

ИСКУССТВЕННЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ, ОБРАЗОВАННЫЕ РЕШЕТКАМИ РЕЗОНАНСНЫХ РАССЕИВАЮЩИХ ТЕЛ

Г.А. Брызгалов, Н.А. Хижняк

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Украина, 61108, Харьков, Академическая, 1
bryzgalov@kharkov.ua

Рассмотрена правильная пространственная решетка одинаковых сферических рассеивающих тел при условии $d \ll \lambda$ (d - постоянная решетки, λ - длина волны). В электродинамическом отношении она эквивалентна однородной среде с эффективными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. $\epsilon_{\text{эфф}}$ и $\mu_{\text{эфф}}$ искусственного диэлектрика выражаются через матрицы рассеяния электромагнитных волн на отдельных телах, закрепленных в узлах решетки, и через характеристики пространственной решетки. Сравнение расчетных и экспериментальных характеристик решеток показали, что наблюдаются резонансные частоты, соответствующие положительным и отрицательным значениям эффективной диэлектрической проницаемости. Исследованные структуры могут служить моделями естественных кристаллических диэлектриков при изучении их электродинамических свойств, а также моделями структур, образованных ядрами клеток живых тканей.

PACS numbers: 78.20.Ci, 41.20.Jb, 42.70.Qs, 73.20.Mf

Правильная пространственная решетка однотипных рассеивающих тел при условии $d \ll \lambda$ (d - постоянная решетки, λ - длина рассеиваемой волны) в электродинамическом отношении эквивалентна однородной среде с определенными значениями эффективных диэлектрической и магнитной проницаемостей (искусственный диэлектрик) [1]. Теория искусственных диэлектриков в частотной области построена еще в 50-е годы [2,3], хотя простейший пример кубической решетки сферических частиц в статическом приближении описан еще в XIX веке (формула Клаузиуса-Моссотти) [4]. Модель искусственного диэлектрика достаточно часто используется в различных теоретических построениях, хотя систематические сравнения расчетных и экспериментально измеренных значений эффективных диэлектрических проницаемостей проведены лишь для простейших решеток, образованных бесконечно тонкими, идеально проводящими дисками [5,6]. В последние годы модель искусственного диэлектрика используется при описании взаимодействия электромагнитных волн с живыми тканями, в биофизике, где живые клетки формируют упорядоченную пространственную структуру, а ядра этих клеток служат рассеивающими центрами с совершенно уникальными рассеивающими возможностями [8]. Анализ возможностей распространения электромагнитных волн в подобных структурах посвящена настоящая работа.

С физической точки зрения рассеяние электромагнитной волны материальными телами объема V , заданной геометрией и материальными константами ϵ и μ , описывается электрическим $\Pi^{\text{Э}}$ и магнитным $\Pi^{\text{М}}$ потенциалами Герца.

$$\Pi^{\text{Э}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{g}} \mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}, \quad \Pi^{\text{М}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}} \mathbf{H}_0 \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}, \quad (1)$$

определяющими рассеянную сферическую волну (временная зависимость полей предполагается в

виде $e^{i\omega t}$). Здесь \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 - напряженности электрического и магнитного полей подающей волны, рассеиваемой рассматриваемым телом, расположенным в начале координат, $\hat{\mathbf{g}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ - матрицы рассеяния волны. Если рассеивающими телами являются диэлектрические шары радиуса a ($ka \ll 1$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) с проницаемостями ϵ и μ , образующими решетку в однородном пространстве с проницаемостями ϵ_1 и μ_1 , то тогда [2]

$$\hat{\mathbf{g}} = a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1} \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{p}} = a^3 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + 2\mu_1} \hat{\mathbf{I}}, \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ - единичный тензор. В этом частном случае матрицы рассеяния волн не зависят от частоты (квазистатическое приближение).

В общем случае тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей искусственной среды, образованной правильной решеткой тел, с матрицами рассеяния q_{ik} и p_{ik} равны [7]

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_1 \left\{ \hat{\mathbf{I}} + \frac{4\pi}{\Omega} \hat{\mathbf{g}} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{\mathbf{g}} \right)^{-1} \right\}, \quad (3)$$

$$\hat{\mu} = \mu_1 \left\{ \hat{\mathbf{I}} + \frac{4\pi}{\Omega} \hat{\mathbf{p}} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{\mathbf{p}} \right)^{-1} \right\},$$

где Ω - объем элементарной ячейки правильной решетки, образующей искусственный диэлектрик, $\hat{\delta}$ - структурная матрица решетки.

В рассматриваемом квазистатическом приближении эффективные значения проницаемостей, образованных правильной решеткой сферических частиц, равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3C}{\frac{\varepsilon + 2\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \delta_{xx} C} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3C}{\frac{\varepsilon + 2\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \delta_{yy} C} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3C}{\frac{\varepsilon + 2\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \delta_{zz} C} \right),\end{aligned}\quad (4)$$

где $C = \frac{4\pi a^3}{3\Omega}$ - объемная концентрация частиц,

δ_{ik} - нормированные элементы структурной матрицы решетки, например, $\delta_{xx} = -\frac{3}{4\pi} \delta_{11}$. Соответствующие матрицы для простейших решеток вычислены в работах [2], и равны:

- Ортогональная решетка. Элементарной ячейкой ортогональной решетки является прямоугольный параллелепипед, а сама решетка может быть описана с помощью двух параметров, например, $\beta = (d_2/d_1)$ и $\gamma = (d_3/d_1)$, где d_1, d_2 и d_3 - постоянные решетки по осям X, Y и Z соответственно. Окончательно находим

$$\begin{aligned}\delta_{xx} &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \left(28 + \frac{20}{\beta^2} + \frac{20}{\gamma^2} - \frac{30}{\beta^4} - \frac{30}{\gamma^4} \right) \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15\gamma}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} + \frac{15\beta}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right\}, \\ \delta_{yy} &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \left(28 - \frac{10}{\beta^2} - \frac{10}{\gamma^2} - 30 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \beta^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\beta\rho} + \right. \\ &\quad \left. + 30 \frac{(1 - \beta^2)}{\beta^4} \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\rho} + 30 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \gamma^2 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\gamma\rho} + \right. \\ &\quad \left. + 15 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \beta \ln \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} - 30 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \gamma \ln \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} \right\},\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\delta_{zz} &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \left(28 - \frac{10}{\beta^2} - \frac{10}{\gamma^2} - 30 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \gamma^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\gamma\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{30(1 - \gamma^2)}{\gamma^4} \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\rho} + 30 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \beta^2 \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\beta\rho} + \right. \\ &\quad \left. + 15 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \gamma \ln \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} - 30 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \beta \ln \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right\},\end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{1 + \beta^2 + \gamma^2}$. Если ортогональная решетка мало отличается от кубической, выражения для элементов матрицы δ существенно упрощаются и тогда

$$\begin{aligned}\delta_{xx} &= \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\rho}, \quad \delta_{yy} = \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\beta\gamma}, \\ \delta_{zz} &= \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\gamma\rho}.\end{aligned}\quad (6)$$

Из приведенных формул следует, что величина δ_{xx} симметрична относительно параметров β и γ , а δ_{zz} получается из δ_{yy} заменой местами β и γ .

- Тетрагональная решетка. Частным случаем рассмотренной ортогональной решетки является тетрагональная решетка (элементарной ячейкой является прямоугольный параллелепипед, у основания которого лежит квадрат). Для этой решетки соответствующие формулы находятся из (5), если положить $d_1 = d_3$ или $d_1 = d_2$. Если $d_1 = d_3$, то полагая $\gamma = 1$, находим:

$$\begin{aligned}\delta_{xx} = \delta_{zz} &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \left(18 + \frac{20}{\beta^2} - \frac{30}{\beta^4} \right) \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\sqrt{2 + \beta^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 15 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \ln \frac{\sqrt{2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{2 + \beta^2} - \beta} \right\},\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\delta_{yy} &= \frac{3}{4\pi} \left\{ \left(18 - \frac{10}{\beta^2} \right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta\sqrt{2 + \beta^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 60 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{2 + \beta^2}} - \right. \\ &\quad \left. - 30 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \ln \frac{\sqrt{2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{2 + \beta^2} - \beta} \right\}.\end{aligned}$$

- Кубическая решетка. Решетка $d_1 = d_2 = d_3$ соответствует высшей симметрии, и в этом случае

$$\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1, \quad (8)$$

Известно также, что изотропный диэлектрик, образованный случайно распределенной в пространстве системой сферических частиц имеет проницаемость, определяемую формулой (3), в которой надо

положить $\hat{\delta} = -\frac{3}{4\pi}\hat{1}$. Тогда анизотропия отсутствует и диэлектрик является изотропным

$$\varepsilon_m = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3C}{\frac{\varepsilon + 2\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - C} \right). \quad (9)$$

Именно для изотропного искусственного диэлектрика справедлива формула Клаузиуса-Моссотти:

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_1}{\varepsilon_m + 2\varepsilon_1} = C \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}. \quad (10)$$

– Гексагональная решетка. Выбор геометрии элементарной ячейки для гексагональной решетки не однозначен. В качестве элементарной ячейки, с одной стороны, можно выбрать правильную шестигранную призму, а с другой – четырехгранную призму, в основании которой находится ромб с острым углом при вершине, равным $\pi/3$. В первом случае элементарная ячейка имеет более высокую симметрию, поэтому расчеты элементов матрицы δ_{ik} выполнялись для шестигранной призмы. Если ось z направить по оси призмы, то тогда (d_1 – высота призмы, d – сторона правильного шестиугольника в основании призмы, $\beta = (d/d_1)$):

$$\begin{aligned} \delta_{xx} = \delta_{yy} = & \frac{9}{4\pi} \left\{ \left(9 + \frac{65}{2}\beta^2 - \frac{225}{2}\beta^4 \right) \times \right. \\ & \times \arctg \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}} + \\ & \left. + 15\sqrt{3}\beta^2 \left(\frac{5}{2}\beta^2 - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{2\beta} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\beta^2}} \right) \right\}, \quad (11) \\ \delta_{zz} = & \frac{9}{4\pi} \left\{ (18 - 25\beta^2) \arctg \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{4\beta^2 + 1} - 2}{3\sqrt{4\beta^2 + 1} + 2} \right) + \right. \\ & + 90\beta^2 \left(\frac{5}{2}\beta^2 - 1 \right) \times \left[\arctg \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4\beta^2 + 1}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{4\beta^2 + 1}}{2\beta} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}\beta} \ln \frac{\sqrt{4\beta^2 + 1} - \beta}{\sqrt{4\beta^2 + 1} + \beta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что при $\beta^2 = 2/5$ искусственный диэлектрик, образованный гексагональной решёткой сферических частиц представляет собой изотропный диэлектрик, проницаемость которого определяется соотношением (9).

Моноклинная решётка. В общем случае элементарной ячейкой моноклинной решётки служит прямой параллелепипед, в основании которого лежит

произвольный параллелограмм. Такая решётка может быть описана с помощью трёх параметров, например, двух отношений высоты параллелепипеда к сторонам параллелограмма и острого угла параллелограмма. В частном случае, в основании параллелепипеда лежит ромб с острым углом при вершине, равным 2ψ . При $\psi = \pi/4$ эта решётка переходит в рассмотренную выше тетрагональную решётку. Для описания такой решётки достаточно двух параметров, например, $\beta = d_1/d$, где d_1 – высота параллелепипеда, а d – сторона ромба и угол ψ . Предположив, что моноклинная решётка мало отличается от кубической, т.е. β^2 близко к единице, а ψ к $\pi/4$, тогда:

$$\begin{aligned} \delta_{xx}(\beta, \psi) = & \frac{3}{\pi} \sin 2\psi \left\{ \operatorname{tg} \varphi \times \right. \\ & \times \left(\arctg \frac{\beta \operatorname{tg} \psi}{\rho_1} + \arctg \frac{\beta \operatorname{tg} \psi}{\rho_2} \right) + , \\ & \left. + \left(\ln \frac{\beta + \rho_1}{2 \cdot \sin \psi} - \ln \frac{\beta + \rho_2}{2 \cdot \cos \psi} \right) \right\} \\ \delta_{yy}(\beta, \psi) = & \delta_{xx}(\beta, \frac{\pi}{2} - \psi), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\delta_{zz}(\beta, \psi) = \frac{6}{\pi} \left(\arctg \frac{\rho_1}{\beta \operatorname{tg} \psi} - \arctg \frac{\beta \operatorname{tg} \psi}{\rho_2} \right),$$

где $\rho_1 = \sqrt{4\sin^2\psi + \beta^2}$, $\rho_2 = \sqrt{4\cos^2\psi + \beta^2}$.

Этими соотношениями можно описывать изменение диэлектрической и магнитной проницаемостей искусственного диэлектрика, образованного кубической решёткой сферических частиц, при деформации самой решётки. Например, если кубическая элементарная ячейка в результате деформации сжимается в прямой параллелепипед с основанием в виде ромба, то возникает анизотропия, превращающая изотропный диэлектрик в двухосный кристалл.

Рассмотрим дисперсионные свойства искусственного диэлектрика, образованного правильной решёткой сферических частиц, когда дисперсия обусловлена зависимостью коэффициентов рассеяния от частоты. В этом случае величины ε_p и μ_p , характеризующие рассеяние электромагнитных волн на сферических частицах, являются функциями частоты, и могут принимать любые, сколь угодно большие положительные и отрицательные значения. Это значит, что в искусственных диэлектриках, образованных правильными решётками сферических частиц в приближении $k_1 a \ll 1$ и $k_1 d \ll 1$, и в случаях, когда сами частицы изготовлены из диэлектриков с высокой диэлектрической проницаемостью, возможны резонансные частоты, при которых диэлектрические проницаемости обращаются в бесконечность. Эти частоты находятся из следующих трансцендентных уравнений:

$$\frac{\epsilon_p(\omega) + 2\epsilon_1}{\epsilon_p(\omega) - \epsilon_1} = \delta_{ii} C. \quad (13)$$

Они зависят от концентрации частиц C и оказываются разными для ортогональной решётки по всем трём направлениям распространения волны. Физическая природа этих резонансов идентична рассмотренным резонансам одиночной диэлектрической сферы [7]. Так как величины ϵ_p всегда имеют малую мнимую добавку, то на самом деле при резонансных частотах происходит увеличение эффективных значений диэлектрической проницаемости искусственного диэлектрика, а сами эти величины остаются конечными.

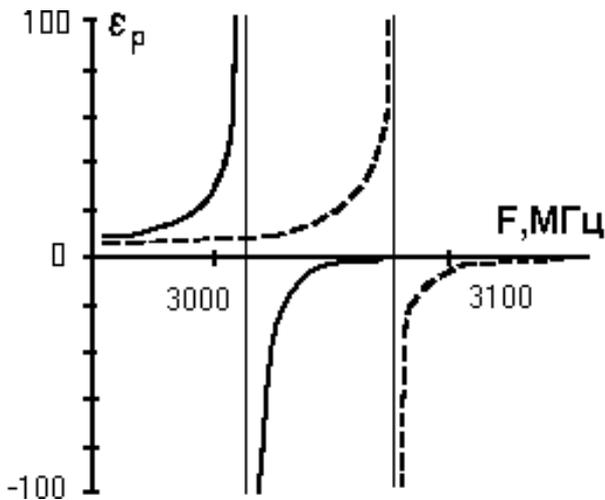


Рис.1. Эффективные диэлектрические проницаемости ϵ_p однородного диэлектрического шара в свободном пространстве и в кубической структуре искусственного диэлектрика: пунктирная кривая для одиночного шара с $\epsilon_2 = 93$, диаметром 10 мм; сплошная кривая для структуры с $C = 0,0327$

Структурные эффекты проявляются в дисперсионных свойствах искусственных диэлектриков довольно своеобразно. Если пренебречь радиационным излучением и считать величину ϵ_p действительной, то резонансными частотами будем называть частоты, при которых $\epsilon_p \rightarrow \infty$. На рис.1 представлена частотная зависимость эффективной диэлектрической проницаемости искусственного диэлектрика, образованного кубической решёткой сферических частиц и одиночной сферы в свободном пространстве. В расчёте полагается, что сферы изготовлены из однородного и изотропного диэлектрика с $\epsilon = 93$, радиусом $a = 5$ мм. Постоянная решётки $d = 20$ мм. Потерями энергии в сфере на тепло и излучение пренебрегаем. Мы видим смещение резонансов решётки в сторону более низких частот, чем для одиночной сферы. Происходит разделение резонанса на области, где эффективная диэлектрическая проницаемость принимает положи-

тельные и отрицательные значения. Эти области являются результатами преимущественного взаимодействия втекающих и вытекающих мод одиночных сфер [7].

Экспериментально исследовались пространственные структуры из $6 \times 6 \times 6$ сферических элементов. Источником возбуждения являлся штыревой вибратор, возбуждающий отдельную сферу на поверхности решётки. С противоположной стороны решётки размещался зонд съёма сигнала.

Диэлектрические сферы диаметром $10 \pm 0,01$ мм отобраны по резонансной частоте TE_{101} -вида колебаний, равной $3075 \pm 2,5$ МГц. Для кубической решётки с $d = 20$ мм были определены резонансные полосы пропускания, соответствующие возбуждению в одиночной сфере колебаний TE_{101} , TM_{101} и TE_{201} . Резонансные пары частот в каждой из полос пропускания соответственно равны: (3008 и 3028 МГц), (4330 и 4380 МГц) и (6182 и 6263 МГц).

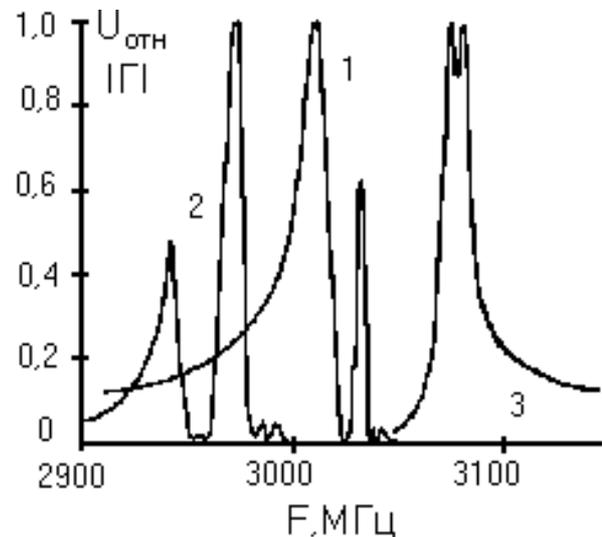


Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика искусственного диэлектрика кубической структуры, в узлах которой размещены сферы диаметром 10 мм, с $\epsilon = 93$. Параметры решётки $d = 20$ мм – кривая 1 и $d = 15$ мм – кривая 2. Модуль коэффициента отражения Γ от одиночной сферы в волноводе – кривая 3

На рис. 2 приведены амплитудно-частотные характеристики первой полосы пропускания кубической структуры искусственного диэлектрика с параметрами решётки $d = 20$ мм и $d = 15$ мм. Полоса пропускания решётки сдвинута в область низких частот относительно резонансной частоты одиночной сферы. Более плотная концентрация диэлектрика приводит к большему снижению частоты. Наблюдаемое расщепление полосы на две основные частоты, соответствует положительному и отрицательному значениям эффективной диэлектрической проницаемости. Для ортогональной решётки, когда

$d_1 = d_2 = 20$ мм, а $d_3 = 15$ мм, анизотропный диэлектрик характеризуется двумя значениями диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{zz}$ и $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, т.е. рассматриваемый диэлектрик представляет собой одноосный кристалл.

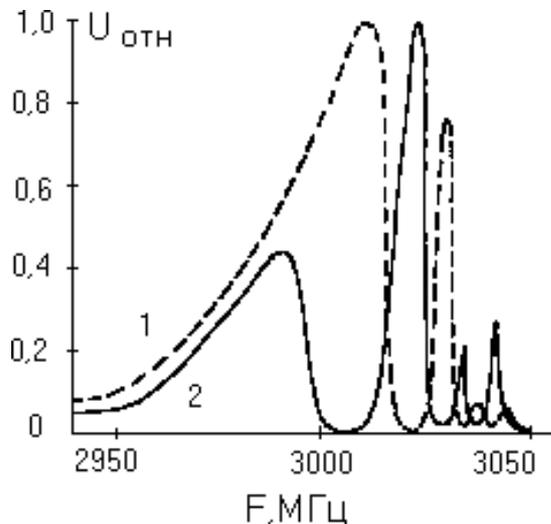


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики искусственного диэлектрика с ортогональной решёткой, измеренные в плоскости, где $d_1 = d_2 = 20$ мм – 1, и в плоскости, где $d_3 = 15$ мм – 2

На рис. 3 приведены измеренные вдоль координат x и z полосы пропускания. Поскольку $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$, то резонансные частоты решётки, измеренные в направлении координаты z (кривая 2), более низкочастотны, чем резонансы, измеренные в направлении координаты x (кривая 1). Так как в сферических частицах существуют резонансы электрического и магнитного типов, то когда частицы изготовлены из немагнитных материалов, на высоких частотах наряду с электрической анизотропией возникает магнитная анизотропия и тензор магнитных проницаемостей отличен от единичного. Поэтому искусственный анизотропный диэлектрик характеризуется не тремя, а шестью разными резонансными частотами. Различие обусловлено анизотропной пространственной решёткой. Это частотное разделение наблюдается в области отрицательных значений $\epsilon_{\text{эфф}}$, два малых пика справа от основного. Для кубической решётки эти пики проявляются сла-

бо, и являются следствием неидентичности отдельных сфер и ошибки в положении сфер в узлах решётки. Для полосы пропускания в области положительных $\epsilon_{\text{эфф}}$, это разделение частот не определяется, вследствие размытости резонанса.

Показано, что пространственные решётки в узлах которых размещены сферические диэлектрические рассеиватели имеют положительные и отрицательные значения эффективной диэлектрической проницаемости, что приводит к разделению полосы пропускания. В зависимости от геометрических размеров решётки изменяются её дисперсионные свойства и наблюдается анизотропия диэлектрической проницаемости.

Проведенные исследования показали, что можно на моделях проводить изучение электродинамических свойств природных кристаллических структур и создавать новые искусственные диэлектрики. Этот же физический механизм позволяет понять взаимодействие внешних и внутренних электромагнитных полей СВЧ и КВЧ диапазонов с живыми тканями. Клетки живых организмов образуют упорядоченную структуру, а клеточные ядра можно рассматривать как рассеивающие центры, размещённые в узлах пространственной решётки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Левин. *Теория волноводов*. М: Радио и связь, 1981, с.311.
2. Н.А.Хижняк. Искусственные анизотропные диэлектрики. // *ЖТФ*, 1957, т.27, №9, с.2006-2038.
3. Я.Б. Файнберг, Н.А.Хижняк. Искусственно анизотропные среды. // *ЖТФ*, 1959, т.25, №5, с.711-720.
4. М.В. Волькенштейн. *Молекулярная оптика*. М: Гостехиздат, 1951, с.744.
5. В.Б. Казанский, Л.Н. Литвиненко, Р.В Шапиро, В.П. Шестопапов. Теоретическое и экспериментальное исследование свойств искусственных металлодиэлектриков. // *ЖТФ*, 1970, т.40, №3, с.631-641.
6. А.Ю. Борисов, Г.Г. Бубнов, Р.В. Шапиро. Исследование дисперсии анизотропных искусственных диэлектриков. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1979, т.22, №8, с.1002-1011.
7. Н.А. Хижняк. *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики*. Киев: Наукова думка, 1986, с.280.
8. Г.А. Брызгалов, Н.А. Хижняк. Тонкая структура резонанса электромагнитных волн в диэлектрической сфере. // *Радиофизика и электроника*, 2002, т.7, Спец. вып., с.178-182.