УДК 533.9

К ТЕОРИИ ПУЧКОВЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ГЕНЕРАТОРАХ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ

И.И. Магда, А.В. Пащенко, С.С. Романов, И.Н. Шапова,
Институт плазменной электроники и новых методов ускорения, ННТЦ ХФТИ, 61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1, Украина, imagda@online.kharkiv.com;
В.Е. Новиков
НТЦ «Электрофизической обработки» НАНУ, 61002 г. Харьков, а.я. 8812, Украина

Рассмотрена самосогласованная нестационарная модель пучковой обратной связи в приборах с виртуальным катодом (ВК), использующая неустойчивость потока в катод-анодном промежутке и нелинейное взаимодействие частиц с колебаниями ВК. Нелинейные процессы в этих областях описываются на основе взаимодействия связанных генераторов Ван дер Поля - Дуффинга.

I. ВВЕДЕНИЕ

Обратные связи (ОС) по пучку и электромагнитному полю эффективно используются для повышения КПД и управления характеристиками реально существующих микроволновых приборов с ВК [1,2]. Во многих работах выполнены численные эксперименты, подтверждающие эффективность их применения, однако к настоящему времени не создано приемлемой аналитической теории ОС для таких систем.

Физические области взаимодействия частиц и полей в виркаторе на пролетном пучке в простейшем случае показаны на рис.1.

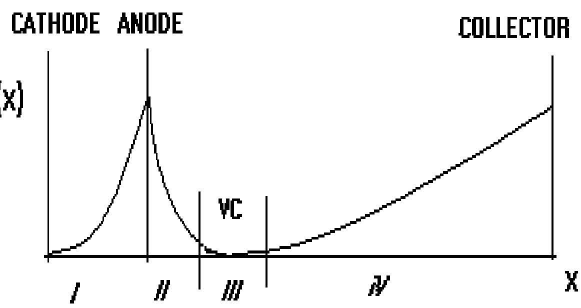


Рис.1. Характерные области виркатора: I - ускоряющий промежуток; II – область между анодом и ВК; III –область ВК; IV - область прошедшего электронного пучка

Области *I* - *III* содержат как прямой, так и отраженный от ВК пучки. В области *I* формируется электронный поток и ускоряется приложенной к катод-анодному промежутку разностью потенциалов $U(t)$. В области ВК (*III*) осуществляется отражение части прямого пучка, и возникают осцилляции электронов и полей. Характерный размер этой области в стационарном случае определяется близостью величин самосогласованного потенциала и эффективной температуры электронов вблизи ВК. В области *IV* распространяется прошедший через ВК пучок.

В рассматриваемом подходе предполагается, что обратные связи формируются потоками частиц (ПОС) и электромагнитными полями (ЭМОС), вносимыми из других областей. Они могут быть промоделированы введением в конкретную область эффективного потенциала. Также учитывается, что динамика сильноточного диода формируется неустойчивостью потока в катод-анодном промежутке. Ниже представлена самосогласованная модель ПОС в виркаторе, учитывающая нестационарность процессов в диоде со сверхкритическим током и области ВК. Эта модель основывается на анализе стационарных состояний диодного промежутка и их устойчивости.

2. ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ДИОДЕ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Замкнутые аналитические выражения для гидродинамических, полевых и спектральных характеристик потоков заряженных частиц в дрейфовом пространстве сильноточного пучка получены в работах [3-5].

Рассмотрим стационарные состояния в катод-анодном промежутке и их устойчивость. Исходными являются гидродинамические уравнения движения и непрерывности, а также уравнение Пуассона для электрического поля:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,;\ \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(nv)=0\,;\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=qn, \qquad (1)$$

Единицами измерения плотности n, скорости v, координаты z и времени t являются характерные параметры для невозмущенного потока: n_0, v_0, длина диодного промежутка l и время пролета l/v_0. Безразмерный потенциал электрического поля $\Phi = mv_0^2/2e$. Качественно поведение возмущенной системы определяется одним параметром $q = 4\pi e^2 n_0 l^2/mv_0^2$.

Решением системы (1) в стационарном состоянии являются: постоянство плотности тока и закон сохранения энергии потока

$$n^0(z)=1/v^0(z), \Phi^0(z)=v_0^2/2, \qquad (2)$$

Используя интегралы (2), решение задачи дает следующее уравнение:

$$\frac{1}{3}(v_0+C)^{3/2}=C(v_0+C)^{1/2}=\mp\sqrt{\frac{q}{2}}(z-z_m). \quad (3)$$

Постоянная интегрирования $C=-v_m$ имеет смысл минимальной скорости электронов в области дрейфа, которая достигается в плоскости $z=z_m$. Верхний знак в формуле (3) соответствует времени пролета электрона, удовлетворяющему неравенству $v_0<v_m$; при $v_0>v_m$ - знак плюс.

Постоянные C и z_m определены из граничных условий: $v_0(z=0)=1$, $v_0(z=1)=v_l$. По уравнению для минимальной скорости электронов в области дрейфа

$$(v_l-v_m)^{1/2}(v_l+2v_m)+(1-v_m)^{1/2}(1+2v_m)=(9q/2)^{1/2}. \quad (4)$$

Координата плоскости, в которой скорость потока минимальна

$$z_m=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{2q}}\left[(v_l-v_m)^{1/2}(v_l-2v_m)-(1-v_m)^{1/2}(1+2v_m)\right], \quad (5)$$

не больше половины длины диода. Максимальное значение достигается при $v_l=1$.

Введем лагранжевы переменные τ и τ_0 (τ_0 - момент влета частиц в катод-анодный промежуток), определяемые формулой $v_0(\tau)=dz/d\tau$. Тогда стационарная скорость потока $v_0(\tau)=\frac{q}{2}\left(\tau-\frac{1}{\sqrt{q\gamma}}\right)^2+v_m$, где v_m – минимальная скорость частиц, а параметр γ находится из уравнения (v_l – скорость на выходе из диода)

$$q(\gamma,v_l)=\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{3\gamma}+\frac{1}{3}\left(v_l+2-\frac{1}{\gamma}\right)\sqrt{2\gamma(v_l-1)+1}\right)^2. \quad (6)$$

В лагранжевых переменных уравнения стационарного состояния потока перепишем в виде

$$z=\frac{q}{6}\tau^3-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\tau^2+\tau;\; v_m=1-\frac{1}{2\gamma};\; v_0(\tau)=\frac{q}{2}\tau^2-\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\tau+1. \quad (7)$$

Если предполагать, что $v_m>0$ (режим прямого пучка), то, в соответствии с (7) $\gamma>0.5$ (например, для дрейфового пространства: $\gamma=0.5$ и $v_0=v_l=1$ получаем $q=8/9$).

На входе в дрейфовое пространство параметры электронного потока связаны соотношением

$$(1-v_m)(1+2v_m)^2=\frac{9}{2}q z_m^2.$$

На рис.2 приведены зависимости q от γ для разных значений v_l и, следовательно, разных значений потенциала на аноде. Максимуму кривых соответствует значение $q_l=2\frac{(v_l+1)^3}{9}$. При $v_l=1$ предельный ток равен 16/9.

Заметим, что время пролета ускоряющего промежутка ($z=z_l=1$) для стационарного случая определяется выражением

$$\tau_1=\frac{1}{\sqrt{q\gamma}}\left(1+\sqrt{1+2\gamma(v_l-1)}\right). \quad (8)$$

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Чтобы получить спектр собственных частот, рассмотрим отклонение скорости потока от стационарного значения.

После линеаризации уравнений (1) имеем

$$-i\omega\tilde{v}(z)+\frac{d}{dz}\left[v^0(z)\tilde{v}(z)\right]=\frac{d}{dz}\Phi(z), \quad (9)$$

$$-i\omega\tilde{n}(z)+\frac{d}{dz}\left[n^0(z)\tilde{v}(z)+\tilde{n}(z)v^0(z)\right]=0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}=q\tilde{n}(z). \quad (11)$$

Объединяя (9)-(11), получаем следующее уравнение:

$$\left[v^0(z)\right]^3\frac{d^2u}{dz^2}+qu=C_1\left[v^0(z)\right]^2\exp\left(-i\omega\int_0^z\frac{dz}{v^0(z)}\right), \quad (12)$$

где

$$u=v^0(z)\tilde{v}(z)\exp\left(-i\omega\int_0^z\frac{dz}{v^0(z)}\right), \quad (13)$$

а C_1 - постоянная интегрирорвания, представляющая собой величину, пропорциональную фурье-компоненте полного тока. Уравнение (12) можно решить в лагранжевых переменных. Используя формулы (7), перепишем (12) в виде:

$$v^0(\tau)\frac{d^2u}{d\tau^2}-\frac{dv^0(\tau)}{d\tau}\frac{du}{d\tau}+qu=C_1\left[v^0(\tau)\right]^2e^{-i\omega\tau}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) представим в виде суммы двух слагаемых $u(\theta)=u_h+u_p$, первое из которых есть решение однородного уравнения, а второе - частное решение. Действуя известными способами, найдем решение уравнения (14)

$$u(\theta)=D_1(\theta-1)+D_2\left[\theta(\theta-1)+1-2\gamma\right]+C\left[1-2\gamma-\frac{2}{\sigma}(\theta-1)-(\theta-1)^2\right]e^{-\theta\sigma}, \quad (15)$$

Причем лагранжева переменная обозначена как $\theta=\tau\sqrt{q\gamma}$, а параметр $\sigma=i\omega/\sqrt{q\gamma}$; $C=C_1/2q\gamma^2\sigma^2$; D_1, D_2 - постоянные интегрирования.

По известному возмущенному значению скорости могут быть найдены отклонения потенциала и плотности.

Перейдя в (9) от z к θ, получим формулу

$$\tilde{\Phi}(\theta)=\tilde{\Phi}(0)+\int_0^\theta\frac{du(x)}{dx}e^{\theta\sigma}dx, \quad (16)$$

Подстановка линеаризованной скорости (15) в (16) приводит к результату:

$$\tilde{\Phi}(\theta)=\tilde{\Phi}(0)-\frac{D_1}{\sigma}\left(1-e^{\theta_\sigma}\right)-D_2\left\{e^{\theta_\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}(1-2\theta)+\frac{2}{\sigma^2}\right]-\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{2}{\sigma^2}\right\}+$$
$$+C\sigma\left[\left(-\frac{2}{\sigma^2}-1+2\gamma\right)\theta+\frac{(\theta-1)^3+1}{3}\right].$$

Возмущение плотности может быть теперь найдено по уравнению (11)

$$\tilde{n}(\theta)=\frac{\gamma}{\left[v^0(\theta)\right]^2}\left[\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}-\frac{1}{v^0(\theta)}\frac{dv^0(\theta)}{d\theta}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right]. \qquad (17)$$

Итак, теперь имеем формулы для трех линеаризованных величин гидродинамических параметров: скорости, плотности и потенциала электрического поля.

4.ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Постоянные интегрирования в формуле (15) находим, удовлетворив граничным условиям:

$$\tilde{v}(z)\big|_{z=0}=0,\tilde{n}(z)_{z=0}=0,\tilde{\Phi}(z)\big\|_{z=0}=0,\tilde{\Phi}(z)\big|_{z=1}=0. \qquad (18)$$

В соответствии с первым граничным условием на входе отсутствует возмущение скорости потока, поэтому согласно (13) $u(0)=0$. Из (15) находим первое уравнение для постоянных интегрирования:

$$D_1-D_2(1-2\gamma)+2C\left(\gamma-\frac{1}{\sigma}\right)=0\,. \qquad (19)$$

Второе граничное условие в (18) обращает в нуль линеаризованную входную плотность, что дает второе уравнение:

$$\left(1+\frac{1}{\sigma\gamma}\right)D_1+\left|\frac{2}{\sigma}-\frac{1}{\gamma\sigma}-1\right|D_2-\frac{2}{\gamma\sigma^2}C=0. \qquad (20)$$

Как видно, третье граничное условие не приводит к уравнению, отличному от (19).

Чтобы удовлетворить последнему граничному условию, необходимо в (7) перейти от лагранжевой переменной τ к параметру θ и решить кубическое уравнение. Подставив в выражение для потенциала $\theta=\theta_1$, получим третье уравнение:

$$D_1\left(e^{\theta_1\sigma}-1\right)+D_2\left[\left(2\theta_1-1-\frac{2}{\sigma}\right)e^{\theta_1\sigma}+1+\frac{2}{\sigma}\right]+C\sigma^2\left[\left(-1+2\gamma\frac{2}{\sigma^2}\right)\theta_1+\frac{(\theta_1-1)^3+1}{3}\right]=0.$$

Полученные уравнения являются однородными, поэтому чтобы иметь ненулевые решения, определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю.

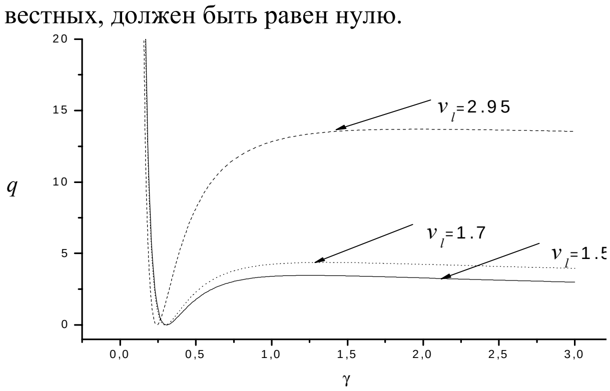


Рис. 2. Зависимость параметров q от γ при различных значениях v_l (потенциалах на аноде)

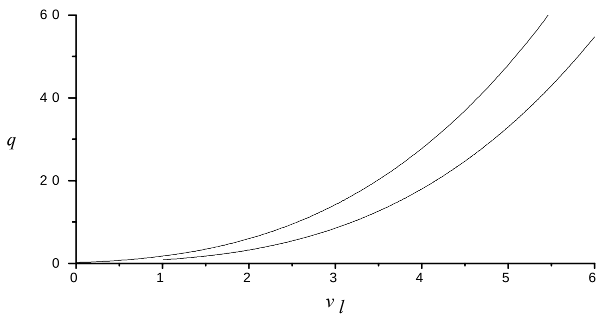


Рис. 3. Границы устойчивости потока в диоде на плоскости параметров (q, v_l)

Вычисления приводят к следующему уравнению для частотного спектра волн пространственного заряда, которые могут существовать в диоде в режиме без отражения частиц:

$$(2-\theta_1\sigma)e^{\theta_1\sigma}-2-\frac{\sigma}{2}\left(\sigma^2-2\gamma\sigma^2+2\right)\theta_1+\sigma^3\frac{(\theta_1-1)^3+1}{6}=0. \qquad (21)$$

где лагранжевы угол пролета и частота, соответственно $\theta_1=\tau_1\sqrt{q\gamma}$ и $\sigma=i\omega/\sqrt{q\gamma}$,

Выражение (21) используется для исследования устойчивости потока. Введем переменную $\beta=\theta_1\sigma$, которая является углом пролета для данной спектральной компоненты. Тогда уравнение (21) приводится к виду:

$$(2-\beta)e^{\beta}+\Gamma\beta^3-\beta-2=0\,, \qquad (22)$$

где

$$\Gamma=\frac{1}{2\theta_1^2}\left(2\gamma-1+\frac{(\theta_1-1)^3+1}{3\theta_1}\right). \qquad (23)$$

Неустойчивые решения соответствуют условию:

$$\mathrm{Re}\,\beta>0\,. \qquad (24)$$

Решение (22), представляющее границу устойчивости потока в диоде, приведено на рис.3. Таким образом, получены выражения для частот и инкрементов колебаний *Imβ*, которые возбуждаются в катод-анодном промежутке при выполнении условия неустойчивости $q_b<q<q_l$, где $q_b=q(0.5,v_l)$ (см. рис.3).

Отметим, что пролетная неустойчивость сильноточного диода зависит от следующих параметров физической системы: приложенной к промежутку разности потенциалов, размеров промежутка и параметров пучка, связанных с обобщенным параметром *q,* см. (6). При этом область неустойчивости находится между кривыми, имеющими при v_l=1 значения q = 16/9 и 8/9, соответственно [4].

5. МОДЕЛЬ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ПУЧКУ

Параметры системы должны быть выбраны таким образом, чтобы реализовать ПОС между областями *I – III*. В этом случае сигнал ОС, формируемый отраженными частицами, на начальной стадии является «затравочным» для неустойчивости в катод-анодном промежутке. Усиленный этой неустойчивостью сигнал вносится прямым пучком в область *III* и дополнительно модулирует колебания ВК. Оптимальные условия ПОС соответствуют области неустойчивых режимов ВК - максимуму усиления в характерной для ВК области частот.

Таким образом, возникает физическая ситуация, соответствующая взаимодействию колебаний в катод-анодном промежутке и колебаний в области ВК, которое существенно зависит от степени ПОС, определяемой прозрачностью анода. Это взаимодействие может быть представлено динамикой двух связанных нелинейных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - 2\gamma_1\left(1-\frac{\varphi_1^2}{\varphi_{nl}^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dt} + \left(\omega_1^2 + \alpha_1\varphi_1^2\right)\varphi_1 = k_1\varphi_2; \quad (25)$$

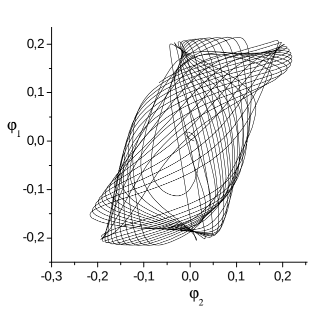
$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - 2\gamma_2\left(1-\frac{\varphi_2^2}{\varphi_{nl}^2}\right)\frac{d\varphi_2}{dt} + \left(\omega_2^2 + \alpha_2\varphi_2^2\right)\varphi_2 = k_2\varphi_1,$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы колебаний в области ВК и ускоряющего промежутка: k_1 и k_2 - прозрачности анода для прямого и отраженного пучка.

Известно, что по своей природе колебания в ускоряющем промежутке и в области ВК широкополосны. Используемая при анализе модель адекватно отражает нелинейную природу исходных объектов и их итоговые широкополосные спектры.

Далее рассматривается симметричный случай $k_1 = k_2 = k$. Здесь ω_1, γ_1, ω_2, γ_2 – частоты и инкременты соответствующих колебаний. Для колебаний в ускоряющем промежутке инкременты и частоты определялись из уравнения (22). Частота колебаний ВК предполагалась порядка электронной плазменной частоты пучка в области ВК.

На рис.4 преведены результаты решения системы (25) на плоскости *(*φ_1, φ_2*)* для разных прозрачностей анода. Как видно, при малой прозрачности (слабой ПОС) кривые на плоскости *(*φ_1, φ_2*)* имеют сложный характер и заполняют практически всю плоскость. С ростом прозрачности происходит синхронизация колебаний, разность фаз стабилизируется, и нелинейная система в целом генерирует в узкой области частот (максимального инкремента).



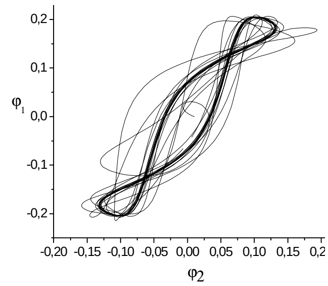


Рис. 4. Колебания двух связанных осцилляторов на плоскости (φ_1, φ_2*)*

Качественный анализ взаимодействующих осцилляторов и полей, проведенный для случая вакуумных пучковых систем [6], соответствует выводам нашей модели. Показано, что электронные колебания, воспринимающие дополнительную энергию, могут уменьшать свое затухание вплоть до отрицательных значений. Для нашего случая это соответствует возбуждению и росту амплитуды пролетных колебаний диода, приводящих к увеличению мощности и сужению спектра генерации виркатора.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены модели обратной связи и способы их организации. Рассмотрена устойчивость потока в ускоряющем промежутке. Найдены границы устойчивости в зависимости от параметров системы и частотные характеристики неустойчивости, связанной с особенностями динамики объемного заряда в диоде.

Предложен механизм обратной связи по пучку основанный на использовании неустойчивости в ускоряющем промежутке. Функционирование обратной связи промоделировано двумя связанными по пучку нелинейными осцилляторами Ван дер Поля Дуффинга. Показана синхронизация колебаний ВК и колебаний в ускоряющем промежутке в результате ПОС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П.Гадецкий, И.И.Магда, С.И.Найстетер, Ю.В.Прокопенко, В.И. Чумаков // *Физика плазмы.* 1993, т.19, в.4, с.530.
2. С.Д.Коровин, И.В.Пегель, С.Д.Полевин, В.В.Ростов // *Вакуумная электроника*: Сб. обзоров. Нижний Новгород, 2002, с.149.
3. А В.Пащенко, Б.Н.Руткевич // *Физика плазмы.* 1977, т.3, с.774.
4. А.В.Пащенко, Б.Н.Руткевич // *Радиоэлектроника и техника.* 1979, т.24, с.152.
5. А.В.Пащенко, Б.Н.Руткевич, В.Д.Федорченко, Ю.П.Мазалов // *ЖТФ.* 1983, т.53, в.1, с.75.
6. Л.А.Вайнштейн // *Радиотехника и электроника.* 1990, т.35, №4, с.837.