняння (6.43):

$$\exp(-2\phi_b) \ll |\exp(i\varphi_c)|. \tag{6.61}$$

Зауважимо, що права частина нерівності (6.61) дорівнює одиниці, коли фазовий зсув φ_c є дійсним, та є набагато меншим за одиницю, коли φ_c є уявним. Таким чином, $\exp(-2\phi_b)$ має бути набагато менше одиниці в обох випадках. Цей факт дозволяє нам замінити $\mathrm{sh}(2\phi_b)$ та $\mathrm{ch}(2\phi_b)$ у рівнянні (6.60) на $\exp(2\phi_b)/2$ і, як наслідок, отримати наступну асимптотику для коефіцієнта прозорості:

$$T = \left[1 + \frac{1}{4}\Big(\beta_- \mathcal{C}_{22} \exp(2\phi_b) + 2\beta_+ \alpha_- \sin\varphi_c\Big)^2\right]^{-1}. \tag{6.62}$$

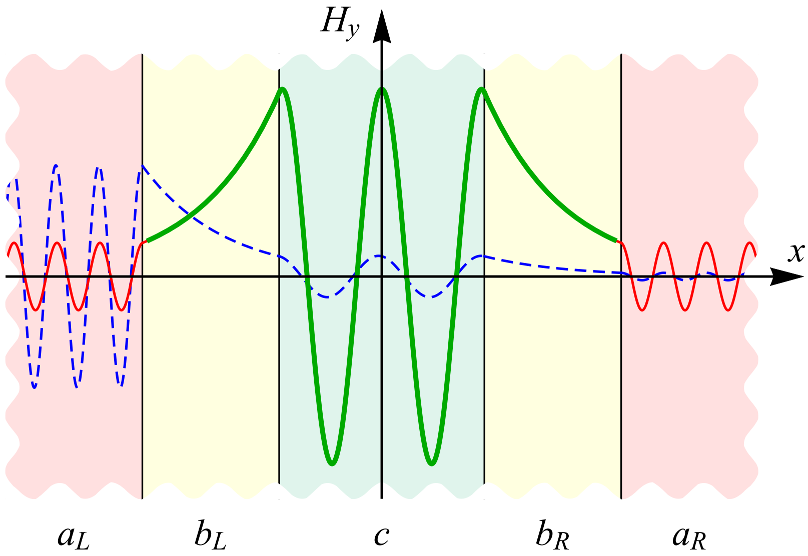


Рис. 6.6. Діаграма, яка схематично представляє розподіл магнітного поля в хвилі, що проходить через систему.

Далеко від резонансу, де

$$|\mathcal{C}_{22}| \equiv |\cos\varphi_c + \alpha_+ \sin\varphi_c| \gg \exp(-2\phi_b), \tag{6.63}$$

коефіцієнт прозорості експоненційно пригнічений через сильне згасання хвилі у просторових проміжках b,

$$T = \frac{4\exp(-4\phi_b)}{\beta_-^2 \mathcal{C}_{22}^2}. \tag{6.64}$$

Проте для певних значень параметрів задачі прозорість може бути значно покращена. Дійсно, якщо частота ω та кут падіння θ майже задовольняють дисперсійне співвідношення (6.54) для локалізованих мод:

$$|\mathcal{C}_{22}| \equiv |\cos\varphi_c + \alpha_+ \sin\varphi_c| \lesssim \exp(-2\phi_b) \ll 1, \tag{6.65}$$

то вираз $\mathcal{C}_{22}\exp(2\phi_b)$ не експоненційно великий, а пропускна здатність не експоненційно мала. Крім того, коли

$$\mathcal{C}_{22} = -2\beta_-^{-1}\beta_+\alpha_- \sin\varphi_c \exp(-2\phi_b), \tag{6.66}$$

вираз у круглих дужках в рівнянні (6.62) дорівнює нулю, і досягається ідеальна прозорість $T = 1$.

На рис. 6.7 представлено коефіцієнт прозорості T як функцію кута падіння θ та нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$. Тут темніший колір відповідає більшій величині T. Також суцільними кривими побудовані дисперсійні криві $\Omega = \Omega_n(\theta)$ для локалізованих хвиль, задані рівнянням (6.54). Панель (б) на рис. 6.7 показує область навколо максимуму в кривій дисперсії з $n = 3$. Чотири горизонтальні прямі лінії на панелі (б) відповідають значенням Ω, що використовуються на рис. 6.8. Червоний кружок позначає точку максимуму $\theta_{\max} = 1{,}0057$ і $\Omega_{\max} = 2{,}5576$ на дисперсійній кривій для системи з скінченним d_b, див. рівняння (6.66).

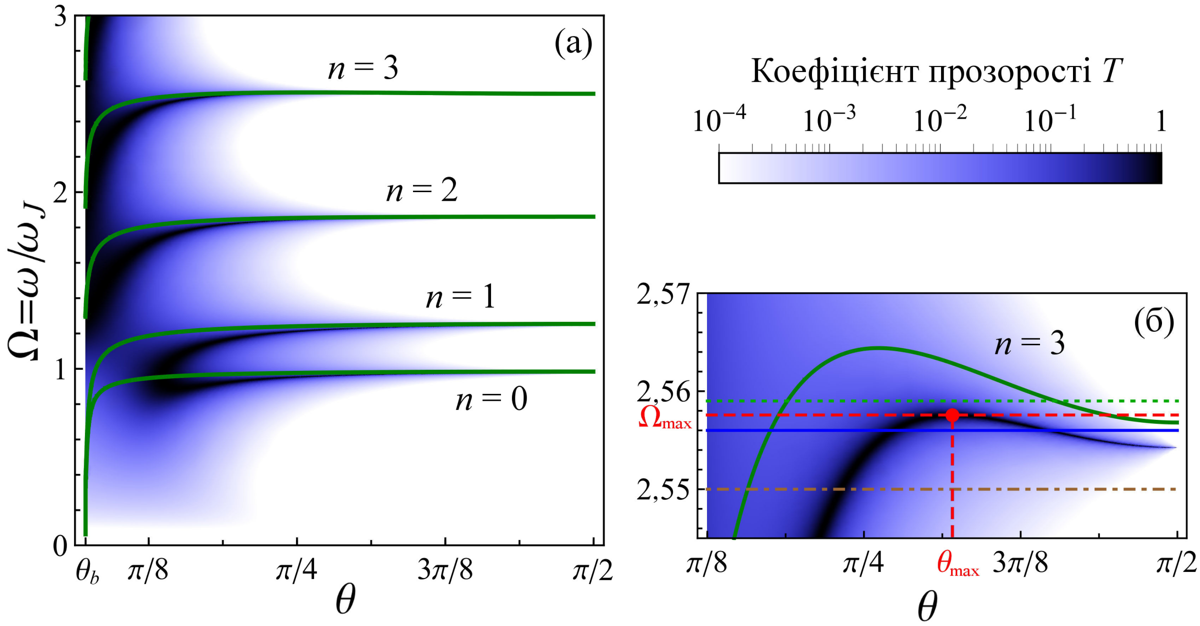


Рис. 6.7. Залежність коефіцієнта прозорості T від кута падіння θ та нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$, де темніший колір відповідає більшій величині T, а суцільними кривими побудовані дисперсійні криві, задані рівнянням (6.54). Параметри: $\varepsilon_a = 20$, $\varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_s = 16$, $d_b/\lambda_c = 1/7$, $d_c/\lambda_c = 1$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 15$.

Видно, що формою дисперсійні криві повторюють відповідні темні області, де $T = 1$, однак відхиляються від них. Причиною такого відхилення є скінченне значення товщини d_b просторових проміжків b. Справа в тому, що дисперсійне співвідношення (6.54) отримано для системи з півнескінченними просторовими проміжками b. Проте в системі зі скінченними проміжками b товщини d_b дисперсійне співвідношення приймає вигляд (6.66). Це відхилення зменшується, коли збільшується фазовий зсув ϕ_b, зокрема, при збільшенні товщини d_b або кута падіння θ, див. рівняння (6.43). Очевидно, що обидва співвідношення, (6.54) і (6.66), співпадають при $d_b \to \infty$. Таким чином, рівняння (6.62) і рис. 6.7 показують, що резонансна прозорість з $T = 1$ виникає при збудженні вказаних електромагнітних хвиль, локалізованих на пластині c шаруватого надпровідника з дисперсією, визначеною рівнянням (6.66). Звернімо увагу на те, що такі модифіковані дисперсійні криві (6.66) зберігають всі основні особливості дисперсійних кривих (6.54), незважаючи на помітну кількісну різницю. Надалі у цьому підрозділі ми будемо називати дисперсійними кривими $\Omega = \Omega_n(\theta)$ саме такі модифіковані дисперсійні криві (6.66).

Невід'ємною особливістю резонансної прозорості системи, що містить шаруватий надпровідник, є немонотонність закону дисперсії для локалізованих хвиль: кожна дисперсійна крива складається з двох частин з нормальною, $d\Omega_n/d\theta > 0$, і аномальною, $d\Omega_n/d\theta < 0$, дисперсією, що чітко відображено на панелі (б) на рис. 6.7. Зауважимо, що за визначенням (6.27) знак похідної $d\Omega_n/d\theta$ збігається зі знаком групової швидкості $d\omega/dk_z$ локалізованої хвилі. Тому поняття нормальної та аномальної дисперсії, що використовується тут, еквівалентно тому, що використовувалось у розділі 5.

Зміна форми резонансної лінії залежності $T(\theta)$, яка визначається немонотонністю дисперсійних кривих, наведена на рис. 6.8, де зображено чотири криві для чотирьох близьких значень нормованої частоти Ω. Для найнижчої частоти $\Omega = 2{,}55$ існує лише один розв'язок $\theta = \theta^{(+)}(\Omega)$ дисперсійного рівняння (6.66), який знаходиться на зростаючій частині дисперсійної кривої, тобто відповідає нормальній дисперсії (див. панель (б) на рис. 6.7).

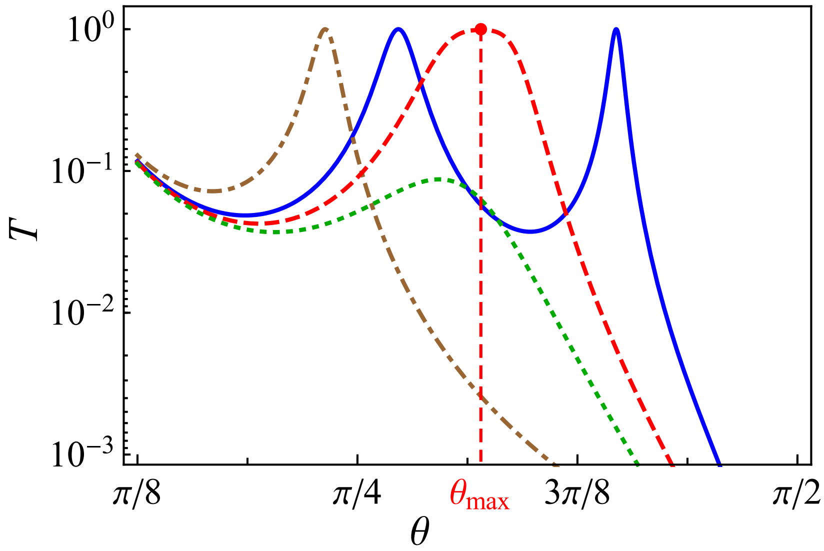


Рис. 6.8. Залежність коефіцієнта прозорості T від кута падіння θ для чотирьох значень нормованої частоти: $\Omega = 2{,}55$ (штрих-пунктирна крива), $\Omega = 2{,}556$ (суцільна крива) $\Omega = \Omega_{\max} = 2{,}5576$ (штрихова крива) і $\Omega = 2{,}559$ (пунктирна крива), де кружок позначає верхню точку $\theta_{\max} = 1{,}0057$ і $T_{\max} = 1$ широкого піку. Параметри: такі ж, як на рис. 6.7.

Цей розв'язок відповідає одиничному відносно вузькому резонансному піку з $T = 1$ на штрих-пунктирній кривій. При $\Omega = 2{,}556$ додатково до розв'язку $\theta = \theta^{(+)}(\Omega)$ з нормальною дисперсією виникає другий розв'язок $\theta = \theta^{(-)}(\Omega)$ з аномальною дисперсією. Як результат, суцільна крива $T(\theta)$ містить два резонансних піка з повною прозорістю. Коли нормована частота досягає значення $\Omega = \Omega_{\max}$, при якому на дисперсійній кривій є максимум, позначений кружком на панелі (б) на рис. 6.7, два піки зливаються в один широкий пік з $T = 1$, як показано штриховою кривою на рис. 6.8. У відповідності з пунктирною прямою, представленою на панелі (б) на рис. 6.7, нормована частота $\Omega = 2{,}559$ потрапляє в частотний проміжок, де не існує дійсного розв'язку дисперсійного рівняння (6.66). Отже, залежність $T(\theta)$, яка описується пунктирною кривою на рис. 6.8, виявляється експоненційно пригніченою ($T \ll 1$) і не викликає збудження локалізованої хвилі.

Для аналітичного прояснення динаміки резонансних піків у залежності $T(\theta)$ дослідимо далі форму цієї залежності для двох різних випадків, коли частота Ω

далека від або близька до максимальної частоти $\Omega_{\max}$, зазначеної на дисперсійній кривій на панелі (б) на рис. 6.7.

6.2.5.1. Форма резонансної лінії при Ω, далекій від $\Omega_{\max}$

Ідеальна прозорість з $T = 1$ виникає, коли вираз, розташований у круглих дужках у рівнянні (6.62), дорівнює нулю,

$$\rho(\theta, \Omega) \equiv \beta_{-}\mathcal{C}_{22}\exp(2\phi_b) + 2\beta_{+}\alpha_{-}\sin\varphi_c = 0. \tag{6.67}$$

Нехай це досягається для деякого значення кута падіння $\theta = \theta_0$ і відповідного значення нормованої частоти $\Omega = \Omega_0 \equiv \Omega_n(\theta_0)$, при яких збуджується n-та локалізована хвиля.

Розглянемо точку (θ_0, Ω_0), яка буде розташована на лівій частині дисперсійної кривої $\Omega = \Omega_n(\theta)$ із нормальною дисперсією далеко від точки максимуму $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$. У цьому випадку дисперсійна функція $\rho(\theta, \Omega)$ при невеликих відхиленнях від θ_0 і Ω_0 може бути розкладена у лінійному наближенні:

$$\rho(\theta, \Omega) = \left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right]_0 (\theta - \theta_0) + \left[\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\right]_0 (\Omega - \Omega_0). \tag{6.68}$$

Тут $[\ldots]_0$ позначає підстановку значень $\theta = \theta_0$ і $\Omega = \Omega_0$ у вираз у квадратних дужках.

З використанням цього розкладу рівняння (6.62) для коефіцієнту прозорості $T(\theta)$ зводиться до звичайної кривої Лоренца:

$$T(\theta) = \frac{\Theta_{\text{norm}}^2}{\Theta_{\text{norm}}^2 + (\theta - \theta_{\text{peak}})^2}. \tag{6.69}$$

Тут $\theta = \theta_{\text{peak}}$ — положення резонансного піку з $T(\theta_{\text{peak}}) = 1$, а Θ_{norm} — його півширина, пропорційна $\exp(-2\phi_b)$,

$$\theta_{\rm peak} = \theta_0 + \left[\frac{d\Omega_n}{d\theta}\right]_0^{-1}(\Omega - \Omega_0), \qquad \Theta_{\rm norm} = \left|\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right|_0^{-1} \propto \exp(-2\phi_b). \tag{6.70}$$

Зазначимо, що похідна

$$\left[\frac{d\Omega_n}{d\theta}\right]_0 = -\left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\Big/\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\right]_0 \tag{6.71}$$

повинна бути додатною за визначенням нормальної дисперсії.

Приклад залежності $T(\theta)$, описаної рівняннями (6.69), наведено штрих-пунктирною кривою на рис. 6.8 (та штрих-пунктирною прямою на панелі (б) на рис. 6.7).

6.2.5.2. Форма резонансної лінії для Ω, близькій до $\Omega_{\rm max}$

У точці максимуму, $\Omega_{\rm max} = \Omega_n(\theta_{\rm max})$, виконуються наступні умови:

$$\rho(\theta_{\rm max}, \Omega_{\rm max}) = 0, \quad \left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right]_{\rm max} = -\left[\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\,\frac{d\Omega_n}{d\theta}\right]_{\rm max} = 0, \tag{6.72}$$

де $[\ldots]_{\rm max}$ позначає підстановку значень $\theta = \theta_{\rm max}$ і $\Omega = \Omega_{\rm max}$ у вираз у квадратних дужках. Тому розклад дисперсійної функції $\rho(\theta, \Omega)$ в околі точки максимуму слід проводити до квадратичного наближення по відхиленню кута падіння θ від $\theta_{\rm max}$:

$$\rho(\theta, \Omega) = \left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}\right]_{\rm max}(\theta - \theta_{\rm max})^2 + \left[\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\right]_{\rm max}(\Omega - \Omega_{\rm max}). \tag{6.73}$$

Цей розклад приводить до такого виразу для резонансного коефіцієнта прозорості $T(\theta)$:

$$T(\theta) = \frac{\Theta_{\text{anom}}^4}{\Theta_{\text{anom}}^4 + [(\theta - \theta_{\max})^2 - \delta\theta_{\text{peak}}^2]^2}, \tag{6.74}$$

де

$$\delta\theta_{\text{peak}}^2 = \left[\frac{d^2\Omega_n}{d\theta^2}\right]_{\max}^{-1} (\Omega - \Omega_{\max}), \qquad \Theta_{\text{anom}} = \left|\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}\right|_{\max}^{-1/2} \propto \exp(-\phi_b). \tag{6.75}$$

У точці максимуму $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$ друга похідна дисперсії $\Omega = \Omega_n(\theta)$ від'ємна і може бути виражена через відповідні похідні дисперсійної функції $\rho(\theta, \Omega)$:

$$\left[\frac{d^2\Omega_n}{d\theta^2}\right]_{\max} = -\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}\Big/\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\right]_{\max} < 0. \tag{6.76}$$

Звідси випливає, що для значень частоти $\Omega < \Omega_{\max}$ параметр $\delta\theta_{\text{peak}}^2$ є додатнім, $\delta\theta_{\text{peak}}^2 > 0$. Як наслідок, рівняння (6.74) описує два близькі піки, розташовані в точках $\theta = \theta_{\text{peak}}^{\pm} \equiv \theta_{\max} \pm \delta\theta_{\text{peak}}$, де спостерігається повна прозорість, $T(\theta_{\text{peak}}^{\pm}) = 1$. Така резонансна лінія з двома піками зображена суцільною кривою на рис. 6.8 (та суцільною прямою на панелі (б) на рис. 6.7).

Зауважимо, що форма лінії $T(\theta)$ в околі кожного з двох піків має вигляд кривої Лоренца:

$$T(\theta) = \frac{\Theta_{\text{twin}}^2}{\Theta_{\text{twin}}^2 + (\theta - \theta_{\text{peak}}^{\pm})^2}, \tag{6.77}$$

де Θ_{twin} — півширина піку, пропорційна $\exp(-2\phi_b)$,

$$\Theta_{\text{twin}} = \Theta_{\text{anom}}^2 / 2\delta\theta_{\text{peak}} \propto \exp(-2\phi_b)\,. \tag{6.78}$$

Коли нормована частота $\Omega = \Omega_{\max}$, параметр $\delta\theta_{\text{peak}}^2$ стає рівним нулю. Отже, два резонансні піки зливаються в єдиний широкий пік, розміщений при $\theta_{\text{peak}} = \theta_{\max}$, де досягається повна прозорість, $T(\theta_{\max}) = 1$. Залежність $T(\theta)$ при цьому описується виродженою формою лінії:

$$T(\theta) = \frac{\Theta_{\mathrm{anom}}^4}{\Theta_{\mathrm{anom}}^4 + (\theta - \theta_{\max})^4}. \tag{6.79}$$

Така залежність представлена штриховою кривою на рис. 6.8 (та штриховою прямою на панелі (б) на рис. 6.7). Параметр Θ_{anom}, що визначає півширину піку, є пропорційним $\exp(-\phi_b)$, див.рівняння (6.75). Отже, ширина єдиного широкого піку виявляється у $\exp(\phi_b) \gg 1$ разів більше, ніж ширина звичайного піку, що описується рівняннями (6.69) або (6.78).

Нарешті, розглянемо частоти $\Omega > \Omega_{\max}$, при яких параметр $\delta\theta_{\mathrm{peak}}^2$ стає від'ємним, $\delta\theta_{\mathrm{peak}}^2 < 0$. При цьому залежність $T(\theta)$ у рівнянні (6.74) не має резонансних піків, оскільки при таких частотах не збуджуються локалізовані хвилі. Тим не менш, залежність $T(\theta)$ може містити невисокий і широкий пік, розташований в точці $\theta_{\mathrm{peak}} = \theta_{\max}$, який відповідає частковій прозорості $T_{\max} < 1$. Такий пік виникає за рахунок близькості до резонансу у верхній точці $\Omega = \Omega_{\max}$ дисперсійної кривої, див. пунктирну криву на рис. 6.8.

6.2.6. Резонансна передача з урахуванням дисипації

Всі результати, отримані в розділі 6.2.5, справедливі для випадку відсутності дисипації, $\nu_x = 0$ і $\nu_z = 0$, в пластині c шаруватого надпровідника. Проте навіть у випадку наявності дисипації можна спостерігати найважливіші характеристики резонансної передачі, обумовлені збудженням локалізованих мод. Для демонстрації цього факту на рис. 6.9 представлені результати численного розрахунку коефіцієнту прозорості T на основі його загального визначення (6.58), де елементи трансфер-матриці (6.48) представлені у рівняннях (6.48).

Суцільна ($\Omega = 2{,}556$) та штрихова ($\Omega = \Omega_{\max} = 2{,}5576$) криві, побудовані при відсутності дисипації, $\nu_x = \nu_z = 0$, показують два близьких піки та один широкий пік у залежності $T(\theta)$ відповідно. Пунктирна ($\Omega = 2{,}556$)

та штрих-пунктирна ($\Omega = \Omega_{\max} = 2{,}5576$) криві побудовані при ненульовій дисипації $\nu_x = 10^{-3}$ та $\nu_z = 10^{-3}$. Можна побачити, що два близьких піки і один широкий пік зберігаються навіть у випадку невеликої дисипації.

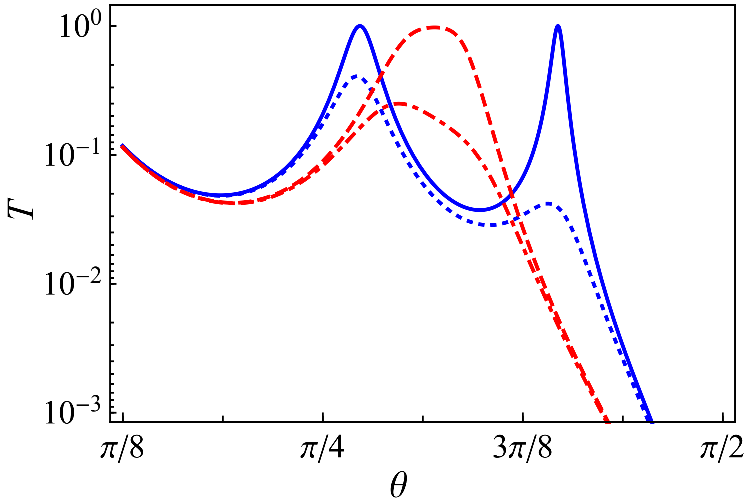


Рис. 6.9. Залежність коефіцієнту прозорості T від кута падіння θ для двох значень нормованої частоти $\Omega = 2{,}556$ та $\Omega = \Omega_{\max} = 2{,}5576$ при відсутності дисипації $\nu_x = \nu_z = 0$ (суцільна та штрихова криві відповідно) та при наявності дисипації $\nu_x = \nu_z = 10^{-3}$ (пунктирна та штрих-пунктирна криві відповідно). Параметри: такі ж, як на рис. 6.8.

6.3. Резонансна прозорість та локалізовані моди у фотонному кристалі з дефектом у вигляді пластини шаруватого надпровідника

У цьому підрозділі ми розвинемо метод трансфер-матриць, представлений у підрозділі 6.2, та використаємо його для вирішення задачі резонансної прозорості фотонного кристалу з дефектом у вигляді пластини шаруватого надпровідника. Як і у підрозділі 6.2, буде показано, що резонансна прозорість виникає внаслідок збудження електромагнітних хвиль, локалізованих на дефекті.

Будемо розглядати фотонний кристал, який складається з двох типів немагнітних діелектричних шарів a і b, що чергуються, з товщинами d_a і d_b та діелектричними проникностями ε_a і ε_b відповідно, див. рис. 6.10. Дефект c являє собою пластину шаруватого надпровідника товщиною d_c, яка замінює один з b-

шарів фотонного кристала, і надпровідні шари у якому розташовані під прямим кутом до шарів фотонного кристала.

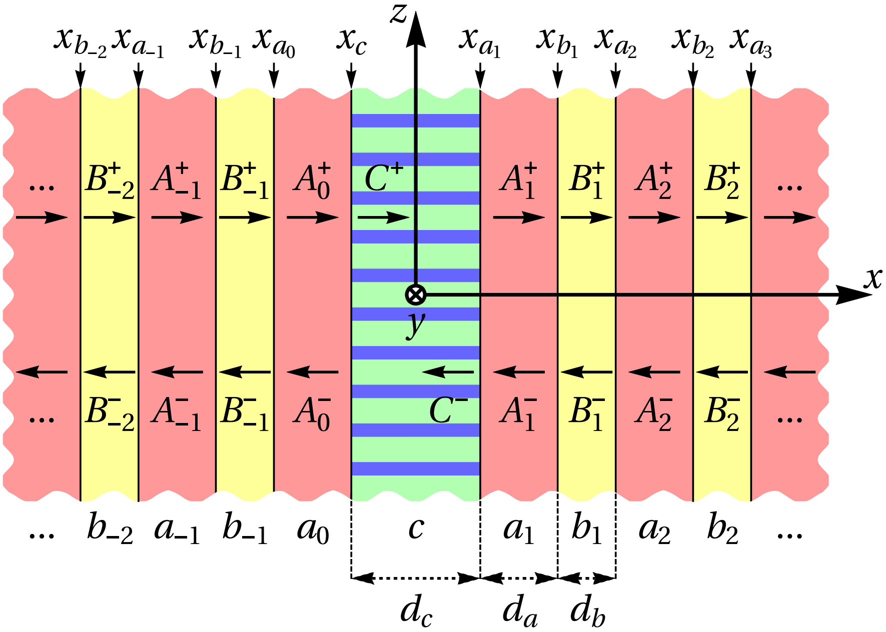


Рис. 6.10. Схематичне зображення фотонного кристалу, який складається з двох типів немагнітних діелектричних шарів a і b, що чергуються, та містить дефект c у вигляді пластини шаруватого надпровідника.

Система координат вибирається таким чином, щоб вісь x була ортогональною, а площина (y, z) – паралельною, до всіх границь між a, b і c. До того ж вісь z, як і у попередніх підрозділах, обрана перпендикулярно надпровідним шарам, тобто вздовж кристалографічної осі **c**.

У даному підрозділі ми досліджуємо лише хвилі ТМ-поляризації, електромагнітне поле в яких будемо визначати тим же самим чином, як у рівнянні (6.25). Також ми припустимо відсутність дисипації в шаруватому надпровіднику, тобто $\nu_x = 0$ і $\nu_z = 0$, див. пункт 1.3.3.

6.3.1. Трансфер-матриці фотонного кристалу з дефектом

6.3.1.1. Трансфер-матриця елементарної комірки фотонного кристала

Ми почнемо з обчислення трансфер-матриці елементарної комірки фотонного кристалу, тобто підсистеми, яка складається лише з двох діелектричних шарів a і b.

У пункті (6.2.2) були обчислені трансфер-матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)}$ переходу через границі $(a|b)$ і $(b|a)$ відповідно, та трансфер-матриця $\hat{M}^{(b)}$ вільного пробігу через діелектрик b, див. рівняння (6.39), (6.40) та (6.42). Оскільки трансфер-матриця $\hat{M}^{(a)}$ вільного пробігу через діелектрик a визначається аналогічно до (6.42), можна обчислити трансфер-матрицю $\hat{Q} = \hat{M}^{(a)}\hat{M}^{(ba)}\hat{M}^{(b)}\hat{M}^{(ab)}$ елементарної комірки фотонного кристалу:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} (\cos\varphi_b + i\eta_+ \sin\varphi_b)\exp(i\varphi_a) & i\eta_- \sin\varphi_b \exp(-i\varphi_a) \\ -i\eta_- \sin\varphi_b \exp(i\varphi_a) & (\cos\varphi_b - i\eta_+ \sin\varphi_b)\exp(-i\varphi_a) \end{pmatrix}, \tag{6.80}$$

де φ_a та φ_b, а разом з ними k_a та k_b, визначені у підрозділі 6.2, та

$$\eta_\pm = \frac{1}{2}\Big(\frac{k_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b} \pm \frac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a}\Big). \tag{6.81}$$

Відзначимо, що матриця $\hat{Q}$ описує проходження хвилі крізь n-ю елементарну (a, b) комірку, тобто від лівої границі x_{a_n} шару a_n до лівої границі $x_{a_{n+1}}$ шару a_{n+1}, та її визначник дорівнює 1:

$$\det\hat{Q} = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = 1. \tag{6.82}$$

Власні числа трансфер-матриці $\hat{Q}$ можуть бути записані у вигляді $\exp(\pm i\mu)$, де μ — так звана фаза Блоха. Вона пов'язана з елементами матриці наступним чином:

$$\cos\mu = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22}) = \cos\varphi_a \cos\varphi_b - \eta_+ \sin\varphi_a \sin\varphi_b. \qquad (6.83)$$

Слід зазначити, що права частина рівняння (6.83) завжди дійсна. Залежно від її значення фаза Блоха μ може бути: чисто дійсною, якщо $|\cos\mu| < 1$; чисто уявною, якщо $\cos\mu > 1$; або комплексною з дійсною частиною, рівною $\pm\pi$, якщо $\cos\mu < -1$. Таким чином, виникає зонна структура спектра $\mu(\omega)$: інтервали частот, де величина $\mu(\omega)$ дійсна, називаються зонами проходження хвилі, а інтервали ω, де $\mu(\omega)$ стає комплексною, — спектральними щілинами або зонами відбиття.

6.3.1.2. Трансфер-матриця дефекту з шаруватого надпровідника

Як видно з рис. 6.10, ми розглядаємо фотонний кристал, в якому один з b-шарів, а саме шар b_0, замінений на пластину c шаруватого надпровідника товщини d_c, чия електродинаміка визначається сильно анізотропним тензором діелектричної проникності з компонентами (1.54) і (1.55), див. пункт 1.3.3. Тому зручно розглядати у вигляді дефекту не саму пластину c, а цілу комірку фотонного кристалу, яка складається з пластини c та шару a_0. Оскільки трансфер-матриці $\hat{M}^{(ac)}$ і $\hat{M}^{(ca)}$ переходу через границі $(a|c)$ і $(c|a)$ відповідно, та трансфер-матриця $\hat{M}^{(c)}$ вільного пробігу через шаруватий надпровідник c були обчислені у пункті 6.2.2, див. рівняння (6.45), (6.45) та (6.46) за умови заміни b на a, можна обчислити трансфер-матрицю $\hat{\mathcal{C}} = \hat{M}^{(a)}\hat{M}^{(ca)}\hat{M}^{(c)}\hat{M}^{(ac)}$ дефектної комірки фотонного кристалу:

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} (\cos\varphi_c + i\zeta_+ \sin\varphi_c)\exp(i\varphi_a) & i\zeta_- \sin\varphi_c \exp(-i\varphi_a) \\ -i\zeta_- \sin\varphi_c \exp(i\varphi_a) & (\cos\varphi_c - i\zeta_+ \sin\varphi_c)\exp(-i\varphi_a) \end{pmatrix}, \qquad (6.84)$$

де φ_c, а разом з ним k_c визначені у підрозділі 6.2, та

$$\zeta_{\pm} = \frac{1}{2}\Big(\frac{k_c\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_{zz}} \pm \frac{k_a\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_a}\Big). \tag{6.85}$$

Зауважимо, що трансфер-матриця $\hat{\mathcal{C}}$ описує проходження хвилі крізь дефектну комірку, тобто від лівої границі x_{a_0} шару a_0 до лівої границі x_{a_1} шару a_1, та її визначник дорівнює 1:

$$\det\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22} - \mathcal{C}_{12}\mathcal{C}_{21} = 1. \tag{6.86}$$

6.3.2. Локалізовані моди у фотонному кристалі з дефектом

Перш ніж вивчати проходження хвиль крізь фотонний кристал скінченного розміру, звернімо увагу на спектр локалізованих мод в нескінченному фотонному кристалі з дефектом. Надалі буде показано, що істотне посилення прозорості в забороненій зоні фотонного кристала буде спостерігатися саме в тих умовах, коли відбувається резонансне збудження локалізованих мод.

Для того, щоб вивести дисперсійне співвідношення для локалізованих на дефекті мод, припустимо, що частота ω відповідає забороненій зоні фотонного кристала, тобто фаза Блоха μ (див. рівняння (6.83) і коментар до нього) містить уявну частину, а її реальна частина дорівнює $m\pi$, де m — ціле число:

$$\mu = m\pi + i\psi, \qquad \psi > 0. \tag{6.87}$$

У цьому випадку власні значення трансфер-матриці $\hat{Q}$ стають дійсними: $\exp(\pm i\mu) = (-1)^m \exp(\mp\psi)$, а їх абсолютні значення не є рівними 1. Це означає, що електромагнітне поле локалізованих мод експоненційно спадає при віддаленні від дефекту, тобто можна вважати, що амплітуди полів в шарах, що відстоять вправо та вліво на $n \gg 1$ елементарних комірок від дефекту, в $\exp(n\psi)$ разів менше амплітуд полів поблизу дефекту:

$$|A^{\pm}_{n+1}| \sim |A^{\pm}_{-n}| \sim |A^{\pm}_{0}| \exp(-n\psi). \tag{6.88}$$

Амплітуди $A^{\pm}_{-n}$ і $A^{\pm}_{n+1}$ пов'язані між собою за допомогою трансфер-матриць елементарної комірки і дефекту:

$$\begin{pmatrix} A^{+}_{n+1} \\ A^{-}_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{Q}^{n}\hat{\mathcal{C}}\hat{Q}^{n} \begin{pmatrix} A^{+}_{-n} \\ A^{-}_{-n} \end{pmatrix}. \tag{6.89}$$

Застосуємо до цього виразу розклад Жордана трансфер-матриці $\hat{Q}$, тобто представимо її у наступному вигляді:

$$\hat{Q} = \hat{S}^{-1}\hat{\Lambda}\hat{S}, \tag{6.90}$$

де $\hat{\Lambda}$ — матриця власних значень і $\hat{S}$ — матриця трансформації,

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\mu} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\mu} \end{pmatrix}, \qquad \hat{S} = \begin{pmatrix} Q_{11} - \mathrm{e}^{-i\mu} & Q_{12} \\ Q_{22} - \mathrm{e}^{-i\mu} & -Q_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.91}$$

Ми можемо переписати співвідношення (6.89) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{+}_{n+1} \\ \mathcal{A}^{-}_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}^{n}\hat{\mathcal{D}}\hat{\Lambda}^{n} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{+}_{-n} \\ \mathcal{A}^{-}_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{2i\mu n} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{-2i\mu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{+}_{-n} \\ \mathcal{A}^{-}_{-n} \end{pmatrix}, \tag{6.92}$$

де

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{+}_{n} \\ \mathcal{A}^{-}_{n} \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} A^{+}_{n} \\ A^{-}_{n} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathcal{D}} = \hat{S}\hat{\mathcal{C}}\hat{S}^{-1}. \tag{6.93}$$

Оскільки амплітуди $\mathcal{A}^{\pm}_{n}$ являють собою лише лінійну комбінацію амплтуд $A_n^{\pm}$, то для них також повинна виконуватись умова (6.88):

$$|\mathcal{A}_{n+1}^{\pm}| \sim |\mathcal{A}_{-n}^{\pm}| \sim |\mathcal{A}_0^{\pm}| \exp(-n\psi). \tag{6.94}$$

Співвідношення (6.87) і (6.92) показують, що затухання амплітуди за законом (6.94) можливо тільки у разі, коли елемент $\mathcal{D}_{22} \exp(2n\psi)$ дорівнює нулю, тобто при

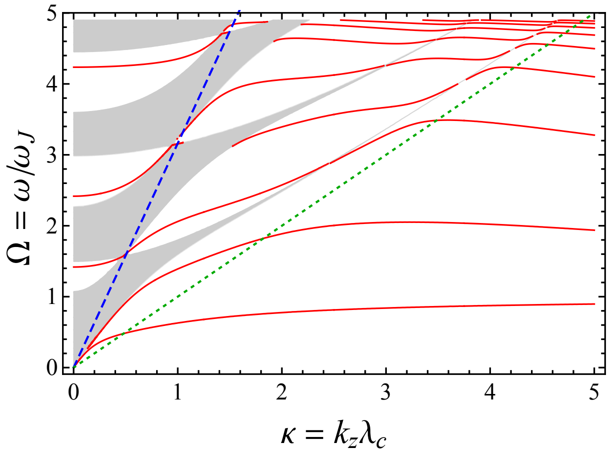
$$\mathcal{D}_{22} = 0. \tag{6.95a}$$

Остання рівність є дисперсійним співвідношенням для локалізованих мод. Елемент $\mathcal{D}_{22}$ може бути записаний в явному вигляді:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{22} = \frac{i}{\sin\mu}\big\{&\mathrm{e}^{-i\mu}(\cos\varphi_a\cos\varphi_c - \zeta_+\sin\varphi_a\sin\varphi_c) - \\ -\big[&\cos\varphi_b\cos\varphi_c + (\eta_+\zeta_+ - \eta_-\zeta_-)\sin\varphi_b\sin\varphi_c\big]\big\}.\end{aligned} \tag{6.95b}$$

Звернімо увагу на те, що в забороненій зоні фотонного кристала, коли $\mu = \pi m + i\psi$, елемент $\mathcal{D}_{22}$ є дійсним числом.

На рис. 6.11 суцільними лініями зображено дисперсійні криві $\Omega(\kappa)$, задані рівнянням (6.95). Тут $\Omega = \omega/\omega_J$ та $\kappa = k_z\lambda_c$. Світлові лінії $\omega = \sqrt{\epsilon_a}ck_z$ і $\omega = \sqrt{\epsilon_b}ck_z$ для діелектриків a та b зображені штриховою та пунктирною прямими відповідно. Дозволені зони фотонного кристала, де не існує локалізованих хвиль, позначені сірою заливкою. Зауважимо, що при певних значеннях параметрів спостерігаються ділянки кривих з аномальною дисперсією. Більш того, завдяки специфічній зонній структурі фотонного кристалу аномальна дисперсія може спостерігатися навіть при значеннях частоти ω та хвильового числа k_z, які знаходяться вище обох світлових ліній, див. праву панель рис. 6.11.



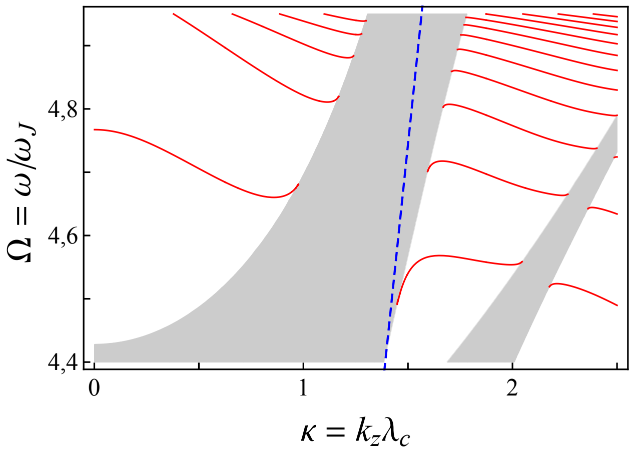


Рис. 6.11. Дисперсійні криві $\Omega(\kappa)$, задані рівнянням (6.95), для електромагнітних мод, локалізованих у фотонному кристалі на дефекті з шаруватого надпровідника, де $d_a = 2\lambda_c$, $d_b = \lambda_c$, $d_c = \lambda_c$ для лівої панелі та $d_a = 3\lambda_c$, $d_b = \lambda_c$, $d_c = 3\lambda_c$ для правої панелі. Параметри: $\varepsilon_a = 10$, $\varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_s = 10$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$.

6.3.3. Резонансна прозорість

У цьому пункті ми вивчимо хвильовий транспорт через фотонний кристал скінченної товщини з дефектом. Будемо вважати, що кристал складається з $2N+1$ елементарних (a_n, b_n) комірок, нумерованих $n = -N, 1-N, \ldots, N$, а в центральній комірці шар b_0 замінений на дефект c у вигляді шаруватого надпровідника, див. рис. 6.10. Припустимо також, що решта простору, поза фотонним кристалом, заповнена діелектриком a. Як вже було сказано раніше, ми будемо припускати, що хвиля в діелектрику a поширюється, тобто x-проекція k_a хвильового вектора є дійсною, і $k_z < \sqrt{\varepsilon_a} k_0$.

6.3.3.1. Коефіцієнт прозорості

Нехай на фотонний кристал падає хвиля одиничної амплітуди, тобто $A^+_{-N} = 1$. Тоді величина $A^-_{-N} = r$ визначає комплексну амплітуду хвилі, що відбилась від фотонного кристала. Аналогічно, величина $A^{+}_{N+1} = t$ являє собою комплексну амплітуду хвилі, що пройшла крізь фотонний кристал. Умова $A^{-}_{N+1} = 0$ вказує на відсутність хвилі, що набігає на фотонний кристал праворуч.

Амплітуди $A^{\pm}_{-N}$ і $A^{\pm}_{N+1}$ пов'язані між собою за допомогою трансфер-матриць елементарної комірки $\hat{Q}$ і комірки з дефектом $\hat{\mathcal{C}}$ відповідно до рівняння (6.89) з заміною n на N. Таким чином, комплексні амплітуди t і r задовольняють співвідношенню (6.56), де

$$\hat{M}^{(T)} = \hat{Q}^N \hat{\mathcal{C}} \hat{Q}^N. \tag{6.96}$$

Коефіцієнт прозорості $T \equiv |t|^2$ може бути записаний у вигляді (6.58):

$$T \equiv |t|^2 = \left| M^{(T)}_{22} \right|^{-2}. \tag{6.97}$$

Тепер виведемо явний вираз для $M^{(T)}_{22}$. Для цієї мети ми знову застосуємо розклад Жордана, див. рівняння (6.90) і (6.93),

$$\hat{M}^{(T)} = \hat{S}^{-1} \hat{\Lambda}^N \hat{\mathcal{D}} \hat{\Lambda}^N \hat{S}. \tag{6.98}$$

Тоді $M^{(T)}_{22}$ можна представити у вигляді:

$$M^{(T)}_{22} = \frac{1 - e^{2iN\mu}}{2i \sin\mu} \left[(S_{21} + S_{11} e^{-2iN\mu}) \mathcal{D}_{22} + S_{11} \mathcal{C}_{22} - S_{21} \mathcal{C}_{11} \right] + \mathcal{C}_{22} e^{2iN\mu}. \tag{6.99}$$

Звернімо увагу на те, що у виразі (6.99) виділено доданок, що містить $\mathcal{D}_{22}$, який визначає спектр локалізованих мод. Як ми побачимо в наступному підпункті, цей доданок виявляється дуже важливим в ефекті посилення прозорості фотонного кристала в забороненій зоні.

6.3.3.2. Збудження локалізованих мод

В цьому підпункті ми дослідимо посилення коефіцієнта прозорості в забороненій зоні фотонного кристала за рахунок збудження електромагнітних мод, локалізованих на дефекті з шаруватого надпровідника. Ми будемо розглядати лише заборонені зони фотонного кристалу, де фаза Блоха має вигляд (6.87), тобто $\exp(i\mu) = (-1)^m \exp(-\psi)$. У цьому випадку за відсутності дефекту коефіцієнт прозорості T є експоненційно малим, $T(N) \propto \exp(-4N\psi) \ll 1$. Проте завдяки наявності дефектного шару прозорість зазнає резонансного посилення за рахунок збудження локалізованої моди. Аналогічний ефект був розглянутий у пункті 6.2.5.

Нехай параметри хвилі, що падає, близькі до резонансних значень, тобто $|\mathcal{D}_{22}| \approx 0$. Тоді ми можемо спростити рівняння (6.99), нехтуючи експоненційно малими доданками $\exp(-2N\psi) \ll 1$ та маючи на увазі, що $\mathcal{D}_{22}\exp(2N\psi)$ може бути не малим:

$$M_{22}^{(T)} \approx -\frac{S_{11}\mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2N\psi}}{2(-1)^m \operatorname{sh}\psi} - \frac{i\operatorname{Im}(S_{11}\mathcal{C}_{22})}{(-1)^m \operatorname{sh}\psi}. \tag{6.100}$$

Як було сказано на початку цього підпункту, ми припустимо відсутність дисипації в шаруватому надпровіднику. Без дисипації тензор ефективної діелектричної проникності (1.54) і (1.55) стає дійсним. Тому другий доданок в виразі (6.100) є чисто уявним, тоді як перший доданок містить комплексність тільки в S_{11},

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(-1)^m \operatorname{sh}\psi + i(\sin\varphi_a\cos\varphi_b + \eta_+\cos\varphi_a\sin\varphi_b),\\ \operatorname{Im}(S_{11}\mathcal{C}_{22}) &= (\eta_+\sin\varphi_b\cos\varphi_c - \zeta_+\cos\varphi_b\sin\varphi_c) + \\ &\qquad +(-1)^m\mathrm{e}^{\psi}(\sin\varphi_a\cos\varphi_c + \zeta_+\cos\varphi_a\sin\varphi_c). \end{aligned} \tag{6.101}$$

Беручи до уваги це міркування, отримуємо для коефіцієнта проходження наступний результат:

$$T=\left\{\frac{1}{4}\left[\mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2N\psi}\right]^2+\frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2\psi}\left[2\,\mathrm{Im}(S_{11}\mathcal{C}_{22})+(\mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2N\psi})\,\mathrm{Im}\,S_{11}\right]^2\right\}^{-1}. \quad (6.102)$$

Далеко від резонансу, коли $|\mathcal{D}_{22}|\exp(2N\psi)\gg 1$, коефіцієнт проходження експоненційно малий:

$$T\approx\frac{4\,\mathrm{sh}^2\psi}{|S_{11}\mathcal{D}_{22}|^2}\mathrm{e}^{-4N\psi}, \quad (6.103)$$

а в безпосередній близькості від резонансу, при

$$\mathcal{D}_{22}\approx-\frac{2\,\mathrm{Im}[S_{11}\mathcal{C}_{22}]\,\mathrm{Im}\,S_{11}}{|S_{11}|^2}\mathrm{e}^{-2N\psi}, \quad (6.104)$$

коефіцієнт прозорості значно зростає:

$$T_{\max}\approx\frac{|S_{11}|^2}{\mathrm{Im}^2[S_{11}\mathcal{C}_{22}]}. \quad (6.105)$$

6.3.3.3. Чисельна симуляція

На рис. 6.12 представлені результати чисельної симуляції проходження хвилі через фотонний кристал скінченної товщини з дефектом у вигляді шаруватого надпровідника.

Фотонний кристал складається з $2N+1=15$ елементарних комірок, з яких усі, крім центральної, складаються з вакуумного ($\varepsilon_a=1$) шару товщиною $d_a=7\lambda_c$ і шару скла товщиною $d_b=6\lambda_c$ з діелектричною проникністю $\varepsilon_b=3{,}8$. Центральна комірка містить дефект — складається з вакуумного прошарку товщиною $d_a=7\lambda_c$ і пластини шаруватого надпровідника товщиною $d_c=6\lambda_c$ з діелектричною проникністю шарів ізолятора $\varepsilon_s=16$. Хвиля в вакуумі поширюється під кутом θ до осі x, тобто $k_x=k_a=(\sqrt{\varepsilon_a}\omega/c)\cos\theta$ і $k_z=(\sqrt{\varepsilon_a}\omega/c)\sin\theta$.

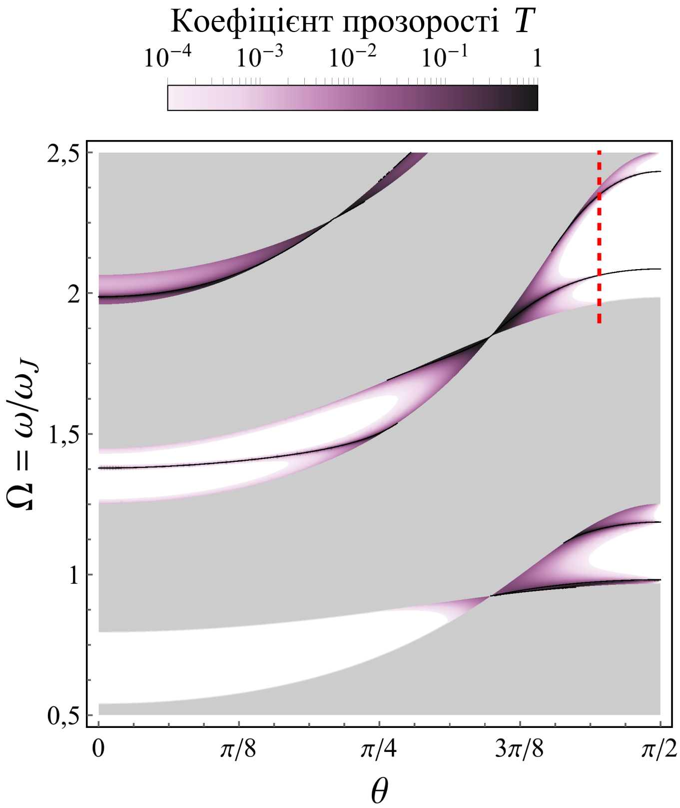


Рис. 6.12. Залежність коефіцієнта прозорості T фотонного кристалу, який складається з $2N + 1 = 15$ елементарних комірок та містить дефект у вигляді шаруватого надпровідника, від кута падіння θ і нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$. Параметри: $d_a = 7\lambda_c$, $d_b = 6\lambda_c$, $d_c = 6\lambda_c$, $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_b = 3{,}8$, $\varepsilon_s = 16$.

Темніший колір на рис. 6.12 позначає більші значення коефіцієнту прозорості T в залежності від кута падіння θ і нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$ в областях, відповідних забороненим зонам фотонного кристала, тобто коли $|\cos\mu| > 1$. Дозволені зони фотонного кристала, відповідні $|\cos\mu| < 1$, позначені сірою заливкою. Чорні лінії в заборонених зонах — дисперсійні криві (6.95). Штрихова пряма показує інтервал зміни частоти, для якого побудований рис. 6.13.

На рис. 6.13 представлена залежність коефіцієнта прозорості T від Ω для фотонного кристала з дефектом (суцільна крива) і для фотонного кристала без дефекту (штрихова крива), що містять однакову кількість комірок $2N + 1 = 15$. Кут падіння $\theta = 1{,}4$, і діапазон по частотам відповідає штриховій прямій на рис. 6.12. У забороненій зоні є два піки, які виникають за рахунок збудження локалізованих мод та відповідають двом дисперсійним кривим, що перетинаються штриховою лінією на рис. 6.12. Зеленою пунктирною лінією зображена залежність резонансного коефіцієнта прозорості відповідно до рівняння (6.102).

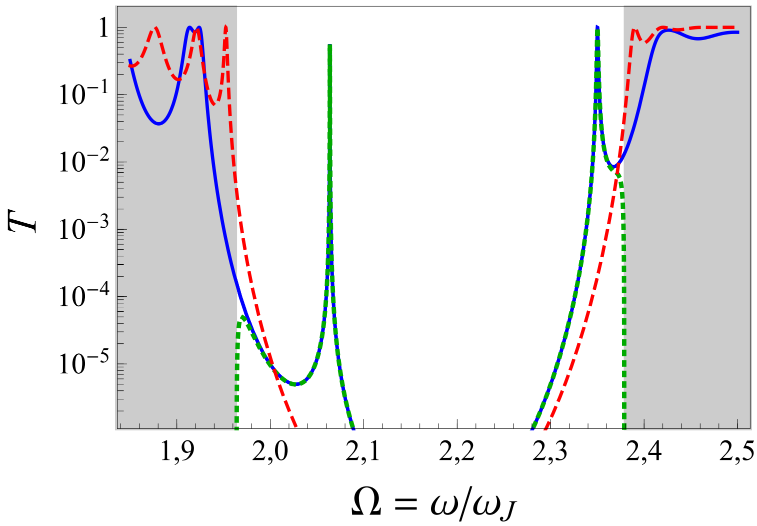


Рис. 6.13. Залежність коефіцієнта прозорості T від нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$ для фотонного кристала з дефектом (суцільна крива) і для фотонного кристала без дефекту (штрихова крива) для кута падіння $\theta = 1{,}4$. Параметри: такі ж, як і на рис. 6.12.

Висновки до розділу 6

У шостому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [39–42]:

- Досліджено ефект резонансного пригнічення коефіцієнту відбиття (вудівські аномалії) при симетричному опроміненні пластини шаруватого надпровідника, який виникає при збудженні нелінійних локалізованих хвиль. Завдяки нелінійності вудівські аномалії можна контролювати не тільки зміною частоти та кута падіння хвилі, а також її амплітуди. Це означає, що за заданих частоти та кута падіння можна спостерігати пригнічення коефіцієнту відбиття, змінюючи амплітуду хвилі.

- Визначено, що мала нелінійність може відігравати вирішальну роль, якщо частота хвилі близька до джозефсонівської частоти. Навіть при невеликих значеннях амплітуди хвилі, обравши оптимальну комбінацію параметрів задачі, відбита хвиля може бути повністю пригнічена.

- Теоретично досліджено електромагнітний транспорт через пластину шаруватого надпровідника, відокремлену від двох діелектричних півпросторів просторовими проміжками, зробленими з діелектрика з більш м'якою оптичною щільністю. Використовуючи метод трансфер-матриць отримано вираз для коефіцієнта прозорості та проаналізовано його як функцію кута падіння хвилі.

- Показано, що можливо досягти повної прозорості за рахунок резонансного збудження джозефсонівських плазмових мод, локалізованих на шаруватому надпровіднику. Специфічні особливості цього явища безпосередньо пов'язані з анізотропією джозефсонівської плазми. Немонотонність закону дисперсії локалізованих мод призводить до виникнення двох резонансних піків у залежності коефіцієнта прозорості від кута падіння хвилі. Окрім того, при збільшенні частоти хвилі ці два піки зливаються в широкий одиничний пік.

- Розглянуто фотонний кристал із дефектом у вигляді пластини шаруватого надпровідника. За допомогою розвинутого методу трансфер-матриць отримано дисперсійні співвідношення для терагерцових електромагнітних мод, локалізованих на дефекті. Дисперсійні характеристики були проаналізовані чисельно та порівняні з випадком дефекту у вигляді діелектрика.

- Досліджена прозорість фотонного кристалу скінченної товщини, який містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника. Знайдено аналітичні вирази для коефіцієнта прозорості такого фотонного кристалу. Показано, що збудження локалізованих на дефекті мод призводить до резонансного посилення коефіцієнта прозорості. Отримано спрощений аналітичний вираз для резонансного коефіцієнта прозорості і проведено чисельне моделювання.

РОЗДІЛ 7

ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ТРАНСПОРТ У ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИКАХ ЗА НАЯВНОСТІ НЕЗМІННОГО У ЧАСІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

У цьому розділі на основі праць [43–46] розроблено метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту через шаруватий надпровідник за наявності незмінного у часі магнітного поля. Розглядається геометрія, в якій кристалографічна вісь **c** паралельна поверхні зразка, тобто надпровідні шари перпендикулярні цій поверхні. Саме в цьому випадку магнітне поле може мати суттєвий вплив на поширення джозефсонівських плазмових хвиль (ДПХ).

У дисертації розглядається випадок відносно слабких магнітних полів, коли джозефсонівські вихори ще не проникають у зразок шаруватого надпровідника. Зауважимо, що таке слабке магнітне поле проникає у шаруватий надпровідник лише на глибину порядку λ_c. Наприклад, у праці [169] показано, що у півнескінченний зразок шаруватого надпровідника незмінне у часі магнітне поле величини $H_0 < \mathcal{H}_0$ проникає у вигляді «хвоста» джозефсонівського вихору:

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \big\{ \exp[-(x + x_0)/\lambda_c] \big\}. \tag{7.1}$$

Тут зразок займає область простору $x > 0$, надпровідні шари перпендикулярні границі зразка, $x_0 = \lambda_c \operatorname{arch}(\mathcal{H}_0/H_0)$ визначає положення центру фіктивного джозефсонівського вихору та $\mathcal{H}_0$ — характерне магнітне поле (1.66).

В основі методу лежить спеціальне представлення для калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку φ у шаруватому надпровіднику у вигляді двох доданків, $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_w(\vec{r}, t)$, перший з яких відповідає розподілу магнітного поля у шаруватому надпровіднику, а другий — ДПХ. Обмежуючись розглядом лише лінійних ДПХ, нелінійний член $\sin\varphi$ приймає вигляд:

$$\sin\varphi(\vec{r},t) \approx \sin\varphi_0(\vec{r}) + \varphi_w(\vec{r},t)\cos\varphi_0(\vec{r}). \tag{7.2}$$

Рівняння Гордона (1.40) у цьому випадку розпадається на два,

$$\left(1-\lambda_{ab}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\sin\varphi_0 - \lambda_c^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} = 0, \tag{7.3}$$

$$\left(1-\lambda_{ab}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi_w}{\partial t^2} + \varphi_w\cos\varphi_0\right] - \lambda_c^2\frac{\partial^2\varphi_w}{\partial x^2} = 0, \tag{7.4}$$

де перше рівняння визначає $\varphi_0(\vec{r})$, а з ним і просторовий розподіл незмінного у часі магнітного поля, а друге рівняння описує лінійну хвилю, що поширюється на просторово-неоднорідному фоні, визначеному $\varphi_0(\vec{r})$.

Наприклад, для півнескінченного зразка шаруватого надпровідника, див. рівність (7.1), можна підставити

$$\cos\varphi_0(x) = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2[(x+x_0)/\lambda_c]}, \tag{7.5}$$

у рівняння Гордона (7.4) та визначити розподіл електромагнітного поля у шаруватому надпровіднику.

На базі цього методу показано, що за допомогою такого магнітного поля можна контролювати транспортні характеристики шаруватого надпровідника. Зокрема, у підрозділі 7.1 показано, що завдяки зміні величини магнітного поля прозорість пластини шаруватого надпровідника може змінюватися в широкому інтервалі значень, практично від непрозорості до повної прозорості.

У підрозділі 7.2 досліджено ефект крос-поляризації електромагнітної хвилі при відбитті від поверхні півнескінченного шаруватого надпровідника за наявності незмінного у часі магнітного поля. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів відбиття і перетворення, а також визначено параметри, при яких відбувається найбільш ефективна крос-поляризація поперечно-електричних (ТЕ) та поперечно-магнітних (ТМ) хвиль.

Нарешті, у підрозділі 7.3 проаналізовано вплив незмінного у часі магнітного поля на поширення ДПХ, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника, яка розташована між двома діелектричними півпросторами. Отримано в аналітичній формі дисперсійні співвідношення для локалізованих ДПХ і представлено чисельний аналіз впливу магнітного поля на дисперсію. Передбачено, що аномальна дисперсія локалізованої ДПХ може спостерігатися у широкому діапазоні частот, хвильових векторів і магнітних полів. Також передбачається можливість спостереження внутрішнього відбиття локалізованої хвилі у неоднорідному незмінного у часі магнітному полі.

7.1. Прозорість шаруватого надпровідника за наявності магнітного поля

У цьому підрозділі обговорюється можливість керування прозорістю та відбивною здатністю пластини шаруватого надпровідника за допомогою незмінного у часі магнітного поля. Ми обмежимось розглядом частот, більших за джозефсонівську плазмову частоту, $\omega > \omega_J$, оскільки у протилежному випадку лінійні хвилі у шаруватому надпровіднику не поширюються і падаюча хвиля повністю відбивається від зразку навіть у присутності незмінного у часі магнітного поля.

7.1.1. Півнескінченний зразок

Розглянемо відбиття плоскої електромагнітної хвилі ТМ поляризації ,

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \qquad \vec{H} = \{0, H_y, 0\}, \tag{7.6}$$

від півнескінного зразка шаруватого надпровідника (див. рис. 7.1). Зовнішнє незмінне у часі магнітне поле $\vec{H}_0$ напрямлено вздовж осі y і паралельно границі «шаруватий надпровідник – вакуум», а хвиля з частотою ω падає під кутом θ до поверхні зразка так, що площина падіння перпендикулярна осі y.

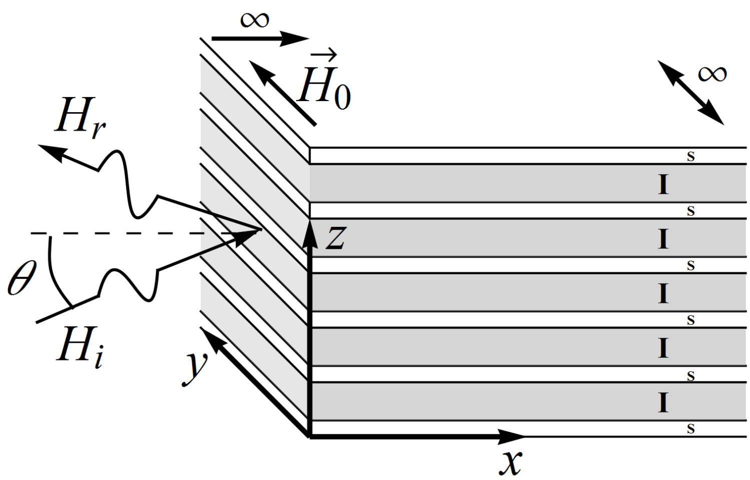


Рис. 7.1. Геометрія задачі, де s і I позначають надпровідні і діелектричні шари відповідно, а H_i і H_r — амплітуди хвиль, що падає та відбивається відповідно.

Далі в цьому пункті ми отримаємо аналітичні вирази для коефіцієнта відбиття і проаналізуємо його поведінку при зміні частоти хвилі, кута падіння і величини статичного магнітного поля.

7.1.1.1. Розподіл незмінного у часі магнітного та електромагнітного полів у системі

У вакуумній області поле представлено хвилями, що падає і відбивається від зразка шаруватого надпровідника. Використовуючи рівняння Максвела, можна записати ненульові тангенціальні компоненти поля хвилі в вакуумі в такій формі:

$$H_y = H_i \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) + H_r \exp(-ik_x x + ik_z z - i\omega t),$$
$$E_z = -\frac{k_x}{k}\big[H_i \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) - H_r \exp(-ik_x x + ik_z z - i\omega t)\big], \quad (7.7)$$

де H_i і H_r — амплітуди магнітного поля хвиль, що падають і відбиваються відповідно; $k_x = k\cos\theta$, $k_z = k\sin\theta$ — компоненти хвильового вектора ($k_y = 0$); $k = \omega/c$ — модуль хвильового вектора.

Розподіл поля всередині зразка шаруватого надпровідника будемо описувати за допомогою синусоїдального рівняння Гордона (1.40), яке за відсутності дисипації та у наближенні великої анізотропії, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} \gg 1$, може бути записано у такому вигляді:

$$\sin\varphi + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \lambda_c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{7.8}$$

Тут ми знехтували малим доданком $\lambda_{ab}k_z \ll 1$.

Калібрувально-інваріантна різниця фаз $\varphi(\vec{r}, t)$ пов'язана з компонентами поля в надпровіднику за допомогою рівнянь (1.64) і (1.65). З них та з рівняння Гордона (7.8) неважко отримати вираз, що зв'язує магнітне поле H_y всередині надпровідника з різницею фаз φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\pi d}{\Phi_0}H_y. \tag{7.9}$$

Розглянемо розподіл незмінного у часі магнітного поля у випадку, коли є тільки таке магнітне поле і немає електромагнітної хвилі. З рівняння (7.8) знаходимо:

$$\varphi_0(\xi) = -4\,\mathrm{arctg}\left[\exp(-\xi - \xi_0)\right], \tag{7.10}$$

де введена безрозмірна координата $\xi = x/\lambda_c$, константа ξ_0 визначається з граничної умови при $x = 0$ з урахуванням (7.9) та введено нормоване значення h_0 для величини зовнішнього магнітного поля:

$$\xi_0 = \mathrm{arch}\left(\frac{1}{h_0}\right), \qquad h_0 = \frac{H_0}{\mathcal{H}_0}. \tag{7.11}$$

З рівнянь (7.10) і (7.9) можна отримати вираз для розподілу незмінного у часі поля всередині зразка:

$$H_y^{s0}(\xi) = \frac{\mathcal{H}_0}{\mathrm{ch}(\xi + \xi_0)}. \tag{7.12}$$

Розподіл нормованого незмінного у часі магнітного поля у системі представлено на рис. 7.2. Зовнішнє магнітне поле, яке у вакуумі є однорідним, проникає всередину зразка шаруватого надпровідника в формі «хвоста» солітонного розв'язку рівняння Гордона, який описується рівнянням (7.12). Зі збільшенням величини поля солітон проникає глибше в зразок, але його центр залишається поза зразком. Ми досліджуємо випадок відносно слабких магнітних полів, коли нормоване значення $h_0 < 1$, що відповідає умовам, коли джозефсонівські вихори не проникають у шаруватий надпровідник.

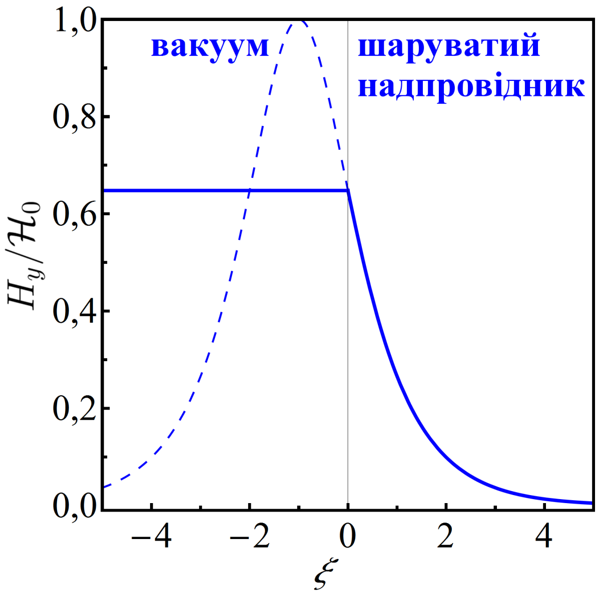


Рис. 7.2. Розподіл нормованого незмінного у часі магнітного поля $H_y/\mathcal{H}_0$ у вакуумі та зразку шаруватого надпровідника (суцільна лінія) відповідно до рівняння (7.12), де штрихова лінія позначає розподіл магнітного поля солітону, «хвіст» якого проникає всередину зразка.

Тепер обчислимо розподіл електромагнітного поля ТМ хвилі, яка проникає у зразок та взаємодіє там із незмінним у часі магнітним полем. Представимо калібрувально-інваріантну різницю фаз параметру порядку у вигляді двох доданків:

$$\varphi(\xi, z, t) = \varphi_0(\xi) + \varphi_w(\xi, z, t), \tag{7.13}$$

перший з яких описується рівнянням (7.10), а другий виникає внаслідок поширення ТМ хвилі та осцилює з частотою падаючої хвилі:

$$\varphi_w = a(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \tag{7.14}$$

Тут ми обмежимось розглядом лише лінійних хвиль, тобто будемо вважати, що амплітуда падаючої хвилі достатньо мала та $|\varphi_w(\xi, z, t)| \ll 1$. У цьому випадку рівняння Гордона (7.8) може бути переписано у вигляді рівняння для амплітуди $a(\xi)$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \left[\tilde{\Omega}^2 + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi_0 + \xi)}\right] a(\xi) = 0, \tag{7.15}$$

де $\tilde{\Omega} = (\Omega^2 - 1)^{1/2}$, $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота. Розв'язок рівняння (7.15), який на нескінченності, при $\xi \to \infty$, являє собою хвилю, що біжить від границі «вакуум – шаруватий надпровідник», і має вигляд:

$$a(\xi) = C \exp(i\tilde{\Omega}\xi) \left[i\tilde{\Omega} - \mathrm{th}(\xi + \xi_0)\right]. \tag{7.16}$$

За допомогою рівнянь (7.9) і (7.13) можна визначити поля в шаруватому надпровіднику. Тангенціальні компоненти електромагнітного поля мають вигляд:

$$H_y^s = \frac{1}{2}\mathcal{H}_0 a'(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)], \quad E_z^s = -\mathcal{H}_0 \frac{i\Omega}{2\sqrt{\varepsilon}} a(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \tag{7.17}$$

7.1.1.2. Коефіцієнт відбиття

Використовуючи умови неперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границі зразку шаруватого надпровідника (7.17) і вакууму (7.7) з урахуванням (7.16), можна отримати вираз для коефіцієнта відбиття:

$$R \equiv \frac{|H_r|^2}{|H_i|^2} = 1 - 2\Big\{1 + \Big[1 + \frac{h_0^4\left(1-h_0^2\right)}{\tilde{\Omega}^2\Omega^4}\Big]\Theta + \frac{1}{4\Theta}\Big\}^{-1}, \tag{7.18}$$

де введено параметр

$$\Theta = \frac{\tilde{\Omega}\Omega}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{\Omega^2 - h_0^2}. \tag{7.19}$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо лише частоти, більші за джозефсонівську плазмову частоту, тобто $\Omega > 1$. У цьому випадку Θ є додатною величиною, та легко бачити, що $\Theta + 1/4\Theta$ завжди не менше 1, тобто величина у фігурних дужках у рівнянні (7.18) більше 2 і, як наслідок, R завжди менше 1.

Як зазначалося вище, ми розглядаємо зміну нормованого магнітного поля h_0 в межах від 0 до 1. У випадках $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$ вираз (7.18) можна переписати у вигляді:

$$R_{0,1} = \Big[1 - \frac{2}{1 + (\Omega/\tilde{\Omega})^{\mp 1}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}\Big]^2, \tag{7.20}$$

де -1 та $+1$ у показнику степеня відповідають випадкам $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$.

Тепер проаналізуємо, до яких якісних змін коефіцієнта відбиття призводить наявність незмінного у часі магнітного поля. Порівняємо частотну і кутову залежності коефіцієнта відбиття при $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$. На рис. 7.3 представлені залежності коефіцієнта відбиття (7.20) від нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$ для кутів падіння $\theta = 0{,}13\,\pi$ (суцільні криві) і $\theta = 0{,}46\,\pi$ (штрихові криві) в разі відсутності магнітного поля $h_0 = 0$, а також при $h_0 = 1$. Стрілками показаний ефект увімкнення поля. Видно, що для малих кутів при відсутності магнітного поля залежність $R(\Omega)$ має мінімум, рівний нулю, а включення магнітного поля $h_0 = 1$ робить цю залежність монотонною. У той же час для кутів, близьких до $\pi/2$, включення магнітного поля призводить до протилежного результату: без магнітного поля крива $R(\Omega)$ монотонна, а включення поля $h_0 = 1$ призводить до появи мінімуму коефіцієнта відбиття. Більш того, мінімальне значення R виявляється рівним 0, тобто уся хвиля біжить вглиб зразку.

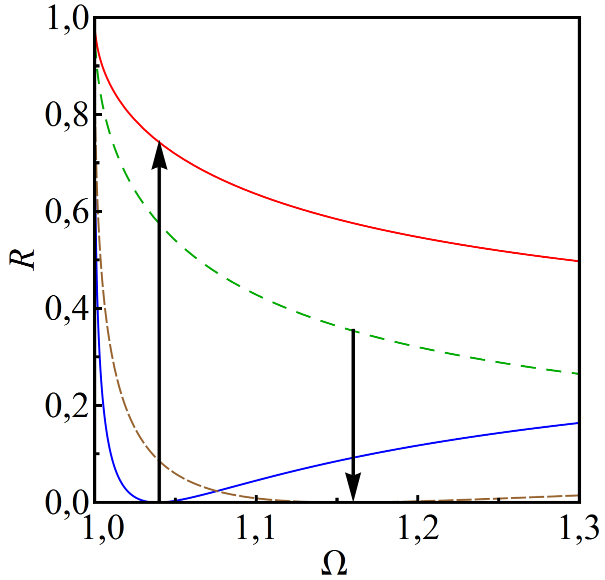


Рис. 7.3. Залежності коефіцієнта відбиття R від нормованої частоти Ω при $\theta = 0{,}13\,\pi$ (суцільні криві) і $\theta = 0{,}46\,\pi$ (штрихові криві) та при $h_0 = 0$ (початки стрілок) і $h_0 = 1$ (кінцівки стрілок).

За допомогою рівняння (7.20) можна знайти критичний кут падіння, при якому відбувається перехід від однієї ситуації до іншої. При $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$ рівний нулю мінімум коефіцієнта відбиття може спостерігатися при частотах

$$\Omega_{\min 0,1} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\varepsilon \cos^2 \theta)^{\mp 1}}}, \tag{7.21}$$

де -1 та $+1$ у показнику степеня відповідають випадкам $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$. Щоб мінімуми існували, підкорінний вираз повинен бути позитивним, тобто за відсутності магнітного поля $h_0 = 0$ мінімум у залежності коефіцієнта відбиття від частоти може спостерігатися при кутах $0 < \theta < \arccos(\varepsilon^{-1/2})$. У випадку $h_0 = 1$ навпаки — мінімум коефіцієнта відбиття може спостерігатися для кутів падіння в інтервалі $\arccos(\varepsilon^{-1/2}) < \theta < \pi/2$.

Таким чином, зовнішнім незмінним у часі магнітним полем можна збільшувати або зменшувати діапазон зміни коефіцієнта відбиття в функції частоти опромінення.

Розглянемо тепер залежність коефіцієнта відбиття від кута падіння, представлену на рис. 7.4. Бачимо, що для частот, близьких до джозефсонівської плазмової частоти (при $\Omega = \omega/\omega_J = 1{,}01$), увімкнення магнітного поля призводить до виникнення мінімуму кутової залежності коефіцієнта відбиття. Для більших частот (при $\Omega = \omega/\omega_J = 1{,}25$) мінімум коефіцієнта відбиття спостерігається і під час відсутності зовнішнього поля. Увімкнення магнітного поля не впливає значно на залежність $R(\theta)$, а призводить лише до збільшення кута падіння, при якому цей мінімум досягається.

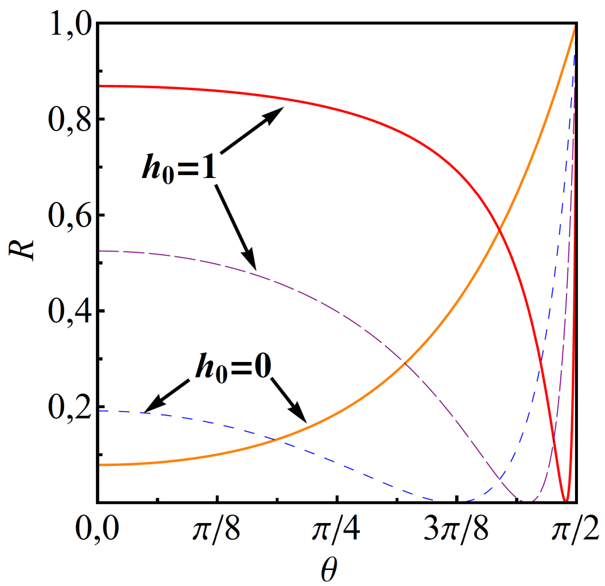


Рис. 7.4. Залежності коефіцієнта відбиття R від кута падіння θ при значеннях нормованої частоти $\Omega = 1{,}01$ (суцільні криві) і $\Omega = 1{,}25$ (штрихові криві) та при $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$.

За допомогою виразу (7.20) можна з’ясувати, що значення кута θ, при якому спостерігається мінімум $R = 0$ у випадках $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$, визначається виразом:

$$\theta_{\min 0,1} = \arccos\left[(\tilde{\Omega}/\Omega)^{\mp 1}/\sqrt{\varepsilon}\right], \tag{7.22}$$

де -1 та $+1$ у показнику степеня відповідають випадкам $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$. Щоб мінімум існував, аргумент функції $\arccos$ повинен бути менше одиниці, тому при відсутності магнітного поля, $h_0 = 0$, мінімум $R(\theta)$ може спостерігатися при частотах $\Omega > (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$. У випадку $h_0 = 1$ при будь-якій частоті, змінюючи кут падіння, можна домогтися повного пригнічення коефіцієнта відбиття.

Таким чином, при частотах, близьких до джозефсонівської плазмової частоти, мінімум у кутовій залежності коефіцієнта відбиття може спостерігатися тільки за наявності незмінного у часі магнітного поля.

Тепер проаналізуємо, як змінюється коефіцієнт відбиття при зміні магнітного поля, якщо плавно варіювати величину безрозмірного магнітного поля h_0 від 0 до 1. На рис. 7.5 показані ці залежності для трьох значень кута падіння.

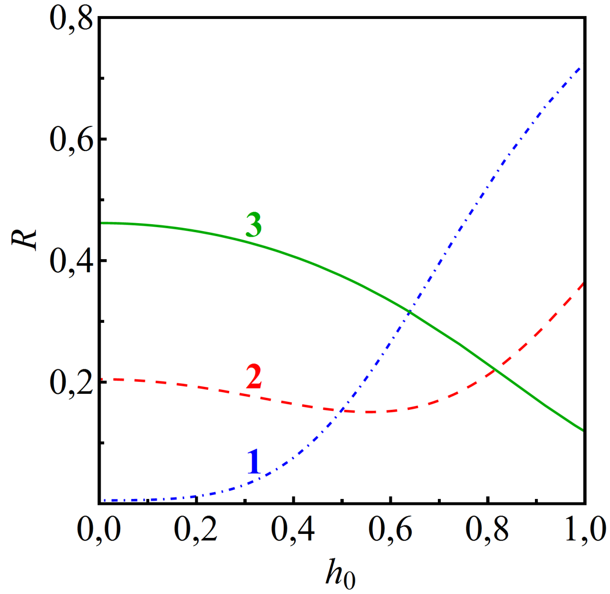


Рис. 7.5. Залежності коефіцієнта відбиття від величини незмінного у часі магнітного поля при частоті $\Omega = 1{,}05$ і кутах падіння: $\theta = 0{,}1\,\pi$ (крива 1), $\theta = 0{,}4\,\pi$ (крива 2) і $\theta = 0{,}45\,\pi$ (крива 3).

Видно, що включення статичного магнітного поля може призводити як до зменшення, так і до збільшення відбивної здатності зразка. При кутах падіння, близьких до нуля (крива 1), коефіцієнт відбиття R монотонно зростає з ростом магнітного поля. При збільшенні кута крива перестає бути монотонною (крива 2) і з'являється мінімум R при значенні поля

$$h_{0\,\min} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{2\varepsilon \cos^2\theta} - \frac{\Omega^2 - 1}{2}}. \tag{7.23}$$

Для кутів, більших за $\arccos(\varepsilon^{-1/2})$, з ростом магнітного поля коефіцієнт відбиття зменшується (крива 3).

Магнітне поле може як зменшувати, так і збільшувати коефіцієнт відбиття в залежності від параметрів задачі. Визначимо, яку величину магнітного поля потрібно докласти при даній частоті Ω і даному куті падіння θ, щоб отримати мінімально можливий коефіцієнт відбиття. На рис. 7.6 кольором показана величина магнітного поля, при якій досягається найменший коефіцієнт відбиття при різних нормованих частотах Ω і кутах падіння θ.

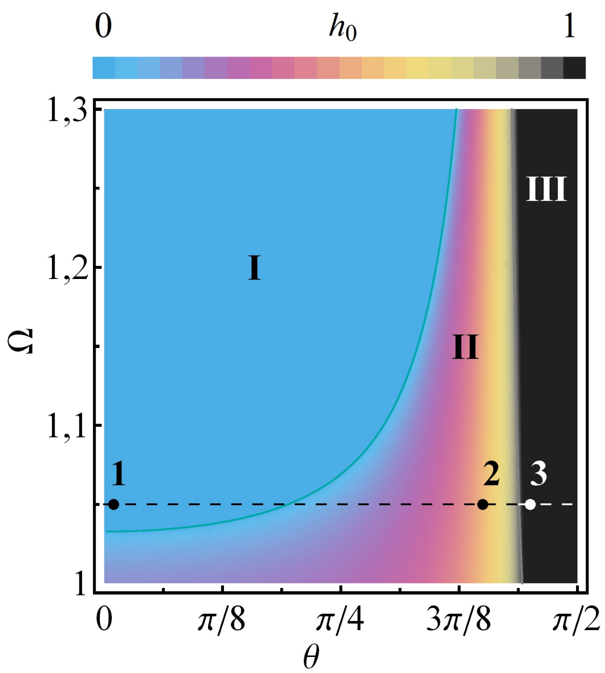


Рис. 7.6. Діаграма значень нормованого магнітного поля h_0, необхідних для мінімізації коефіцієнта відбиття при різних частотах Ω і кутах падіння θ, де точки 1, 2 і 3 відповідають кривим з номерами 1, 2 і 3 на рис. 7.5.

Точки 1, 2 і 3 відповідають кривим на рис. 7.5. При значеннях частоти і кута падіння в області I коефіцієнт відбиття мінімальний за відсутності магнітного поля. Для значень Ω і θ, що відносяться до області III, мінімум коефіцієнта відбиття спостерігається при магнітному полі $h_0 = 1$, оскільки залежність від поля монотонно спадна. Для значень Ω і θ з області II мінімум досягається при певному проміжному значенні поля. Як показує аналіз рівняння (7.18), коефіцієнт відбиття в мінімумі обертається в 0 тільки на границях областей I, II і III, коли $h_0 = 0$ або $h_0 = 1$ і кути падіння визначаються співвідношеннями (7.22). З діаграми також видно, як змінюється характер залежності коефіцієнта відбиття від поля при різних частотах. Як було продемонстровано на рис. 7.3 і 7.4, для частот, близьких до джозефсонівської плазмової частоти (тобто при $\Omega < (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$), тільки увімкненням магнітного поля можна досягти повного пригнічення коефіцієнта відбиття, а при більших частотах мінімальний коефіцієнт відбиття дорівнює 0 як в присутності, так і за відсутності магнітного поля.

7.1.2. Шаруватий надпровідник скінченної товщини

Розглянемо падіння хвилі ТМ поляризації (див. рівняння (7.6)) з частотою ω під кутом θ в площині xz на зразок шаруватого надпровідника товщини D, коли розмір зразка менше довжини згасання хвилі, але більше глибини проникнення незмінного у часі магнітного поля λ_c (див. рис. 7.7). Падаюча хвиля частково відбивається і частково проходить крізь зразок, як показано на рис. 7.7. Зовнішнє незмінне у часі магнітне поле $\vec{H}_0$ напрямлено вздовж осі y.

Далі в цьому пункті ми розрахуємо коефіцієнт прозорості, проаналізуємо його залежність від параметрів задачі та з'ясуємо, до яких якісних змін призводить скінченність зразка. Також буде показано, що за допомогою магнітного поля можна змінювати коефіцієнт прозорості в широкому діапазоні.

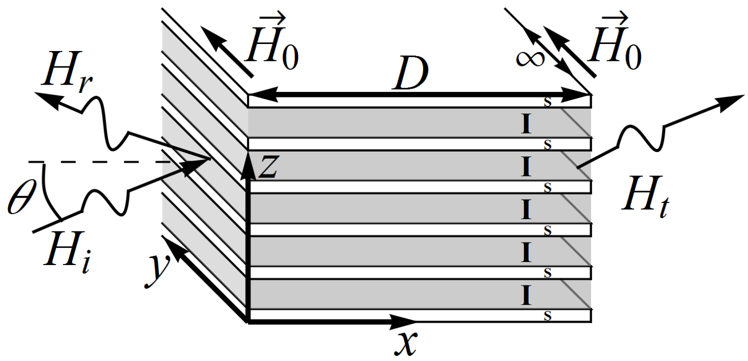


Рис. 7.7. Геометрія задачі, де s і I позначають надпровідні і діелектричні шари відповідно, а H_i, H_r і H_t — амплітуди хвиль, що падає, відбита і пройшла відповідно.

7.1.2.1. Розподіл незмінного у часі магнітного та електромагнітного полів у системі

Електромагнітне поле у вакуумних областях праворуч і ліворуч від зразка (див. рис. 7.7) являє собою суперпозицію незмінного у часі магнітного поля і електромагнітних хвиль, що падає, відбита і пройшла. Використовуючи рівняння Максвела, можна отримати наступні вирази для тангенціальних компонент полів у вакуумній області зліва від зразка,

$$H_y^{\text{left}} = H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)], \tag{7.24}$$
$$E_z^{\text{left}} = -\frac{k_x}{k}\left(H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] - H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)]\right),$$

де H_i и H_r — амплітуди хвиль, що падає та відбита відповідно, $k_x = k\cos\theta$, $k_z = k\sin\theta$ — компоненти хвильового вектора ($k_y = 0$), $k = \omega/c$ — його модуль.

Аналогічно, тангенціальні компоненти полів хвилі з амплітудою H_t у вакуумній області справа від зразка мають вигляд:

$$H_y^{\text{right}} = H_t \exp[i(k_x(x-D) + k_z z - \omega t)], \tag{7.25}$$
$$E_z^{\text{right}} = -\frac{k_x}{k} H_t \exp[i(k_x(x-D) + k_z z - \omega t)].$$

Для опису полів у шаруватому надпровіднику ми знову використаємо підхід, схематично представлений на початку розділу та розвинутий у підпункті 7.1.1.1, який базується на використанні синусоїдального рівняння Гордона в формі (7.8) для калібрувально-інваріантної різниці фаз φ, пов'язаної з електромагнітними полями за допомогою рівнянь (1.64) і (1.65).

Зазначимо, що незмінне у часі магнітне поле проникає у зразок у вигляді «хвостів» солітонів подібно представленому на рис. 7.2, але через обидві границі. Вважаючи зразок досить великим, $\exp(D/\lambda_c) \gg 1$, можна знехтувати взаємодією між цими «хвостами» та вважати, що поле проникає незалежно з кожної границі. Використовуючи рівняння (7.8), можна отримати вирази для різниці фаз, яка відповідає розподілу незмінного у часі магнітного поля,

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^{\text{left}}(\xi) = -4\,\mathrm{arctg}[\exp(-\xi - \xi_0)], \\
&\varphi_0^{\text{right}}(\xi) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp(\xi - \delta + \xi_0)\right],
\end{aligned} \tag{7.26}$$

де введені безрозмірна координата $\xi = x/\lambda_c$ і нормована товщина зразка $\delta = D/\lambda_c$. Константа ξ_0 визначена величиною нормованого магнітного поля h_0 за допомогою рівняння (7.11). Як і у підпункті 7.1.1.1, ми будемо розглядати випадок відносно слабких магнітних полів, коли нормоване значення $h_0 < 1$, що відповідає умовам, коли джозефсонівські вихори не проникають у шаруватий надпровідник.

Як було сказано, поля, що проникають з лівої та правої границь та описані рівняннями (7.26), не взаємодіють, оскільки незмінне у часі магнітне поле експоненційно згасає вглиб зразку на відстані, багато меншій за товщину зразка D. Таким чином, різниця фаз $\varphi_0(\xi)$, що визначає незмінне у часі магнітне поле всередині зразка, являє собою суму $\varphi_0^{\text{left}}(\xi)$ і $\varphi_0^{\text{right}}(\xi)$.

Тепер розглянемо розподіл поля, коли, крім незмінного у часі магнітного поля, присутня електромагнітна хвиля ТМ поляризації. Як і у підпункті 7.1.1.1, представимо калібрувально-інваріантну різницю фаз параметру порядку у вигляді двох доданків (7.13), перший з яких описується сумою $\varphi_0^{\text{left}}(\xi)$ і $\varphi_0^{\text{right}}(\xi)$ з рівнянь (7.26), а другий виникає внаслідок поширення ТМ хвилі та осцилює з частотою падаючої хвилі, див. рівняння (7.14). Тоді рівняння (7.8) може бути переписано у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \left[\tilde{\Omega}^2 + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi + \xi_0)} + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\delta + \xi_0 - \xi)}\right] a(\xi) = 0, \tag{7.27}$$

який відрізняється від рівняння (7.15) лише додатковим доданком у квадратних дужках, який виник за рахунок незмінного у часі магнітного поля, що проникає через другу границю.

Зауважимо, що другий і третій доданки у квадратних дужках у рівнянні (7.27) істотно відрізняються від нуля лише в околиці лівої і правої границь відповідно. Враховуючи це, розв'язок рівняння (7.27) можна знайти аналітично:

$$a(\xi) = C_1 \mathrm{e}^{i\tilde{\Omega}\xi}\left[pa_0(\xi) + p^{-1}a_0(\delta - \xi) + \Omega\right] + C_2 \mathrm{e}^{-i\tilde{\Omega}\xi}\left[p^{-1}a_0(\xi) + pa_0(\delta - \xi) + \Omega\right], \tag{7.28}$$

де

$$a_0(\xi) = \mathrm{th}(\xi_0 + \xi) - 1, \qquad p = \frac{1 + i\tilde{\Omega}}{\Omega}. \tag{7.29}$$

За допомогою рівнянь (7.9) і (7.13) можна визначити поля в шаруватому надпровіднику. Тангенціальні компоненти електромагнітного поля пов'язані з амплітудою $a(\xi)$ рівняннями (7.17).

На рис. 7.8 показано розподіл магнітного поля електромагнітної хвилі у системі як за відсутності незмінного у часі магнітного поля $h_0 = 0$ (штрихова крива), так і при максимальному магнітному полі $h_0 = 1$ (суцільна крива). Рисунок показує, як незмінне у часі магнітне поле завдяки нелінійності синусоїдального рівняння Гордона впливає на прозорість зразку: електромагнітне поле хвилі змінюється поблизу границь зразка, де незмінне у часі магнітне поле має істотну величину.

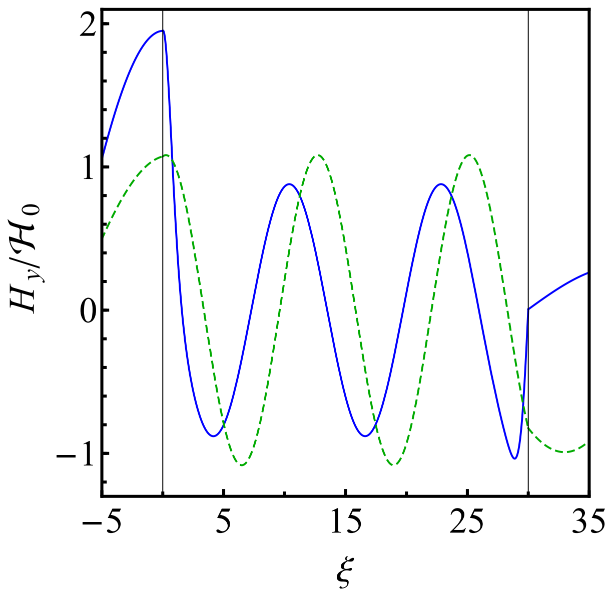


Рис. 7.8. Просторовий розподіл магнітного поля $H_y/\mathcal{H}_0$ у електромагнітній хвилі при $h_0 = 0$ (штрихова крива) і при $h_0 = 1$ (суцільна крива), де вертикальні лінії представляють границі зразка. Параметри: $\Omega = 1{,}12$, $\theta = \pi/4$, $\delta = 30$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\varepsilon = 16$.

7.1.2.2. Коефіцієнт прозорості

Використовуючи умови неперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границях вакуумних областей (7.24) і (7.25) та зразку шаруватого надпровідника (7.17) і (7.28), ми можемо отримати коефіцієнт прозорості:

$$T = \frac{|H_t|^2}{|H_i|^2} = \left(1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta - \phi)\left\{\left[\left(1 + \frac{h_0^4 \tilde{h}_0^2}{\Omega^4 \tilde{\Omega}^2}\right)\Theta + \frac{1}{4\Theta}\right]^2 - 1\right\}\right)^{-1}, \qquad (7.30)$$

де Θ визначений у рівнянні (7.19), $\tilde{h}_0 = \sqrt{1 - h_0^2}$ та

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{1 - \tilde{\Omega}^2}{2\tilde{\Omega}} + \frac{\Omega^4 \tilde{h}_0}{2\,\tilde{\Omega}\,h_0^2}\left[\frac{\Omega^2 \varepsilon \cos^2\theta}{\Omega^2 + (\tilde{h}_0^2 - \Omega^2)\varepsilon\cos^2\theta} - \frac{\tilde{h}_0 + \tilde{\Omega}^2}{\tilde{h}_0 + 1}\right]^{-1}\right\}. \qquad (7.31)$$

Рівняння (7.30) можна спростити в випадках $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$. Якщо немає магнітного поля, $h_0 = 0$, рівняння (7.30) зводиться до вигляду:

$$T(h_0 = 0) = \left[1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta)\Big(\frac{1}{4\Theta_0} - \Theta_0\Big)^2\right]^{-1}, \qquad \Theta_0 = \frac{\tilde{\Omega}}{\Omega}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos\theta. \quad (7.32)$$

Якщо частота хвилі задовольняє нерівності $\Omega > (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$, то множник при синусі в виразі (7.32) обертається в нуль при $\cos\theta = \Omega/(\tilde{\Omega}\sqrt{\varepsilon})$. Звернімо увагу на те, що при такому куті падіння повинно спостерігатися повне проходження ТМ хвилі через зразок незалежно від товщини зразка.

Коли значення незмінного у часі магнітного поля максимальне, $h_0 = 1$, коефіцієнт прозорості набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} &T(h_0 = 1) = \left[1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta - \phi_1)\Big(\frac{1}{4\Theta_1} - \Theta_1\Big)^2\right]^{-1}, \\ &\phi_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,\tilde{\Omega}, \quad \Theta_1 = \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos\theta. \end{aligned} \quad (7.33)$$

При куті падіння, що задовольняє рівності $\cos\theta = \tilde{\Omega}/(\Omega\sqrt{\varepsilon})$, коефіцієнт прозорості дорівнює 1 незалежно від частоти і товщини зразка.

Далі ми наводимо результати аналізу залежностей коефіцієнта прозорості від товщини зразка, кута падіння і частоти падаючої хвилі, коли нормоване магнітне поле змінюється від нуля до одиниці.

Залежність коефіцієнта прозорості від товщини зразка δ в рівнянні (7.30) міститься тільки в аргументі синуса $\sin(\tilde{\Omega}\delta - \phi)$. Видно, що зразок стає повністю прозорим в умовах, коли синус дорівнює нулю. Відповідно до рівняння (7.32), за відсутності магнітного поля це відбувається, коли товщина зразка дорівнює цілому числу півхвиль,

$$\delta = \pi k/\tilde{\Omega}, \quad k = 1, 2... \quad (7.34)$$

При включенні незмінного у часі магнітного поля (див. рівняння (7.30) або (7.33)) аргумент синуса набуває фазового зсуву ϕ, який залежить від величини h_0. Наявність магнітного поля призводить тільки до відповідного зсуву максимумів функції $T(\delta)$ і зміні амплітуди її осциляцій, але період по δ залишається таким же. Цей зсув показаний стрілкою на рис. 7.9, який зображає залежність $T(\delta)$ для двох значень магнітного поля, $h_0 = 0$ і $h_0 = 1$.

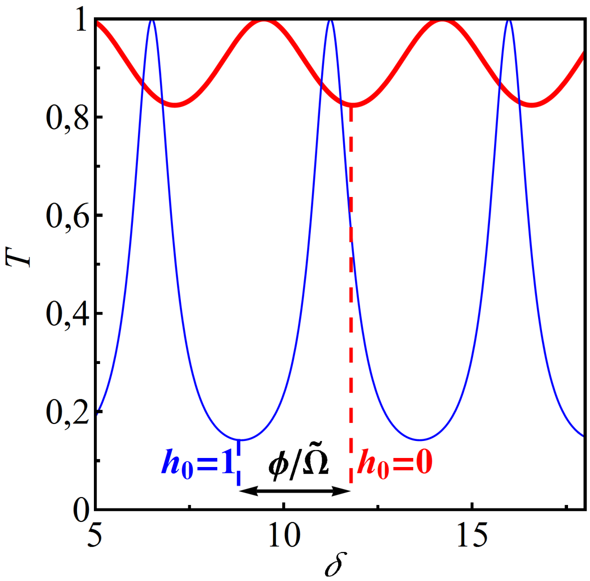


Рис. 7.9. Залежність коефіцієнта прозорості T від нормованої товщини зразка δ при $h_0 = 0$ (товста крива) і при $h_0 = 1$ (тонка крива). Параметри: $\Omega = 1{,}2$, $\theta = \pi/4$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\varepsilon = 16$.

Залежність коефіцієнта прозорості від кута падіння більш складна. На рис. 7.10 кольором показана величина коефіцієнта прозорості T в залежності від кута падіння θ і нормованого незмінного у часі магнітного поля h_0 при деяких значеннях нормованої частоти: $\Omega = 1{,}1;\ 1{,}15;\ 1{,}2;\ 1{,}28$. Хоч ця залежність кількісно змінюється зі збільшенням Ω, можна помітити якісне повторення його поведінки. Дійсно, коли $\tilde{\Omega}$ змінюється на π/δ, аргумент синуса в рівнянні (7.30) змінюється приблизно на π (див., наприклад, панелі з $\Omega = 1{,}28$ та $\Omega = 1{,}1$ на рис. 7.10). Коефіцієнт прозорості T дорівнює 1, коли $\sin(\tilde{\Omega}\delta - \phi) = 0$, що позначено штриховими товстими лініями на рис. 7.10. Крім того, сірими штриховими лініями показані точки, де коефіцієнт у круглих дужках у рівнянні (7.30) досягає мінімуму як функція θ.

Можна помітити з рис. 7.10, що, змінюючи магнітне поле, можна варіювати

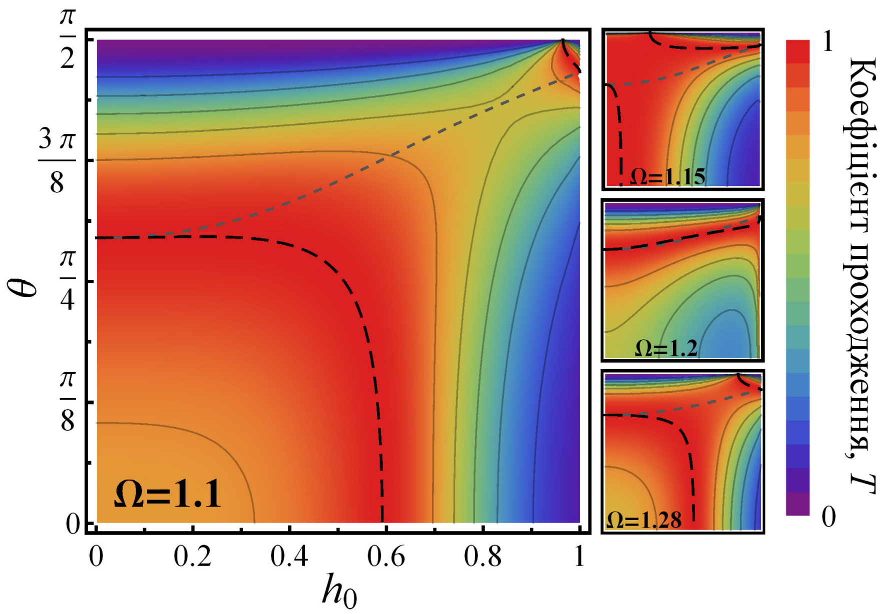


Рис. 7.10. Залежність коефіцієнта прозорості T від кута падіння θ і нормованого незмінного у часі магнітного поля $h_0 = H_0/\mathcal{H}_0$ при деяких значеннях нормованої частоти, $\Omega = 1{,}1;\ 1{,}15;\ 1{,}2;\ 1{,}28$. Параметри: $\delta = 11$, $\lambda_c = 4{\cdot}10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\varepsilon = 16$.

прозорість зразка в широкому діапазоні значень. Однак ефект від налаштування магнітного поля залежить від вибору кута падіння і частоти. Наприклад, для параметрів, що відповідають головній панелі рис. 7.10, при гострих кутах падіння (аж до $3\pi/8$) коефіцієнт прозорості зменшується з ростом магнітного поля. При менш гострих кутах падіння зміна поля не призводить до значної зміни коефіцієнта прозорості. Нарешті, при кутах падіння, близьких до $\pi/2$, коефіцієнт прозорості зростає зі збільшенням магнітного поля. Схожа поведінка коефіцієнта відбиття спостерігалася у випадку півнескінченного зразка, див. рис. 7.4. Звернімо увагу на те, що є широка область значень кутів падіння, при яких зміною магнітного поля можна домогтися повної прозорості (штрихові товсті лінії на рис. 7.10).

Таким чином, змінюючи зовнішнє магнітне поле, можна досягти повної прозорості практично для будь-якого кута падіння і частоти падаючої хвилі. Щоб це продемонструвати, ми при заданих величинах магнітного поля і частоти падаючої хвилі визначили оптимальний кут падіння, при якому коефіцієнт прозорості (7.30) досягає максимально можливого значення $T_{\max}$. Рисунок 7.11

представляє залежність цього значення $T_{\max}$ від нормованого магнітного поля і частоти падаючої хвилі.

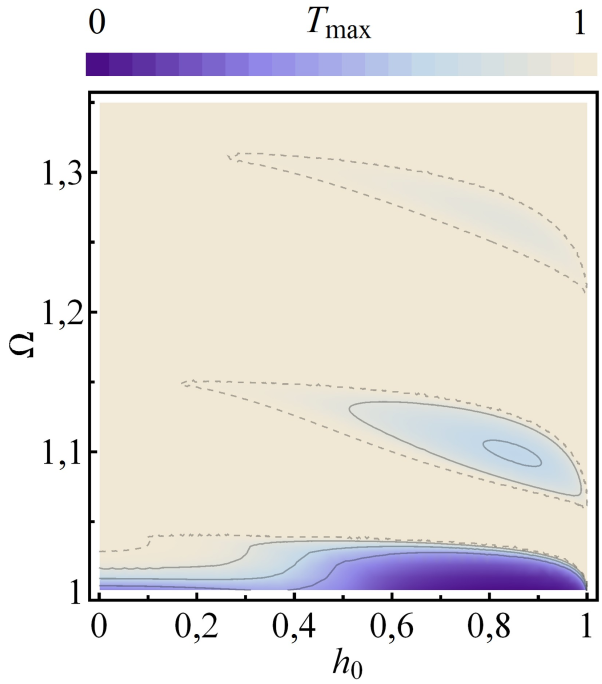


Рис. 7.11. Залежність коефіцієнта прозорості $T_{\max}$, який максимізовано за кутом падіння θ, від нормованої частоти Ω і нормованого незмінного у часі магнітного поля $h_0 = H_0/\mathcal{H}_0$. Параметри: $\delta = 11$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi =$ 0,3 ТГц, $\varepsilon = 16$.

Як видно з рисунка, є широкий діапазон зміни параметрів h_0 і Ω (див. світлі області на рис. 7.11, обмежені штриховою лінією), у якому підбором оптимального кута падіння θ можна домогтися повної прозорості. Крім того, рис. 7.11 демонструє, що існують області, де неможливо домогтися повної прозорості (темні області). А саме, при частотах, близьких до джозефсонівської плазмової частоти ($\Omega = 1$), зразок практично завжди відбиває велику частину енергії падаючої хвилі. Зі зростанням частоти розміри темних областей, в яких коефіцієнт прозорості менше одиниці, стають меншими.

Величина коефіцієнта прозорості при зміні частоти падаючої хвилі та величини h_0 нормованого незмінного у часі магнітного поля, але при фіксованому куті падіння $\theta = \pi/4$, показана кольором на лівій панелі рис. 7.12. Області повної прозорості позначені червоним кольором.

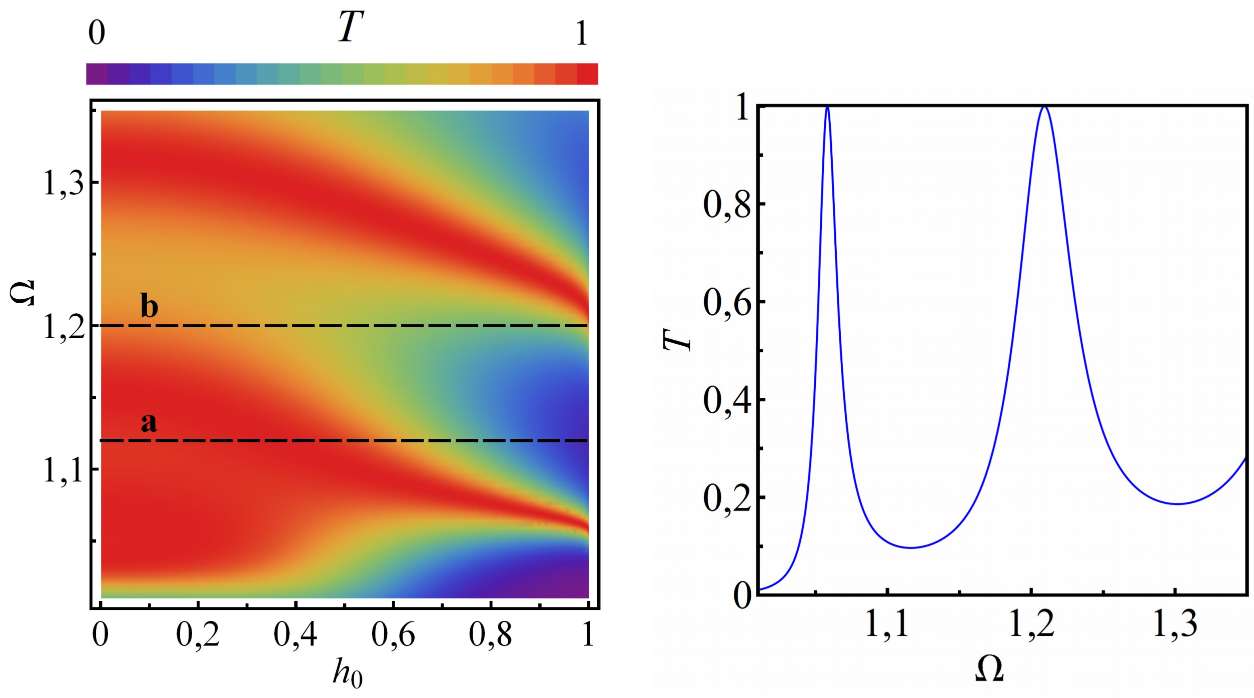


Рис. 7.12. Залежність коефіцієнта прозорості T від нормованої частоти Ω і нормованого незмінного у часі магнітного поля h_0 (ліва панель) та залежність коефіцієнта прозорості T від нормованої частоти Ω при максимальному значенні $h_0 = 1$ (права панель). Параметри: $\theta = \pi/4$, $\delta = 30$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\varepsilon = 16$.

Збільшуючи частоту хвилі, можна спостерігати осциляції типу Фабрі – Перо, див. праву панель рис. 7.12. Такі осциляції $T(\Omega)$ пов’язані із залежністю аргументу синуса в рівнянні (7.30) від частоти. Як можна побачити з рис. 7.12, збільшення магнітного поля призводить до звуження червоних смуг і їх зсуву в бік низьких частот. Таким чином, якщо ми зафіксуємо частоту падаючої хвилі і будемо змінювати зовнішнє магнітне поле, ми можемо варіювати коефіцієнт прозорості в досить широкому діапазоні. Однак діапазон цієї зміни залежить від вибору частоти. Наприклад, за фіксованої частоти, представленої штриховою лінією **a** на рис. 7.12, діапазон зміни коефіцієнта прозорості виявляється значнішим, ніж за частоти, представленої лінією **b**.

Рис. 7.13 показує, що діапазон зміни коефіцієнта прозорості істотно залежить від вибору частоти. Верхня і нижня криві на рис. 7.13 представляють, відповідно, максимальне і мінімальне можливі значення коефіцієнта прозорості при зміні магнітного поля за даної частоти Ω. Сіра проміжна область між кривими показує діапазон зміни коефіцієнта прозорості. Можна бачити, що цей діапазон істотно залежить від частоти хвилі. При частоті, що відповідає лінії **a** на рис. 7.12, можна варіювати коефіцієнт прозорості практично від нуля до одиниці, в той час як для лінії **b** цей діапазон значно менше і неможливо досягти повного прозорості.

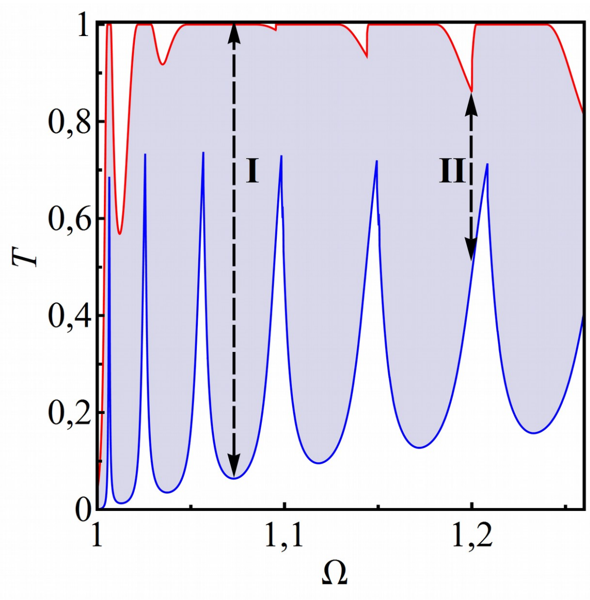


Рис. 7.13. Межі зміни коефіцієнта прозорості T при зміні h_0 від нормованої частоти Ω, де верхня та нижня криві відповідають максимально і мінімально можливим значенням коефіцієнта прозорості відповідно, та штрихові лінії **I** і **II** відповідають лініям **I** і **II** на рис. 7.12. Параметри: такі ж, як на рис. 7.12.

Таким чином, вибір частоти падаючої хвилі визначає діапазон, в якому за допомогою магнітного поля можна варіювати коефіцієнт прозорості. Щоб отримати широкий діапазон зміни, потрібно використовувати відносно малі частоти, але не дуже близькі до джозефсонівської плазмової частоти ω_J (див. рис. 7.13).

7.2. Крос-поляризація хвиль при відбитті від шаруватого надпровідника за наявності незмінного у часі магнітного поля

У даному підрозділі досліджується можливість керування ефектом крос-поляризації електромагнітних хвиль за допомогою незмінного у часі магнітного поля. Зокрема, розраховані коефіцієнти перетворення поперечно-електричних (TE) і поперечно-магнітних (TM) хвиль при їх відбитті від півнескінченного зразка шаруватого надпровідника. Проведено докладний аналіз отриманих аналітичних результатів в залежності від частоти, кутів, що визначають напрямок падіння хвилі, і величини незмінного у часі магнітного поля.

Ми розглядаємо падіння плоских електромагнітних хвиль поперечно-магнітної (TM),

$$\vec{\mathrm{H}}^{tm}(x,y,z,t) = \Big\{0, H_y^{tm}(x), H_z^{tm}(x)\Big\} \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{7.35}$$

$$\vec{\mathrm{E}}^{tm}(x,y,z,t) = \Big\{E_x^{tm}(x), E_y^{tm}(x), E_z^{tm}(x)\Big\} \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{7.36}$$

та поперечно-електричної (TE),

$$\vec{\mathrm{H}}^{te}(x,y,z,t) = \Big\{H_x^{te}(x), H_y^{te}(x), H_z^{te}(x)\Big\} \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{7.37}$$

$$\vec{\mathrm{E}}^{te}(x,y,z,t) = \Big\{0, E_y^{te}(x), E_z^{te}(x)\Big\} \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{7.38}$$

поляризацій з частотою ω з вакууму на зразок шаруватого надпровідника, півнескінченний уздовж осі x та нескінченний уздовж осей y і z (див. рис. 7.14). Система координат вибрана таким чином, що осі x і y паралельні кристалографічній площині $\mathbf{ab}$, а вісь z спрямована вздовж кристалографічної осі $\mathbf{c}$. Надпровідні шари зразка орієнтовані перпендикулярно поверхні зразка, що відповідає площині $x = 0$. Напрямок падіння хвилі будемо визначати кутом падіння θ_1 щодо нормалі до поверхні зразка і кутом повороту θ_2 площини падіння щодо осі z. У цих позначеннях компоненти хвильового вектора $\vec{k}_i = \{k_x, k_y, k_z\}$ падаючої хвилі можуть бути представлені у такому вигляді:

$$k_x = k\cos\theta_1,\ \ k_y = k\sin\theta_1\sin\theta_2,\ \ k_z = k\sin\theta_1\cos\theta_2.$$

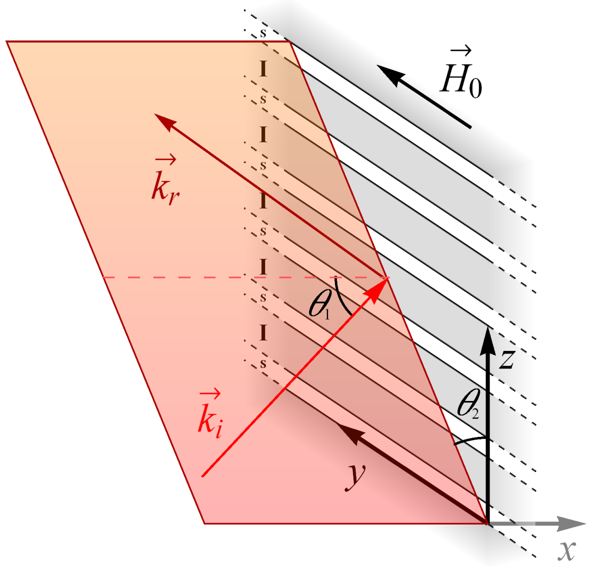


Рис. 7.14. Схематичне зображення півнескінченного зразка шаруватого надпровідника, на який падає електромагнітна хвиля.

В такій геометрії завдяки анізотропії виникає ефект крос-поляризації, як було показано в розділі 4. У цьому підрозділі ми дослідимо вплив зовнішнього незмінного у часі магнітного поля $\vec{H}_0$, напрямленого вздовж осі y. Будемо розглядати відносно слабкі магнітні поля, коли джозефсонівські вихори ще не проникають повністю в зразок, $H_0 < \mathcal{H}_0$.

7.2.1. Розподіл електромагнітного поля

7.2.1.1. Поля у вакуумі

Використовуючи рівняння Максвела, компоненти електричного і магнітного полів падаючої хвилі ТМ або ТЕ поляризації у вакуумі можна записати в такій формі:

$$\vec{H}_i^{tm}(x) = \left\{0, -1, \frac{k_y}{k_z}\right\} H_i^{tm} \exp(ik_x x),$$
$$\vec{E}_i^{tm}(x) = \left\{\frac{(k_x^2 - k^2)}{k_x k_z}, \frac{k_y}{k_z}, 1\right\} \frac{k_x}{k} H_i^{tm} \exp(ik_x x), \tag{7.39}$$
$$\vec{E}_i^{te}(x) = \left\{0, -1, \frac{k_y}{k_z}\right\} E_i^{te} \exp(ik_x x),$$
$$\vec{H}_i^{te}(x) = -\left\{\frac{(k_x^2 - k^2)}{k_x k_z}, \frac{k_y}{k_z}, 1\right\} \frac{k_x}{k} E_i^{te} \exp(ik_x x).$$

Тут $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ — модуль хвильового вектора, а H_i^{tm} і E_i^{te} — амплітуди падаючих хвиль ТМ і ТЕ поляризацій відповідно. Вирази для компонент поля у хвилі, що відбита від зразка з хвильовим вектором $\vec{k_r} = \{-k_x, k_y, k_z\}$, можна отримати, замінивши k_x на $-k_x$ в рівняннях (7.39).

Для вирішення задачі крос-поляризації ми використаємо принцип суперпозиції для хвиль двох специфічних поляризацій в шаруватих надпровідниках, докладно описаний у підрозділі 4.2. Представимо падаючу електромагнітну хвилю заданої поляризації у вигляді суперпозиції хвиль двох взаємно ортогональних поляризацій, $H_\perp$ і $E_\perp$. Магнітне поле в $H_\perp$-поляризованій хвилі перпендикулярно осі y, див. рівняння (4.14), в той час як у $E_\perp$-поляризованій хвилі електричне поле ортогонально осі y, див. рівняння (4.15). Як ми побачимо далі, таке представлення зручне, оскільки хвилі цих двох поляризацій не взаємодіють і не перетворюються одна в іншу при відбитті від зразка шаруватого надпровідника навіть в умовах сильної нелінійності або наявності магнітного поля.

Поле падаючої хвилі ТМ і/або ТЕ поляризації можна представити у вигляді суми хвиль $H_\perp$ і $E_\perp$ поляризацій:

$$\vec{H}^{tm} + \vec{H}^{te} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}, \quad \vec{E}^{tm} + \vec{E}^{te} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}. \tag{7.40}$$

Тут і далі індекси (1) і (2) позначають хвилі $H_\perp$ і $E_\perp$ поляризацій відповідно, а електромагнітні поля цих хвиль мають наступні компоненти:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i^{(1)}(x) &= \left\{1, 0, -\frac{k_x}{k_z}\right\} H_i^{(1)} \exp(ik_x x), \\
\vec{E}_i^{(1)}(x) &= \left\{\frac{k_x}{k_z}, \frac{k_y^2 - k^2}{k_y k_z}, 1\right\} \frac{k_y}{k} H_i^{(1)} \exp(ik_x x), \\
\vec{E}_i^{(2)}(x) &= \left\{1, 0, -\frac{k_x}{k_z}\right\} E_i^{(2)} \exp(ik_x x), \\
\vec{H}_i^{(2)}(x) &= -\left\{\frac{k_x}{k_z}, \frac{k_y^2 - k^2}{k_y k_z}, 1\right\} \frac{k_y}{k} E_i^{(2)} \exp(ik_x x),
\end{aligned} \tag{7.41}$$

а зв'язок між амплітудами має вигляд:

$$H_i^{(1)} = \frac{E_i^{te} k k_z - H_i^{tm} k_x k_y}{k_x^2 + k_z^2}, \qquad E_i^{(2)} = -\frac{E_i^{te} k_x k_y + H_i^{tm} k k_z}{k_x^2 + k_z^2}. \tag{7.42}$$

Аналогічне співвідношення має місце і для амплітуд відбитих хвиль, але потрібно замінити k_x на $-k_x$.

Далі ми будемо розглядати електромагнітні хвилі у вакуумі як суму хвиль $\mathrm{H}_\perp$ і $\mathrm{E}_\perp$ поляризацій.

7.2.1.2. Поля в зразку шаруватого надпровідника

Для визначення електромагнітних полів у шаруватому надпровіднику ми будемо використовувати рівняння для векторного потенціалу. Як було показано у пункті 1.3.2, в шаруватих надпровідниках поширюються хвилі звичайної (в якій $\vec{E} \perp \mathbf{c}$) і надзвичайної (в якій $\vec{H} \perp \mathbf{c}$) поляризацій.

У звичайних хвиль у шаруватому надпровіднику компонента E_z дорівнює нулю. Тому такі хвилі завжди лінійні та не зазнають впливу незмінного у часі магнітного поля. Компоненти поля звичайної хвилі, яка поширюється вглиб зразка, можна знайти з хвильового рівняння (1.43), прирівнявши A_z і J_z нулю:

$$\vec{E}^{\mathrm{ord}} = \left\{\frac{k_y}{k_x^{\mathrm{ord}}}, 1, 0\right\} E^{\mathrm{ord}} \exp(ik_x^{\mathrm{ord}} x),$$
$$\vec{H}^{\mathrm{ord}} = \left\{-\frac{k_z}{k}, \frac{k_y k_z}{k k_x^{\mathrm{ord}}}, \frac{k_x^{\mathrm{ord}}}{k} - \frac{k_y^2}{k k_x^{\mathrm{ord}}}\right\} E^{\mathrm{ord}} \exp(ik_x^{\mathrm{ord}} x), \tag{7.43}$$

де k_x^{ord} — x-проекція хвильового вектора звичайної хвилі,

$$k_x^{\mathrm{ord}} = \left[\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_J^2} - \frac{\lambda_{ab}^2}{\lambda_c^2}\right) - k_x^2 - k_y^2\right]^{1/2}. \tag{7.44}$$

Зовнішнє незмінне у часі магнітне поле проникає в зразок і створює в ньому певний розподіл калібрувально-інваріантної різниці фаз φ, див. пункт **??**. Представимо різницю фаз φ у вигляді суми статичного розв'язку φ_0, викликаного тільки незмінним у часі магнітним полем, і малої добавки φ_w, викликаної електромагнітною хвилею, що поширюється в зразку:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x) + \varphi_w(x, y, z, t). \tag{7.45}$$

Розглянемо розподіл незмінного у часі магнітного поля у випадку, коли є тільки статичне магнітне поле і немає електромагнітної хвилі, $\varphi_w = 0$. Діючи аналогічно підрозділу 7.1, знаходимо $\varphi_0(\xi)$ у вигляді «хвоста» джозефсонівського вихору (7.10), де введена безрозмірна координата $\xi = x/\lambda_c$, константа ξ_0 визначена у рівнянні (7.11), а параметр h_0 являє собою величину зовнішнього статичного магнітного поля H_0, нормовану на критичне поле $\mathcal{H}_0$. Зауважимо, що, як і у підрозділі 7.1, ми вивчаємо випадок відносно слабких магнітних полів, коли $H_0 < \mathcal{H}_0$, та джозефсонівські вихори не проникають повністю в зразок.

Щоб знайти компоненти поля надзвичайної хвилі, яка поширюється на фоні незмінного у часі магнітного поля, яке проникає у зразок, ми будемо шукати розв'язок рівняння (1.43) у вигляді:

$$\begin{aligned} A_x(x,y,z,t) &= a_x(\xi)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ A_y(x,y,z,t) &= a_y(\xi)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ A_z(x,y,z,t) &= a_z(\xi)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] - \frac{\Phi_0}{2\pi d}\varphi_0(x). \end{aligned} \tag{7.46}$$

Підставляючи компоненти векторного потенціалу (7.46) у рівняння (1.43), знаходимо вирази для $a_x(\xi)$, $a_y(\xi)$,

$$a_x(\xi) = -\frac{2i\lambda_{ab}^2 k_z}{\lambda_c}a_z'(\xi), \;\; a_y(\xi) = 2\lambda_{ab}^2 k_y k_z a_z(\xi), \tag{7.47}$$

та диференціальне рівняння для $a_z(x)$,

$$\frac{\gamma^2-\Omega^2}{\gamma^2+\kappa_z^2-\Omega^2}a_z''(\xi) - \left[\frac{\kappa_y^2(\gamma^2-\Omega^2)}{\gamma^2+\kappa_z^2-\Omega^2} + \cos\varphi_0(\xi) - \Omega^2\right]a_z(\xi) = 0, \tag{7.48}$$

де $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ — параметр анізотропії, $\Omega = \omega/\omega_J$ та $\kappa_{y,z} = k_{y,z}\lambda_c$ — нормовані частота та компоненти хвильового вектора відповідно.

Звернімо увагу на те, що за наявності незмінного у часі магнітного поля шаруватий надпровідник можна розглядати як анізотропне середовище з ефективним просторово-залежним діагональним тензором діелектричної проникності з компонентами $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{ab}$ і $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_c$, де

$$\varepsilon_{ab}(\Omega) = \varepsilon_s\Big(1-\frac{\gamma^2}{\Omega^2}\Big), \qquad \varepsilon_c(\xi,\Omega) = \varepsilon_s\Big\{1-\frac{1}{\Omega^2}\Big[1-\frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi+\xi_0)}\Big]\Big\}, \tag{7.49}$$

де ε_s — проникність діелектричних шарів. Дійсно, в цих термінах рівняння (7.48) переписується в відомій формі для поля E_z надзвичайної хвилі:

$$\frac{d^2E_z}{dx^2} + \big[k^2\varepsilon_c - k_z^2(\varepsilon_c/\varepsilon_{ab}) - k_y^2\big]E_z = 0. \tag{7.50}$$

Таким чином, увімкнення незмінного у часі магнітного поля призводить до виникнення просторової неоднорідності тензора діелектричної проникності надпровідника.

В умовах сильної анізотропії, $\lambda_c \gg \lambda_{ab}$, (наприклад, для $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ параметр $\gamma \sim 100$) і при частотах ω порядку ω_J, величину Ω/γ можна вважати малою. Більш того, в розглянутій задачі величина κ_z/γ також дуже мала в порівнянні з одиницею,

$$\kappa_z/\gamma = \frac{\Omega}{\gamma\sqrt{\varepsilon_s}} \sin\theta_1 \cos\theta_2 \ll 1. \tag{7.51}$$

У такому наближенні рівняння (7.48) має асимптотично точний розв'язок,

$$a_z(\xi) = a^{\text{ext}} \exp(i\kappa_{\text{ext}}\xi) \left[i\kappa_{\text{ext}} - \text{th}(\xi_0 + \xi)\right], \tag{7.52}$$

де κ_{ext} — безрозмірна x-проекція хвильового вектора надзвичайної хвилі,

$$\kappa_{\text{ext}} = \left(\Omega^2 - 1 - \kappa_y^2\right)^{1/2}. \tag{7.53}$$

В умовах, коли κ_{ext} стає уявним, лінійні хвилі надзвичайної поляризації не можуть поширюватися у зразку.

Остаточно, для компонент електромагнітного поля надзвичайної хвилі маємо:

$$\vec{E}^{\text{ext}}(\xi) = \frac{\Omega}{i\lambda_c\sqrt{\varepsilon_s}} \left\{0, 0, a_z(\xi)\right\}, \quad \vec{H}^{\text{ext}}(\xi) = \lambda_c^{-1} \left\{-i\kappa_y a_z(\xi), a_z'(\xi), 0\right\}. \tag{7.54}$$

7.2.2. Коефіцієнти відбиття і перетворення

Використовуючи умови неперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на границі, при $x = 0$, між вакуумом, рівняння (7.41), і шаруватим надпровідником, рівняння (7.43) і (7.54), отримуємо систему рівнянь для невідомих амплітуд хвиль. В умовах сильної анізотропії, $\gamma \gg 1$, систему можна привести до такого вигляду:

$$H_i^{(1)} + H_r^{(1)} = 0, \tag{7.55a}$$

$$E_i^{(2)} - E_r^{(2)} = -\frac{k_z}{k_x}\frac{a^{\rm ext}\Omega(\kappa_{\rm ext} + i\sqrt{1-h_0^2})}{\lambda_c\sqrt{\varepsilon_s}}, \tag{7.55b}$$

$$E_i^{(2)} + E_r^{(2)} = \frac{kk_z}{k_y^2 - k^2}\frac{a^{\rm ext}}{\lambda_c}[h_0^2 + \kappa_{\rm ext}(\kappa_{\rm ext} + i\sqrt{1-h_0^2})], \tag{7.55c}$$

$$-\frac{kk_x}{k_x^{\rm ord}k_z}\big[H_i^{(1)} - H_r^{(1)}\big] - \frac{k_y}{k_x^{\rm ord}}\big[E_i^{(2)} + E_r^{(2)}\big] = E^{\rm ord}. \tag{7.55d}$$

Видно, що хвиля $\mathrm{H}_\perp$ поляризації повністю відбивається від зразка,

$$H_i^{(1)} = -H_r^{(1)}, \tag{7.56}$$

при цьому хвилю $\mathrm{E}_\perp$ поляризації можна описати незалежно. Співвідношення між амплітудами падаючої і відбитої хвиль $\mathrm{E}_\perp$ поляризації можна представити у наступному вигляді:

$$E_r^{(2)} = E_i^{(2)}\frac{\chi - \chi_0}{\chi + \chi_0}, \tag{7.57}$$

де

$$\chi = \kappa_{\rm ext} + \frac{h_0^2}{\kappa_{\rm ext} + i\sqrt{1-h_0^2}}, \quad \chi_0 = \frac{\Omega(k^2 - k_y^2)}{\sqrt{\varepsilon_s}kk_x}. \tag{7.58}$$

Тепер ми можемо виразити амплітуди відбитих хвиль TE і TM поляризацій через амплітуди падаючих хвиль TE і TM поляризацій. За допомогою співвідношень (7.42), (7.56) і (7.57) отримуємо

$$H_r^{tm} = H_i^{tm}\frac{\chi + \chi_1}{\chi + \chi_0} - E_i^{te}\frac{\chi_2}{\chi + \chi_0}, \qquad E_r^{te} = H_i^{tm}\frac{\chi_2}{\chi + \chi_0} - E_i^{te}\frac{\chi - \chi_1}{\chi + \chi_0}, \tag{7.59}$$

для TM і TE поляризацій відповідно, де

$$\chi_1 = \frac{\Omega(k_x^2 k_y^2 - k^2 k_z^2)}{\sqrt{\varepsilon_s} k k_x (k_y^2 + k_z^2)}, \quad \chi_2 = \frac{2\Omega k_y k_z}{\sqrt{\varepsilon_s}(k_y^2 + k_z^2)}. \tag{7.60}$$

Відзначимо, що χ є комплексною величиною, у той час як χ_0, χ_1 і χ_2 — дійсні числа.

У тих випадках, коли на зразок падає хвиля строго однієї поляризації, TM або TE, зручно ввести в розгляд коефіцієнти відбиття хвиль відповідних поляризацій:

$$R^{tm} = \left| \frac{H_r^{tm}}{H_i^{tm}} \right|^2, \quad R^{te} = \left| \frac{E_r^{te}}{E_i^{te}} \right|^2, \tag{7.61}$$

і коефіцієнти перетворення:

$$R^{tm \to te} = \left| \frac{E_r^{te}}{H_i^{tm}} \right|^2, \quad R^{te \to tm} = \left| \frac{H_r^{tm}}{E_i^{te}} \right|^2. \tag{7.62}$$

Звернімо увагу на те, що з рівнянь (7.59) випливає рівність коефіцієнтів перетворення: $R^{tm \to te} = R^{te \to tm}$.

У разі, коли частота хвилі перевищує частоту відсічення,

$$\Omega > \Omega_{\text{cut}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\varepsilon_s} \right)^{-1/2}, \tag{7.63}$$

величина κ_{ext} є дійсною, що відповідає поширенню надзвичайних хвиль у шаруватому надпровіднику. В таких умовах сума коефіцієнтів відбиття і перетворення строго менше одиниці,

$$R^{tm} + R^{tm \to te} < 1, \quad R^{te} + R^{te \to tm} < 1, \tag{7.64}$$

оскільки частина енергії падаючої хвилі йде вглиб зразку. У разі ж більш низьких частот, $\Omega < \Omega_{\text{cut}}$, величина κ_{ext} стає чисто уявною. Тоді лінійні хвилі не можуть поширюватися в зразку, і сума коефіцієнтів відбиття і перетворення дорівнює одиниці. Нижче ми проаналізуємо ці два випадки окремо.

7.2.2.1. Високі частоти, $\Omega > \Omega_{\mathbf{cut}}$

У цьому випадку параметр $\chi = \chi' + i\chi''$ містить як дійсну, так і уявну частину,

$$\chi' = \frac{(\kappa_{\rm ext}^2 + 1)\kappa_{\rm ext}}{\kappa_{\rm ext}^2 + 1 - h_0^2}, \qquad \chi'' = -\frac{h_0^2\sqrt{1-h_0^2}}{\kappa_{\rm ext}^2 + 1 - h_0^2}, \tag{7.65}$$

і коефіцієнти відбиття можуть бути записані у вигляді:

$$R_+^{tm/te} = \frac{(\chi' \pm \chi_1)^2 + (\chi'')^2}{(\chi' + \chi_0)^2 + (\chi'')^2}, \tag{7.66}$$

де ТМ поляризації відповідає знак «+» в перших дужках в чисельнику, а ТЕ поляризації — знак «−», а дійсні величини χ_0, χ_1 і χ_2 задані рівняннями (7.58) і (7.60). Нижній індекс «+» позначає випадок високих частот, тобто $\Omega > \Omega_{\rm cut}$.

Для коефіцієнтів перетворення отримуємо такий вираз:

$$R_+^{tm\to te} = R_+^{te\to tm} = \frac{\chi_2^2}{(\chi' + \chi_0)^2 + (\chi'')^2}. \tag{7.67}$$

7.2.2.2. Низькі частоти, $\Omega < \Omega_{\mathbf{cut}}$

Для цього випадку зручно ввести дійсний параметр $\tilde{\kappa}_{\rm ext}$,

$$\tilde{\kappa}_{\rm ext} = -i\kappa_{\rm ext} = \sqrt{1 - \Omega^2 + \kappa_y^2}. \tag{7.68}$$

Тоді параметр $\chi = \chi' + i\chi''$ стає чисто уявним,

$$\chi' = 0, \qquad \chi'' = \tilde{\kappa}_{\text{ext}} - \frac{h_0^2}{\tilde{\kappa}_{\text{ext}} + \sqrt{1 - h_0^2}}, \tag{7.69}$$

і коефіцієнти відбиття і перетворення приймають такий вигляд:

$$R_-^{tm} = R_-^{te} = \frac{\chi_1^2 + (\chi'')^2}{\chi_0^2 + (\chi'')^2}. \qquad R_-^{tm \to te} = R_-^{te \to tm} = \frac{\chi_2^2}{\chi_0^2 + (\chi'')^2},$$

де нижній індекс «$-$» позначає випадок низьких частот, тобто $\Omega < \Omega_{\text{cut}}$.

7.2.3. Аналіз результатів

7.2.3.1. Коефіцієнти відбиття і перетворення при $\Omega > \Omega_{\text{cut}}$

Проведений нами аналіз показав, що при додатньому відстроюванні частоти, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_{\text{cut}} > 0$, коефіцієнт перетворення $R_+^{tm \to te} = R_+^{te \to tm}$ завжди зменшується з ростом величини незмінного у часі магнітного поля. При цьому коефіцієнти відбиття R_+^{tm} і R_+^{te} можуть як зменшуватися, так і збільшуватися зі зростанням магнітного поля в залежності від параметрів задачі.

На рис. 7.15 представлена залежність відношення $R_+^{tm \to te}/R_+^{tm}$ коефіцієнта перетворення до коефіцієнта відбиття від величини нормованого магнітного поля h_0 при різних значеннях відстроювання частоти $\delta\Omega$. Видно, що при зменшенні відстроювання величина перетворення зростає. Залежності коефіцієнтів відбиття R_+^{tm} і перетворення $R_+^{tm \to te}$ від h_0 при $\delta\Omega = 0{,}001$ наведені на вставці до рис. 7.15. Використовуючи рівняння (7.66) і (7.67), можна отримати аналітичний вираз для відношення $R_+^{tm \to te}/R_+^{tm}$ при $h_0 = 0$, різних частотах Ω і кутах θ_1 і θ_2:

$$\left.\frac{R_+^{tm \to te}}{R_+^{tm}}\right|_{h_0 = 0} = \Big(\frac{\sin 2\theta_2}{\kappa_{\text{ext}}\sqrt{\varepsilon_s}/\Omega + \cos\theta_1 \sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2/\cos\theta_1}\Big)^2. \tag{7.70}$$

Результат для відношення $R_+^{te\to tm}/R_+^{te}$ виявляється таким же, як в рівнянні (7.70), але з заміною знака перед κ_{ext} з плюса на мінус. Також нагадаємо, що κ_{ext} є функцією частоти Ω і кутів θ_1 і θ_2:

$$\kappa_{\text{ext}} = \left[\Omega^2 - 1 - \Omega^2\varepsilon_s^{-1}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\right]^{1/2}. \tag{7.71}$$

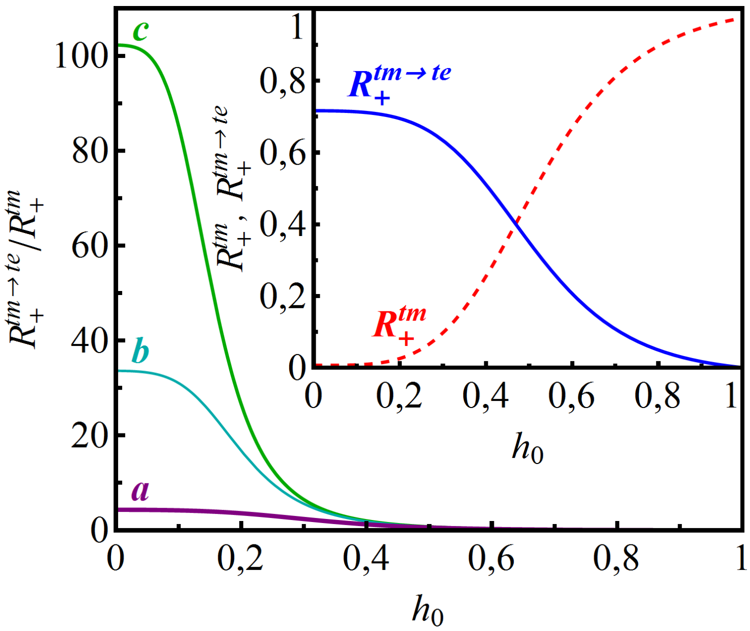


Рис. 7.15. Залежності відношення $R_+^{tm\to te}/R_+^{tm}$ коефіцієнта перетворення до коефіцієнта відбиття від величини нормованого незмінного у часі магнітного поля h_0 при $\delta\Omega = 0{,}01$; $0{,}002$; $0{,}001$, зображені кривими a, b і c відповідно (головна панель) та залежності коефіцієнтів відбиття R_+^{tm} і перетворення $R_+^{tm\to te}$ від величини нормованого магнітного поля h_0 при $\delta\Omega = 0{,}001$, зображені штриховою і суцільною кривою відповідно (вставка). Параметри: $\theta_1 = \pi/8$, $\theta_2 = \pi/4$, $\lambda_c = 4\times10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2\times10^{-5}$ см, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц, $\varepsilon_s = 16$.

Найбільшого значення відношення (7.70) досягає, коли відстроювання частоти мале, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_{\text{cut}} \ll 1$, кут падіння θ_1 близький до нуля, а кут θ_2 близький до $\pi/4$. Коефіцієнт перетворення $R_+^{tm\to te}$ в цьому випадку близький до 1. У зазначеному граничному випадку при $h_0 \ll 1$ він асимптотично дорівнює:

$$R_+^{tm\to te} \approx 1 - \sqrt{8\varepsilon_s\,\delta\Omega} - \frac{1}{4}\left(\theta_1^2 - 4\theta_2 + \pi\right)^2 - \varepsilon_s h_0^4. \tag{7.72}$$

Незважаючи на те, що в загальному випадку коефіцієнти відбиття ТМ і ТЕ хвиль різні, при $\theta_2 \geqslant \pi/4$ завжди можна знайти такий θ_1, при якому криві залежностей коефіцієнтів відбиття R_+^{tm} і R_+^{te} збігаються незалежно від частоти падаючої хвилі і магнітного поля (див. рис. 7.16).

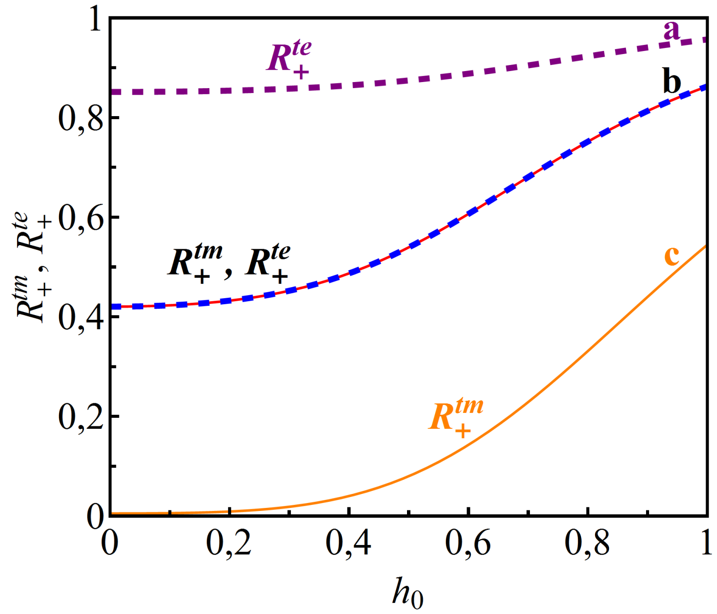


Рис. 7.16. Залежності коефіцієнтів відбиття R_+^{tm} (суцільні лінії) і R_+^{te} (штрихові лінії) від нормованого незмінного у часі магнітного поля h_0 при $\theta_2 = \pi/6$ (криві a і c) і при $\theta_2 = \operatorname{arcctg}\cos(\pi/3)$ (криві b). Параметри: $\Omega = 1{,}1$, $\theta_1 = \pi/3$, інші параметри такі ж, як і на рис. 7.15.

Даний ефект виникає, коли виконується співвідношення

$$\theta_2 = \operatorname{arcctg}\cos\theta_1. \tag{7.73}$$

Зокрема, якщо $\theta_1 = 0$, криві співпадають при $\theta_2 = \pi/4$.

7.2.3.2. Коефіцієнти відбиття і перетворення при $\Omega < \Omega_{\text{cut}}$

Випадок від'ємного відстроювання частоти, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_{\text{cut}} < 0$, цікавий тим, що в таких умовах коефіцієнт перетворення $R_-^{tm\to te} = R_-^{te\to tm}$ може мати максимум при значенні h_0, відмінному від нуля і одиниці. Значення магнітного поля, при якому спостерігається максимум коефіцієнта перетворення, можна отримати аналітично:

$$h_0^{\max} = \tilde{\kappa}_{\text{ext}} \sqrt{\sqrt{\left(\tilde{\kappa}_{\text{ext}}\right)^{-2} - 3/4} + 1/2}, \tag{7.74}$$

де $\tilde{\kappa}_{\text{ext}}$ визначається виразом (7.68):

$$\tilde{\kappa}_{\text{ext}} = \left[1 - \Omega^2 + \Omega^2 \varepsilon_s^{-1} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\right]^{1/2}. \tag{7.75}$$

Рисунок 7.17 представляє кольором значення коефіцієнта перетворення $R_-^{tm\to te}$ як функцію кутів θ_1 і θ_2 при певній частоті $\Omega = 0{,}9$ і при оптимальному значенні магнітного поля (7.74).

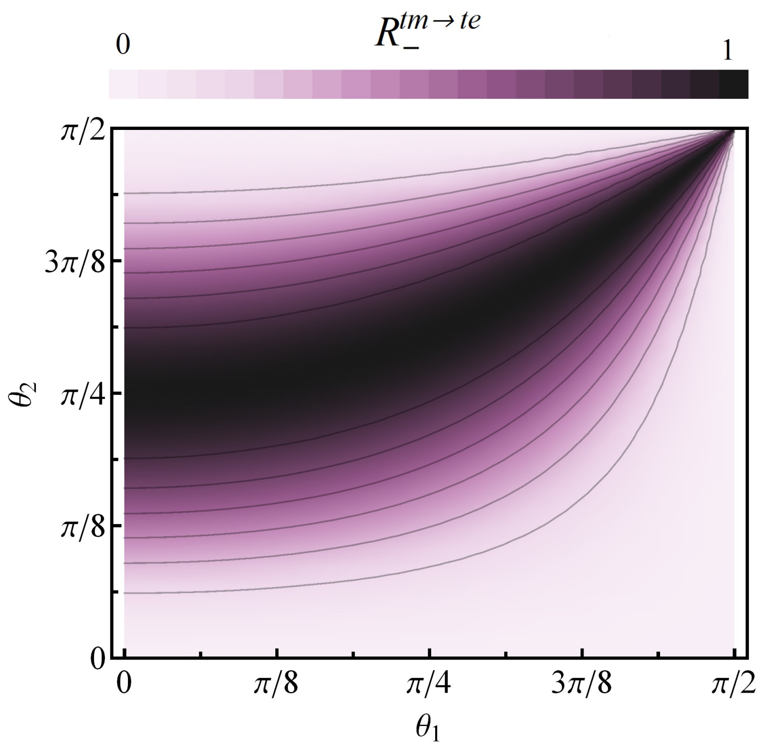


Рис. 7.17. Коефіцієнт перетворення $R_-^{tm\to te}$ (показаний градієнтом кольору) при оптимальному значенні $h_0^{\max}$ магнітного поля і при різних кутах θ_1 і θ_2 та при частоті хвилі $\Omega = 0{,}9$. Параметри: такі ж, як і на рис. 7.15.

Середина чорної області на діаграмі представляє лінію максимальних значень коефіцієнта перетворення $R_-^{tm\to te}$, рівних 1, що відповідає наступному співвідношенню між кутами θ_1 і θ_2:

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2+\mathrm{tg}^2\,\theta_1}}. \tag{7.76}$$

З рівняння (7.76), як і з рис. 7.17, видно, що повної крос-поляризації можна досягти при кутах θ_2, які перевищують $\pi/4$. Підставляючи θ_2 з рівняння (7.76) в нерівність $\Omega < \Omega_{\mathrm{cut}}$, отримуємо умову для частоти хвилі, при виконанні якої можливе повне перетворення поляризації:

$$\Omega < \left[1 - \frac{\sin^2\theta_1}{\varepsilon_s(1+\cos^2\theta_1)}\right]^{-1/2}. \tag{7.77}$$

На рис. 7.18 наведені залежності коефіцієнтів відбиття і перетворення від незмінного у часі магнітного поля.

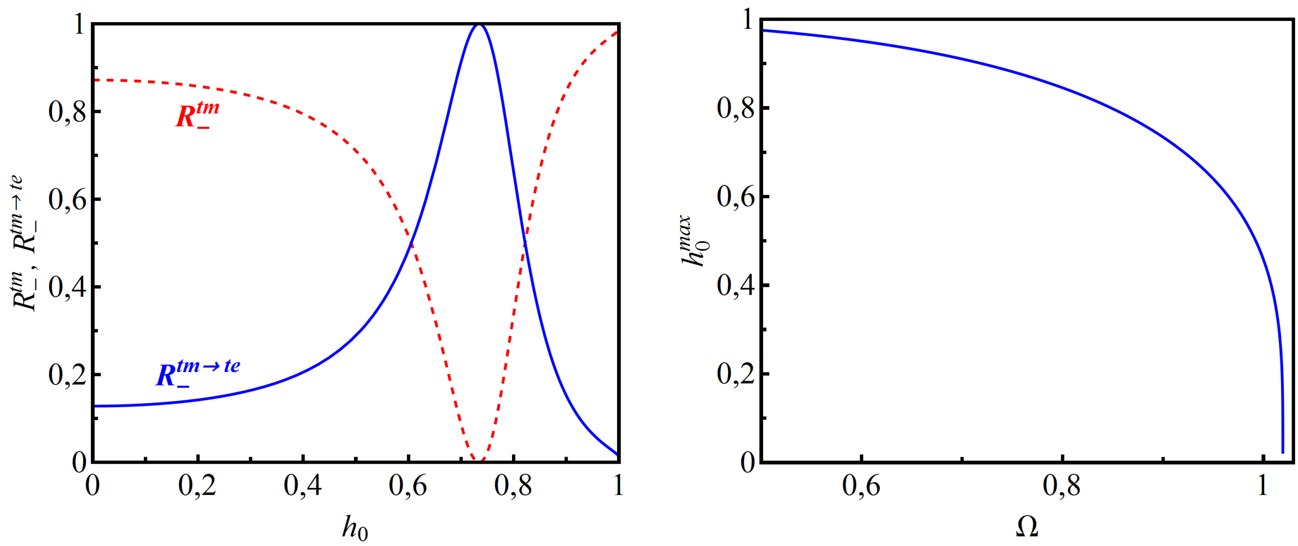


Рис. 7.18. Залежності коефіцієнтів відбиття R^{tm}_- і перетворення $R^{tm\to te}_-$, зображені штриховою та суцільною кривою відповідно, від нормованого незмінного у часі магнітного поля h_0 при $\Omega = 0{,}9$, $\theta_1 = \pi/3$ і $\theta_2 = \arccos(5^{-1/2})$ (ліва панель) та залежність оптимальної величини нормованого незмінного у часі магнітного поля $h_0^{\max}$, при якій спостерігається повне перетворення, від частоти Ω (права панель). Параметри: такі ж, як і на рис. 7.15.

Видно, що при певному значенні магнітного поля h_0 коефіцієнт відбиття ТМ хвилі R^{tm}_- обертається в нуль, а коефіцієнт перетворення $R^{tm\to te}_-$, відповідно, в одиницю, тобто відбувається повна крос-поляризація. При малих значеннях відстроювання частоти максимум коефіцієнта перетворення спостерігається при малих магнітних полях. З ростом відстроювання частоти значення $h_0^{\max}$ зміщується в область полів близьких до одиниці. Дану тенденцію можна побачити на правій панелі рис. 7.18.

Таким чином, можна стверджувати, що для заданих частоти Ω і кута падіння θ_1, що задовольняють співвідношенню (7.77), можна знайти кут θ_2 з рівняння (7.76) і магнітне поле h_0 з рівняння (7.74), при яких коефіцієнт перетворення дорівнює одиниці, тобто спостерігається повна крос-поляризація відбитої хвилі.

7.3. Вплив незмінного у часі магнітного поля на аномальну дисперсію локалізованих мод

У цьому підрозділі досліджено можливість управління аномальною дисперсією локалізованих хвиль у пластині шаруватого надпровідника за допомогою незмінного у часі магнітного поля. Отримано дисперсійні співвідношення для локалізованих хвиль у квазікласичному наближенні Вентцеля – Крамерса – Бриллюена (ВКБ) та у точній формі в термінах спеціальних функцій Лежандра. Показано, що в широкому діапазоні параметрів може спостерігатися аномальна дисперсія, та обговорюється можливість внутрішнього відбиття локалізованих хвиль у неоднорідному незмінному у часі магнітному полі.

Ми вивчаємо лінійні локалізовані ДПХ, що поширюються в пластині шаруватого надпровідника, розташованій між двома діелектричними півпросторами, у якій надпровідні шари є перпендикулярними поверхні пластини, див. рис. 7.19. Як і у попередніх підрозділах, система координат вибирається таким чином, щоб вісь z була напрямлена поперек надпровідних шарів, тобто вздовж кристалографічної осі **c**, і паралельно до поверхонь пластини. Осі x і y напрямлені вздовж надпровідних шарів, тобто вздовж кристалографічної площини **ab**, причому вісь x

перпендикулярна границі пластини, а вісь y паралельна їй. Пластина товщини D розташована в області $|x| < D/2$, а верхній і нижній діелектричні півпростори з проникністю ε_d займають області $x > D/2$ і $x < -D/2$ відповідно. Таким чином, площина $x = 0$ знаходиться посередині пластини і поділяє систему на дві симетричні частини. Зовнішнє незмінне у часі магнітне поле $\vec{H}_0$ напрямлене вздовж осі y і однорідно розподілено за межами пластини шаруватого надпровідника.

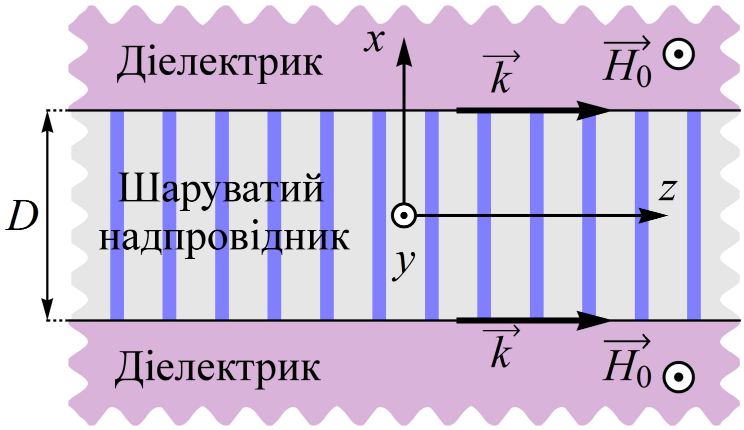


Рис. 7.19. Пластина товщини D, що розташована у незмінному у часі магнітному полі $\vec{H}_0$, вздовж якої поширюється локалізована хвиля з хвильовим вектором $\vec{k}$.

Ми розглядаємо локалізовані хвилі ТМ поляризації з частотою ω, що поширюються вздовж осі z:

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \{0, H_y(x), 0\} \exp(ik_z z - i\omega t),$$
$$\vec{E}(x,y,z,t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(ik_z z - i\omega t). \tag{7.78}$$

Локалізовані ДПХ повинні згасати далеко від пластини. З рівнянь Максвела ми можемо отримати вирази для компонент H_y і E_z електромагнітної хвилі у діелектричних півпросторах:

$$H_y^{\pm}(x) = H^{\pm} \exp[\mp k_d(x \mp D/2)], \tag{7.79}$$
$$E_z^{\pm}(x) = \mp \frac{ick_d}{\varepsilon_d \omega} H^{\pm} \exp[\mp k_d(x \mp D/2)],$$

де верхні індекси $+$ і $-$ позначають верхній ($x > D/2$) і нижній ($x < -D/2$) півпростори відповідно, $H^{\pm}$ — амплітуда магнітного поля. Декремент k_d,

$$k_d^2 = k_z^2 - \varepsilon_d \omega^2 / c^2 > 0, \tag{7.80}$$

визначає, як швидко локалізована хвиля згасає при віддаленні від пластини.

7.3.1. Розподіл електромагнітного поля у шаруватому надпровіднику

У цьому пункті для опису полів у шаруватому надпровіднику ми використовуємо метод, схематично представлений на початку розділу та розвинутий у попередніх підрозділах, який базується на використанні синусоїдального рівняння Гордона в формі (1.40) для калібрувально-інваріантної різниці фаз φ, пов'язаної з електромагнітним полем за допомогою рівнянь (1.64) і (1.65).

7.3.1.1. Незмінне у часі магнітне поле в шаруватому надпровіднику

Спочатку розглянемо розподіл незмінного у часі магнітного поля, припускаючи, що електромагнітна хвиля відсутня. Діючи аналогічно підпункту 7.1.2.1, знаходимо $\varphi_0(\xi) = \varphi_+(\xi) + \varphi_-(\xi)$ у вигляді суми «хвостів» двох джозефсонівських вихорів:

$$\varphi_{\pm}(\xi) = \mp 4 \operatorname{arctg} \left[\exp\left(\xi_0 \mp \xi\right) \right], \tag{7.81}$$

де індекси $+$ чи $-$ позначають верхню ($x = D/2$) чи нижню ($x = -D/2$) границю, біля якої розташовано «хвіст», $\xi = x/\lambda_c$ — безрозмірна координата, а константа ξ_0 визначає центри фіктивних вихорів і визначається нормованою величиною h_0 зовнішнього незмінного у часі магнітного поля H_0 та нормованою півтовщиною δ

пластини:

$$\xi_0 = \delta + \operatorname{arch}(h_0^{-1}), \ \delta = D/2\lambda_c, \ h_0 = H_0/\mathcal{H}_0. \tag{7.82}$$

Зауважимо, що, як і у попередніх підрозділах, ми вивчаємо випадок відносно слабких магнітних полів, коли $H_0 < \mathcal{H}_0$ та джозефсонівські вихори не проникають повністю в зразок, а також припускаємо, що пластина досить товста,

$$\exp(D/\lambda_c) \gg 1, \tag{7.83}$$

щоб «хвости» джозефсонівських вихорів (7.81) не взаємодіяли.

7.3.1.2. Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику

Для опису електромагнітного поля ДПХ у пластині ми представляємо φ як суму незмінного у часі розв'язку $\varphi_0(\xi)$, див. рівняння (7.81), а також невеликої добавки $\varphi_{lm}(\xi, z, t)$, викликаної поширенням локалізованої електромагнітної хвилі:

$$\varphi(\xi, z, t) = \varphi_{lm}(\xi, z, t) + \varphi_+(\xi) + \varphi_-(\xi). \tag{7.84}$$

Будемо шукати $\varphi_{lm}(\xi, z, t)$ у вигляді хвилі, що поширюється вздовж осі z:

$$\varphi_{lm}(\xi, z, t) = a(\xi) \exp[ik_z z - i\omega t]. \tag{7.85}$$

Підставляючи різницю фаз $\varphi(\xi, z, t)$ у рівняння Гордона (1.40), ми отримуємо таке рівняння для амплітуди $a(\xi)$:

$$-\frac{a''(\xi)}{\kappa_s^2} + \big[u(\xi) - 1\big]a(\xi) = 0, \tag{7.86}$$

де штрих позначає похідну за ξ,

$$u(\xi) = (1-\Omega^2)^{-1}\Big[\frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi_0-\xi)} + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi_0+\xi)}\Big] \tag{7.87}$$

і $\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота. Параметр κ_s являє собою нормовану x-проекцію хвильового вектора за відсутності незмінного у часі магнітного поля, див. рівняння (5.50):

$$\kappa_s^2 = (\Omega^2-1)\Big(1+\frac{\kappa_z^2}{1-\Omega^2/\gamma^2}\Big), \tag{7.88}$$

і $\kappa_z = k_z\lambda_{ab}$ — нормована z-проекція хвильового вектора.

За допомогою рівнянь (1.64) і (1.65) ми можемо виразити компоненти H_y^s і E_z^s електромагнітного поля в пластині через функцію $a(\xi)$:

$$\begin{aligned} H_y^s(\xi) &= \mathcal{H}_0\frac{a'(\xi)}{1+\kappa_z^2/(1-\Omega^2/\gamma^2)}, \\ E_z^s(\xi) &= -\mathcal{H}_0\frac{i\Omega}{\sqrt{\varepsilon}}\,a(\xi). \end{aligned} \tag{7.89}$$

У наступному пункті ми представимо аналітичний розв'язок рівняння (7.86) і виведемо дисперсійні співвідношення для локалізованих мод у наближенні ВКБ та у точній формі.

7.3.2. Дисперсійні співвідношення

Для того, щоб отримати дисперсійні співвідношення для ДПХ, локалізованих в пластині шаруватого надпровідника, ми використовуємо умови неперервності тангенціальних компонент електромагнітного поля на границях пластини:

$$\frac{E_z^{\pm}}{H_y^{\pm}}\Big|_{\xi=\pm\delta} = \frac{E_z^s}{H_y^s}\Big|_{\xi=\pm\delta}. \tag{7.90}$$

З цього рівняння та рівнянь (7.79), (7.89) отримуємо такі співвідношення для амплітуди $a(\xi)$ на границях пластини:

$$\frac{a'(\xi = \pm\delta)}{a(\xi = \pm\delta)} = \pm \frac{\varepsilon^{-1}\Omega^2\kappa_s^2}{(\Omega^2 - 1)\kappa_d}, \tag{7.91}$$

де $\varepsilon = \varepsilon_s/\varepsilon_d$, а κ_d являє собою нормований просторовий декремент згасання у діелектричних півпросторах, див. рівняння (7.80),

$$\kappa_d^2 = \gamma^2\kappa_z^2 - \varepsilon^{-1}\Omega^2 > 0. \tag{7.92}$$

Слід зазначити, що симетрія досліджуваної системи передбачає симетрію локалізованих ДПХ, симетричних та антисиметричних відносно магнітного поля. Тому ми можемо використовувати відношення (7.91) тільки для верхнього інтерфейсу $\xi = +\delta$, але накладати додаткові умови посередині пластини,

$$a(0) = 0 \qquad \text{або} \qquad a'(0) = 0 \tag{7.93}$$

для симетричних або антисиметричних хвиль відповідно.

Диференціальне рівняння (7.86) разом із співвідношенням (7.91) при $\xi = +\delta$, а також за однією з умов (7.93) визначає спектр локалізованих хвиль. У наступних підпунктах 7.3.2.1 і 7.3.2.2 ми представимо наближений та точний розв'язки рівнянь (7.86) відповідно.

7.3.2.1. Дисперсія в рамках наближення ВКБ

У цьому підпункті ми вирішуємо рівняння (7.86) наближено за допомогою метода ВКБ. Обмежимо наше дослідження відносно низьким частотним діапазоном $\omega < \gamma\omega_J$, де $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ — параметр анізотропії. З одного боку, в цьому частотному діапазоні можна спостерігати всі особливості аномальної дисперсії, які викликані незмінним у часі магнітним полем. З іншого боку, високочастотний діапазон навряд чи може бути досягнутий в експерименті внаслідок руйнування надпровідного стану. Слід підкреслити, що рівняння (7.86) нагадує одновимірне рівняння Шредингера з одиницею замість загальної енергії та $u(\xi)$ замість потенційної енергії. Отже, у випадку

$$\kappa_s \gg 1, \tag{7.94}$$

ми можемо вирішити це рівняння за допомогою наближення ВКБ. У свою чергу, нерівність (7.94) виконується за наступних умов:

$$\kappa_z^2 \gg 1 - \Omega^2/\gamma^2, \quad |\Omega - 1| \gtrsim 1, \tag{7.95}$$

які ми і будемо брати до уваги при подальшому дослідженні.

Почнемо наш аналіз з випадку відносно високих частот $1 < \Omega < \gamma$, коли параметр κ_s є додатнім, див. рівняння (7.88), та потенційна енергія $u(\xi)$ від'ємною, див. рівняння (7.87). У цьому випадку класичні точки повороту відсутні, а розв'язок рівняння (7.86) у наближенні ВКБ можна представити у такому вигляді:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \frac{a_{\mathrm{sym}}^{\mathrm{wkb}}}{\sqrt{b'(\xi)}} \sin\left[\kappa_s b(\xi)\right], \\ a(\xi) &= \frac{a_{\mathrm{asym}}^{\mathrm{wkb}}}{\sqrt{b'(\xi)}} \cos\left[\kappa_s b(\xi)\right], \end{aligned} \tag{7.96}$$

для симетричної та антисиметричної локалізованих хвиль відповідно. Тут $a_{\mathrm{asym}}^{\mathrm{wkb}}$ і $a_{\mathrm{sym}}^{\mathrm{wkb}}$ — це константи інтегрування,

$$b(\xi) = \int_0^{\xi} \sqrt{1 - u(\xi')} d\xi'. \tag{7.97}$$

Далі ми підставляємо розв'язки (7.96) у рівняння (7.91) і отримуємо дисперсійні співвідношення:

$$\operatorname{ctg}\big[\kappa_s b(\delta)\big] = \beta \quad \text{та} \quad \operatorname{tg}\big[\kappa_s b(\delta)\big] = -\beta \tag{7.98}$$

для симетричної та антисиметричної локалізованих хвиль, де

$$\beta = \frac{\varepsilon^{-1}\Omega^2\kappa_s}{(\Omega^2-1)\kappa_d}\Big[1+\frac{2h_0^2}{\Omega^2-1}\Big]^{-1/2}. \tag{7.99}$$

Якщо z-проекція хвильового вектора досить велика, $\kappa_z \gg \varepsilon^{-1/2}\Omega/\gamma$, то параметр β є малим, $\beta \sim (\varepsilon\gamma)^{-1} \ll 1$. У цьому випадку ми можемо спростити дисперсійне співвідношення до вигляду $\kappa_s b(\delta) = \pi(n-2)/2$, де ціле число $n = 3, 4, \ldots$ нумерує дисперсійні криві знизу вверх (див. пункт 7.3.3 і рис. 7.22). Непарні числа $n = 3, 5, \ldots$ відповідають симетричним хвилям, тоді як парні $n = 4, 6, \ldots$ описують антисиметричні хвилі. Зазначимо, що ми починаємо нумерацію з $n = 3$, оскільки дисперсійні криві з номерами $n = 1$ і $n = 2$ знаходяться в нижньому діапазоні частот $\Omega < 1$. Вказане дисперсійне співвідношення можна переписати в явному вигляді для $\kappa_z(\Omega)$:

$$\kappa_z^2(\Omega) = \Big(1-\frac{\Omega^2}{\gamma^2}\Big)\bigg\{\frac{\big[\pi(n-2)/2\big]^2}{(\Omega^2-1)b^2(\delta)} - 1\bigg\}. \tag{7.100}$$

Тепер перейдемо до діапазону низьких частот, $\Omega < 1$. У цьому випадку електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику згасає поперек пластини, тому хвиля в пластині може бути представлена як дві слабко зв'язані поверхневі хвилі, локалізовані поблизу поверхонь $x = D/2$ і $x = -D/2$. Тому спектр таких хвиль майже збігається зі спектром поверхневих хвиль, локалізованих на границі між півнескінченними шаруватим надпровідником і діелектриком. Спектр цих поверхневих хвиль досліджувався у роботі [169].

У низькочастотному діапазоні параметр κ_s стає від'ємним, див. рівняння (7.88), а потенційна енергія $u(\xi)$ — додатньою, див. рівняння (7.87). Це означає, що в умовах

$$\frac{4h_0^2\exp(-2\delta)}{\left(1+\sqrt{1-h_0^2}\right)^2} < 1-\Omega^2 < 2h_0^2, \tag{7.101}$$

існують класичні поворотні точки, $\xi = \pm\xi_{\text{tp}}$, визначені рівнянням $u(\xi = \pm\xi_{\text{tp}}) = 1$, або, відповідно до рівняння (7.87),

$$\text{ch}^2(\xi_0 - \xi_{\text{tp}}) = \frac{2}{1-\Omega^2}. \tag{7.102}$$

Тут ми зберегли лише один доданок, $\text{ch}^{-2}(\xi_{\text{tp}} - \xi_0)$, у рівнянні (7.87), оскільки інший доданок, $\text{ch}^{-2}(\xi_{\text{tp}} + \xi_0)$, є експоненційно малим. Слід зауважити, що за припущень (7.83) і (7.95) ліва нерівність (7.101) виконується для довільного h_0.

Розв'язок рівняння (7.86) у наближенні ВКБ з класичною точкою повороту ξ_{tp} можна представити у такому вигляді:

$$a(\xi) = \begin{cases} \dfrac{a^{\text{wkb}}}{\sqrt{b'(\xi)}}\cos\left[|\kappa_s|\bar{b}(\xi) - \pi/4\right], & \xi_{\text{tp}} < \xi < \delta, \\ \dfrac{a^{\text{wkb}}/2}{\sqrt{b'(\xi)}}\exp\left[-|\kappa_s\bar{b}(\xi)|\right], & 0 < \xi < \xi_{\text{tp}}, \end{cases} \tag{7.103}$$

де a^{wkb} — постійна інтегрування і

$$\bar{b}(\xi) = \int_{\xi_{\text{tp}}}^{\xi}\sqrt{u(\xi') - 1}d\xi'. \tag{7.104}$$

Перший рядок у рівнянні (7.103) відповідає класично допустимій області $\xi_{\text{tp}} < \xi < \delta$, а другий рядок описує класично заборонену зону $0 < \xi < \xi_{\text{tp}}$. Розв'язок (7.103) представляє поле лише поблизу верхньої границі $\xi = +\delta$. Цей розв'язок справедливий при $\exp(-2|\kappa_s\bar{b}(0)|) \ll 1$, коли ми можемо нехтувати слабким зв'язком з полем біля нижньої границі $\xi = -\delta$, записуючи «exp» замість «ch» або «sh» в класично забороненій зоні.

Застосовуючи розв'язок (7.103) у рівнянні (7.91), ми отримуємо дисперсійне співвідношення:

$$\mathrm{tg}\left[|\kappa_s|\bar{b}(\delta) - \pi/4\right] = -\beta \tag{7.105}$$

для слабо зв'язаних хвиль, локалізованих біля границь $\xi = \pm\delta$. Тут β визначено у рівнянні (7.99). Якщо z-проекція хвильового вектора досить велика, $\kappa_z \gg \varepsilon^{-1/2}\Omega/\gamma$, то параметр β є малим, $\beta \ll 1$. У цьому випадку ми можемо спростити дисперсійне відношення до $|\kappa_s|\bar{b}(\delta) = \pi(m + 1/4)$, де $m = 0, 1, 2, \ldots$, і переписати його в явному вигляді для $\kappa_z(\Omega)$,

$$\kappa_z^2(\Omega) = \left(1 - \frac{\Omega^2}{\gamma^2}\right)\left[\frac{\pi^2(m + 1/4)^2}{(1 - \Omega^2)\bar{b}^2(\delta)} - 1\right]. \tag{7.106}$$

Число m у цьому рівнянні використовується в пункті 7.3.3 для нумерації відповідних пар дисперсійних кривих з номерами $n = 2m + 1$ і $n = 2m + 2$ (див. нижню вставку на рис. 7.23). Зокрема, крива дисперсії, пронумерована $m = 0$, насправді є парою кривих з номерами $n = 1$ і $n = 2$ для антисиметричних та симетричних локалізованих хвиль, близьких одна до одної.

Отримані дисперсійні співвідношення (7.98) та (7.105) діють у відносно широкому діапазоні частот і хвильових векторів, і там вони виявляють аномальну дисперсію локалізованих хвиль (докладніше див. пункт 7.3.3). Хоча наближення ВКБ передбачає немонотонність дисперсійних кривих, максимуми на кривих розташовані поблизу світлової лінії $\Omega = \varepsilon^{1/2}\gamma\kappa_z$, поза формальною областю придатності цього наближення. Крім того, наближення ВКБ невірно описує поведінку дисперсійних кривих в діапазоні частот, близьких до ω_J, тобто при $|\Omega - 1| \ll 1$. У наступному підрозділі ми представляємо точний розв'язок, позбавлений цих недоліків.

7.3.2.2. Точний розв'язок

Покажемо, що можливо отримати точний розв'язок рівняння (7.86) в термінах спеціальних функцій Лежандра. Для цього ми спочатку розглянемо рівняння (7.86) з $u(\xi)$, взятим у вигляді

$$u(\xi) = \frac{2(1-\Omega^2)^{-1}}{\mathrm{ch}^2(\xi)}. \tag{7.107}$$

Вводячи нову змінну $\tau = \mathrm{th}(\xi)$, ми можемо переписати рівняння (7.86) як

$$(1-\tau^2)a''(\tau) - 2\tau a'(\tau) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-\tau^2}\right] a(\tau) = 0, \tag{7.108}$$

де штрих позначає похідну за змінною τ,

$$\nu(\nu+1) = 2(1-\Omega^2)^{-1}\kappa_s^2, \quad \mu^2 = -\kappa_s^2. \tag{7.109}$$

Розв'язок цього рівняння — це лінійна комбінація спеціальних функцій Лежандра $P_\nu^\mu(\tau)$ і $Q_\nu^\mu(\tau)$ першого і другого роду [170] відповідно. Повертаючись до змінної ξ, маємо:

$$a(\xi) = C_1 P_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi)] + C_2 Q_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi)]. \tag{7.110}$$

Тепер ми повернемося до рівняння (7.86) з $u(\xi)$ у формі (7.87). Будемо шукати його розв'язок лише для $0 < \xi < \delta$. Оскільки ми вважаємо пластину досить товстою, див. умову (7.83), ми можемо спростити $u(\xi)$ до одного доданку

$$u(\xi) = \frac{2(1-\Omega^2)^{-1}}{\mathrm{ch}^2(\xi_0 - \xi)}, \tag{7.111}$$

тому що в області $0 < \xi < \delta$ другим членом у квадратних дужках у співвідношенні (7.87) можна знехтувати. Тоді загальний розв'язок рівняння (7.86) може бути представлений в такому ж вигляді, як у рівнянні (7.110), але при зміні ξ на $\xi - \xi_0$:

$$a(\xi) = C_1 P_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi - \xi_0)] + C_2 Q_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi - \xi_0)]. \tag{7.112}$$

Остаточно, ми застосовуємо одну з умов (7.93) та отримуємо симетричний та антисиметричний по магнітному полю розв'язки:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= a_{\mathrm{sym}} \left[\frac{f_p(\xi_0 - \xi)}{f_p(\xi_0)} - \frac{f_q(\xi_0 - \xi)}{f_q(\xi_0)} \right], \\ a(\xi) &= a_{\mathrm{asym}} \left[\frac{f_p(\xi_0 - \xi)}{f_p'(\xi_0)} - \frac{f_q(\xi_0 - \xi)}{f_q'(\xi_0)} \right], \end{aligned} \tag{7.113}$$

відповідно. Тут a_{sym} і a_{asym} — постійні інтегрування, і

$$f_p(\xi) = P_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi)], \qquad f_q(\xi) = Q_\nu^\mu[\mathrm{th}(\xi)]. \tag{7.114}$$

Відповідні дисперсійні співвідношення визначаються підстановкою розв'язків (7.113) у загальне рівняння (7.91) при $\xi = +\delta$.

Тепер покажемо, який вигляд приймають точні розв'язки у випадку відсутності незмінного у часі магнітного поля. Коли магнітне поле близьке до нуля, $h_0 \to 0$, ми можемо спростити рівняння (7.113) наступним чином. По-перше, ми розкладемо аргумент спеціальних функцій Лежандра:

$$\mathrm{th}(\xi_0 - \xi) \approx 1 - \frac{1}{2} h_0^2 \exp[2(\xi - \delta)]. \tag{7.115}$$

Далі функції Лежандра з аргументом τ, близьким до 1, можуть бути представлені як лінійні комбінації функцій $(1 - \tau)^{\pm\mu/2}$ [170]. Враховуючи, що $\mu = i\kappa_s$, ми отримуємо

$$\begin{aligned} f_p(\xi_0 - \xi) &\approx c_1 \exp[-i\kappa_s(\xi - \delta)], \\ f_q(\xi_0 - \xi) &\approx c_2 \exp[-i\kappa_s(\xi - \delta)] + c_3 \exp[i\kappa_s(\xi - \delta)], \end{aligned}$$

де c_1, c_2 і c_3 — деякі константи. Отже, симетричні та антисиметричні розв'язки (7.113) очевидно приймають таку форму:

$$a(\xi) = a_{\rm sym} \sin \kappa_s \xi \qquad \text{і} \qquad a(\xi) = a_{\rm asym} \cos \kappa_s \xi \tag{7.116}$$

відповідно, що призводить до дисперсійних співвідношень (5.9) і (5.10), детально досліджених у підрозділі 5.1.

7.3.3. Чисельний аналіз

У цьому розділі ми представляємо отримані аналітичні результати у графічній формі та описуємо вплив незмінного у часі магнітного поля на дисперсійні криві.

7.3.3.1. Розподіли незмінного у часі та змінного магнітних полів

Рисунок 7.20 показує просторові розподіли нормованого незмінного у часі магнітного поля $h_{\rm dc}(\xi)$ (штрихова крива) та магнітного поля $H_y(\xi)$ в антисиметричній локалізованій ДПХ (суцільна крива) при $\Omega = 0{,}98$ в діапазоні низьких частот (основна панель) і $\Omega = 1{,}12$ у високочастотному діапазоні (вставка). Незмінне у часі магнітне поле однорідно розподілено у діелектрику, $h_{\rm dc}(\xi) = h_0 = H_0/\mathcal{H}_0$, і проникає в шаруватий надпровідник у вигляді «хвостів» фіктивних джозефсонівських вихорів, рівняння (7.81),

$$h_{\rm dc}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\xi_0 - \xi)} + \frac{1}{\mathrm{ch}(\xi_0 + \xi)}, \quad |\xi| < \delta. \tag{7.117}$$

Просторовий розподіл $H_y^s(\xi)$ магнітного поля хвилі визначається рівнянням (7.89) з розв'язками (7.113) і показаний на рис. 7.20 у довільних одиницях.

У випадку високих частот, $\Omega > 1$, локалізовані ДПХ осцилюють поперек пластини, а при низьких частотах, $\Omega < 1$, електромагнітне поле осцилює лише біля поверхонь і згасає вглиб пластини. Тим не менше, в обох випадках незмінне у часі магнітне поле призводить до зміни амплітуди та довжини хвилі коливань поблизу границь шаруватого надпровідника.

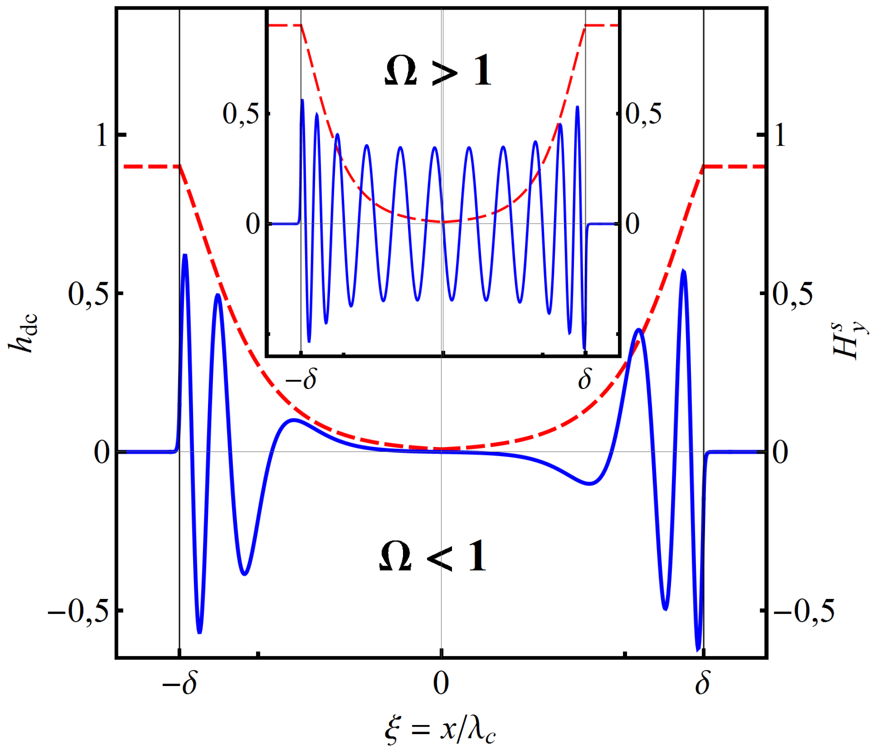


Рис. 7.20. Просторовий розподіл магнітного поля $H_y^s(\xi)$ локалізованої хвилі (суцільні криві) в довільних одиницях та нормоване незмінне у часі магнітне поле $h_{\mathrm{dc}}(\xi)$ (штрихові криві) при $\Omega = 0{,}98$ (основна панель) і $\Omega = 1{,}12$ (вставка). Параметри: $\gamma = 5$, $\varepsilon = 4$, $\kappa_z = 10$, $\delta = 5$, $h_0 = 0{,}9$.

7.3.3.2. Вплив незмінного у часі магнітного поля на аномальну дисперсію

Спочатку ми дослідимо дисперсійні криві при відносно невеликих $\kappa_z \lesssim 1$ у двох частотних діапазонах: при низьких частотах $\Omega < 1$ та при високих частотах $\Omega > 1$. Для цих випадків ми побудуємо криві відповідно до точного розв'язку, отриманого у підпункті 7.3.2.2, і проаналізуємо їх еволюцію при зміні сталого магнітного поля h_0. Потім ми зосередимось на частотах, близьких до джозефсонівської плазмової частоти ω_J, тобто при $|\Omega - 1| \ll 1$, і у більш широкому діапазоні по κ_z. Тут для певного значення h_0 ми розглянемо зміну у поведінці дисперсійних кривих при переході від частот $\Omega > 1$ до $\Omega < 1$ та порівняємо точний розв'язок з отриманим у наближенні ВКБ.

Щоб спростити наступні пояснення, ми перенумеруємо дисперсійні криві знизу вгору номерами $n = 1, 2, 3, \ldots$ і дослідимо зміщення кожної кривої шляхом зміни нормованої амплітуди h_0 зовнішнього незмінного у часі магнітного поля.

Ми почнемо опис з діапазону низьких частот, $\Omega < 1$. Рисунок 7.21 показує дві найнижчі дисперсійні криві з номерами $n = 1$ (суцільні лінії для антисиметричних локалізованих хвиль) і $n = 2$ (штрихові лінії для симетричних локалізованих хвиль) при $h_0 = 0$; $0{,}6$; $0{,}9$; $0{,}98$; $0{,}999$. Як видно, дисперсійні криві зміщуються в бік нижчих частот і збільшується їх кривизна при збільшенні h_0. Також криві з номерами $n = 1$ і $n = 2$ стають близькими одна до одної при збільшенні h_0. Це відбувається тому, що симетричні та антисиметричні локалізовані хвилі можуть бути представлені у вигляді двох слабко зв'язаних поверхневих хвиль, локалізованих біля границь $x = D/2$ і $x = -D/2$, і зв'язок стає слабшим для менших значень Ω, детальніше див. підпункт 7.3.2.1. Крім того, при $h_0 \ll 1$ обидві криві стягуються в точку, $\Omega = \kappa = 0$, та їх можна асимптотично описати одним дисперсійним співвідношенням,

$$\frac{\kappa_z^2}{3} + \Omega^2\big[1 + (\varepsilon\kappa_d)^{-1}\big] = \sqrt{1 - h_0^2}. \tag{7.118}$$

Тут κ_d визначається за допомогою рівняння (7.92).

Дисперсійні криві, представлені на рис. 7.21 (за винятком кривої з $n = 1$ при $h_0 = 0$), є немонотонними і складаються з частин з нормальною, де $\partial\Omega/\partial\kappa_z > 0$, та аномальною, де $\partial\Omega/\partial\kappa_z < 0$, дисперсіями. Тому ці криві мають максимуми, де групова швидкість дорівнює нулю, $\partial\Omega/\partial\kappa_z = 0$. Ці максимуми з'являються поблизу світлової лінії $\Omega = \varepsilon^{1/2}\gamma\kappa_z$ і зміщуються при зміні амплітуди незмінного у часі магнітного поля. Можливе застосування цього явища обговорюється в пункті 7.3.4.

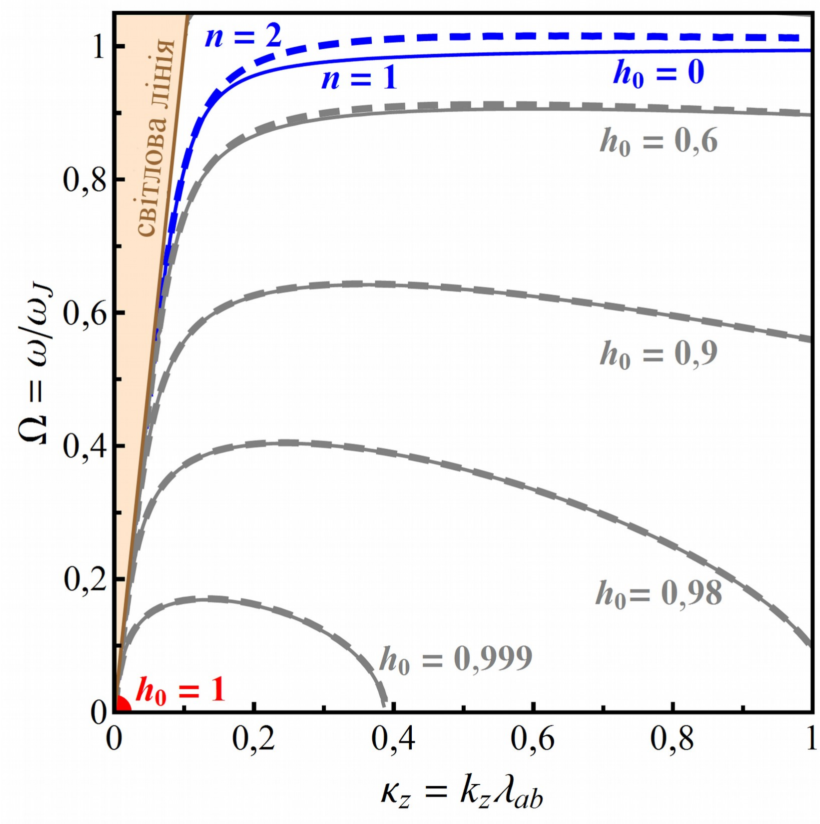


Рис. 7.21. Дисперсійні криві з номерами $n = 1$ (суцільні лінії, антисиметричні локалізовані хвилі) і $n = 2$ (штрихові лінії, симетричні локалізовані хвилі) при $\Omega < 1$ та магнітних полях $h_0 = 0$; $0{,}6$; $0{,}9$; $0{,}98$; $0{,}999$. Параметри: $\gamma = 5$, $\delta = 5$, $\varepsilon = 4$.

Тепер ми розглянемо високочастотний діапазон $\Omega > 1$. Відповідні дисперсійні криві побудовані на рис. 7.22 суцільними ($n = 3, 5, \ldots$ для антисиметричних локалізованих хвиль) і штриховими ($n = 4, 6, \ldots$ для симетричних локалізованих хвиль) при $h_0 = 0$; $0{,}6$; $0{,}9$; 1. Подібно до випадку низьких частот, збільшення незмінного у часі магнітного поля зміщує криві у бік нижчих частот, у напрямку стрілок на рис. 7.22. Усі криві немонотонні і мають частини з нормальною та аномальною дисперсією. Порівнюючи криві для проміжних значень магнітного поля $h_0 = 0{,}6$ та $h_0 = 0{,}9$ для різних номерів n, можна побачити, що зсув внаслідок збільшення h_0 неоднаковий і залежить від n. При збільшенні n криві з $h_0 \leqslant 0{,}6$ наближаються одна до одної, а відстань між кривими з $h_0 \geqslant 0{,}6$ зростає.

Рисунок 7.22 показує криві для відносно малих κ_z і не зображає цікаву особливість, яка виникає при наявності незмінного у часі магнітного поля: при $h_0 > 0$ і досить великому κ_z усі дисперсійні криві з номерами $n = 3, 4, \ldots$ перетинають пряму $\Omega = 1$ і закінчуються на прямій $\Omega = 0$.

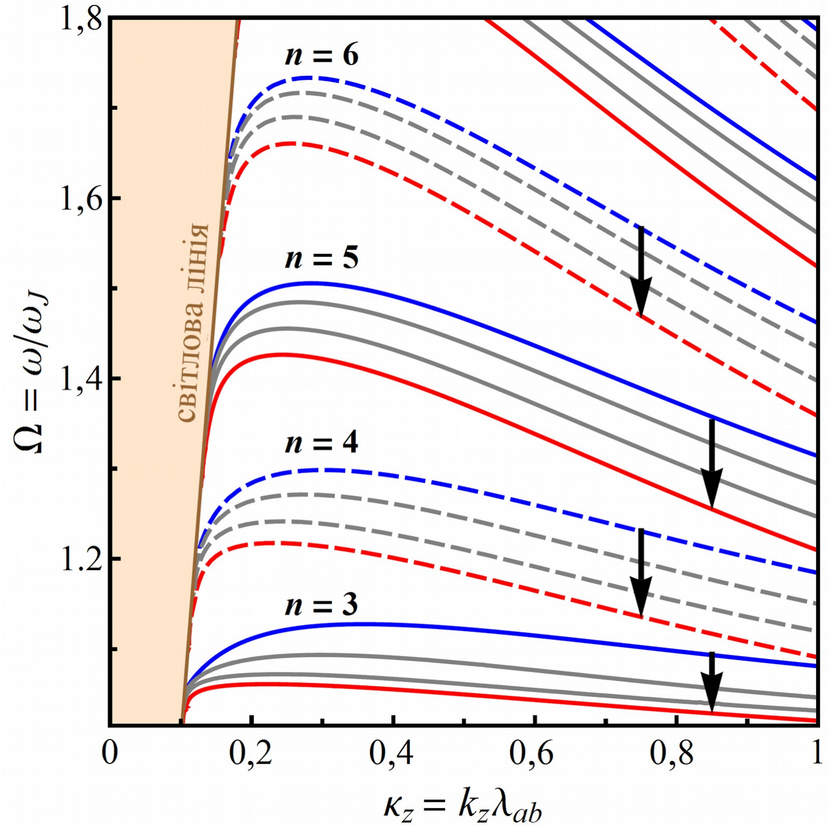


Рис. 7.22. Дисперсійні криві при $\Omega > 1$ та магнітних полях $h_0 = 0$; 0,6; 0,9; 1, де суцільні та штрихові лінії відповідають антисиметричним і симетричним локалізованим ДПХ, а стрілки показують збільшення h_0. Параметри: такі ж, як на рис. 7.21.

Щоб дослідити вказану особливість, перейдемо до частотного діапазону $|\Omega - 1| \ll 1$. Основна панель на рис. 7.23 показує поведінку двох кривих з номерами $n = 3$ і $n = 4$ при $h_0 = 0{,}9$ в цьому діапазоні частот для досить великих κ_z, а верхня вставка на рис. 7.23 показує криві з номерами $n = 3, 4, 5, 6$ у більш вузькому діапазоні κ_z. Суцільними лініями показані точні дисперсійні криві відповідно до рівнянь (7.91) і (7.113), а штрихові та пунктирні лінії описують дисперсійні криві, отримані у наближенні ВКБ. Штрихові криві побудовано з використанням рівнянь (7.98) і (7.105), де ми залишили β у правій частині. Хоча наближення ВКБ формально не діє поблизу світлої лінії $\Omega = \varepsilon^{1/2}\gamma\kappa_z$, де спостерігаються максимуми на дисперсійних кривих, можна побачити хорошу згоду між суцільними та штриховими кривими при Ω, не дуже близькому до 1. Пунктирні криві побудовано з використанням рівнянь (7.100) і (7.106), де ми нехтуємо β у правій частині. Пунктирні криві близькі до суцільних кривих при досить великих κ_z, тобто у межах придатності наближення ВКБ, див. умову (7.95).

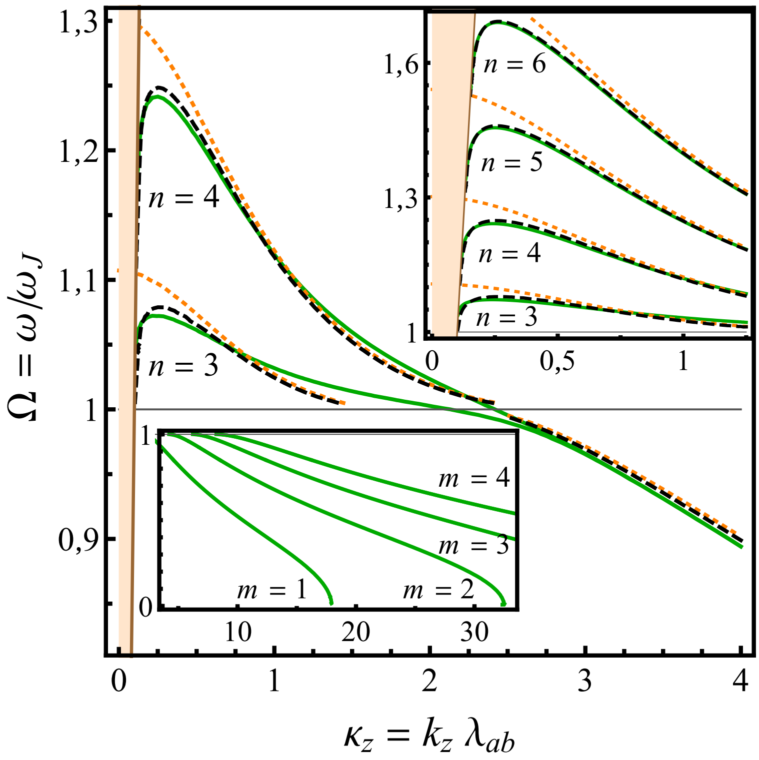


Рис. 7.23. Дисперсійні криві з номерами $n = 3, 4$ (основна панель) і $n = 3, 4, 5, 6$ (верхня вставка), а також пари дисперсійних кривих з номерами $n = 2m + 1$ і $n = 2m + 2$ при $m = 1, 2, 3, 4$ (нижня вставка), побудовані при $h_0 = 0{,}9$, де суцільні лінії описуються точним розв'язком, рівняння (7.91) і (7.113), штрихові лінії відповідають наближенню ВКБ (7.98) і (7.105), а пунктирні лінії представляють спрощені вирази (7.100) і (7.106). Параметри: такі ж, як на рис. 7.21.

З рис. 7.23 можна бачити, що криві з $n = 3$ і $n = 4$ перетинають пряму $\Omega = 1$. Більш того, ці криві зближуються, коли $\Omega < 1$, через слабкий зв'язок між двома поверхнями пластини. Така ж поведінка проявляється у кожної пари дисперсійних кривих з номерами $n = 2m + 1$ та $n = 2m + 2$ при $m = 1, 2, 3, \ldots$. Пари кривих з $m = 1, 2, 3, 4$ побудовані на нижній вкладці на рис. 7.23 для $\Omega < 1$. У цьому діапазоні частот усі криві наближаються до прямої $\Omega = 0$.

7.3.4. Внутрішнє відбиття локалізованих хвиль у неоднорідному магнітному полі

У цьому пункті ми передбачаємо явище внутрішнього відбиття, яке пов'язано з немонотонною дисперсією та контролюється неоднорідним незмінним у часі магнітним полем.

Дисперсійні криві, вивчені у цьому підрозділі, є немонотонними як функції $\Omega(\kappa_z)$ для кожного значення h_0. Тому при деякому значенні Ω існують два значення κ_z на кожній дисперсійній кривій, які відповідають хвилям з нормальною та аномальною дисперсіями. Це означає, що дисперсійні криві, представлені як функції $\kappa_z(h_0)$ для деякого певного значення Ω, повинні бути двозначними. На рис. 7.24 дисперсійні криві з номерами $n = 3$ (штрих-пунктирна лінія), $n = 4$ (штрихова лінія) і $n = 5$ (суцільна лінія) побудовані як функції $\kappa_z(h_0)$ при $\Omega = 1{,}07;\ 1{,}25;\ 1{,}5$ відповідно.

Тепер припустимо, що локалізована хвиля з частотою $\Omega = 1{,}5$ і значенням z-проекції хвильового вектора $\kappa_z = 0{,}23$ поширюється вздовж пластини шаруватого надпровідника півтовщини $\delta = 5$. Прикладемо до пластини зовнішнє неоднорідне незмінне у часі магнітне поле, яке плавно зростає вздовж осі z від $h_0 = 0$ до $h_0 = 0{,}5$. Коли хвиля поширюється в область, де магнітне поле збільшується, κ_z змінюється вздовж суцільної кривої в напрямку стрілки на рис. 7.24 з початкової точки (суцільний кружок) до критичної точки (порожній кружок) з $h_0 = h_{\max} \approx 0{,}31$ і $\kappa_z \approx 0{,}28$. Після критичної точки, коли h_0 продовжує зростати, хвильовий вектор повинен стати уявним, тому при подальшому поширенні хвиля починає згасати вздовж осі z. Таким чином, в критичній точці локалізована хвиля повинна відбитись, тобто відбувається явище, подібне до повного внутрішнього відбиття. Це явище представляє інтерес і може бути використане для керування поширенням локалізованих хвиль у шаруватих надпровідниках за допомогою неоднорідного незмінного у часі магнітного поля.

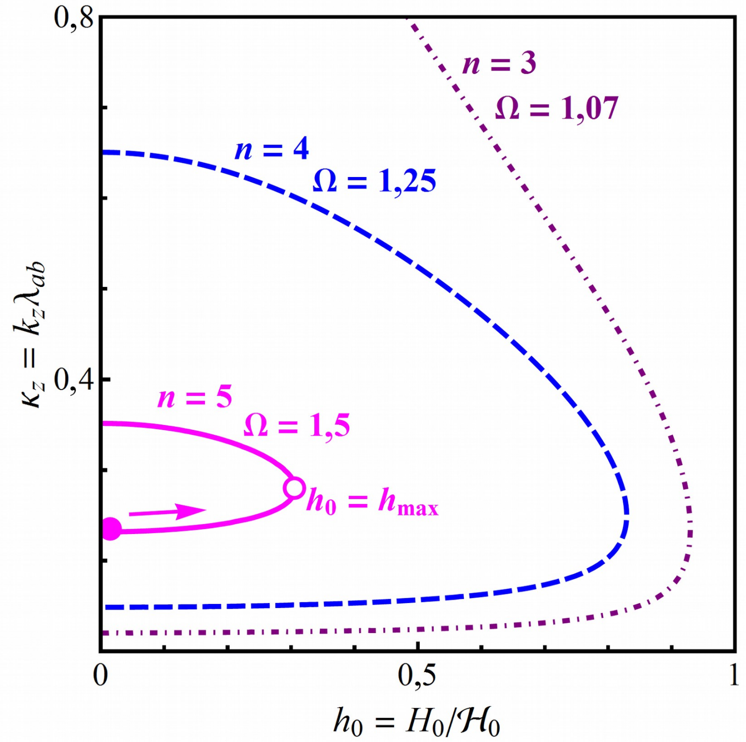


Рис. 7.24. Дисперсійні криві з номерами $n = 3$ (штрих-пунктирна лінія), $n = 4$ (штрихова лінія) і $n = 5$ (суцільна лінія), побудовані як функції $\kappa_z(h_0)$ при $\Omega = 1{,}07$; $1{,}25$; $1{,}5$ відповідно. Стрілкою показана зміна κ_z при поширенні хвилі в неоднорідному магнітному полі, а суцільний і порожній кружки відповідають початковій та кінцевій точкам цієї зміни. Параметри: такі ж, як на рис. 7.21.

Висновки до розділу 7

У сьому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [43–46]:

- Запропоновано новий метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту через шаруватий надпровідник за наявності незмінного у часі магнітного поля. Цей метод базується на нелінійній взаємодії магнітного поля та електромагнітної хвилі. Показано, що незмінне у часі магнітне поле може бути гнучким інструментом для контролю за транспортними характеристиками шаруватих надпровідників, навіть у тому випадку, коли воно відносно слабке, тобто проникає у зразок лише у вигляді експоненційно згасаючого «хвоста» джозефсонівського вихору.

- Досліджено відбиття та проходження електромагнітних хвиль поперечно-магнітної поляризації крізь зразок шаруватого надпровідника. Показано, що в залежності від значень кута падіння і частоти хвилі включення магнітного поля може призводити як до збільшення, так і до зменшення прозорості зразку. Визначено величину магнітного поля, за якої зразок стає повністю прозорим. Виявлено, що при падінні хвилі під довільним кутом і оптимальному виборі частоти можна за допомогою магнітного поля змінювати прозорість практично від непрозорості до повної прозорості.

● Теоретично досліджено ефект крос-поляризації поперечно-магнітних та поперечно-електричних хвиль при їх відбитті від границі півнескінченного зразка шаруватого надпровідника в присутності незмінного у часі магнітного поля. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів відбиття та перетворення у випадках, коли хвилі можуть поширюватися в шаруватому надпровіднику і коли падаюча хвиля повністю відбивається. Показано, що у першому випадку можна спостерігати часткову крос-поляризацію. А у другому випадку можна досягти повної крос-поляризації при певному значенні магнітного поля і кута повороту площини падіння відносно кристалографічної осі зразка для заданої частоти і кута падіння хвилі.

● Отримано дисперсійні співвідношення для електромагнітних хвиль, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника у присутності незмінного у часі магнітного поля, у рамках квазікласичного наближення та в точній формі в термінах спеціальних функцій Лежандра. Показано, що хоча наближений розв’язок може бути застосований для широкого діапазону частот та хвильових чисел, він є незастосовним поблизу джозефсонівської плазмової частоти, а також дає недостатньо точний результат поблизу світлової лінії. Для цих діапазонів параметрів необхідно використовувати точний розв’язок.

● Проаналізовано вплив незмінного у часі магнітного поля на дисперсію ДПХ, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника. Показано, що збільшення величини магнітного поля призводить до зсуву дисперсійних кривих у нижчі частоти, причому при високих і низьких частотах дисперсійні властивості локалізованих хвиль мають різний характер. При $\omega > \omega_J$ електромагнітне поле хвилі осцилює поперек пластини та незмінне у часі магнітне поле лише злегка зміщує дисперсійні криві. При $\omega < \omega_J$ вплив магнітного поля є більш значущим. Крім того, за наявності магнітного поля дисперсійні криві, що починаються при $\omega > \omega_J$, переходять в область низьких частот $\omega < \omega_J$ при відносно великих значеннях магнітного поля.

- Показано, що за наявності незмінного у часі магнітного поля в широкому діапазоні параметрів може спостерігатися аномальна дисперсія локалізованих ДПХ. Завдяки тому, що магнітним полем можна змінювати дисперсією цих хвиль, відкривається можливість спостереження ефекту внутрішнього відбиття локалізованих хвиль, що поширюються у неоднорідному магнітному полі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу задачу теоретичної фізики, а саме: виявлено специфічні особливості електронного транспорту у сучасних матеріалах, ВТНП на основі заліза та топологічних ізоляторах, з урахуванням ефектів Джозефсона та андреєвського відбиття, а також побудована теорія електромагнітного хвильового транспорту у структурах, що містять шаруваті ВТНП, в яких формується специфічна анізотропна нелінійна джозефсонівська плазма, і досліджено ряд лінійних та нелінійних ефектів в таких структурах.

Основні результати дисертаційної роботи сформульовані в наступних положеннях:

1. Досліджені ланцюги, які включають звичайний надпровідник і ВТНП на основі заліза, з'єднані нормальним або феромагнітним дротом. Для таких з'єднань отримані та проаналізовані вирази для залежності щільності електронних станів від енергії та співвідношення між джозефсонівським струмом та різницею фаз між надпровідниками. Зокрема, аналітичний результат для щільності станів демонструє особливості поблизу надпровідних щілин при високих енергіях, а співвідношення між струмом та різницею фаз виявляє 0–π переходи для широкого діапазону параметрів. Такі специфічні ознаки можуть бути використані в експерименті для розмежування s^{+-}- та s^{++}-спаровування у ВТНП на основі заліза.

2. Побудована модель електронного транспорту між двома надпровідниками, з'єднаними за допомогою двовимірного топологічного ізолятору зі спін-орбітальною взаємодією, в якій враховані як ефекти багатократних андреєвських та нормальних відбиттів, так і електрон-домішкове розсіювання. На підставі цієї моделі за допомогою рівнянь Боголюбова – де Жена отримано коефіцієнти нормального та андреєвського відбиттів. За допомогою рівняння Больцмана обчислено функції розподілу електронів за енергіями та визначено характерні

особливості, що виникають в результаті зазначених процесів. Такі особливості можуть бути використані для визначення ролей розсіювання та нормального відбиття в електронному транспорті у топологічному ізоляторі.

3. Для шаруватих ВТНП передбачено ефект самоіндукованої прозорості, який виникає внаслідок нелінійного зв’язку джозефсонівського струму та калібрувально-інваріантної різниці фаз між шарами. Теоретично показано, що прозорість шаруватого надпровідника може змінюватися у широких межах від майже непрозорості до повної прозорості при варіюванні амплітуди падаючої хвилі. Крім того, прозорість, так само як і поверхневий реактанс шаруватого надпровідника, залежить від амплітуди неоднозначним чином, що може призводити до гістерезисних стрибків між різними гілками таких залежностей.

4. Сформульовано та обґрунтовано аналог принципу суперпозиції для нелінійних ДПХ, використання якого дає можливість проводити теоретичне дослідження нелінійного електромагнітного транспорту через сильно анізотропні шаруваті надпровідники. Такий принцип суперпозиції має місце завдяки різній фізичній природі струмів уздовж та поперек шарів. На основі цього принципу було передбачено явище крос-поляризації хвиль, що відбиваються від межі шаруватий надпровідник – вакуум. Окрім того, досліджено транспорт поперечно-магнітних та поперечно-електричних хвиль через шаруватий надпровідник та показано, що ступінь крос-поляризації залежить не тільки від кута падіння та частоти хвилі, а також від її амплітуди.

5. Показано, що ефекти, передбачені для зразків та пластин нескінченних розмірів, можуть спостерігатись і у зразках скінченних розмірів, розташованих у прямокутному хвилеводі, що краще відповідає постановці можливого експерименту. Зокрема, це показано для ефектів самоіндукованої прозорості та крос-поляризації.

6. Отримані та проаналізовані дисперсійні співвідношення для лінійних, слабо нелінійних та сильно нелінійних ДПХ, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого перпендикулярні поверхні пластини.

Показано, що такі ДПХ можуть мати аномальну дисперсію у широкому діапазоні параметрів. Передбачено, що завдяки аномальній дисперсії у нелінійному випадку можливо спостерігати явище, аналогічне «зупинці світла» у нелінійній оптиці.

7. Досліджені такі резонансні ефекти у шаруватих ВТНП, як посилення прозорості, що супроводжується збудженням локалізованих ДПХ з аномальною дисперсією, та пригнічення коефіцієнта відбиття (вудівські аномалії), що супроводжується збудженням нелінійних локалізованих ДПХ. Показано, що коефіцієнт прозорості проявляє незвичну залежність від кута падіння хвилі, яка пов’язана із аномальною дисперсією локалізованих ДПХ. Зокрема, передбачено існування двох резонансних піків цієї залежності та їх подальше злиття в широкий єдиний пік при збільшенні частоти хвилі. У свою чергу, нелінійність призводить до можливості керування вудівськими аномаліями за рахунок зміни амплітуди хвилі.

8. Досліджено терагерцовий електромагнітний транспорт через фотонний кристал, що містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого ортогональні шарам фотонного кристалу. За допомогою методу трансфер-матриць отримані дисперсійні співвідношення для електромагнітних мод, локалізованих на такому дефекті, та аналітичний вираз для коефіцієнта прозорості. Показано, що прозорість у забороненій зоні фотонного кристала може бути істотно посилена за рахунок резонансного збудження локалізованих мод, та отримано спрощений вираз для коефіцієнта прозорості поблизу резонансу.

9. Розроблено новий метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту через шаруватий надпровідник за наявності незмінного у часі магнітного поля. Цей метод базується на нелінійній взаємодії магнітного поля із джозефсонівською плазмою. За його допомогою теоретично показано, що таким магнітним полем можна контролювати транспортні характеристики шаруватих надпровідників. Зокрема, показано, що, варіюючи величину магнітного поля, можна змінювати прозорість пластини шаруватого надпровідника та ступінь кросполяризації відбитої хвилі. Наявність незмінного у часі магнітного поля може призводити як до збільшення, так і зменшення цих транспортних характеристик.

Визначено умови повної прозорості та повної крос-поляризації. Теоретично показано, що за допомогою магнітного поля можна змінювати дисперсійні характеристики локалізованих електромагнітних мод. Це, разом із немонотонною дисперсією локалізованих мод, може призводити до ефекту внутрішнього відбиття у неоднорідному незмінному у часі магнітному полі.

Таким чином, усі поставлені завдання виконані, і мета дисертаційної роботи досягнута.

Одержані результати доповнюють і розширюють наявні уявлення про електронний транспорт у структурах, що містять звичайні надпровідники і ВТНП, та про електромагнітний транспорт в шаруватих ВТНП. Ці результати можуть бути використані при розробці електроніки терагерцового діапазону, що має потенційно важливі практичні застосування в різних областях, зокрема, в системах безпеки, медичній діагностиці, контролі навколишнього середовища. Наприклад, ефекти самоіндукованої та резонансної прозорості та крос-поляризації можуть бути використані у детекторах та фільтрах терагерцового випромінювання, а контроль цих явищ за допомогою незмінного у часі магнітного поля може значно спростити налаштування таких приладів.

ПОДЯКИ

На закінчення хочу висловити подяку моєму науковому консультанту, доктору фіз.-мат. наук, професору, чл.-кор. НАН України Валерію Олександровичу Ямпольському за всебічну підтримку, допомогу в роботі над дисертацією, обговорення проблем сучасної теоретичної фізики, фізики надпровідності та фізики твердого тіла.

Також виражаю подяку всім своїм співавторам, доктору фіз.-мат. наук, професору, акад. НАН України, Яковенко В. М., доктору фіз.-мат. наук, професору, акад. НАН України, Шматько А. А., доктору фіз.-мат. наук, професору Макарову Н. М., професору Перес-Родрігесу Ф., професору Nori F., канд. фіз.-мат. наук, доц. Майзелісу З. О., канд. фіз.-мат. наук Савєльєву С. Є., канд. фіз.-мат. наук Рохмановій Т. М., канд. фіз.-мат. наук Кадигробу Д. В., канд. фіз.-мат. наук Сліпченко Т. М., канд. фіз.-мат. наук Якушеву Д. А., канд. фіз.-мат. наук Ханкіній С. І., Левченко А. А., Сорокіній М. А., Божко А. А., Николаєнко О. О., Гавриленко В. І., Квітці Н., за плідну співпрацю, участь в постановці наукових проблем та обговоренні результатів.

Я щиро вдячний всім співробітникам кафедри теоретичної фізики ім. І. М. Ліфшиця Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна та співробітникам відділу теоретичної фізики Інституту радіофізики і електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України за корисні дискусії за темою дисертації. У нашому відділі завжди панує наукова атмосфера, всі дуже привітні і готові прийти на допомогу один одному в будь-якій ситуації, що сприяє успішним науковим дослідженням.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. Москва: МЦНОМ, 2000. 402 с.
2. Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'ichev E. The current-phase relation in josephson junctions. *Rev. Mod. Phys*. 2004. Vol. 76. P. 411–469.
3. Paglione J., Greene R. L. High-temperature superconductivity in iron-based materials. *Nature Phys*. 2010. Vol. 6. P. 645–658.
4. Qi X.-L., Zhang S.-C. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys*. 2011. Vol. 83. P. 1057–1110.
5. Welp U., Kadowaki K., Kleiner R. Superconducting emitters of thz radiation. *Nature Photon*. 2013. Vol. 7. P. 702–710.
6. Kashiwagi T., Kubo H., Sakamoto K., Yuasa T., Tanabe Y., Watanabe C. et al. The present status of high-T_c superconducting terahertz emitters. *Supercond. Sci. Technol*. 2017. Vol. 30, No. 7. P. 074008.
7. Cooper L. N. Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas. *Phys. Rev*. 1956. Vol. 104. P. 1189–1190.
8. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. Microscopic theory of superconductivity. *Phys. Rev*. 1957. Vol. 106. P. 162–164.
9. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev*. 1957. Vol. 108. P. 1175–1204.
10. Little W. A. Possibility of synthesizing an organic superconductor. *Phys. Rev*. 1964. Vol. 134. P. A1416–A1424.

11. Wollman D. A., Van Harlingen D. J., Lee W. C., Ginsberg D. M., Leggett A. J. Experimental determination of the superconducting pairing state in YBCO from the phase coherence of YBCO-Pb dc SQUIDs. *Phys. Rev. Lett*. 1993. Vol. 71. P. 2134–2137.

12. Wollman D. A., Van Harlingen D. J., Giapintzakis J., Ginsberg D. M. Evidence for $d_{x^2-y^2}$ pairing from the magnetic field modulation of $\mathrm{YBa_2Cu_3O_7}$-Pb josephson junctions. *Phys. Rev. Lett*. 1995. Vol. 74. P. 797–800.

13. Kamihara Y., Hiramatsu H., Hirano M., Kawamura R., Yanagi H., Kamiya T., Hosono H. Iron-based layered superconductor: LaOFeP. *J. Am. Chem. Soc*. 2006. Vol. 128, No. 31. P. 10012–10013.

14. Kamihara Y., Watanabe T., Hirano M., Hosono H. Iron-based layered superconductor $\mathrm{La[O_{1-x}F_x]FeAs}$ ($x = 0.05 - 0.12$) with T_c = 26 K. *J. Am. Chem. Soc*. 2008. Vol. 130, No. 11. P. 3296–3297.

15. Chubukov A. Pairing mechanism in Fe-based superconductors. *Annu. Rev. Con. Mat. Phys*. 2012. Vol. 3, No. 1. P. 57–92.

16. Savel'ev S., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Nori F. Terahertz josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Rep. Prog. Phys*. 2010. Vol. 73, No. 2. P. 026501.

17. Hu X., Lin S.-Z. Phase dynamics in a stack of inductively coupled intrinsic josephson junctions and terahertz electromagnetic radiation. *Supercond. Sci. Technol*. 2010. Vol. 23, No. 5. P. 053001.

18. Laplace Y., Cavalleri A. Josephson plasmonics in layered superconductors. *Advances in Physics: X*. 2016. Vol. 1, No. 3. P. 387–411.

19. Mills D. L. Nonlinear Optics: Basic Concepts. Berlin: Springer, 1998. 263 p.

20. Bloembergen N. Nonlinear Optics. Singapore: World Scientific, 1996. 172 p.

21. Zhang X.-C. Three-dimensional terahertz wave imaging. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2004. Vol. 362, No. 1815. P. 283–299.

22. Bolívar P. H., Nagel M., Richter F., Brucherseifer M., Kurz H., Bosserhoff A., Büttner R. Label–free THz sensing of genetic sequences: towards ‘THz biochips’. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2004. Vol. 362, No. 1815. P. 323–335.

23. Tonouchi M. Cutting-edge terahertz technology. *Nature Photon*. 2007. Vol. 1, No. 2. P. 97–105.

24. Lee M., Wanke M. C. Searching for a solid-state terahertz technology. *Science*. 2007. Vol. 316, No. 5821. P. 64–65.

25. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{+-} superconductors. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86. P. 224501.

26. Apostolov S. S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89. P. 201303.

27. Апостолов С. С. Многократное андреевское отражение в двухмерном топологическом изоляторе. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 1. С. 65–71.

28. Yampol’skii V. A., Slipchenko T. M., Mayzelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S., Savel’ev S. E., Nori F. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78. P. 184504.

29. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Mayselis Z. A., Slipchenko T. M., Savel’ev S. E., Yampol’skii V. A. Hysteresis jumps of the surface reactance of a layered superconductor as the incident wave amplitude varies. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 1. P. 92–99.

30. Apostolov S. S., Bozhko A. A., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol’skii V. A. Amplitude hysteresis of the surface reactance of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 4. P. 265–272.

31. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol’skii V. A., Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82. P. 144521.

32. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Self-induced terahertz-wave transmissivity of waveguides with finite-length layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88. P. 014506.

33. Apostolov S. S., Rokhmanova T. N., Khankina S. I., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of THz waves by their reflection and transmission through a finite layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2012. Vol. 38, No. 9. P. 880–887.

34. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 90. P. 184503.

35. Рохманова Т. Н., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Нелинейная трансформация волн с различными поляризациями в ограниченных слоистых сверхпроводниках. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 2. С. 66–71.

36. Apostolov S. S., Havrilenko V. I., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 2. P. 296–302.

37. Апостолов С. С., Кадыгроб Д. В., Майзелис З. А., Николаенко А. А., Шматько А. А., Ямпольский В. А. Нормальная и аномальная дисперсия слабонелинейных локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника. *Радиофизика и электроника*. 2017. Т. 22. С. 31–38.

38. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized modes in a plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 3. P. 238–246.

39. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'Skii V. A. Nonlinear Wood anomalies in the reflectivity of layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 3. P. 199–204.

40. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampol'skii V. A. Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission. *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 97. P. 024510.

41. Apostolov S. S., Iakushev D. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Terahertz transverse-magnetic-polarized waves localized on a layered superconductor defect in photonic crystals. *Радиофизика и электроника*. 2016. Vol. 21. P. 77–82.

42. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampolskii V. A. Resonant transparency of a photonic crystal containing layered superconductor as a defect. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 7. P. 848–854.

43. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Ямпольский В. А. Управление отражательной способностью слоистого сверхпроводника с помощью статического магнитного поля. *Радиофизика и электроника*. 2014. Т. 19. С. 49–54.

44. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol'skii V. A. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94. P. 024513.

45. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of the electromagnetic waves reflected from the layered superconductors in an external dc magnetic field. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 10. P. 916–923.

46. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 6. P. 552–560.

47. Апостолов С. С., Сорокина М. А., Майзелис З. А., Слипченко Т. М., Ямпольский В. А. Гистерезисная амплитудная зависимость коэффициента

прохождения электромагнитной волны через пластину слоистого сверхпроводника. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали 9-ї Міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Харків, 2009. С. 41.

48. Сорокина М. А., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Self-induced transparency of layered superconductor. *Физика низких температур*: материалы международной научной конференции молодых ученых (г. Харьков, 7–11 июня 2010 г.). Харьков, 2010. С. 62.

49. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{+-} superconductors. *APS March Meeting 2013*: Bulletin of the American Physical Society, Baltimore, Maryland, USA, 18–22 March, 2013. Baltimore, 2013. P. M36.12.

50. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol’skii V. A. Self-induced thz-waves transmissivity of waveguides with layered superconductors. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 34.

51. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol’skii V. A. Transformation of thz waves polarization via transmission through a finite slab of layered superconductor. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 35.

52. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol’skii V. A. Nonlinear thz-waves transmission through a finite-length layered superconductor placed inside a vacuum rectangular wave-guide. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 13th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 2–6 December, 2013. Kharkiv, 2013. P. 17.

53. Apostolov S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014. Denver, 2014. P. A42.7.

54. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Superposition principle for nonlinear waveguide modes in layered superconductors. *Low temperature physics – 2014*: Proceedings of 5th International Conference for Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 2–6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 41.

55. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg, Germany, 10–17 August, 2014. Heidelberg, 2014. P. 22.

56. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors placed inside a vacuum waveguide. *Condensed matter in Paris 2014*: Proceedings of the international conference, Paris, France, 24–29 August, 2014. Paris, 2014. P. 365–366.

57. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 14th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October, 2014. Kharkiv, 2014. P. 19.

58. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by dc magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Vilnius, 2015. P. 64.

59. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of dc magnetic field on reflectivity of layered

superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 21.

60. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of thz waves through finite-thickness layered superconductors in the presence of external dc magnetic field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. P. 23.

61. Апостолов С. С., Левченко А. А. Многократные андреевские и нормальные отражения в двумерном топологическом изоляторе. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkov, 2016. С. 13.

62. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф., Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkov, 2016. С. 40–41.

63. Рохманова Т., Апостолов С. С. Керування прозорістю шаруватих надпровідників зовнішнім постійним магнітним полем. *ІФКС – 2017*: матеріали 17-ї Всеукраїнської школи-семінару та Конкурсу молодих вчених (м. Львів, Україна, 8–9 червня 2017 р.). Львів, 2017. С. 17.

64. Nikolaenko A. A., Shmat'ko A. A., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Yampol'skii V. A. Weakly non-linear localized modes in layered superconductor plates. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 37.

65. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Dc magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в*

твердих тілах: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 39.

66. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized waves in layered superconductors: Jacobi elliptic functions approach. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 177–180.

67. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Description of localized josephson plasma waves: Legendre functions vs WKB approximation. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 181–184.

68. Апостолов С. С. Електродинамічні й оптичні явища в нормальних і надпровідних наносистемах: дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут». Харків, 2010. 113 с.

69. Рохманова Т. М. Відбиття, проходження і трансформація електромагнітних хвиль у шаруватих надпровідниках скінченних розмірів: дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України. Харків, 2015. 142 с.

70. Kamerlingh-Onnes H. The superconductivity of mercury. *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden.* 1911. Vol. 124. P. 21–25.

71. Bednorz J. G., Müller K. A. Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. *Z. Phys. B*. 1986. Vol. 64. P. 189–193.

72. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*. 1933. Vol. 21, No. 44. P. 787–788.

73. London F., London H. The Electromagnetic Equations of the Supraconductor. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1935. Vol. 149. P. 71–88.

74. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1950. Т. 20. С. 1064.

75. Абрикосов А. А. О магнитных свойствах сверхпроводников второго рода. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1957. Т. 32. С. 1442–1450.

76. Боголюбов Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости. i.. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1958. Т. 34. С. 58–65.

77. Боголюбов Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости. iii.. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1958. Т. 34. С. 73–79.

78. Горьков Л. П. Об энергетическом спектре сверхпроводников. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1958. Т. 34. С. 735–739.

79. Горьков Л. П. Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга-Ландау в теории сверхпроводимости. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1959. Т. 36. С. 1918–1923.

80. Josephson B. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Phys. Lett*. 1962. Vol. 1, No. 7. P. 251 – 253.

81. Shapiro S. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Phys. Rev. Lett*. 1963. Vol. 11. P. 80–82.

82. Янсон И. К., Свистунов В. М., Дмитренко И. М. Экспериментальное наблюдение туннельного эффекта для куперовских пар с излучением фотонов. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1965. Т. 48. С. 976–979.

83. Bulaevskii L. N., Kuzii V. V., Sobyanin A. A. Superconducting system with weak coupling to current ground-state. *JETP Lett*. 1977. Vol. 25. P. 290–294.

84. Zagoskin A. M. d-Wave superconductors and quantum computers. *Physica C*. 2002. Vol. 368. P. 305–309.

85. Martín-Rodero A., García-Vidal F. J., Levy Yeyati A. Microscopic theory of josephson mesoscopic constrictions. *Phys. Rev. Lett*. 1994. Vol. 72. P. 554–557.

86. Sols F., Ferrer J. Crossover from the josephson effect to bulk superconducting flow. *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49. P. 15913–15919.

87. Ivanov Z. G., Kupriyanov M. Y., Likharev K. K., Snigirev O. V. Boundary conditions for the usadel equations and properties of dirty s-n-s sandwiches. *J. Phys. Colloques*. 1978. Vol. 39, No. C6. P. 556–557.

88. Usadel K. D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys. *Phys. Rev. Lett*. 1970. Vol. 25. P. 507–509.

89. Куприянов М. Ю., Лукичев В. Ф. Влияние прозрачности границ на критический ток грязных $ss's$ структур. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1988. Т. 94. С. 139–149.

90. Андреев А. Ф. Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1964. Т. 46. С. 1823–1828.

91. Blonder G. E., Tinkham M., Klapwijk T. M. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion. *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 25. P. 4515–4532.

92. Klapwijk T. M., Blonder G. E., Tinkham M. Explanation of subharmonic energy gap structure in superconducting contacts. *Physica B+C*. 1982. Vol. 109. P. 1657–1664.

93. де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. Москва: Мир, 1968. 279 с.

94. Octavio M., Tinkham M., Blonder G. E., Klapwijk T. M. Subharmonic energy-gap structure in superconducting constrictions. *Phys. Rev. B*. 1983. Vol. 27. P. 6739–6746.

95. Ginzburg V. L. On surface superconductivity. *Phys. Lett*. 1964. Vol. 13, No. 2. P. 101 – 102.

96. Келдыш Л. В. Сверхпроводимость в неметаллических системах. *Усп. физ. наук*. 1965. Т. 86, № 2. С. 327–333.

97. Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Müller P. Intrinsic josephson effects in $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_8}$ single crystals. *Phys. Rev. Lett*. 1992. Vol. 68. P. 2394–2397.

98. Kleiner R., Müller P. Intrinsic josephson effects in high-T_c superconductors. *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49. P. 1327–1341.

99. Nagamatsu J., Nakagawa N., Muranaka T., Zenitani Y., Akimitsu J. Superconductivity at 39K in magnesium diboride. *Nature*. 2001. Vol. 410. P. 63–64.

100. Lawrence W. E., Doniach S. Theory of layer structure superconductors. *Low Temperature Physics*: Proceedings of the Twelfth International Conference / Ed. by E. Kanda. Kyoto: Academic Press of Japan, 1971. P. 361–362.

101. Chen Z., Hoffmann K. H., Jiang J. On the lawrence-doniach model for layered superconductors. *European J. Appl. Math.*. 1997. Vol. 8, No. 4. P. 369–387.

102. Deutscher G., Entin-Wohlman O. Critical fields of weakly coupled superconductors. *Phys. Rev. B*. 1978. Vol. 17. P. 1249–1252.

103. Ballarino A. HTS current leads: Performance overview in different operating modes. *IEEE Trans. Appl. Supercond*. 2007. Vol. 17, No. 2. P. 2282–2285.

104. Köhler R., Tredicucci A., Beltram F., Beere H. E., Linfield E. H., Davies A. G. et al. Terahertz semiconductor-heterostructure laser. *Nature*. 2002. Vol. 417. P. 156–159.

105. Beard M. C., Turner G. M., Schmuttenmaer C. A. Terahertz spectroscopy. *J. Phys. Chem. B* . 2002. Vol. 106, No. 29. P. 7146–7159.

106. Kohn W., Luttinger J. M. New mechanism for superconductivity. *Phys. Rev. Lett*. 1965. Vol. 15. P. 524–526.

107. Takahashi H., Igawa K., Arii K., Kamihara Y., Hirano M., Hosono H. Superconductivity at 43 K in an iron-based layered compound $\mathrm{LaO_{1-x}F_xFeAs}$. *Nature*. 2008. Vol. 453. P. 376–378.

108. Минеев В. П., Самохин К. В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. Москва: МФТИ, 1998. 144 с.

109. Gurvitch M., Washington M. A., Huggins H. A. High quality refractory josephson tunnel junctions utilizing thin aluminum layers. *Appl. Phys. Lett.*. 1983. Vol. 42, No. 5. P. 472–474.

110. Wu Y.-L., Deng H., Yu H.-F., Xue G.-M., Tian Y., Li J. et al. Fabrication of $\mathrm{Al}/\mathrm{AlO}_x/\mathrm{Al}$ josephson junctions and superconducting quantum circuits by shadow evaporation and a dynamic oxidation process. *Chinese Phys. B*. 2013. Vol. 22, No. 6. P. 060309.

111. Tachiki M., Koyama T., Takahashi S. Electromagnetic phenomena related to a low-frequency plasma in cuprate superconductors. *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, No. 10. P. 7065–7084.

112. Bulaevskii L. N., Maley M. P., Tachiki M. Low frequency magneto-optical properties of josephson-coupled superconductors. *Phys. Rev. Lett*. 1995. Vol. 74, No. 5. P. 801–804.

113. Kadowaki K., Kakeya I., Gaifullin M. B., Mochiku T., Takahashi S., Koyama T., Tachiki M. Longitudinal josephson-plasma excitation $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$: Direct observation of the nambu-goldstone mode in a superconductor. *Phys. Rev. B*. 1997. Vol. 56, No. 9. P. 5617–5621.

114. Tachiki M., Machida M. Current understanding of josephson plasma theory and experiments in HTSC. *Physica C*. 2000. Vol. 341-348. P. 1493–1498.

115. Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices. *J. Appl. Phys*. 1993. Vol. 73, No. 5. P. 2411–2418.

116. Helm C., Bulaevskii L. N. Optical properties of layered superconductors near the josephson plasma resonance. *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66, No. 9. P. 094514.

117. Bulaevskii L. N., Zamora M., Baeriswyl D., Beck H., Clem J. R. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in josephson-coupled layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, No. 17. P. 12831–12834.

118. Koyama T., Tachiki M. $I - V$ characteristics of josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations. *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 54, No. 22. P. 16183–16191.

119. Machida M., Koyama T., Tanaka A., Tachiki M. Theory of the superconducting phase and charge dynamics in intrinsic josephson-junction systems: microscopic foundation for longitudinal josephson plasma and phenomenological dynamical equations. *Physica C*. 2000. Vol. 331, No. 1. P. 85–96.

120. Artemenko S. N., Remizov S. V. Excitation of plasma oscillations during the motion of josephson vortices in layered superconductors. *JETP Lett*. 1997. Vol. 66, No. 12. P. 853–859.

121. Artemenko S., Remizov S. Stability, collective modes and radiation from sliding josephson vortex lattice in layered superconductors. *Physica C*. 2001. Vol. 362, No. 1-4. P. 200–204.

122. Shafranjuk S. E., Tachiki M., Yamashita T. Penetration of ac fields into anisotropic layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 1997. Vol. 55, No. 13. P. 8425–8429.

123. Ryndyk D. A. Collective dynamics of intrinsic josephson junctions in high-TcSuperconductors. *Phys. Rev. Lett*. 1998. Vol. 80, No. 15. P. 3376–3379.

124. Rother S., Koval Y., Müller P., Kleiner R., Ryndyk D. A., Keller J., Helm C. Charge-imbalance effects in intrinsic josephson systems. *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67, No. 2. P. 024510.

125. Koshelev A. E. Role of in-plane dissipation in dynamics of a josephson vortex lattice in high-temperature superconductors. *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, No. 6. P. R3616–R3619.

126. Khankina S. I., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A. Josephson plasma oscillations in confined layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2012. Vol. 38, No. 3. P. 193–198.

127. Rakhmanov A. L., Yampol'skii V. A., Fan J. A., Capasso F., Nori F. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81, No. 7.

128. Pendry J. B., Smith D. R. Reversing light with negative refraction. *Physics Today*. 2004. Vol. 57, No. 6. P. 37–43.

129. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett*. 2000. Vol. 85, No. 18. P. 3966–3969.

130. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ. *Усп. физ. наук*. 1967. Т. 92. С. 517–526.

131. Мандельштам Л. И. Групповая скорость в кристаллической решетке. *Журн. эксперим. и теор. физ*. 1945. Т. 15. С. 475–478.

132. Агранович В. М., Гартштейн Ю. Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света. *Усп. физ. наук*. 2006. Т. 176, № 10. С. 1051–1068.

133. Golick V. A., Kadygrob D. V., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Ivanov B. A., Nori F. Surface josephson plasma waves in layered superconductors above the plasma frequency: Evidence for a negative index of refraction. *Phys. Rev. Lett*. 2010. Vol. 104. P. 187003.

134. Rajaraman R. Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. Amsterdam: North-Holland, 1987. 418 p.

135. Olsen O. H., Samuelsen M. R. Hysteresis in rf-driven large-area josephson junctions. *Phys. Rev. B*. 1986. Vol. 34, No. 5. P. 3510–3512.

136. Savel'ev S., Rakhmanov A. L., Yampol'skii V. A., Nori F. Analogues of nonlinear optics using terahertz josephson plasma waves in layered superconductors. *Nature Phys*. 2006. Vol. 2, No. 8. P. 521–525.

137. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Rakhmanov A. L., Nori F. Nonlinear electrodynamics in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, No. 2. P. 024511.

138. Savel'ev S., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Nori F. Layered superconductors as nonlinear waveguides for terahertz waves. *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 75, No. 18. P. 184503.

139. Belzig W., Wilhelm F. K., Bruder C., Schön G., Zaikin A. D. Quasiclassical green's function approach to mesoscopic superconductivity. *Superlattices Microstruct.* 1999. Vol. 25, No. 5. P. 1251 – 1288.

140. Brinkman A., Golubov A. A., Kupriyanov M. Y. Proximity effect in normal metal–multiband superconductor hybrid structures. *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69. P. 214407.

141. Linder J., Sperstad I. B., Sudbø A. $0 - \pi$ phase shifts in josephson junctions as a signature for the $s_{\pm}$-wave pairing state. *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 80. P. 020503.

142. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.

143. Levchenko A. Crossover in the local density of states of mesoscopic superconductor/normal-metal/superconductor junctions. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. P. 180503.

144. Зайкин А. Д., Жарков Г. Ф. К теории широких «грязных» sns контактов. *Физ. низк. темп*. 1981. Т. 7, № 3. С. 375–379.

145. Buzdin A., Baladié I. Theoretical description of ferromagnetic π junctions near the critical temperature. *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67. P. 184519.

146. Yerin Y. S., Omelyanchouk A. N. Josephson currents in point contacts between dirty two-band superconductors. *Low Temperature Physics*. 2010. oct. Vol. 36, No. 10. P. 969–973.

147. von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett*. 1980. Vol. 45. P. 494–497.

148. Laughlin R. B. Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B*. 1981. Vol. 23. P. 5632–5633.

149. Thouless D. J., Kohmoto M., Nightingale M. P., den Nijs M. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett*. 1982. Vol. 49. P. 405–408.

150. König M., Wiedmann S., Brüne C., Roth A., Buhmann H., Molenkamp L. W. et al. Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. *Science*. 2007. Vol. 318, No. 5851. P. 766–770.

151. Knez I., Du R.-R., Sullivan G. Evidence for helical edge modes in inverted $\mathrm{InAs/GaSb}$ quantum wells. *Phys. Rev. Lett*. 2011. Vol. 107. P. 136603.

152. Wu C., Bernevig B. A., Zhang S.-C. Helical liquid and the edge of quantum spin Hall systems. *Phys. Rev. Lett*. 2006. Vol. 96. P. 106401.

153. Roth A., Brüne C., Buhmann H., Molenkamp L. W., Maciejko J., Qi X.-L., Zhang S.-C. Nonlocal transport in the quantum spin Hall state. *Science*. 2009. Vol. 325, No. 5938. P. 294–297.

154. Nowack K. C., Spanton E. M., Baenninger M., König M., Kirtley J. R., Kalisky B. et al. Imaging currents in HgTe quantum wells in the quantum spin hall regime. *Nature Mater*. 2013. Vol. 12, No. 9. P. 787–791.

155. Lezmy N., Oreg Y., Berkooz M. Single and multiparticle scattering in helical liquid with an impurity. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 85. P. 235304.

156. Crépin F., Budich J. C., Dolcini F., Recher P., Trauzettel B. Renormalization group approach for the scattering off a single Rashba impurity in a helical liquid. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86. P. 121106.

157. Ström A., Johannesson H., Japaridze G. I. Edge dynamics in a quantum spin Hall state: Effects from Rashba spin-orbit interaction. *Phys. Rev. Lett*. 2010. Vol. 104. P. 256804.

158. Schmidt T. L., Rachel S., von Oppen F., Glazman L. I. Inelastic electron backscattering in a generic helical edge channel. *Phys. Rev. Lett*. 2012. Vol. 108. P. 156402.

159. Virtanen P., Recher P. Signatures of Rashba spin-orbit interaction in the superconducting proximity effect in helical Luttinger liquids. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 85. P. 035310.

160. Rothe D. G., Reinthaler R. W., Liu C.-X., Molenkamp L. W., Zhang S.-C., Hankiewicz E. M. Fingerprint of different spin–orbit terms for spin transport in HgTe quantum wells. *New J. Phys*. 2010. Vol. 12, No. 6. P. 065012.

161. Dienst A., Casandruc E., Fausti D., Zhang L., Eckstein M., Hoffmann M. et al. Optical excitation of josephson plasma solitons in a cuprate superconductor. *Nature Mater*. 2013. Vol. 12, No. 6. P. 535–541.

162. Averkov Y. O., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A., Nori F. Oblique surface josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 87. P. 054505.

163. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1, Механика. Москва: Физматлит, 2004. 224 с.

164. Otto A. Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection. *Z. Phys. A*. 1968. Vol. 216, No. 4. P. 398–410.

165. Агранович В. М., Миллс Д. Л. Поверхностные поляритоны: электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред. Москва: Наука, 1985. 525 с.

166. Yampol'skii V. A., Kats A. V., Nesterov M. L., Nikitin A. Y., Slipchenko T. M., Savel'ev S., Nori F. Resonance effects due to the excitation of surface josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79. P. 214501.

167. Borodianskyi E. A., Krasnov V. M. Josephson emission with frequency span 1–11 THz from small $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ mesa structures. *Nature Comm*. 2017. Vol. 8, No. 1.

168. Markos P., Soukoulis C. M. Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials. Princeton University Press, 2008. P. 376.

169. Yampol'skii V. A., Gulevich D. R., Savel'ev S., Nori F. Surface plasma waves across the layers of intrinsic josephson junctions. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78. P. 054502.

170. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Москва: Наука, 1964. 772 с.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{+-} superconductors. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86. P. 224501.

2. Apostolov S. S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89. P. 201303.

3. Апостолов С. С. Многократное андреевское отражение в двухмерном топологическом изоляторе. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 1. С. 65–71.

4. Yampol'skii V. A., Slipchenko T. M., Mayzelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S., Savel'ev S. E., Nori F. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78. P. 184504.

5. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Mayselis Z. A., Slipchenko T. M., Savel'ev S. E., Yampol'skii V. A. Hysteresis jumps of the surface reactance of a layered superconductor as the incident wave amplitude varies. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 1. P. 92–99.

6. Apostolov S. S., Bozhko A. A., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A. Amplitude hysteresis of the surface reactance of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 4. P. 265–272.

7. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82. P. 144521.

8. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F.

Self-induced terahertz-wave transmissivity of waveguides with finite-length layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88. P. 014506.

9. Apostolov S. S., Rokhmanova T. N., Khankina S. I., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of THz waves by their reflection and transmission through a finite layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2012. Vol. 38, No. 9. P. 880–887.

10. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Nori F. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 90. P. 184503.

11. Рохманова Т. Н., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Нелинейная трансформация волн с различными поляризациями в ограниченных слоистых сверхпроводниках. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. Т. 2. С. 66–71.

12. Apostolov S. S., Havrilenko V. I., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 2. P. 296–302.

13. Апостолов С. С., Кадыгроб Д. В., Майзелис З. А., Николаенко А. А., Шматько А. А., Ямпольский В. А. Нормальная и аномальная дисперсия слабонелинейных локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника. *Радиофизика и электроника*. 2017. Т. 22. С. 31–38.

14. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized modes in a plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 3. P. 238–246.

15. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Sorokina M. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear Wood anomalies in the reflectivity of layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2010. Vol. 36, No. 3. P. 199–204.

16. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampol'skii V. A. Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission. *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 97. P. 024510.

17. Apostolov S. S., Iakushev D. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A.,

Yampol'skii V. A. Terahertz transverse-magnetic-polarized waves localized on a layered superconductor defect in photonic crystals. *Радиофизика и электроника*. 2016. Vol. 21. P. 77–82.

18. Apostolov S. S., Makarov N. M., Yampolskii V. A. Resonant transparency of a photonic crystal containing layered superconductor as a defect. *Low Temp. Phys*. 2017. Vol. 43, No. 7. P. 848–854.

19. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Ямпольский В. А. Управление отражательной способностью слоистого сверхпроводника с помощью статического магнитного поля. *Радиофизика и электроника*. 2014. Т. 19. С. 49–54.

20. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol'skii V. A. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94. P. 024513.

21. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transformation of the polarization of the electromagnetic waves reflected from the layered superconductors in an external dc magnetic field. *Low Temp. Phys*. 2016. Vol. 42, No. 10. P. 916–923.

22. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys*. 2018. Vol. 44, No. 6. P. 552–560.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

23. Апостолов С. С., Сорокина М. А., Майзелис З. А., Слипченко Т. М., Ямпольский В. А. Гистерезисная амплитудная зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны через пластину слоистого сверхпроводника. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали 9-ї Міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Харків, 2009. С. 41.

24. Сорокина М. А., Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А. Self-induced transparency of layered superconductor. *Физика низких температур*: материалы международной научной конференции молодых ученых (г. Харьков, 7–

11 июня 2010 г.). Харьков, 2010. С. 62.

25. Apostolov S., Levchenko A. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{+-} superconductors. *APS March Meeting 2013*: Bulletin of the American Physical Society, Baltimore, Maryland, USA, 18–22 March, 2013. Baltimore, 2013. P. M36.12.

26. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Self-induced THz-waves transmissivity of waveguides with layered superconductors. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 34.

27. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transformation of THz waves polarization via transmission through a finite slab of layered superconductor. *Nanotechnology and nanomaterials*: Proceedings of the international summer school and practice conference, Bukovel, Ukraine, 25 Aug – 1 Sept, 2013. Bukovel, 2013. P. 35.

28. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Nonlinear THz-waves transmission through a finite-length layered superconductor placed inside a vacuum rectangular wave-guide. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 13th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 2–6 December, 2013. Kharkiv, 2013. P. 17.

29. Apostolov S., Levchenko A. Nonequilibrium spectroscopy of topological edge liquids. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014. Denver, 2014. P. A42.7.

30. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Superposition principle for nonlinear waveguide modes in layered superconductors. *Low temperature physics – 2014*: Proceedings of 5th International Conference for Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 2–6 June, 2014. Kharkiv, 2014. P. 41.

31. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applyi-ng a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg,

Germany, 10–17 August, 2014. Heidelberg, 2014. P. 22.

32. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors placed inside a vacuum waveguide. *Condensed matter in Paris 2014*: Proceedings of the international conference, Paris, France, 24–29 August, 2014. Paris, 2014. P. 365–366.

33. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics*: Proceedings of 14th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October, 2014. Kharkiv, 2014. P. 19.

34. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by dc magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Vilnius, 2015. P. 64.

35. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of dc magnetic field on reflectivity of layered superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 21.

36. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of THz waves through finite-thickness layered superconductors in the presence of external dc magnetic field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. P. 23.

37. Апостолов С. С., Левченко А. А. Многократные андреевские и нормальные отражения в двумерном топологическом изоляторе. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–

23 November, 2016. Kharkov, 2016. C. 13.

38. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф., Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Procedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkov, 2016. C. 40–41.

39. Рохманова Т., Апостолов С. С. Керування прозорістю шаруватих надпровідників зовнішнім постійним магнітним полем. *ІФКС – 2017*: матеріали 17-ї Всеукраїнської школи-семінару та Конкурсу молодих вчених (м. Львів, Україна, 8–9 червня 2017 р.). Львів, 2017. С. 17.

40. Nikolaenko A. A., Shmat'ko A. A., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Yampol'skii V. A. Weakly non-linear localized modes in layered superconductor plates. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 37.

41. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Dc magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 39.

42. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Nikolaenko A. A., Yampol'skii V. A. Nonlinear localized waves in layered superconductors: Jacobi elliptic functions approach. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 177–180.

43. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Kvitka N., Yampol'skii V. A. Description of localized josephson plasma waves: Legendre functions vs WKB approximation. *Mathematical methods in electromagnetic theory*: Proceedings of IEEE 17-th international conference, Kyiv, Ukraine, 2–5 July, 2018. Kyiv, 2018. P. 181–184.