УДК 533.9

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТРАНСПОРТА ПОТОКА ЗАРЯЖЕНЫХ ЧАСТИЦ

В. Задорожный
Институт кибернетики НАН Украины

Используется способ построения стабильных мостов Н.Н. Красовского для конструирования оптимальных фокусирующих полей, при условии, что динамика заряженных частиц описывается самосогласованным уравнением Власова, а электростатическое поле – уравнением Пуассона. В основе такого подхода лежит универсальность уравнений Максвелла, доказанная В.И. Зубовым. При этом важно уметь аналитически разрешить уравнение в частных производных первого порядка, которому удовлетворяет функция цены соответствующей минимаксной задачи. Функцию цены удобно в таком случае искать как функцию Ляпунова в виде решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика потока заряженных частиц, в котором коллективные взаимодействия существенно преобладают над столкновениями, как известно, хорошо описываются самосогласованными уравнениями Власова [3]. Для электростатической задачи оно имеет вид:

$$\partial_t f + v\partial_x f + E(t,x)\partial_v f = 0\,, \qquad (1)$$

$$x \in R^3, v \in R^3$$

Здесь $f(t,x,v)$ - одночастичная функция распределения по координатам и скоростям, так что $fdxdv$ равно числу частиц в объеме $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ со скоростями в интервале $dv = dv_1 dv_2 dv_3$. Самосогласованное электрическое поле $E(t,x) = -\nabla\Phi(t,x)$, согласно Власову, находится из уравнения Пуассона

$$\Delta\Phi = -4\pi\left(\int f(t,x,v)dv + \rho_{ext}(t,x)\right) \qquad (2)$$

где $\rho_{ext}(t,x)$ - плотность внешнего заряда.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \langle v\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle v\rangle = E(t,x). \qquad (3)$$

Здесь $\langle v\rangle = \langle v\rangle(t,x) = \dfrac{\int vfdv}{\int fdv}$ - средняя скорость, которая определяется через распределение как первичное понятие. Известно ([1] с. 340), что для любого поля скоростей

$$\frac{dx}{dt} = \chi(t,x) \qquad (4)$$

заряженной частицы можно построить электромагнитное поле, порождающее это поле скоростей и удовлетворяющее уравнениям Максвелла.

Отсюда вытекает, что $\chi(t,x)$ можно (нужно) задать так, чтобы обеспечить, например, фокусировку пучка. Если эта задача решена, то плотность заряда

$$\rho = \int f(t,x,v)dv\,,$$

находится затем из уравнения Пуассона. После этого можно разрешить уравнение Пуассона и определить поле $E(t,x) = grad\Phi(t,x)$. Эта общая схема имеет много алгоритмов реализации, что определяется выбором функции $\chi(t,x)$.

Очевидно, что физическая задача фокусировки потока заряженных частиц эквивалентна задачи динамики перевода материальных точек с заданной поверхности Σ_0 при $t_0 = 0$ на поверхность Σ_κ при $t_\kappa = \zeta$. Пусть поверхность Σ_0 - это начальная область расположения частиц и она предполагается заданной, а поверхность Σ_κ - это фокусное пятно, которое тоже заданно. Будем предполагать дальше, что функция χ имеет следующую структуру $\chi = U + V$, где первое слагаемое определяет стратегию встречи с множеством Σ_κ при условии, что второе слагаемое создает максимальные помехи для встречи с фокусным пятном. Таким образом, получаем следующую задачу:

ЗАДАЧА ФОКУСИРОВКИ.

Требуется найти стратегию $U \longrightarrow u(t,x)$, *которая обеспечивает встречу* $\Sigma\ \{\zeta, x|\zeta\ |\in \Sigma_\kappa\}$ *решения уравнения (4) при начальных условиях* $x(t_0) \in \Sigma_0$ *для всякого решения уравнения (4)* $x[t] = x[t, t_0, x_0, \chi]$.

Заметим, что здесь начальная и конечная области расположения частиц – это замкнутые и ограниченные области евклидового пространства R^3. Очевидно, что начальная суммарная энергия частиц сохраняется в процессе транспорта. Процесс фокусировки увеличивает плотность энергии, а, следовательно, при этом происходит ускорение частиц.

Множество скоростей $V \to v(t,x)$, которое реализуется в пучке на отрезке времени $0 \le t \le \zeta$, определяется величиной его заряда и направлено на растаскивание частиц, т.е. на уклонение частиц от встречи с мишенью фокуса. Конструктор, который «играет» против природы V должен иметь такой запас величины U, чтобы реализовать заданный процесс фокусировки, иными словами, поставленная выше задача должна иметь решение. Из эвристических соображений высказанных Н.Н. Красовским следует, что нужно построить, образно говоря, мост W, по которому можно сделать переход $\Sigma_0 \xrightarrow{w} \Sigma_\kappa$. Этот мост должен иметь перила, так что ни одна частица в процессе движения не выйдет за пределы моста. Такие мосты называются *стабильными мостами.* Построение стабильных мостов связано с использованием гладких функций $\wp(t,x)$, играющих роль потенциала в соответствии с рецептами ***динамического программирования.***

Как известно, динамическая система порождает неограниченный линейный оператор, действующий в пространстве, вообще говоря, обобщённых функций. В области асимптотической устойчивости тривиального решения он порождает обратный ядерный оператор типа оператора Фредгольма [5]. В силу этого свойства области притяжения в ней можно построить эффективный алгоритм нахождения гладкой функции $\wp(t,x)$. Заметим, что динамика процесса будет полностью характеризоваться спектральными свойствами динамической системы. Нулевые корни обозначают область устойчивости или область динамического хаоса в зависимости от типа нулевого корня.

СТАБИЛЬНЫЕ МОСТЫ В ЗАДАЧАХ ФОКУСИРОВКИ

Рассмотрим теперь задачу фокусировки потока заряженных частиц, которые в начальный момент занимали в пространстве R^3 область Σ_o, предположим, что найдена функция $\varpi(t,x)$, такая, что выполняются следующие условия:

1. $\varpi(t,x) \ge c$ при $\{t,x\} \notin T \bigcup \Omega, \Sigma_i \subset \Omega, \quad i = 0,\kappa$

$\varpi(t,x) \ge c$ при $\{\zeta,x\} \notin \Sigma_\kappa$,

здесь $T \in [o-\zeta]$, а Ω - множество, для которого множества Σ_i будут внутренними и в котором лежит стабильный мост,

2. Имеются непрерывные частные производные $\frac{\partial \varpi}{\partial t}, \frac{\partial \varpi}{\partial x_s}, s = 1,2,3$ в области $t \lhd \zeta$,

$c \le \varpi(t,x) \le c + \eta$ (η -некоторая постоянная). (5)

3. В области (5) выполняется неравенство

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} f[t,x,u,v] + \frac{\partial \varpi}{\partial t} \right) \le 0 \qquad (6)$$

Если выполняются эти условия, то в Ω существует $u-$стабильный мост, начинающийся на множестве Σ_0 и заканчивающийся на множестве Σ_κ.

Следовательно, определив из уравнения (6) функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и выбирая начальные условия, $v_0 = \chi(x_0)$ находим функцию $\varpi(t,x)$.

Таким образом, поле скоростей, которое здесь определяется из задачи оптимального попадания на заданную поверхность, совершенно не связывалось с фактом существования электромагнитных полей, которые и осуществляют это движение. Нет ли здесь противоречия, т.е. всегда ли можно создать такую плотность тока и такую плотность заряда, при которых поток заряженных частиц будет двигаться с заданным полем скоростей?

Теорема (В.И. Зубов [1] с.257). *Для любого поля (3) существуют плотности тока и заряда, определяющие электромагнитное поле, под действием которого заряженная частица будет реализовывать заданное поле скоростей.*

Эта теорема даёт возможность синтезировать поля скоростей, исходя из целей, которые ставятся перед задачей транспорта, т.е. решать некоторую оптимизационную задачу. Если такая задача решена и найдена скорость как функция фазовых переменных, то теперь можно, вообще говоря, найти функцию распределений. Действительно, пусть определена скорость $v(t,x) = \chi(t,x)$ из уравнения (3). Теперь воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\chi(t,x) + \frac{\partial f}{\partial v}\{\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial x}\chi\} = 0,$$

для определения функции распределения $f(t,x,v)$. Последняя в теории Власова, как известно, является первичным понятием. Используя её можно затем находить равновесные плотности заряда $\rho(t,x)$ и тока $j(t,x)$ по формулам

$$rotH - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} e \int_\infty vfdv,$$

$$divE = 4\pi e \int_\infty fdv .$$

Безусловно, что здесь должны быть учтены ещё краевые условия. Например, для аксиально-симметрического потока $U = f(z)$ и $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$

ПРИМЕР.

В заключение рассмотрим модельный пример, который в задачах фокусировки может иметь и самостоятельное значение. Пусть Σ_0 некоторый компакт в пространстве R^2, на котором расположены заряженные частицы. Представим скорость каждой частицы ζ в виде суммы $\zeta = u + v$, т.е. это два управляющих вектора $u = \{u_1, u_2\}$ и $v = \{v_1, v_2\}$. Ресурсы всегда ограниченны. Выразим это следующими неравенствами

$$u_1^2+u_2^2 \le \alpha^2, \quad v_1^2+v_2^2 \le \beta^2 \qquad (\alpha \rhd \beta).$$

Уравнение (3) в Ω запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt}=u_1+v_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=u_2+v_2$$

Теперь составим выражение:

$$\frac{d\varpi}{dt}= \quad \frac{\partial\varpi}{\partial t}+\frac{\partial\varpi}{\partial x_1}(u_1+v_1)+\frac{\partial\varpi}{\partial x_2}(u_2+v_2).$$

Минимакс этого выражения будет

$$\min_{u\in U}\max_{v\in V}(\frac{\partial\varpi}{\partial t}=\frac{\partial\varpi}{\partial t}+(\beta-\alpha)$$

$$[(\frac{\partial\varpi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\varpi}{\partial x_2})^2]^{\frac{1}{2}}=0 \qquad (7)$$

при этом значении векторов u^0 и v^0, которые обеспечивают данный минимакс, определяются равенствами:

$$u^0=\frac{\alpha}{[(\frac{\partial\varpi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\varpi}{\partial x_2})^2]^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix}\frac{\partial\varpi}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varpi}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

$$v^0=\frac{\beta}{[(\frac{\partial\varpi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\varpi}{\partial x_2})^2]^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix}\frac{\partial\varpi}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varpi}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

при этом должно выполнятся следующее условие

$$(\frac{\partial\varpi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\varpi}{\partial x})^2\ne 0,$$

а u^0 и v^0 могут принимать любые значения $\|u^0\|\le\alpha, \|v^0\|\le\beta$, когда имеет место уравнение (7). В данном случае можно легко подобрать решение минимаксного уравнения (6) для краевого условия $\varpi(\zeta,x)=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Теперь подбором устанавливаем, что искомое решение имеет вид

$$\varpi(t,x)=[(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-(\alpha-\beta)(\zeta-t)]$$

в области

$$(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-(\alpha-\beta)(\zeta-t)]\rhd 0 \qquad (8)$$

и $\varpi(y,x)=0$

в области

$$(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-(\alpha-\beta)(\zeta-t)\le 0. \qquad (9/$$

В области (8) имеют место равенства для u^0 и v^0, выведенные выше. Подставляя в них значения $\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}$ из (7) получим

$$u^0(t,x)=-\alpha\frac{x}{\|x\|}, \quad v^0(t,x)=\beta\frac{x}{\|x\|}.$$

Эти выражения имеют следующий геометрический смысл: в каждой позиции $\{t,x\}$ из области (10) вектор $u^0(t,x)$- составляющая скорости χ направленная в точку $x(\zeta)$, а вектор $v^o(t,x)$ определяет составляющую скорости χ, которая направлена в сторону прямо противоположную сторону от точки $x(\zeta)$. Заметим еще что конус (10) есть не что иное как максимальный u-стабильный мост для задачи фокусировки. Относительно размеров множества Σ_κ, т.е. размеров самого фокуса нужно сказать, что они не могут быть меньше «радиуса непроницаемости».

Таким образом задано поле скоростей «усредненной частицы». При поиске этого учитывалась только цель транспорта частиц, только кинематика движения и совсем не учитывалась динамика, т.е. силы которые выполняют это движение. Найдены скорости, которые наилучшим образом фокусируют поток. Теперь, исходя из универсальности уравнений электродинамики по заданным скоростям - решаем обратную задачу. В рассматриваемом примере будем решать электростатическую задачу, т.е. будем искать электростатический потенциал, который порождается внешним полем и зарядом пучка. Легко заметить, что функция $\varpi(t,x)$ находилась из уравнения, которому удовлетворяет плотность заряда, иными словами, в данном примере $\rho(t,x)=\varpi(t,x)$ при условии, что начальные условия совпадают: $v(0)=\chi(x_0)$ тогда имеет место следующее равенство

$$\varpi(t,x)=\int f(t,x,v)dv, \quad \prec$$

где $f(t,x,v)-$ функция распределения.

Теперь воспользуемся уравнением Пуассона и определим поле $\mathrm{E}(t,x)$. Так как правая часть в уравнении Пуассона уже определена, то уравнение $\Delta\Phi=-4\pi e\int_\infty f dv$ при заданных граничных условиях, например на оси симметрии, может быть разрешено.

Задача фокусировки выполнена.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОСНОВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}v+\frac{\partial f}{\partial v}[E+v\times H]=0\,. \qquad (11)$$

Будем искать его решение в виде $f(t,x,v)=f_0(x,v)\,\ell^{i\omega t}$. Подставляя это значение в (11) получим следующее уравнение

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}v+\frac{\partial f_0}{\partial v}[E+v\times H]=i\omega f_0\,. \qquad (12)$$

Пусть уравнение (12) имеет решение $\{f_0^o(x,v),\ \omega=0\}$, удовлетворяющее начальному условию $f_0^0(x_0,v)=\varphi(v)$.

Определение. *Решение* $f_o^0(x,v)$ *уравнения (12) называется асимптотически устойчивым, если для каждого* $t_0\geq 0$ *по любому* $\varepsilon\geq 0$ *можно указать* $\delta\succ 0$, *такое, что при* $\mu(f,f_0^0)\prec\delta$

Выполняется неравенство $\mu(f(t,x,v),f_0^0)\prec\varepsilon$ *при* $t\geq t_0$ и $\mu(f(t,x,v),f_0^0)\to 0, t\to\infty$.

Здесь $\mu(\bullet,\bullet)$ обозначает некоторую метрику. Естественно, что для неэквивалентных метрик условия асимптотической устойчивости будут разными.

Имеет место следующее утверждение:

Если решение $f_0(x,v)$ ограниченно в некоторой метрике μ и имеет место неравенство $Im\omega\succ 0$, то решение f_0^0 уравнения (11) будет асимптотически устойчивым $[4-5]$.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Пусть уравнение $\partial_t f+v\partial_x f+E(t,x)\partial_v f=0$ (1)

$x\in R^3, v\in R^3$

имеет стационарное решение $f_0(t,x,v)$, пусть его возмущения будут малыми

$f=f_0(t,x,v)+\varphi(t,x,v)$, $|\varphi|<<.\,f_0$.

В линейном приближении уравнение для $\varphi(t,x,v)$ примет вид

$$\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi+E(f_0)\partial_v\varphi+E(\varphi)\partial_v f_0=0$$

Положим $E(\varphi)\partial_v f_0=\mathrm{K}$, где функция $\mathrm{K}=\mathrm{K}(t,x,v)$ такая, что на решениях $f(t,x.v)$ она определяет качество транспорта потока при помощи интеграла

$$\int_0^\infty \mathrm{K}dt<\infty.$$

Из этого неравенства следует, что для начальных условий $\varphi(0,x,v)=0$ решение уравнения в возмущениях представимо в виде

$$\varphi(t_0,x(t_0),v(t_0)))=-\int_{t_0}^\infty \mathrm{K}(t,x,v)dt$$

Если функция K будет определённо-положительной, то решение $\varphi(t,x,v)$ будет монотонно убывать к нулю, т.е. стационарное решение $f_0(t,x,v)$ асимптотически устойчиво по отношению к возмущениям рассмотренного выше вида. В данном случае выполняется условие

$\|f_0-\varphi\|\to 0,$ при $t\to\infty$.

Теперь можно определить электростатическое поле E, которое стабилизирует поток f_0 используя уравнение

$E(\varphi)\partial_v f_0=\mathrm{K}(t,x,v)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Зубов. Колебание и волны, из- во 1989, с.414
2. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры: М.: Наука, 1974, с.456
3. Z. Parsa, V. Zadorozhny. Nonlinear Dynamics on Compact and Beam Stability // *.Nonlinear Analysis*, 2001, v.47, p.4897-4904
4. V. Zadorozhny. Fridrichs Method in a Lyapunov Problem // *Applicable Analysis, NewArk, USA*.2002,- vol.81, p.529-537
5. В.Ф. Задорожный, А.В. Шевченко, Сложные движения механической системы и вычислительный процесс // *Прикладная механика*, 1991, т.37, с.106-114